الباب الثامن
خواص المصفوفات
Properties of Matrices

المصفوفات: هي مجموعة من الأرقام بترتيب له دلالة معينة مكتوبة على شكب مستطيل داخل قوسين ،

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

في شكل (1) يسمى هذا الشكل المصفوفة وتسمى الأرقام $a, b, c,$ d عناصر المصفوفة (elements) والخطوط الأفقية تسمى المصفوفة الموجبة (rows or row vectors) والخطوط الرأسية تسمى الأعمدة الموجبة (columns or column vectors)

المصفوفات ذات m صفوف ، n اعمدة يطلق عليها $(m \times n)$ matrix (m by n) matrics or . يعبر عن المصفوفة السابقة بـ A or (a_{ij}) حيث a_{ij} هو العنصر العام الموجود في الصف رقم i والعمود j في شكل (2) يحتوى على عمود واحد فقط يسمى (column vector or column matrix) . في شكل (3) يحتوي على صف واحد فقط ويسمى (row vector or row matrix) .

المصفوفة المربعة Square matrix

هى المصفوفة التي عدد أعمدتها يساوي عدد صفوفها ورتبة المصفوفة

هو عدد الصفوف أو الأعمدة .

ويسمى $(a_{11}.a_{22}......a_{nn})$ القطر الرئيسي (principle diagonal) .

تعريف : تساوي مصفوفتين Equation of matrices

يكون $A = B$ أي $(a_{ij}) = (h_{ij})$ إذا كان A, B لهما نفس عدد الصفوف وعدد الأعمدة .

وكان $a_{jk} = b_{jk}$ for $j = 1,2,3,....,m, k = 1,2,3,....,n$

جمع المصفوفات Addition of matrices

جمع المصفوفات يعرف فقط للمصفوفات التي لها نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة فإذا كان

$$A = (a_{jk}), B = (b_{jk}), C = (C_{jk})$$

وكان كل من المصفوفات A, B, C matrix $(m \times n)$

$C_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$ for $j = 1,2,3,....,m, k = 1,2,3,....,n$

فإنه يمكن كتابة $C = A + B$

لاحظ أننا نحصل $A + B$ بجمع العناصر المناظرة للمصفوفين A, B

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة الصفرية Zero matrix

هي مصفوفة كل عناصرها تساوي صفر

$$a_{ij} = 0(0,0,0), \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

المعكوس الجمعي للمصفوفة

تعريف :

يرمز بها بالرمز $-A$ وهي مصفوفة نحصل عليها من ضرب كل عنصر من عناصر A في (1-) أي

$$A=(a_{ij})\Rightarrow -(A)=(-a_{ij})$$

وتسمى المصفوفة $-A$ المعكوس الجمعي للمصفوفة A .

من التعريفات السابقة نجد أن خواص جمع المصفوفات لها نفس خواص جمع الأعداد

a) $A + B = B + A$

b) $(A + B) + C = A + (B - C) = A + B + C$

$A + 0 = A$

$A + (-A) = 0$

difference of two matrices طرح المصفوفات

إذا كان $A=(a_{ij}),\quad B=(b_{ij}),\quad D=(d_{ij})$

وكان كل من المصفوفات الثلاث ذات نظم matrix $(m\times n)$

$d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ for $j=1,2,\ldots\ldots\ldots,m$

$i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$

فإنه يمكن كتابة $D = A - B$

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\\2&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\3&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A-B=\begin{pmatrix}2&0\\1&5\\-1&-3\end{pmatrix}$$

ضرب المصفوفة في عنصر

ليكن A مصفوفة وليكن العدد λ فيكون

$$A\lambda = \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_{12} & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + A\,2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Transpose of a matrix A^T المصفوفة المبدولة

إذا كان $A = (a_{ij})$ matrix $(m \times n)$ فإن A^T $(in \times m$ matrix$)$

$$A^T = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ a_{in} & a_{2n} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة والمتماثلة عكسيا

Symmetric and skew symmetric matrices

يقال للمصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ إنها متماثلة symmetric إذا كان $A^T = A$

$$a_{ij} = a_{ji} \quad , \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$
$$j = 1, 2, \ldots, n$$

ويقال للمصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ إنها skew symmetric إذا كان $A^T = A$

$$a_{ij} = -\,a_{ji} \quad , \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

