

الباب السابع نظرية ذات الحدين

Binomial Theorem

الصورة العامة لمفكوك ذات الحدين هي:

$$(x + y)^n = x^n + c_1^n x^{n-1} y + c_2^n x^{n-2} y^2 + \dots \\ + c_r^n x^{n-r} y^r + \dots + y^n$$

حيث n عدد صحيح موجب وأن

$$c_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r(r-1)\dots 3.2.1}$$

وبالتالي فإن

$$c_n^n = c_0^n = 1,$$

$$c_r^n = c_{n-r}^n,$$

$$c_r^n + c_{r-1}^n = c_r^{n+1}$$

مع ملاحظة أن جميع الخواص السابقة يمكن برهنتها باستخدام تعريف

C_r^n

حالة خاصة:

$$(1 + x)^n = 1 + c_1^n x + c_2^n x^2 + \dots \\ + c_r^n x^r + \dots + x^n$$

امثلة محلولة Solved Problems

مثال:

استنتج الصورة الخاصة من الصورة العامة لنظرية ذات الحدين.

الحل:

$$y = x, x = 1$$

نضع

في الصورة العامة فنحصل على

$$(1+x)^n = 1 + c_1^n x + c_2^n x^2 + \dots \\ + c_r^n x^r + \dots + x^n$$

مثال:

استنتج الصورة العامة باستخدام الصورة الخاصة.

الحل:

نضع y/x بدلا من x في الصورة الخاصة فنحصل على

$$(1+x)^n = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n} (x+y)^n = \\ = 1 + c_1^n \frac{y}{x} + c_2^n \frac{y^2}{x^2} + \dots + c_n^n \frac{y^n}{x^n}$$

وبضرب الطرفين في x^n فنحصل على

$$(x+y)^n = x^n + c_1^n x^{n-1} y + c_2^n x^{n-2} y^2 + \dots \\ + c_r^n x^{n-r} y^r + \dots + y^n$$

مثال:

اوجد مفكوك المقدار

$$(1 - 2x)^6$$

الحل:

$$\begin{aligned}(1 - 2x)^6 &= 1 + 6(-2x) + \frac{(6)(5)}{2!}(-2x)^2 \\ &+ \frac{(6)(5)(4)}{3!}(-2x)^3 + \frac{(6)(5)(4)(3)}{4!}(-2x)^4 + \\ &+ \frac{(6)(5)(4)(3)(2)}{5!}(-2x)^5 + (-2x)^6 = \\ &1 - 12x + 60x^2 - 160x^3 + 240x^4 - \\ &- 192x^5 + 64x^6\end{aligned}$$

مثال:

اوجد مفكوك المقدار

$$(2 - 3x)^5$$

الحل:

$$\begin{aligned}(2 - 3x)^5 &= (2)^5 \left(1 + \left(\frac{-3x}{2}\right)\right)^5 = \\ &32 \left[1 + 5\left(\frac{-3x}{2}\right) + \frac{(5)(4)}{2!}\left(\frac{-3x}{2}\right)^2 \right. \\ &\left. + \frac{(5)(4)(3)}{3!}\left(\frac{-3x}{2}\right)^3 + \frac{(5)(4)(3)(2)}{4!}\left(\frac{-3x}{2}\right)^4 \right. \\ &\left. + \frac{(5)(4)(3)(2)(1)}{5!}\left(\frac{-3x}{2}\right)^5 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 32 \left[1 - \frac{15}{2}x + \frac{45}{2}x^2 - \frac{135}{4}x^3 + \right. \\
&\quad \left. \frac{405}{16}x^4 - \frac{243}{32}x^5 \right] \\
&= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 \\
&\quad + 810x^4 - 243x^5
\end{aligned}$$

مثال:

اوجد مفكوك المقادير الآتية:

$$\begin{aligned}
&(9 + 5x^{1/3})^4, \quad (7 - 2x)^6, \\
&(2 + 3x)^4, \quad (8 - 4x^2)^7
\end{aligned}$$

الحل:

يترك كتمرين للطالب

نظرية ذات الحدين لأي أس سالب أو غير صحيح

الصورة العامة لذلك المفكوك هي:

$$\begin{aligned}
(1 + x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + \\
&+ \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}x^r + \dots
\end{aligned}$$

ولكى يوجد ذلك المفكوك (أي يتقارب) يجب أن يتحقق الشرط

$$|x| < 1$$

مثال:

