

الباب الخامس

جبر المصفوفات Algebra of Matrices

تعريف:

المصفوفة هي منظومة من الأعداد تتكون من مجموعة من الصفوف والأعمدة ويسلك كل منها سلوك العنصر الواحد في العمليات الجبرية.

(1) **المصفوفة القياسية:** هي المصفوفة التي كل عناصرها أصفار وعناصر القطر الرئيسى كلها متساوية.

وتأخذ الشكل الآتي:

$$S = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

وإذا كانت الواحد $k=1$ تسمى في هذه الحالة مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I .

مجموعة المعادلات الخطية:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = k_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = k_2$$

.....

(1)

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = k_m$$

وهي عبارة عن m من المعادلات في n من المجاهيل من:

x_1, x_2, \dots, x_n ويمكن كتابتها على الصورة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} \dots (2)$$

وبشكل عام يمكن وضع المصفوفة في الصورة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \dots \dots \dots (I)$$

والأعداد $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ تسمى عناصر المصفوفة والخطوط الأفقية تسمى صفوف (rows) والخطوط الرأسية تسمى أعمدة (columns) المصفوفة ذات m صف و n عمود تسمى $(m \times n)$ مصفوفة. ويمكن كتابة المصفوفة بالرمز A أو $(a_{ij})_{mn}$ حيث الرمز الأول i يدل على رقم الصف والثاني على رقم العمود. حيث إن

$$i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

والمصفوفة $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$ ذات صف واحد تسمى **مصفوفة صف**.

بينما المصفوفة: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ تسمى **مصفوفة عمود**.

والمصفوفة التي لها نفس عدد الصفوف والأعمدة تسمى **مصفوفة مربعة** (Square Matrix). والقطر الذي يحتوي على العناصر: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ يسمى **القطر الأساسي**. يمكن كتابة مجموعة

المعادلات (2) على الصورة:

$$Ax = h$$

(3)

$$\text{where } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad A \text{ is } m \times n \text{ matrix}$$

وفي المعادلة (3) نلاحظ أن A عبارة عن مصفوفة مستطيلة من رتبة $m \times n$ ، x عبارة عن مصفوفة العمود وتتكون من n من العناصر، أما h فهي مصفوفة العمود وتتكون من m من العناصر. **ملحوظة:** بالنسبة لتساوي مصفوفتين وجمع المصفوفات وخواصها فقد تم دراستها في المرحلة الثانوية.

مجموعة المعادلات الخطية وطريقة جاوس

System of Linear Equations & Gauss Elimination Method

نفرض أن لدينا مجموعة من المعادلات الخطية عددها m في n من المجاهيل x_1, x_2, \dots, x_n في الصورة:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\dots\dots\dots(1)$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

المعاملات a_{ij} معطاة وكذلك أيضا المعاملات b_j معطاة إذا كانت كل b_j تساوي صفر فالمعادلات تسمى معادلات متجانسة وما عدا ذلك تسمى غير متجانسة. ويكون حل المعادلات (1) هو عبارة عن مجموعة

من الأعداد x_1, x_2, \dots, x_n التي تحقق المعادلات. متجه الحل (عبارة عن مصفوفة من عمود واحد) للمعادلة (1) هو المتجه x الذي مركباته عبارة عن x_1, x_2, \dots, x_n .

إذا كانت مجموعة المعادلات متجانسة فإن لها على الأقل الحل التافه (Trivial solution) أي أن:

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0,$$

.....

$$x_n = 0$$

ومن تعريف المصفوفات وضربها يمكن كتابة المعادلات (1) على

الصورة:

$$AX = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

حيث

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

سوف نفرض أن a_{ij} لا تساوي أصفارا كلها بمعنى أن

لا تساوي صفر. تسمى المصفوفة الآتية:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

بالمصفوفة الممتدة (Augmented Matrix)

للمعادلات (1). هذه المصفوفة مركبة من A مضافا إليها العمود b .
والآن سوف نناقش طريقة حل هذه المعادلات (1) بطريقة الحذف لجاوس. بداية سوف نشرحها عن طريق مثال توضيحي.

طريقة الحذف لجاوس

مثال:

حل المعادلات الخطية الآتية في أربعة مجاهيل:

$$3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 = 8.0$$

$$0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 = 2.7$$

$$1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 = 2.1$$

الحل:

• أولاً: بتكوين المصفوفة الممتدة:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثانية: حذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة

و بطرح [$0.2 = \frac{0.6}{3.0}$ x المعادلة الأولى] من المعادلة الثانية ، ثم

طرح [$0.4 = \frac{1.2}{3.0}$ x المعادلة الأولى] من المعادلة الثالثة نحصل

على المجموعة الجديدة التالية:

$$3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 = 8.0$$

$$1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 = 1.1$$

$$-1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 = -1.1$$

والمصفوفة المطولة هي:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: حذف x_2 من المعادلة الثالثة وذلك بطرح

[$-1 = \frac{-1.1}{1.1}$ x المعادلة الثانية] من المعادلة الثالثة فنحصل على

المجموعة الجديدة:

$$3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 = 8.0$$

$$1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 = 1.1$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = 0$$

والمصفوفة المطولة هي:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

من المعادلة الثانية نجد أن:

$$x_2 = 1 - x_3 + 4x_4 \quad (1)$$

ومن هذه المعادلة الأولى نجد أن:

$$x_1 + x_4 = 2 \quad (2)$$

وبما أن x_2, x_3 ، يظان اختياريين فإنه يمكن الحصول على عدد لا نهائي من الحلول إذا فرضنا أية قيمة لهما.