$j = 1, 2, \ldots\ldots, n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -8 \\ -3 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 8 \\ 3 & 0 & 1 \\ -8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفة متماثلة عكسيا Skew symmetric matrix

المصفوفة المثلية Triangular matrix

المصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ التي عناصرها أعلى القطر الرئيسي أو أسفله كلها أصفارا .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة مثلثية عليا   مصفوفة مثلثية سفلى

المصفوفة القطرية The diagonal matrix

المصفوفة المربعة $A = (a_{ij})$ التي عناصرها أعلى القطر، أسفل القطر كلها تساوي أصفارا تسمى diagonal matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الوحدة I ≡ the unit matrix

$$I. \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هى مصفوفة قطرية كل عناصر قطرها تساوي الوحدة .

ضرب المصفوفات Multiplication of Matrices

لدينا مصفوفات $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$

تعرف عملية الضرب AB بشرط معين لابد من توافره وهو "عدد أعمدة المصفوفة الأولى A يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية B" .

لذلك نفرض أن المصفوفة A من نوع $m\times n$ وعليه، لكي يتحقق الشرط المذكور يجب أن تكون عدد الصفوف في B مساوية العدد n (عند الأعمدة في A) أي أن المصفوفة B من نوع $n\times p$.

بالنسبة للمصفوفة $A=[a_{ij}]$ وهي من نوع $m\times n$ نجد أن

$$j=1,2,\ldots\ldots,n \quad , \quad i=1,2,\ldots\ldots\ldots,m$$

أما بالنسبة للمصفوفة $B=[b_{jk}]$ وهي من نوع $n\times p$ نجد أن

$$k=1,2,\ldots\ldots,p \quad , \quad j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

تعرف المصفوفة AB بالمصفوفة $C=[c_{ik}]$

$$C_{ik}=a_{i1}\times b_{1k}+a_{i2}\times b_{2k}+\ldots\ldots+a_{in}\times b_{nk}$$

هذا العنصر يقع في الصنف i والعمود k في المصفوفة c .

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & = & B \\ m\times n & \leftrightarrow & n\times p & & m\times p \\ \downarrow & & \downarrow & & \end{array}$$

عدد الأعمدة في A عدد الصفوف في B

مثال:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} = 4 & -1 \\ 11 & 11 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -11 \\ 19 & 22 \end{pmatrix}$$

خواص ضرب المصفوفات

Properties of Matrices Multiplication

أولا :

ضرب المصفوفات خاضع لقوانين التنسيق (Associated lows)

وقوانين التوزيع

(distributive lows) بالنسبة لجمع المصفوفات

(i) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$

(ii) $(A+B)C = AC + BC$

$$C(A+B) = CA + CB$$

مع مراعاة أن عملية الضرب ممكنة .

ثانيا :

هل حاصل ضرب المصفوفات إبدالي أو بعبارة أخرى

$AB = BA$ بالطبع لا لأسباب كثيرة .

1- ليس من الممكن أن نكون AB , BA في الوقت نفسه فمثلاً

إذا كانت A من نوع 2×3 ، B من نوع 3×5 فإنه يمكن تكوين AB ، لايمكن تكوين BA .

2- حتى في الحالات التي يمكن تكوين فيها AB , BA فليس من الضرورى أن يكون AB , BA من نفس النوع .

3- أيضا إذا أمكن تكوين المصفوفين AB , BA وكأننا من نفس النوع عملية ضرب المصفوفات ليست عملية إبدالية .

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \&$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ثالثا : **The cancellation low**

غير صحيح على العموم

أي أنه إذا كان $AB = 0$ فإنه ليس من الضروري أن تكون A أو B مساوية للمصفوفة الصفرية .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

رابعا :

لأي مصفوفة مربعة A من نوع $n\times n$

$$A\,I = A \;,\; I\,A = A$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة من نفس النوع .

