

الباب الرابع الكسور الجزئية Partial Fraction

تعريف:

كثيرة الحدود : يقال على الدالة التي لها الصورة

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_0 \neq 0$$

- كثيرة حدود من الدرجة n حيث n عدد صحيح غير سالب.
- الكسر الجبري القياسي: هو خارج قسمة كثيرتي الحدود.
- $P(x), Q(x)$ أي أن الكسر الجبري القياسي له الشكل العام:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \dots, Q(x) \neq 0$$

- إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام يسمى كسرا غير

حقيقياً

- (والعكس صحيح) ويكتب على الصورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{h(x)}{Q(x)}$$

حيث درجة $h(x)$ أقل من درجة $Q(x)$

حالات الكسور الجزئية

• الحالة الأولى

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولى أو معادلات تربيعية قابلة للتحليل تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-n)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \dots + \frac{N}{(x-n)}$$

وبعد ذلك نقوم بضرب طرفي المعادلة في المقام

$$(x-a)(x-b)\dots(x-n)$$

فحصل على

$$F(x) = A(x-b)(x-c)\dots(x-n) + B(x-a)$$

$$(x-c)\dots(x-n) + \dots + N(x-a)(x-b)(x-c)\dots(x-m)$$

وبعد ذلك نوجد قيمة N, \dots, C, B, A عن طريق مساواة المعاملات

أو عن طريق فرض قيم x والحصول على معادلات في الثوابت.

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال 1:

باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي:

$$\frac{5x + 2}{(x + 2)(3x + 2)}$$

الحل:

أولا نتأكد أن درجة البسط أقل من درجة المقام وهذا متحقق وثانيا

شكل الكسر من النوع الأول

$$\frac{5x + 2}{(x + 2)(3x + 2)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{3x + 2}$$

بعد ذلك نقوم بالضرب في المقام $(x+2)(3x+2)$ أو بمعنى توحيد

المقامات ينتج أن:

$$5x + 2 = A(3x + 2) + B(x + 2)$$

هناك طريقتين لتعيين قيمة الثوابت ولكن نحن سننتبع عملية مساواة المعاملات:

$$X: \quad 5 = 3A + B$$

$$\text{الحد المطلق:} \quad 2 = 2A + 2B$$

$$\text{or} \quad 1 = A + B$$

بحل المعادلتان ينتج أن $A = 2$ and $B = (-1)$ أي أن الكسر الأساسي هو:

$$\frac{5x + 2}{(x + 2)(3x + 2)} = \frac{2}{x + 2} - \frac{1}{3x + 2}$$

مثال 2 :

باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي:

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 2x - 3}$$

الحل:

أولا درجة البسط أقل من درجة المقام ثانياً واضح أن المقام عبارة عن معادلة تربيعية قابلة للتحليل لذلك هي تتبع الحالة الأولى وحلها كما يلي:

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 2x - 3} = \frac{2x + 3}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1}$$

وبضرب طرفي المعادلة في المقام أو بتوحيد المقامات

$$2x + 3 = A(x + 1) + B(x - 3)$$

وعن طريق مساواة المعاملات ينتج

$$X: \quad 2 = A + B$$

$$\text{الحد المطلق:} \quad 3 = A - 3B$$

بحل هاتين المعادلتين ينتج أن:

$$\text{ويكون الحل النهائي } A = (9/4) \text{ and } B = (-1/4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2x+3}{x^2-2x-3} \\ &= \frac{2x+3}{(x-3)(x+1)} \\ &= \frac{9}{x-3} - \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

مثال 3 :

باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2}{(x-2)(x+3)}$$

الحل:

أولا درجة البسط تساوي درجة المقام لذلك نقوم بعملية اختصار أو قسمة مطولة وذلك لجعل درجة البسط أقل من درجة المقام ثانيا المقام عبارة عن الحالة الأولى

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{x^2-x-6} \\ &= \frac{x^2}{x^2+x-6} \\ \therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} &= 1 + \frac{-x+6}{(x-2)(x+3)} \end{aligned}$$

وبعد ذلك نقوم بتحليل الكسر الجديد والذي يتحقق فيه أن درجة البسط أقل من درجة المقام:

$$\frac{-x+6}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}$$

وبالضرب في المقام أو بتوحيد المقامات:

$$-x+6 = A(x+3) + B(x-2)$$

وبمساواة المعاملات:

$$X^1: \quad -1 = A + B$$

$$X^0: \quad 6 = 3A - 2B$$

وبحل المعادلتان ينتج أن:

$$A = (4/5),$$

$$B = (-9/5)$$

ويكون الحل هو

$$\therefore \frac{x^2}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{-x+6}{(x-2)(x+3)} = 1 + \frac{4/5}{x-2} - \frac{9/5}{x+3}$$

الحالة الثانية

- إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الأولى أو معادلات تربيعية قابلة للتحليل مكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)}{(x-a)^n(x-b)^m} \\ &= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{N}{(x-a)^n} + \frac{C}{(x-b)} \\ &+ \frac{D}{(x-b)^2} \dots + \frac{M}{(x-b)^m} \end{aligned}$$