طريقة جاوس في حالة عدم وجود حل

ماذا يحدث لو طبقنا طريقة جاوس في مجموعة من المعادلات التي

ليس لها حل؟

الإجابة في هذه الحالة: هي أنه سوف يظهر تعارض في المسألة.

مثال 2: حل المعادلات الآتية:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6,$$

الحل: المصفوفة المطولة هي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

بحذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة:

وذلك بضرب $\frac{2}{3}$ في المعادلة الأولى ثم طرحها من المعادلة الثانية

فحصل على:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x_2 + 7x_3 = 12 \\ 2x_2 + x_3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2x_2 + x_3 = 2$$

ثم نقوم بحذف x_1 من المعادلة الثالثة وذلك بضرب

$$x_2 = \frac{6}{3} \text{ المعادلة الاولى ثم طرحها من المعادلة الثالثة نحصل على :}$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x_2 + 2x_3 = 0$$

وبنفس الطريقة نقوم بحذف x_2 من المعادلة الثالثة وذلك بطرح

$$[x_3 = -1 \text{ المعادلة الأولى}] \text{ من المعادلة الثالثة نحصل على :}$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$-\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -2$$

$$0 = 12$$

ومن التعارض من المعادلة الثالثة يؤكد أن المعادلات ليس لها حل.

طريقة جاوس في حالة وجود حل وحيد:

مثال 3:

حل المعادلات الآتية:

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4$$

بحذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة نحصل على:

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_2 + 7x_3 = 12 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2x_2 + 2x_3 = 2$$

وبحذف x_2 من المعادلة الثالثة نحصل على:

$$\left. \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 7x_3 = 12 \\ 12x_3 = 22 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow 12x_3 = 22 \Rightarrow x_3 = 2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن

ومن المعادلة الثانية نجد أن

$$2x_2 + 7x_3 = 12 \Rightarrow 2 \times 2 + 7x_3 = 12 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{7}$$

ومن المعادلة الأولى نجد أن

$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 2x_3 + 2$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 - 2\left(\frac{8}{7}\right) + 2 = -\left(\frac{16}{7}\right)$$

∴ المعادلات لها حل وحيد.

تمارين

حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة جاوس:

1) $3x + y = -5$

$2x + 3y = 6$

$x - 2y = -8$

2) $5x + 3y = -1$

$7x - y - 2z = 0$

3) $9x - y - 3z = 0$

$2x + 4y - 7z = 0$

$3x - y + z = -2$

4) $x + 5y + 2z = 6$

$2x + 3y + z = 0$

$5x + 3y - 3z = -1$

5) $3x + 2y - 2z = -1$

$2x - y + 2z = 8$

معكوس المصفوفة

Inverse of the Matrix

في هذا الفصل سوف نتعامل مع المصفوفة المربعة فقط.

معكوس المصفوفة A من درجة $m \times n$ هو مصفوفة أيضا ويرمز لها بالرمز A^{-1} ولها خاصية

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad (1)$$

حيث إن I هو مصفوفة الوحدة من درجة $n \times n$ لإيجاد هذا المعكوس سنبدأ بفرض أن لدينا مجموعة من المعادلات يمكن كتابتها في الصورة:

$$Y = AX \quad (2)$$

حيث إن المتجهات X, Y هي عبارة عن n مركب

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

إذا وجد معكوس المصفوفة A فإننا يمكن ضرب المعادلة (2) في A^{-1} ونحصل على

$$X = A^{-1}Y \quad (3)$$

والتي تشتمل على X بدلالة Y .

طريقة جاوس - جوردان للحذف

Gauss - Jordan Elimination Method

هذه الطريقة تعتمد على جعل المصفوفة مصفوفة مثلثية

(المصفوفة المثلثية هي التي جميع عناصرها فوق القطر الرئيسي أو

تحت أصفاره) أي أنه يمكن اختصار:

$$AX = Y = IY \Rightarrow IX = X = A^{-1}Y$$

وذلك بدأ بالمصفوفة A, I ووصولاً إلى A^{-1} .

ويمكن الحصول على معكوس المصفوفة بطريقتين.

سنشرح طريقة الحل للمصفوفة من الدرجة الثانية والأخرى في الدرجة

الثالثة.

أولاً: معكوس المصفوفة من الدرجة الثانية

معكوس المصفوفة من درجة 2×2 كآلاتي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

حيث إن

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وبالمثل معكوس المصفوفة القطرية:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

يعتمد على القانون التالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$\text{adj} A = \text{adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

وذلك بتغيير إشارة عنصرين ومكان عنصرين

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

معكوس المصفوفة من الدرجة الثالثة

مثال:

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

وذلك عن طريق العمليات الأولية على المصفوفة ومعها مصفوفة الوحدة حتى تتحول المصفوفة إلى مصفوفة وحدة وسنجرها كما هو

موضح من اليسار لليمين:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{row}_2 + 3\text{row}_1 \\ -\text{row}_1}} \begin{matrix} \text{row}_3 \\ \text{row}_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{row } 3 - \text{row } 2}$$

→ By Gauss Method

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + \frac{7}{10}R_3 - \frac{1}{3}R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \\ -3 & -2 & 7 \\ \frac{10}{10} & \frac{10}{10} & \frac{10}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{5}{5} & \frac{5}{5} & \frac{5}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{7}{10} & \frac{2}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & -\frac{2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \rightarrow +7a_1 + 7a_2$$

وعلى ذلك تكون المصفوفة الأخيرة هي المصفوفة المعكوسة.

مثال 3:

أوجد معكوس المصفوفة القطرية:

$$A = \begin{pmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

الحل:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

تمارين

أوجد معكوس المصفوفات الآتية:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

* *