اوجد الخمسة حدود الأولى في مفكوك كلٍّ من

$$(1 + 3x)^{-5}, \quad \left(x + \frac{1}{6}\right)^4, \quad (2x + 7)^{-3/2}$$

ثم اذكر شرط وجود المفكوك في كل حالة

الحل:

$$1) \quad (1+3x)^{-5} = 1 + (-5)(3x) + \frac{(-5)(-6)}{2!}(3x)^2 + \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}(3x)^3 + \frac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!}(3x)^4$$

وشرط وجود المفكوك هو

$$|x| < \frac{1}{3} \quad \text{أي أن} \quad |3x| < 1$$

وبالتالي فإن

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$2) \quad \left(x + \frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{4}}(1+6x)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[4]{6}} \left[1 + \frac{1}{4}(6x) + \right.$$

$$\frac{1}{4} \frac{(-3/4)}{2!} (6x)^2 +$$

$$+ \frac{(1/4)(-3/4)(-7/4)}{3!} (6x)^3 +$$

$$+ \frac{(1/4)(-3/4)(-7/4)(-11/4)}{4!} (6x)^4$$

+ ...

وشرط صحة وجود المفكوك هو أن

$$|x| < \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{6} < x < \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad (2x+7)^{-3/2} &= (7)^{-3/2} \left(1 + \frac{2x}{7}\right)^{-3/2} \\
&= \frac{1}{7\sqrt{7}} \left[1 + \left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{2}{7}\right)x + \frac{(-3/2)(-5/2)}{2!} \left(\frac{2}{7}\right)^2 x^2 \right. \\
&\quad + \frac{(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{3!} \left(\frac{2}{7}\right)^3 x^3 \\
&\quad \left. + \frac{(-3/2)(-5/2)(-7/2)(-9/2)}{4!} \left(\frac{2}{7}\right)^4 x^4 + \dots \right] \\
&= \frac{1}{7\sqrt{7}} \left[1 - \frac{3}{7}x + \frac{15}{98}x^2 - \frac{5}{98}x^3 + \frac{45}{2744}x^4 \right. \\
&\quad \left. + \dots \right]
\end{aligned}$$

وشرط صحة وجود المفكوك هو ان

$$\left| \frac{2x}{7} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$|x| < \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{2} < x < \frac{7}{2}$$

تطبيقات نظرية ذات الحدين

Application of the Binomial Theorem

-1 التقريب

يمكن استخدام نظرية ذات الحدين لإيجاد قيم تقريبية لبعض الجذور.

مثال:

اوجد قيمة $\sqrt{2}$ مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ

الحل:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= (4-2)^{1/2} = (4)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} = 2 \left[1 - \frac{1}{4} + \frac{(1/2)(-1/2)}{2!} \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)}{3!} \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + \right. \\ &\quad \left. \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{4!} \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)}{5!} \left(\frac{-1}{2}\right)^5 \right] \\ &= 2[1 - 0.25 - 0.03125 - 0.00781 - 0.00244 - 0.00085] = 1.4153\end{aligned}$$

الخطأ هو:

$$\begin{aligned}2 \left[\frac{(1/2)(-1/2)(-3/2)(-5/2)(-7/2)(-9/2)}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] \\ \cong 0.0006408\end{aligned}$$

مثال:

اوجد قيمة تقريبية للجذر $(211)^{1/3}$ مقربا المقدار لأربعة أرقام عشرية مستخدما نظرية ذات الحدين.

الحل:

$$\begin{aligned}(211)^{1/3} &= (216-5)^{1/3} = \left(6 \cdot 1 - \frac{5}{216}\right)^{1/3} \\ &= 6 \left[1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{5}{216}\right) + \frac{(1/3)(-2/3)}{2!} \left(\frac{-5}{216}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3!} \left(\frac{-5}{216}\right)^3 + \dots \right] \\ &= 6[1 - 0.007716 - 0.0000595 - \dots] \\ &= 5.953347.\end{aligned}$$

مثال:

اوجد مفكوك $\frac{1}{(1+x)^4}$ عندما تكون x صغيرة ثم عندما تكون x قيما كبيرة.