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال 4: باستخدام الكسور الجزئية حلل الكسر الآتي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)}$$

أولاً: درجبة البسط أقل من درجة المقام
ثانياً: المقام عبارة عن الحالة الأولى والثانية

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

وبعد ذلك نقوم بتوحيد المقامات

$$2x^2 = A(x-1)^3 + B(x+1)(x-1)^2 + C(x+1)(x-1) + D(x+1)$$

وبمساواة المعاملات

$$X^3: \quad 0 = A + B \quad (1)$$

$$X^2: \quad 2 = +3A - B + C \quad (2)$$

$$X^1: \quad 0 = +3A - B + D \quad (3)$$

$$\text{الحد المطلق: } 4 = -A + B - C + D \quad (4)$$

بجمع المعادلة (2) و (4) ينتج

$$4 = -4A + D$$

ثم بجمع المعادلة (1) و (3) ينتج

$$0 = 4A + D$$

بحل هاتين المعادلتان ينتج أن $A = -2$ وبالتعويض ينتج

$D = 2$ وبالتعويض في (1) ينتج $B = 1/2$ وبالتعويض في (2) ينتج

$$C = 1$$

ويكون الحل النهائي

$$\frac{2x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3}$$

الحالة الثالثة:

إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغير قابلة للتحليل تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\frac{F(x)}{(x^2+ax+b)(x^2+c)\dots(x^2+d)} = \frac{Ax+B}{(x^2+ax+b)} + \frac{Cx+D}{(x^2+c)} + \dots + \frac{Nx+M}{(x^2+d)}$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

أمثلة محلولة Solved Problems

مثال 5 : باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي:

$$\frac{x^2 + 15}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)}$$

الحل:

- أولاً واضح أن درجة البسط أقل من درجة المقام:
- ثانياً المقام يحتوي على معادلة من الدرجة الثانية غير قابلة للتحليل وهناك دمج بين الحالة الأولى والثالثة ويكون الحل كما يلي:

$$\frac{x^2 + 15}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2 + 2x + 5}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$x^2 + 15 = A(x^2 + 2x + 5) + (Bx + C)(x - 1)$$

وبمساواة المعاملات

$$x^2: \quad 1 = A + B$$

$$X^1: \quad 0 = 2A - B + C$$

$$\text{الحد المطلق:} \quad 15 = 5A - C$$

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن $A = 2$ وبالتعويض في المعادلة الأولى والثالثة ينتج أن $B = -1$, $C = -5$

$$\frac{x^2 + 15}{(x-1)(x^2 + 2x + 5)} = \frac{2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2 + 2x + 5}$$

الحالة الرابعة:

- إذا كان المقام عبارة عن أقواس من الدرجة الثانية الغير قابلة للتفكيك ومكررة تكون طريقة الحل كما هو مبين:

$$\begin{aligned} & \frac{f(x)}{(x^2 + ax + b)^n (x^2 + c)^m} = \\ & = \frac{Ax + B}{(x^2 + ax + b)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + ax + b)^2} + \dots \\ & + \frac{Nx + M}{(x^2 + ax + b)^n} + \dots \end{aligned}$$

وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الحالة الأولى.

Solved Problems أمثلة محلولة

مثال 6 :

باستخدام الكسور الجزئية حل الكسر الآتي:

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2}$$

الحل:

أولاً: درجة البسط أقل من درجة المقام.

ثانياً: يوجد معادلة تربيعية غير قابلة للتحليل مكرر أي دمج بين الحالة الأولى والرابعة.

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 1)^2}$$

وبتوحيد المقامات ينتج أن

$$1 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)(x)(x^2 + 1) + (Dx + E)(x)$$

وبمساواة المعاملات:

$$X^4: \quad 0 = A + B \quad (1)$$

$$X^3: \quad 0 = C \quad (2)$$

$$X^2: \quad 0 = 2A + B + D \quad (3)$$

$$X^1: \quad 0 = C + E \quad (4)$$

$$X^0 \text{ الحد المطلق: } 1 = A \quad (5)$$

من المعادلة (2) و(4) نستنتج أن $C = E = 0$

ومن المعادلة (5) نستنتج أن $A = 1$

وبالتعويض في المعادلة (1) ينتج $B = -1$

وبالتعويض في المعادلة (3) ينتج $D = -1$

وعلى ذلك يكون الكسر الأساسي هو:

$$\frac{1}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} - \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$$

* * *

تمارين

حل كلاً من الكسور التالية:

$$1) \frac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$$

$$2) \frac{2x^2+10x-2}{(x+1)(x^2-9)}$$

$$3) \frac{4x^2+2x+4}{(2x+3)^3}$$

$$4) \frac{1}{(x-1)(x^2+x-4)}$$

$$5) \frac{x^2+2x+5}{(2x^2+6x+7)^2}$$

6) أوجد مجموع من الحدود

$$\frac{1}{1(5)} + \frac{1}{5(9)} + \frac{1}{9(12)} + \dots\dots\dots$$

ملاحظة:

(في هذا المثال نكتب الصورة العامة لهذه المتسلسلة على صورة

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} \text{ ثم نقوم بتحليل هذا باستخدام الكسور الجزئية)}$$

* * *