الباب الثالث

الاستنتاج الرياضي

Mathematical Induction

تعريف:

هو طريقة قوية في غاية من الأهمية نستخدمها لإثبات كثير من القوانين والعلاقات الرياضية التي لا يمكن الوصول إليها بطريقة مباشرة.

مثال:

ومثال ذلك إذا أردنا إثبات أن

$$1+3+5+ \ldots + (2n-1) = n^2 \qquad (1)$$

أي أن المطلوب إثبات أن مجموع أول " n " من الأعداد الفردية الصحيحة يساوي " n^2 " ولبرهنة ذلك فإننا نعتمد على الاستنتاج الرياضي.

طريقة الاستنتاج الرياضي

يكون هناك في الطرفان n من الحدود

أولا: نثبت أن الطرف الأيمن يساوي الطرف الأيسر في حالة $n=1$ وبعدها في حالة $n = 2$.

ثانيا: نفرض صحة القانون في حالة $n = k$.

ثالثا: نثبت القانون في حالة

$n = k+1$ عن طريق استخدام الحالة التي قبلها $n = k$.

نظرية: تكون قضية ما (قانون – نظرية) صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n حيث $n \geq n_0$ (حيث n_0 عدد صحيح موجب) إذا تحقق الشرطان :

(1) القضية صحيحة عندما $n = n_0$

(2) افتراض صحة القضية عندما $n = k$ يستلزم صحتها عندما $n = k+1$ (**من الطبيعي أن $k \geq n_0$**).

أمثلـــــــــــة محلولة Solved Problems

مثال: باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن:

(Prove by induction)

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{1}{2} n(n+1) \qquad (1)$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة (1) في الصورة:

1+2+3+ ...+ n = ½ n (n+1)

1) at n = 1

$$\textbf{L. H. S.} = \sum_{r=1}^{n} r = 1,$$

$$\textbf{R.H.S.} = \frac{1}{2} 1(1+1) = 1$$

at $n = 2$

$$\text{L. H. S.} = \sum_{r=1}^{2} r = 1 + 2 = 3,$$

$$\text{R. H. S.} = \frac{1}{2} 2(1+2) = 3$$

2) $n = k$ نفرض أن الحل صحيح في حالة

$$\sum_{r=1}^{k} r = \frac{1}{2} k(k+1)$$

3) at $n = k + 1$

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو أن

$$\sum_{r=1}^{k+1} r = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \qquad (2)$$

ونحاول إثبات ذلك من خلال المعادلة (2)

$$\text{L. H. S.} = \sum_{r=1}^{k+1} r = 1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + k + (k+1)$$

$$= \sum_{r=1}^{k} r + (k+1)$$

أي بإضافة **(k+1)** إلى الطرفين باستخدام (2)

نجد أن

$$\sum_{r=1}^{k+1} r = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) =$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = R.H.S.$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن

$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n}{2(n+2)}$$

الحل:

1) at $n = 1$

$$L.H.S. = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6},$$

$$R.H.S. = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$$

نفرض صحة الحل في حالة

$n = k$

$$\frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+2)} =$$

$$= \frac{k}{2(k+2)}$$

3) $n = k + 1$

$$\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\ldots+\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k+1}{2(k+3)}$$

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو:

$$L.H.S.=\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=$$
$$=[\frac{1}{2\times3}+\ldots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}]+\frac{1}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{k+1}{2(k+3)}$$

باستخدام الحالة الثانية والتعويض بها ويكون الطرف الأيسر هو:

$$\frac{k}{2(k+2)}+\frac{1}{(k+2)(k+3)}=\frac{1}{2(k+2)}\left[k+\frac{2}{(k+3)}\right]$$
$$=\frac{1}{2(k+2)}\left[\frac{k^2+3k+2}{(k+3)}\right]=\frac{(k+2)(k+1)}{2(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{(k+1)}{2(k+3)}=R.H.S.$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$1\times2+2\times3+\ldots\ldots..+n(n+1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

الحل:

1) at n = 1

$$L.H.S. = 1\times 2 = 2,$$

$$R.H.S. = \frac{1}{3}1(2)(3) = 2$$

2) n = k نفرض صحة الحل في حالة

$$1\times 2 + 2\times 3 + ... + k(k+1)$$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$$

3) n = k + 1

أولا: نكتب المطلوب إثباته

$$1\times 2 + 2\times 3 + ... + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$LHS = 1\times 2 + 2\times 3 + ... + (k+1)(k+2)$$

$$= [1\times 2 + ... + k(k+1)] + (k+1)(k+2)$$

بالتعويض من العلاقة الثانية ينتج أن

L. H. S. =

$$L.H.S. = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) =$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)[k+3] = R.H.S.$$

مثال:

باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = 1,

$$R.H.S. = \frac{1}{6}1(2)(3) = 1$$

2) at $n = k$ نفرض صحة الحل في حالة

$$\sum_{r=1}^{k} r^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)(2k+1)$$

3) at $n = k + 1$

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$\sum_{r=1}^{k+1} r^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(k+3)(2k+3)$$

وبالتعويض من الحالة الثانية ينتج أن

$$\sum_{r=1}^{k+1} r^2 = \sum_{r=1}^{k} r^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2)(2k+1)$$

$$+ (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)[k(k+2)(2k+1) + 6(k+1)] =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)[2k^3 + 5k^2 + 8k + 6] = \frac{1}{6}(k+1)(k+2).$$

$$.(k+3)(2k+3) = R.H.S.$$

مثال: باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت " n = n + 1"

أي أن كل عدد طبيعي يساوي العدد الذي يليه.

