الباب السادس

الجذور المميزة والمتجهات المميزة

Eigen values and Eigen vectors

نفرض أن لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})$ عبارة عن **nxn** مصفوفة ونفرض أن المعادلة المتجهة هي:

$$AX = \lambda X \qquad (1)$$

حيث أن λ أي عدد ثابت ويسمى **الجذر المميز**.

1) لتعيين الجذور المميزة λ لأي مصفوفة A نقوم بحل المعادلة

$$|A - \lambda I| = 0$$

2) لتعيين المتجهات المميزة X نقوم بحل المعادلة

$$AX = \lambda X$$

من الواضح أن المتجه $X = 0$ هو حل للمعادلة (1) لأي قيمة والقيمة λ التي عندها الحل $X \neq 0$ تسمى الجذور المميزة أو القيمة الخاصة **Characteristic value** والحل المقابل $X \neq 0$ يسمى **الموجة المميز** المناظر للجذر λ.

إذا كانت المصفوفة المربعة فإن الدالة:

$$F(\lambda) = |A - \lambda I| =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-\lambda} \end{bmatrix} = 0, \qquad (2)$$

تسمى كثيرة الحدود المميزة أو الدالة المميزة.

obeikandl.com

والمعادلة (2) تسمى المعادلة المميزة المناظرة للمصفوفة A.

امثلة محلولة Solved Problems

مثال:-

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

الحل:

أولا: نعين الجذور المميزة وذلك باستخدام المعادلة

$$F(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{pmatrix}5-\lambda & 4\\ 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$$

$$=\lambda^2-7\lambda+6=0$$

$$\therefore (5-\lambda)(2-\lambda)-4=0\Rightarrow \lambda^2-7\lambda+6=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1,\lambda_2=6$$

وتكون هذه القيم هما قيمتا الجذور المميزة

ثانيا: $\lambda=1$

نعين المتجهات المميزة عن طريق المعادلة

$$AX=\lambda_1 X$$

ويكون عندنا قيمتان

$$1)\ \lambda_1=1\Rightarrow \begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلتان

obeikandl.com

$$5x_1 + 4x_2 = x_1,$$
$$x_1 + 2x_2 = x_2$$

وبجمع هاتان المعادلتان نحصل على

$$x_1 : x_2 = 4 : 1$$

وعلى ذلك تكون قيمة أول متجه هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ثالثا $\lambda = 6$

$$2)\ \lambda_2 = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix}$$

نحصل على

$$x_1 : x_2 = 1 : -1$$

وعلى ذلك تكون قيمة ثاني متجه هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

مثال :

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل:

أولا: نعين الجذور المميزة وذلك باستخدام المعادلة

obeikandl.com

$$|A-\lambda I|=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 4 & -4 & 5-\lambda\end{pmatrix}=0$$

ونحصل على المعادلة بعد فك المحدد

$$(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6)=0$$

وتكون الجذور المميزة ثلاثة وهي:

$$\lambda_1=1,$$
$$\lambda_2=2,$$
$$\lambda_3=3$$

ثانيا: نعين المتجهات المميزة عن طريق المعادلة

$$AX=\lambda X$$

ويكون عندنا قيمتان

أولا: عند: $\lambda=1$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2-x_3&=x_1,\\ x_1+x_3&=x_2,\\ 4x_1-4x_2+5x_3&=x_3\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

obeikandl.com

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

وبوضع قيمة x_3 تساوي (2- x_3) فنحصل على الموجه المميز :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ثانيا: عند:

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2x_1,$$
$$x_1 + x_3 = 2x_2,$$
$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2x_3$$

وبالجمع نحصل على

$$x_1 : x_2 : x_3 = -2 : 1 : 4$$

وعلى ذلك تكون قيمة ثاني متجه

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ثالثا: عند:

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3x_1,$$
$$x_1 + x_3 = 3x_2,$$
$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3x_3$$

وبجمع المعادلات نحصل على $x_1 : x_2 : x_3 = -1 : 1 : 4$

وعلى ذلك تكون قيمة ثالث متجه

$$X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

oberkandl.com

تمارين

أوجد الدالة المميزة والجذور والموجهات المميزة لكل مما يأتي

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

* * *

obeikandl.com