الحل: (ا) في حالة قيم x صغيرة

$$\frac{1}{(1+x)^4} = (1+x)^{-4}$$

$$= 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + \dots$$

(ب) عندما تكون قيم x كبيرة

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+x)^4} &= \frac{1}{x^4} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{-4} = \frac{1}{x^4} \left[1 - \frac{4}{x} + \frac{(-4)(-5)}{2!} \frac{1}{x^2} + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!} \frac{1}{x^3} + \dots\right] \\ &= \frac{1}{x^4} \left[1 - \frac{4}{x} + \frac{10}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \dots\right] \end{aligned}$$

مثال:

اوجد الحدود الخمسة الأولى من مفكوك المقدار

$$\frac{1}{3 + 3x + x^2}$$

(أ) عندما x ذات قيم صغيرة

(ب) عندما تكون x ذات قيم كبيرة

الحل:

(ا) عندما x ذات قيم صغيرة

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3+3x+x^2} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x(1+x/3)} \\
&= \frac{1}{3} [1+x(1+x/3)]^{-1} = \frac{1}{3} [1-x(1+x/3) \\
&+ x^2(1+x/3)^2 - x^3(1+x/3)^3 + \dots] \\
&= \frac{1}{3} [1-x + (2/3)x^2 - (1/3)x^3 - \\
&-(8/9)x^4 + \dots] \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{8}{27}x^4 + \dots
\end{aligned}$$

(ب) عندما تكون x ذات قيم كبيرة

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3+3x+x^2} &= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1+(3/x)+(3/x^2)} \\
&= \frac{1}{x^2} [1+(x/3)(1+(1/x))]^{-1} \\
&= \frac{1}{x^2} [1-(x/3)(1+1/x) + (3/x)^2 \cdot \\
&\cdot (1+1/x)^2 - (3/x)^3(1+1/x)^3 + \dots] = \\
&= \frac{1}{x^2} [1-3/x-3/x^2+9/x^2+18/x^3 \\
&+9/x^4-27/x^3-81/x^4-81/x^5 \\
&-27/x^5 + \dots] \\
&= \frac{1}{x^2} [1-3/x+6/x^2-9/x^3-72/x^4 \\
&- \dots] = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{6}{x^4} - \dots
\end{aligned}$$

مثال: اوجد مفكوك

$$(2 + 6x + x^2)^7$$

(ا) عندما x ذات قيم صغيرة

(ب) عندما تكون x ذات قيم كبيرة

الحل:

(ا) عندما x ذات قيم صغيرة

$$(2 + 6x + x^2)^7 = 2^7 \left[1 + 3x\left(1 + \frac{x}{6}\right)\right]^7$$

$$= 128 \left[1 + 21x\left(1 + \frac{x}{6}\right) + \frac{(7)(6)}{2!} 9x^2 \cdot \left(1 + \frac{x}{6}\right)^2 + \frac{(7)(6)(5)}{3!} 27x^3 \left(1 + \frac{x}{6}\right)^3 + \dots\right]$$

$$= 128 \left[1 + 21x + \frac{7}{2}x^2 + 139x^3 + \dots\right]$$

$$\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{36}\right) + 945x^3 \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{216}\right) + \dots = 128 \left[1 + 21x + \frac{385}{2}x^2 + 1008x^3 + \frac{1911}{4}x^4 + \dots\right]$$

$$+ 1008x^3 + \frac{1911}{4}x^4 + \dots]$$

(ب) عندما تكون x ذات قيم كبيرة

$$\begin{aligned}
(2 + 6x + x^2)^7 &= x^{14} \left[1 + 6/x \left(1 + \frac{3}{x} \right) \right]^7 \\
&= x^{14} \left[1 + \frac{42}{x} \left(1 + \frac{1}{3x} \right) + \frac{(7)(6)}{2!} (36/x^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(7)(6)(5)}{3!} (216/x^3) \left(1 + \frac{1}{3x} \right)^3 \right. \\
&\quad \left. + \dots \right] = x^{14} \left[1 + \frac{42}{x} + \frac{770}{x^2} + \frac{8064}{x^3} + \right. \\
&\quad \left. \frac{7588}{x^4} + \dots \right]
\end{aligned}$$

حالات خاصة

- 1) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
- 2) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$
- 3) $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

مثال:

اكتب ما يساوية كلٍّ من المقادير الآتية باستخدام نظرية ذات الحدين:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{1}{(1-x)^3}, \\
&\frac{1}{(2-3x)^3}, \quad \frac{1}{(7x-1)^4}
\end{aligned}$$

التطبيق الثاني

إيجاد مفكوك المقادير المربعة ومعاملات قوى x المختلفة

مثال:

$$x^n \text{ ثم اوجد معامل } \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \text{ مفكوك}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 &= (1-x)^2(1+x)^{-2} \\ &= (1-2x+x^2)(1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\dots) \\ &= 1-4x+8x^2-12x^3+16x^4-20x^5+\dots \\ \text{معامل } x^n &= (-1)^n[(n+1)(2n)(1-(n-1))] \\ &= (-1)^n[4n] \end{aligned}$$

