الباب الثانى

نظرية المعادلات

Theory of equations

مقدمة :

درسنا في السابق حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية. المعادلة من الدرجة الأولى في الصورة:

$$ax + b = 0$$

ويكون الحل في الصورة:

$$x = -\frac{b}{a}$$

وبالنسبة للمعادلة من الدرجة الثانية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فيكون الحل طبقا للقانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهنا سوف ندرس طرق حل المعادلات من الدرجة الثالثة والرابعة.

Definitions : تعاريف

(1) جذر المعادلة:

هو قيم المتغير x التي تجعل قيمة الدالة مساوية للصفر. فمثلا يقال للعدد a جذرا للمعادلة $F(x)=0$ إذا كان $F(a)=0$.

(2) دالة كثيرة الحدود:

$$F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \qquad (1)$$

الدالة (**1**) تسمى دالة كثيرة الحدود **Polynomial** أو دالة جذرية صحيحة في **x** من الدرجة **n** ، حيث **n** عدد صحيح موجب، $a_0\neq 0$

وإذا كان x=a هو جذر للمعادلة فيكون (x-a) هو أحد عوامل كثيرة الحدود.

(3) إذا كانت الدالة F(x) من الدرجة **n** وكانت a جذرا للمعادلة ومكرر **k** من المرات فإن **a** تسمى صفرًا لكثيرة الحدود، ويكون في هذه الحالة

$$F(a)=F'(a)=F''(a)=\ldots\ldots\ldots=F^{k-1}(a)=0$$

نظريةالباقي : Theory of remainder

إذا قسمت كثيرة الحدود F(x) على القيمة (x-a) فإن نظرية الباقي هي: R=F(a)

البرهان:

إذا افترضنا أن Q(x) هو خارج قسمة F(x) على (x-a) وأن R هي الباقي أي أن:

$$F(x) = (x-a)Q(x) + R$$

بوضع x=a في كلا الطرفين نحصل على:

$$F(a) = R$$

طريقة هورنر للقسمة التركيبية

هي طريقة للقسمة تستخدم كبديل عن القسمة المطولة والتي نقسم فيها كثيرة حدود على معادلة من الدرجة الأولى أو معادلة من الدرجة الثانية قابلة للتحليل وهي تعتمد على النظرية التي تنص على

$$\mathbf{F(x) = (x - a)\ Q(x) + R} \qquad \mathbf{(1)}$$

حيث إننا إذا أردنا قسمة كثيرة الحدود F(x) على (x-a) فإننا نكتب معاملات F(x) بالترتيب، والتي ليست موجودة يكتب مكانها (0) ثم نقوم بكتابة a في الطرف الآخر

ويكون

$$\begin{array}{l|l} a & a_n \ldots a_{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a_0 \\ & \ldots\ldots a_n a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & a_n \ldots (a_{n-1} + a_n a_0) \ldots\ldots\ldots + R \end{array}$$

الناتج هو معادلة أقل منها بدرجة

امثلة محلولةSolved Proplems

مثال1:

أوجد خارج قسمة المقدار

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

على $(x+1)$.

الحل

$(x + 1) = [x - (-1)]$

أولا نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة

	2	-7	7	-2
-1		-2	9	-16
	2	-9	16	**R** = -18

فيكون الباقي هو **R = -18**

ويكون خارج القسمة هو:

$$\mathbf{Q(x) = 2x^2 - 9x + 16}$$

مثال2:

أوجد خارج قسمة

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

على $(x-2)$.

الحل:

$(x - 2) = [x - (+2)]$

أولا نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة

$$
\begin{array}{c|cccc|c}
 & 2 & -7 & 7 & -2 & \\
2 & & & & & \\
 & & 4 & -6 & 2 & \\
\hline
 & 2 & -3 & 1 & & R=0
\end{array}
$$

فيكون الباقي هو: $\mathbf{R = 0}$

ويكون خارج القسمة هو:

$$\mathbf{Q(x)= 2x^2 -3x + 1}$$

القسمة على المقدار(ax-b):

الدالة F(x) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\mathbf{F(x) = (ax - b)\ Q(x) + R}$$
$$\mathbf{= a(x\text{-}b/a)Q(x)+R}$$