خامسا :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

القوى الصحيحة الموجبة للمصفوفة المربعة

نفرض أنه لدينا مصفوفة مربعة A . تعرف *المصفوفة* A^2 هكذا

وهكذا $\quad A^2 = A.A \quad , \quad A^3 = A^2 A = (A.A).A$

قاعدة لأي مصفوفة مربعة A .

$$A^m.A^n = A^{m+n} = A^n.A^m$$

$$(A^m)^n = A^{mn}$$

$$A^2.A^3 = A^5 \quad , \quad (A^2)^3 = A^6$$

فمثلاً : القوى الصحيحة السالبة للمصفوفة (غير المنعزلة)

يقال للمصفوفة المربعة A إنها مصفوفة غير منعزلة

(non – singular matrix) إذا كان محددا

$$\det A = |A| \neq 0$$

أما إذا كان $|A| = 0$ تسمى منعزلة (singular matrix)

لتعريف المصفوفة A^{-1} يلزمنا التعريف الآتي :

المصفوفة المرتبطة adjoint matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ولنفرض أن A_{ij} يرمز للعامل المرافق (co-factor) للعنصر a_{ij} في المحدد $|A|$. نكون مصفوفة أخرى تعتمد عناصرها على هذه العوامل المرافقة هكذا .

1- يستبدل كل عنصر بالعامل المرافق له .

2- نوجد محور المصفوفة (transpose) وذلك بجعل المصفوفة أعمدة تسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة المرتبطة للمصفوفة A ويرمز لها بالرمز a_{dj} (وهذا الرمز هو اختصار adjoint of A)

تعريف : معكوس المصفوفة

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت هناك مصفوفة B بحيث يكون $AB = I = BA$ حيث I هي وحدة المصفوفات يقال للمصفوفة B إنها معكوس للمصفوفة A .

1- adj A $\quad A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}$

2- معكوس أي مصفوفة مربعة A_i (في حالة وجوده) وحيد .

3- الشرط اللازم والكافي لكي يوجد للمصفوفة المربعة معكوس أن تكون غير منعزلة $|A| \neq 0$

4- معكوس حاصل ضرب مصفوفتين هو حاصل ضرب معكوسى المصفوفتين بالترتيب المخالف $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

مثال:

إذا كان $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ اوجد قيمة A^{-1}

$$|A| = 14 \quad , \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال:

إذا كان $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}$ اوجد A^{-1} ثم حقق أن

$$A\,A^{-1} = I = A^{-1}A$$

لحساب A^{-1} نتأكد أولاً أن A مصفوفة غير منعزلة $(|A|\neq 0)$

$$|A| = -12 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-12}\,adjA = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix}-4 & 4 & -4\\ -2 & -10 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{-12}\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 4 & -4\\ -2 & -10 & 1\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{12}\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ 0 & -12 & 0\\ 0 & 0 & -12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

قاعدة :

إيجاد معكوس المصفوفة التي من نوع $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} 2\times 2$

1- نستبدل عنصرى القطر الرئيسى (وهما a, d) أى كل منهما مكان الآخر

2- نغير إشارتي العنصرين الأخرين وهما c , b

3- نقسم عناصر المصفوفة الناتجة على قيمة محددة A

مثال:

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 7.\ A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}5 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$$

حل المعادلات الآتية باستخدام معكوس المصفوفة A^{-1}

لتكن المعادلات الآتية

$$a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 = b_1$$

$$a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + a_{23}\,x_3 = b_2$$

$$a_{31}\,x_1 + a_{32}\,x_2 + a_{33}\,x_3 = b_3$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

أو بالاختصار

$$A\,X = b \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} x=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

فإنه يمكن إثبات أن حل كل من المعادلات (1) هو

$$\underline{X} = A^{-1}\,\underline{b}$$

البرهان :

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow A^{-1}A\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \Rightarrow$$
$$I\underline{x} = A^{-1}\underline{b} \qquad (A^{-1}A = I)$$
$$\underline{x} = A^{-=1}\underline{b} \qquad (I\underline{x} = \underline{x})$$

مثال:

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام معكوس المصفوفة

$$3\,x_1 - 2\,x_2 = 4$$
$$X_1 + 4\,x_2 = 6$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \underline{x} = A^{-1}\underline{b} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 28 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

فيكون حل المعادلتين هو $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$

مثال:

باستخدام معكوس المصفوفة اوجد حل المعادلات :

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$
$$x_1 + 10x_2 - 3x_3 = 5$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 = -3$$

يمكن كتابة المعادلات الثلاث على الصورة :

$$A\,x = b$$

أو

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 13 & 3 & -17 \\ 2 & 4 & 8 \\ 11 & -1 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = x = A = A^{-1}b = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 13 & 3 & -17 \\ 2 & 4 & 8 \\ 11 & -1 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = -1$$