مثال:

$$x^n \text{ ثم اوجد معامل } \frac{1+x}{1-x+x^2} \text{ اوجد مفكوك المقدار}$$

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x+x^2} &= \frac{(1+x)^2}{(1+x)(1-x+x^2)} \\ &= \frac{(1+x)^2}{1+x^3} = (1+x)^2(1+x^3)^{-1} \\ &= (1+2x+x^2)(1-x^3+x^6-x^9 \\ &+x^{12}-\dots) = 1+2x+x^2-x^3 \\ &-2x^4-x^5+x^6+2x^7+x^8-x^9-\dots \end{aligned}$$

$$(-1)^n = x^{3n} \quad \text{معامل}$$

$$(-1)^n 2 = x^{3n+1} \quad \text{معامل}$$

$$(-1)^n = x^{3n+2} \quad \text{معامل}$$

مثال:

اوجد مفكوك $\frac{1}{3-5x}$ ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

الحل:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-5x} &= \frac{1}{3} \left[1 - \frac{5}{3}x\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{3} \left[1 + \frac{5x}{3} + \left(\frac{5x}{3}\right)^2 + \left(\frac{5x}{3}\right)^3 + \dots\right] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{9}x + \frac{25}{27}x^2 \\ &\quad + \frac{125}{81}x^3 + \dots \end{aligned}$$

ويكون المفكوك صحيحا عندما

$$\left| \frac{5}{3}x \right| < 1$$

$$\Rightarrow |x| < \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$x \in \left(-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

التطبيق الثالث

إيجاد مجموع بعض المتسلسلات باستخدام نظرية ذات الحدين

مثال:

برهن أن

$$\sqrt{3} - 1 = \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \dots$$

الحل:

$$\begin{aligned} R.H.S. &= \frac{1}{3} + \frac{(-1)(-3)}{1.2} \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \\ &+ \frac{(-1)(-3)(-5)}{1.2.3} \left(\frac{-1}{3}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \\ &+ \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \dots = \\ &= 1 + \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \\ &+ \left[\frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} \left(\frac{-2}{3}\right)^3 + \dots\right] - 1 \\ &= \left[1 + \left(\frac{-2}{3}\right)\right]^{-1/2} - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1/2} - 1 \\ &= \sqrt{3} - 1 = L.H.S. \end{aligned}$$

مثال:

اوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية

$$s = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{3}{8}\right) + \frac{1.3.5}{4.8.12} + \dots$$

الحل:

$$\begin{aligned} s &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1.3}{2!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1.3.5}{3!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2}{4}\right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} \left(-\frac{2}{4}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \dots = \\ &= \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

مثال:

اوجد مجموع المتسلسلة اللانهائية الآتية

$$s = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1.3}{2.4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6} \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

الحل:

$$\begin{aligned} s &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} \left(-\frac{3}{4}\right)^2 \\ &\quad + \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \dots \\ &= \left[1 + \left(-\frac{3}{4}\right)\right]^{-1/2} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

مثال:

اوجد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{\frac{20}{9}}$ مقربا إلى اقرب أربعة أرقام عشرية

صحيحة ثم اوجد قيمة الخطأ.

الحل:

$$\begin{aligned} s &= \left(\frac{20}{9}\right)^{1/3} = \left(\frac{3(20)}{3(9)}\right)^{1/3} = \frac{1}{3}(60)^{1/3} \\ &= \frac{1}{3}(64-4)^{1/3} = \frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{16}\right)^{1/3} \\ &= \frac{4}{3}\left[1 - \frac{1}{(16)(3)} + \frac{(1/3)(-2/3)(-5/3)}{3!}\left(\frac{-1}{16}\right) + \dots\right] \\ &= \frac{4}{3}[1 - 0.02083 - 0.000434 - 0.000015 - \dots] \\ &= \frac{4}{3}(0.978721) = 1.3049613. \end{aligned}$$

ملاحظة:

معامل x^t في مفكوك $(1-x)^{-n}$ هو t^{n+t-1}

مثال:

اوجد معامل x^{12} في الدالة

$$f(x) = (1+x)^3(1-x)^{-3}$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+3x+3x^2+x^3).(1+3x \\ &+ 6x^2+10x^3)+\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Coeff. of } x^2 &= \binom{14}{12} + 3\binom{13}{11} + 3\binom{12}{10} \\ &+ \binom{11}{9} = 91 + 234 + 198 + 55 = 578 \end{aligned}$$