الحل:

1) at $n = 1$ L. H. S. = 1 ,

R. H. S. = "1+1" = 2

2) at n = k نفرض صحة الحل في حالة

" k = k + 1"

3) at n = k + 1

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو

"k +1 = k + 2

L. H. S. = "k + 2" = "(k + 1) + 1"

= " k + 1" = R. H. S.

مثال: باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$1-2^2+3^2-4^2\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{n-1}n^2=$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$$

الحل:

1) at n = 1 L. H. S. = 1 and

R. H. S. = $(-1)^0 \quad \frac{1(2)}{2}=1$

2) at n = k نفرض صحة الحل في حالة.

$$1-2^2+3^2-4^2\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^{k-1}k^2=$$

$$=(-1)^{k-1}.\frac{k(k+1)}{2}$$

3) at n = k + 1

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$1-2^2+3^2-4^2\ldots\ldots\ldots\ldots+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\left[1-2^2+3^2-4^2 \ldots\ldots\ldots+(-1)^{k-1}k^2\right]+(-1)^k(k+1)^2=$$

$$\text{L.H.S.}=(-1)^{k-1}\frac{k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2=(-1)^k\frac{(k+1)}{2}[-k+2k+2]$$

$$=(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$=RHS$$

مثال: باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

الحل:

1) at $n = 1$ $\quad \text{L. H. S.} = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$ and

$\text{R. H. S.} = 1 - \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

2) at $n = k$ نفرض صحة الحل في حالة

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots+\frac{k}{(k+1)!}=1-\frac{1}{(k+1)!}$$

3) at $n = k + 1$

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\frac{1}{(k+2)!}$$

$$LHS=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots+\frac{k+1}{(k+2)!}=\left[\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots\ldots+\frac{k}{(k+1)!}\right]$$

$$+\frac{k+1}{(k+2)!}=\left[1-\frac{1}{(k+1)!}\right]+\frac{k+1}{(k+2)!}=1-\left[\frac{1}{(k+1)!}-\frac{k+1}{(k+2)!}\right]$$

$$=1-\frac{1}{(k+2)!}[k+2-k-1]$$

$$=1-\frac{1}{(k+2)!}=RHS$$

مثال: باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$2+2^2+2^3+.......+2^n=2(2^n-1)$$

الحل:

1) at n = 1 L. H. S. = 2 and
R.H.S = 2 (2-1) = 2

2) at n = k نفرض صحة الحل في حالة

$$2+2^2+2^3+.......+2^k=2(2^k-1)$$

3) at n = k + 1

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$2+2^2+2^3+.......+2^{k+1}=2(2^{k+1}-1)$$

L. H.S. =

$$\left[2+2^2+2^3+......+2^k\right]+2^{k+1}=2(2^k-1)+2^{k+1}$$

$$=2^{k+1}-2+2^{k+1}$$

$$=2\left[2^{k+1}\right]-2=2(2^{k+1}-1)=RHS$$

مثال: باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت

$$1^3+3^3+5^3+.......+(2n-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

الحل:

1) at n = 1 L. H. S. = 1^3 = 1,
R. H. S. = 1 (2-1) = 1

2) at n = k نفرض صحة الحل في حالة

$$1^3+3^3+5^3+.......+(2k-1)^3=k^2(2k^2-1)$$

3) at $n = k + 1$

أولا: نكتب المطلوب إثباته وهو

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots + (2k+1)^3 =$$
$$= (k+1)^2(2(k+1)^2 - 1) = L.H.S.$$
$$\left[1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots\ldots + (2k-1)^3\right] + (2k+1)^3 =$$
$$= k^2(2k^2 - 1) + (2k+1)^3 = 2k^4 + 8k^3 + 4k^2 +$$
$$+ 6k + 1 = (k+1)^2.[2(k+1)^2 - 1] = R.H.S.$$

تمـــــــــارين

باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي اثبت العلاقات الآتية:

1) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \ldots\ldots + n$ حدا $= \frac{n}{n+1}$

2) اثبت قانون دى موافر باستخدام مبدأ الاستنتاج الرياضي.

3) $n = n + 1$"

اثبت أن كل عدد طبيعى يساوي العدد الذي يليه.

4) $1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} (n(n+1))/2$

5) $1/2! + 2/3! + 3/4! + \ldots + n/(n+1)! = 1 - 1/(n+1)!$

6) $2+2^2+2^3+\ldots+2^n = 2(2^2-1)$

7) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

* * *