مثال3:

أوجد خارج قسمة المقدار

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x + 5$$

على $(2x - 1) = 2[x - (1/2)]$

الحل: من الواضح أن $a=2$ ، $b=1$ أي أن

$b/a = 1/2$

أولا: نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة

(1/2)	1	-3	4	1	5
		(1/2)	-(5/4)	(11/8)	(19/16)
	1	-(5/2)	(11/4)	(19/8)	R= (99/16)

ويكون الباقي هو: **R = (99/16)**

وخارج القسمة هو:

$$\mathbf{Q(x) = {}^{1}/_{2}[x^3-(5/2)x^2 + (11/4)x + (19/8)]}$$

القسمة على المقدار (x-a)(x-b)

مثال4: أوجد خارج قسمة المقدار $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 6$

على $(x + 1)\ (x - 1)$

الحل: أولا: نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة على أحد القوسين ثم نكرر نفس العملية على القوس الآخر.

1	3	-4	2	6
		3	-1	1
	3	-1	1	$7 = R_1$
-1		-3	+4	
	3	-4	$5 = R_2$	

ويكون للدالة خارج القسمة $Q_1(x) = 3x - 4$

والباقي في هذه الحالة معادلة من الدرجة الأولى الشكل العام لها هو

$R = R_2(X-a) + R_1$

بمعنى أن

$R = 5(x-1) +7=5x -5+7= 5x+2$

مثال5: أوجد خارج قسمة المقدار

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 + 6x + 13$$

على $$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$

الحل:

أولا: نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة على أحد القوسين ثم نكرر نفس العملية على القوس الآخر.

2	1	–5	9	0	6	13
		2	-6	6	12	36
	1	-3	3	6	18	$49= R_1$
1		1	-2	1	7	
	1	-2	1	7	$25 = R_2$	

تكون للدالة خارج القسمة

$$Q(x) = X^3 - 2X^2 + X + 7$$

ويكونَ الباقي في هذه الحالة معادلة من الدرجة الأولى الشكل العام لهـــا هو:

$$R = R_2(X-a) + R_1$$

بمعنى أن

$$R = 25(X-2) + 49$$

*   *   *

تمارين

استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد خارج القسمة والباقي للدوال الآتية:

1) $f(x) = 3x^6 - 7x^5 + 5x^4 - x^2 - 6x - 8$

على (x + 2)

2) $f(x) = 5x^5 - 7x^3 + 6x^2 - 2x + 4,$

على (x - 1)

3) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13$

على $(x^2 - 3x + 2)$

4) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$

على (2x + 3)

5) $f(x) = 5x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$

على (x - 2)(2x-3)

* * *

خواص كثيرة الحدود

Polynomial properties

الخاصية الأولى: العلاقة بين معاملات كثيرة الحدود وجذورها.

إذا كانت هناك كثيرة حدود من الدرجة n على الصورة

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_nx^0,$$

وكانت $x_1, ..., x_n$ هي جذور كثيرة الحدود.

و الآن سوف نذكر بعض هذه العلاقات بين هذه الجذور والمعاملات $a_0, a_1, ..., a_n$

(1) إذا كانت F(x) من درجة n فإن لها عدد n من الجذور بالتحديد وليس ضروريًّا أن تكون هذه الجذور مختلفة.

(2) إذا كانت جميع معاملات كثيرة الحدود F(x) حقيقية فإن الجذور التخيلية (إن وجدت) يجب أن تكون مقترنة

بمعنى أنه إذا كان (a+ib) جذرا للمعادلة فان المرافق (a-ib) يجب أن يكون أيضا جذرا من جذور المعادلة.

(3) إذا كانت $x_0, x_1, ..., x_n$ هي جذور المعادلة فإن:

$$1)\ \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + ... + x_n = \frac{-a_1}{a_0}$$

$$2)\ \sum_{i,j=1}^{n} x_ix_j = x_1x_2 + x_1x_3 + ... = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\sum_{i.j.k=1}^{n} x_i x_j x_k = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots = \frac{-a_3}{a_0}$$

.

3) .

.