مثال :: اوجد معامل x^{22} في المفكوك

$$f(x) = (x^2 + x^3 + \dots + x^7)^5$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^5 \\ &= x^{10} \left(\frac{1 - x^6}{1 - x} \right)^5 = x^{10}(1 - 5x^6 + 12x^2 - \\ &\quad - 10x^{18} + 5x^{24} - x^{30}) \\ \therefore \text{coeff of } x^{22} &= \binom{16}{12} - \binom{10}{6} + 10 = 780 \end{aligned}$$

مثال:

اوجد معامل x^{28} في مفكوك الدالة

$$f(x) = (x^3 + x^4 + \dots + x^{11})^6$$

الحل:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{18}(1 + x + x^2 + \dots + x^8)^6 \\ &= x^{18}(1 - x^9)^6(1 - x)^{-6} = x^{18}(1 - \\ &\quad 6x^9 + 15x^{10} + \dots)(1 + 6x + 15x^2 + \dots) \\ \therefore \text{coeff of } x^{28} &= \binom{15}{12} - 6(6) = 2967 \end{aligned}$$

ملاحظة: معامل $x^r y^t z^s$ في مفكوك الدالة $(1+x+y+z)^n$ هو

$$\binom{n}{e \ r \ t \ s} \text{ حيث } e = n - (r + t + s) \text{ والمقصود بالرمز الأخير}$$

$$\frac{n!}{e! \ r! \ t! \ s!}$$

هو

مثال:

اوجد معامل $x^3 y^2 z$ في مفكوك الدالة

$$(1 - 4x + \frac{2y}{3} + 5z)^{13}$$

الحل:

$$\text{coeff of } x^3 y^2 z = \binom{13}{7 \ 3 \ 2 \ 1}$$

$$.(-4)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^5 (5) = -14643200$$

مثال:

اوجد معامل $x^2 y^4 z^2$ في مفكوك الدالة

$$(1 - 2 - 3y - 6z)^{10}$$

الحل:

$$\text{coeff of } x^2 y^4 z^2 = \binom{13}{2 \ 2 \ 4 \ 2}$$

$$.(-2)^2 (-3)^4 (-6)^2 = 2721600$$

* * *

تمارين

1- اوجد مفكوك الدوال الآتية

$$(1-3x)^7, \quad (5+2x)^6, \quad (3+4x^{1/2})^4$$

$$(1-2x)^{-3}, \quad (2x+9)^{-5/2}, \quad (x-\frac{1}{4})^{2/3}$$

2- اوجد قيمة $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$ مقربا الجواب إلى ثلاثة أرقام عشرية باستخدام نظرية ذات الحدين واستنتج أكبر قيمة للخطأ.

3- اوجد قيمة تقريبية للجذر $(339)^{1/3}$ مقربا المقدار لأربعة أرقام عشرية مستخدما نظرية ذات الحدين.

4- اوجد مفكوك الدالة $\frac{1}{(1-x)^5}$ عندما تكون x صغيرة ثم عندما تكون x قىما كبيرة.

5- اوجد الحدود الأربعة الأولى من مفكوك المقدار

$$\frac{1}{4+4x+x^2}$$

عندما x ذات قيم صغيرة وعندما تكون x ذات قىما كبيرة.

6- اوجد مفكوك الدالة $(3+12x+x^2)^5$ عندما تكون x

صغيرة ثم عندما تكون x قىما كبيرة.

7- اوجد مفكوك الدالة $(\frac{2+x}{2-x})^2$ ثم اوجد معامل x^n .

8- اوجد مفكوك الدالة $\frac{1-x}{1+x+x^2}$ ثم اوجد معامل x^n

9- اوجد مفكوك الدالة $\frac{1}{2-3x}$ ومتى يكون هذا المفكوك صحيحا.

10- اوجد قيمة تقريبية للمقدار

$$M = \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{x-1}$$

مع إهمال $\frac{1}{x^6}$ وما يليها.

11- اوجد قيمة تقريبية للمقدار $\sqrt[3]{\frac{29}{16}}$

مقربا المقدار لأربعة أرقام عشرية صحيحة واوجد قيمة الخطأ.

12- اوجد x^{10} في الدالة

$$f(x) = (1+x)^4 (1-x)^{-5}$$

13- اوجد معامل x^{16} في مفكوك الدالة

$$f(x) = (x^3 + x^4 + \dots + x^{10})^6$$

14- اوجد معامل x^8 في مفكوك الدالة $(1+x^2+x^3)^{10}$

* * *