المعادلة المميزة للمصفوفة (المربعة)

Characteristic Equation for the matrices

إذا كانت

$$A=\begin{pmatrix}2 & 12\\ 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 12\\ 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 12\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 60\\ 5 & 21\end{pmatrix}$$

فاثبت أن

$$A^2-5A-6\ I=0$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 12\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 12\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 60\\ 5 & 21\end{pmatrix}$$

$$A^2=-5A-6I=\begin{pmatrix}16 & 60\\ 5 & 21\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2 & 12\\ 1 & 3\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}16\text{-}10\text{-}6 & 60\text{-}60\\ 505 & 21\text{-}15\text{-}6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

والآن تكون المصفوفة $A-\lambda\ I$ (حيث I *مصفوفة الوحدة* 2×2) ثم يكون محدد هذه المصفوفة كما يلي :

$$|A-\lambda\ I|=\begin{vmatrix}2\text{-}\lambda & 12\\ 1 & 3\text{-}\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-12$$

$$=\lambda^2-5\ \lambda-6\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

تسمى كثيرة الحدود هذه بكثيرة الحدود المميزة للمصفوفة .

Characteristic polynomial $|A-\lambda\ I|=D(\lambda)=\det(\lambda)$

كما تسمى المعادلة الناتج

$$\lambda 2-5\lambda-6=0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

بالمعادلة المميزة للمصفوفة characteristic equation of matrix

وتسمى جذور هذه المعادلة بالجذور المميزة للمصفوفة

Characteristic roots – eigen values $|\lambda-A\ I|=0$

وبمقارنة (1) & (3) نلاحظ أنه يمكن الحصول على المعادلة (1) من المعادلة (3) بوضع A بدلا من λ بوضع $6I$ بدلا من 6 . ويقال إن المصفوفة A تحقق المعادلة المميزة لها .

نظرية كايلي هاملتون:

كل مصفوفة مربعة A تحقق المعادلة المميزة لها .

نتيجة :

إذا كانت $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ هي الجذور المميزة للمصفوفة A يمكن كتابتها على الصورة

$$(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)..........(\lambda-\lambda_n)$$

نظرية كايلي هاملتون Kayli Hamelton

تأخذ الصورة

$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)...........(A-\lambda_n I)=0$$

أو

$$\prod_{r=1}^{n}(A-\lambda_r I)=0$$

ملحوظة :

يجب أن يلاحظ في (4) أن

$$A-\lambda r I \neq 0 \; ; \; r=1,2,......,n$$

وذلك لأن في جبر المصفوفات $AB=0$ لا تعني أن

$A=0$ أو $B=0$

مثال:

إذا كانت $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ فأوجد:

(i) كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة A والمعادلة المميزة لها .

(ii) الجذور المميزة للمصفوفة A وحقق نظرية كايلي – هاملتون .

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2+5\lambda-6$$

المعادلة المميزة للمصفوفة هي (2) $\lambda^3-2\lambda^2-5\lambda+6=0$

لإيجاد الجذور المميزة نلاحظ $\lambda-1$ احد العوامل للعدد يحقق المعادلة

معنى ذلك $(\lambda-1)$ عامل للطرف الأيسر من المعادلة

$$\lambda^3-\lambda-2\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-1)(\lambda^2+a\lambda-6)$$

بمقارنة معامل λ^2 في الطرفين نجد أن

$$-1+a=-2 \quad \& \quad a=-1$$

وبالتالي يمكن كتابة المعادلة (2) على الصورة

$$(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-6)=0,(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda+2)=0$$

$$\lambda_1=1 \quad , \quad \lambda_2=3 \quad , \quad \lambda_3=-2$$

وبالنسبة لتحقيق نظرية كيلي هاملتون أي أن

$$A^3-2A^2-5A+6I=0$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^3=Aa^2\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 4 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^3=1A^2-5A\begin{pmatrix} 14 & -4 & 17 \\ 13 & 4 & 11 \\ 13 & 11 & 3 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 7 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 06\, I$$

تمرين:

اثبت أن

$$A\ 4 = 9\,A\,2 + 4\,A - 12\,I$$

مثال:

إذا كانت A هي المصفوفة المذكورة في مثال: (1) ، (n) عدد صحيح موجب فاثبت أن

$$30A'' = (5\alpha - 2\beta)A^2(8\beta - 5\alpha)A = 6(5-\beta)I$$

حيث

$$\alpha = 3'' - 1 \quad . \quad \beta = 3'' - (-2)''$$

الحل:

الجذور المميزة هي 1 ,3 ,2- فتكون كثيرة الحدود المميزة لها هي

$$-(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

إيجاد A'' 30 كتعبير خطي بدلالة I، A، A^2 نتبع الخطوات الآتية:

1- نقسم $30\lambda''$ على كثيرة الحدود ولنفرض أن خارج القسمة هو $p(\lambda)$ الباقي سيكون من الدرجة الثانية في λ (لاحظ أن المقسوم عليه من الدرجة الثالثة) وليكن الباقي $a\lambda^2 + b\lambda + 2$

2- يمكن كتابة العلاقة

$$30\lambda'' = P(\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda + 2) + a\lambda^2 + b\lambda + c$$

3- نضع A بدلا من λ

$$30A^n = P(A)(A-I)(A-3I)(A-2I) + A^2 + bA + cI$$
$$= P(A)x0 + aA^2 + bA + cI$$

وذلك من نظرية كايلي هاملتون أي أن

$$30A^n = aA^2 + bA + cI$$

4- لإيجاد الثوابت a, b, c بالتعويض عن λ بالقيم 2- ,3 ,1 وهي الجذور المميزة .

$$\left.\begin{array}{l} 30 = a + b + c \\ 30(3)^n = 9a + 3b + c \end{array}\right\} 8a + 2b = 30(3^n - 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 30(-2)^n = 4a - 2b + c \end{array}\right\} 5a + 5b = 30(3^n(-2)^n)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = 15\alpha \\ a + b = 6\beta \end{array}\right\} a + 5\alpha - 2\beta, b = 8\beta - 5\alpha$$

$$c = 30 - a - b = 30 - 6\beta \Rightarrow$$

بالتعويض عن a, b, c نحصل على

$$30A^n = (5\alpha - 2\beta)A^2 + (8\beta - 5\alpha)A + 6(5-\beta)I$$

مثال:

مصفوفة مربعة من نوع 3×3 جذورها المميزة 0 ,1 ,2 اثبت أن

$$A^n = (2^{n-1} - 1)A^2 + (2 - 2^{n-1})A$$

حيث إن الجذور المميزة للمصفوفة هي 0 ,1 ,2 فتكون كثيرة الحــدود هى

$$-(\lambda - 0)(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

باتباع الخطوات السابقة في المثال السابق:

$$\lambda^n = P(\lambda).\lambda(\lambda - 1)(-2) + a\lambda^2 = b\lambda + c \qquad (1)$$
$$A^n = 0 \qquad\qquad + a\lambda^2 + b\lambda + cI$$

لإيجاد a, b, c تعوض في (1) عن λ بـــالقيم $2, 1, 0$ نحـــصل على

$$0 = c$$
$$1 a + b + c$$
$$2^n = 4a + 2b + c$$
$$a = 2^{n-1} - 1 \qquad , \quad b = 2 - 2^{n-1}$$
$$A^n = (2^{n-1} - 1)\ A^2 + (2 - 2^{n-1})\ A$$

المتجهات المميزة للمصفوفة Eigen vectors

ليكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة معلومة من نوع $n \times n$ وليكن $A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ معادلة موجهة تمثل n معادلة. x هي مصفوفة عمود غير صفري من نوع $n \times 1$

$$Ax - \lambda x = Ax - \lambda Ix = 0 \quad A - \lambda Ix = 0 \qquad (1)$$

إذا كانت x هي $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ فإن المعادلة (1) تكتب على الصورة .

$$A\underline{x} = \lambda \underline{x}$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n$$

والتي يمكن كتابتها على الصورة

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = 0$$
$$a_{21}x_2 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = 0$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0$$
$$(A - \lambda I)X = 0$$

لنعتبر الحالتين الآتيتين

$$a - |A - \lambda I| \neq 0$$

في هذه الحالة نجد مباشرة باستخدام قاعدة كرام لحل المعادلات الخطية

أن

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 0 \qquad , \quad x_n = 0$$

وهذا يعطينا $x = 0$ وهو الحل التافه

فى هذه الحالة يوجد حل اخر غير $x = 0$ لكن $|A - \lambda I| = 0$ هي المعادلة المميزة للمصفوفة A ، λ يمكن أن تأخذ قيمة أي واحد من الجذور المميزة للمصفوفة .