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

مثال 1: في المعادلة من الدرجة الثالثة:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

إذا كانت x_1, x_2, x_3 جذورًا للمعادلة فإن:

1) $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$

2) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_2}{a_0}$

3) $x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$

مثال 2: إذا كانت x_1, x_2, x_3 هي جذور المعادلة

$x^3 - 2x + 1 = 0$ ... (I)

فاثبت أن:

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$

2) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3$

3) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8$

الحل : من الخاصية الأولى السابقة يكون

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -2, a_3 = 1$$

a) $\therefore x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} = 0$

b) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2$

c) $x_1x_2x_3 = 1 \Rightarrow$ From a), b), c) $\Rightarrow$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$
$$= 0 - 2(-2) = 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$
$$= 0 - 2(-2) = 4$$

$(x_1 + x_2 + x_3)^2 =$

$(x_1 + x_2 + x_3)$

$\times(x_1 + x_2 + x_3)$

$x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3$

$x_2x_1 + x^2{}_2 + x_2x_3$

$x_3x_1 + x_2x_3 + + x^2{}_3$

$\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \quad + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) \quad + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

(2) بما أن الثلاثة جذور x_1,x_2,x_3 هي جذور للمعادلة (I)

$$x_1^3 - 2x_1 + 1 = 0,$$
$$x_2^3 - 2x_2 + 1 = 0,$$
$$x_3^3 - 2x_3 + 1 = 0$$

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 0.$$
$$\Rightarrow (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(0) + 3 = 0,$$
$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = -3$$

(3) بما أن الثلاثة جذورهي جذور للمعادلة فلابد أن يحققوها

وبالضرب في x

$$x_1^4 - 2x_1^2 + x_1 = 0,$$
$$x_2^4 - 2x_2^2 + x_2 = 0,$$
$$x_3^4 - 2x_3^2 + x_3 = 0.$$

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن

$$(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$
$$\Rightarrow (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 2(4) + (0) = 0$$
$$(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) = 8.$$

ملاحظة:

إذا اختلفت إشارتي $F(b),F(a)$ فإن أحد جذور المعادلة $F(x)=0$ يقع بين a,b.

تعريف:

إذا كانت كثيرة الحدود مرتبة ترتيبا تنازليًّا حسب قوى x وكان فيها حدين متتاليين مختلفين في الإشارة فإننا نقول: إن كثيرة الحدود تحتوي على تغير واحد في الإشارة.

قاعدة ديكارت للإشارات

Descart`s Rule of signs

المعادلة F(X) ليس لها جذور موجبة حقيقية أكثر من عدد التغيرات في إشارة كثيرة الحدود ويكون عدد الجذور الموجبة مساوي لعدد التغيرات في الإشارة أو أقل منه بمقدار زوجي.

كما أن عدد الجذور الحقيقية السالبة لا تزيد عن عدد التغيرات في إشارة الدالة F(-x) .

مثال: حدد إشارات جذور المعادلة

$$F(x) = 2x^5 - 4x^4 - 9x - 2$$

الحل :

بما أن الدالة F(x) بها تغير واحد في الإشارات فإن F(x)=0

*يكون لها جذر موجب واحد على الأكثر وبما أن

$$F(-x) = -2x^5 - 4x^4 + 9x - 2$$

*بها تغيران في الإشارة فتكون الدالة لها على الأكثر جذران سالبان

*والجذران الآخران لابد وأن يكونا تخيليان على الأقل أو يكون لها أربعة جذور تخيلية وليس لها جذور سالبة على الإطلاق.

الخاصية الثالثة: تحويل المعادلات

نحتاج في بعض الأحيان إلى تحويل معادلة إلى أخرى وتربط جذور المعادلتان علاقة معا.