لنفرض أن λ هي إحدى هذه الجذور . لهذه القيمة تتحقــق المعادلــة (1)، (2) وعلينا أن نبحث عن حل غير الحل التافه للمعادلة المصفوفة.

$$(A - \lambda_1 I)x = 0$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & \ldots.a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots.a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots.a_{nn} - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ويطلق على الموجهات $\underline{x}$ المناظرة لقيم λ eigen vectors

مثال:

اوجد القيم الذاتية والموجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 5\text{-}\lambda & 4 \\ 1 & 2\text{-}\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0$$

فتكون الجذور هي $\lambda_2 = 6 \quad , \quad \lambda_1 = 1$

$\lambda_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 = 4X_2 \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4X_1 + 4X_2 = 0$$

$$X_1 + X_2 = 0$$

$$X_1 - X_2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

مثال:

اوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

مثال:

اوجد القيم الذاتية والموجهات الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

مثال:

اوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

المعادلة المميزة للمصفوفة $|A - \lambda I| = 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0$$
$$X_1 + 0.X_2 + X_3 = 0$$
$$\frac{X_1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_2}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_3}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}$$
$$\frac{X_1}{-2} = \frac{X_2}{-2} = \frac{X_3}{-2} \Rightarrow$$
$$\frac{X_1}{-1} = \frac{X_2}{1} = \frac{X_3}{1} = a \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -a \\ a \\ a \end{pmatrix}$$
$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4X_1 - 2X_2 + 3X_3 = 0$$
$$X_1 - 3X_2 + X_3 = 0$$
$$\frac{X_1}{\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_2}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{X_3}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}$$

$$\frac{X_1}{-11} = \frac{X_2}{-1} = \frac{X_3}{14} = -b \Rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ & 6 \\ -14 & 6 \end{pmatrix}$$

حيث a, b, c ثوابت اختيارية $\lambda_3 = 3 \Rightarrow X_3 = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$

* * *

ثانيا الهندسة التحليلية

مقدمة

الهندسة أحد علوم الرياضيات، أو أولها في نظر ابن سيناء، وهو علم يتعامل مع النقطة ، المستقيم، السطح، الفضاء ويؤدي إلى دراسة الأشكال من حيث مجموع قياسات زواياها ، مساحاتها، حجمها وتأثير الحركات عليها كما يهتم بتحديد درجات تقوس السطح. وأحد أنواع تلك الهندسة يسمى الهندسة التحليلية التي أمكن باستخدامها حل بعض المسائل الجبرية هندسيًّا، وأمكن التعبير عن النماذج الهندسية بمعادلات رياضية.

وللهندسة التحليلية أهمية بالغة عند دراسة معظم علوم الرياضيات والتطبيقات الفيزيائية وعلم التقنية.

وكذلك الهندسة ساعدت على دراسة الفضاء وخواصه الهندسية في العصر الحديث، وترتبط بكل ما هو جديد، حيث إنها تُعتبر الأساس في تفسير الصور في علم الكمبيوتر، وتعتبر الهندسة التحليلية مدخل لدراسة الهندسة التفاضلية.

(هندسة الحركة) والهندسة الجبرية حيث إن الهندسة التفاضلية تختص بدراسة الأشكال الهندسية وخاصة المنحنيات والسطوح من حيث خواصها الهندسية، وذلك بتطبيق حساب التفاضل والتكامل، ويرجع ظهور الهندسة التفاضلية إلى النصف الأول من القرن الثامن عشر. وأول من أسس هذا الجزء من الرياضيات أويلر – موبخ – جاوس وقد تطورت الهندسة التفاضلية مع تطور التحليل الرياضي حتى أصبح الآن لها ارتباط وثيق بالعلوم الفيزيائية والعلوم الهندسية، وكذلك لها تطبيقات مباشرة على العديد من العلوم التطبيقية مثل الهيدروديناميكا والهندسة الضوئية نظرية المجال.

المؤلف

الاستاذ الدكتور/ عادل نسيم اديب