أ- تكوين معادلة جذورها مكبرة k مرة لجذور معادلة معلومة :

يتم ذلك بضرب المعاملات لكثيرة الحدود الأصلية F(x)

في قوى k المختلفة تبعا للقاعدة التالية:

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots + a_n,$$

فتكون المعادلة التي جذورها تساوي k مرة من هذه المعادلة:

$$g(x) = a_0 x^n + a_1 k^1 x^{n-1} + a_2 k^2 x^{n-2} \dots + a_n k^n.$$

مثال: كون المعادلة التي جذورها عشر مرات جذور المعادلة:

$a)\qquad 2x^3 - 4x^2 + 3x - 5 = 0$

$b)\qquad 5x^4 - 3x + 8 = 0$

الحل:

$a)\qquad 2x^3 - 40x^2 + 300x - 5000$

$b)\qquad 5x^4 - 3000x + 80000 = 0$

تكبير (تصغير) جذر المعادلة

هو تكوين معادلة أخرى تزيد أو تنقص جذورها بمقدار معين وذلك يـتم تبعا لما سيوضح بالأمثلة الآتية:

Solved Problems أمثلة

مثال1: أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x)=x^4+6x^3+12x^2+11x+1$$

الحل: نقوم بقسمة الدالة على $(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$

ولكن نستمر حتى النهاية

-2	1	6	12	11	1
		-2	-8	-8	-6
	1	4	4	3	$R_1=-5$
		-2	-4	0	
	1	2	0	$3=R_2$	
		-2	0		
	1	0	$0=R_3$		
		-2			
	1	$-2=R_4$			
	$1=Q_n$				

حيث Q_n تأخذ الشكل:

$$g(y) = Q_n(y).y^n + R_n.y^{n-1} \ldots + R_1$$

فتكون المعادلة الجديدة التي تزيد جذورها بمقدار 2 هي:

$$g(y) = y^4 - 2y^3 + 3y - 5$$

$$put \qquad y = (x+2) \Rightarrow F(x) = (x+2)^4 - 2(x+2)^3 + 3(x+2) - 5$$

مثال2: أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

الحل: نقوم بقسمة الدالة على $(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ ولكن نستمر حتى النهاية

	2	-3	4	-5	6
2					
		4	2	12	14
	2	1	6	7	20=R_1
		4	10	32	
	2	5	16	39=R_2	
		4	18		
	2	9	34=R_3		
		4			
	2	13=R_4			
	2=Q_n				

تكون المعادلة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار 2 هي

$$g(y)=2\left(x-2\right)^{4}+13y^{3}+34y^{2}+39y+20$$

وبوضع

$$y=\left(x-2\right)\Rightarrow$$
$$F(x)=2(x-2)^{4}+13(x-2)^{3}+34(x-2)^{2}+$$
$$+39(x-2)+20=0$$

الحلول التقريبية للمعادلات

Approximate solutions of equations

هي عبارة عن طرق لإيجاد حلول تقريبية للمعادلات تكون قريبة من الحل الأساسي ولكنها لاتساويه وتستخدم في المعادلات التي يصعب الحصول منها على الحل الأساسي، وهناك ثلاث طرق:

1) طريقة نيوتن.

2) طريقة هورنر.

3) طريقة الوضع الزائف.

طريقة نيوتن

Newton`s Method

هذه الطريقة يستخدم فيها التكرار **(iteration)** لحل المعادلة **F(x)=0** حيث F(x) لابد وأن يكون لها المشتقة الأولى F`(x). هذه الطريقة

مشهورة جدًا لأنها سهلة الاستعمال وتعطي حلول تقريبية جيدة.

تعتمد هذه الطريقة على الخطوات الآتية:

إذا أعطيت الدالة **F(x)** التي لها **مشتقاتها التفاضلية** وأيضا أعطيت نقطة البداية $\mathbf{x_0}$ فيكون **التقريب الأول** هو x_1 حيث :

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

وبالتالي التقريب رقم n+1 هو:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad (1)$$

ومن الواضح أنه لابد من وجود نقطة للبداية x_0 وتعين إما **بفرض** أي: نقطة أو بتعيين فترة يوجد بها الجذر الحقيقي ولتكن [a, b] ثم نعين

قيمة النقطة

$$x_0 = \frac{b+a}{2}$$

نتوقف عن تعيين القيم التقريبية إذا وجدنا أن هناك جذران الفرق بينهم بسيط جدًا أو يتحدد في المسألة عدد المرات المطلوب إيجاد التقريب لها.

<u>مثال</u>

استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة التالية

$$F(x) = x^3 + x - 1$$

<u>الحل</u> باستخدام طريقة نيوتن للحل يكون القانون العام للحل هو:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} \qquad (1)$$

ولكن المشكلة هنا أنه لا توجد نقطة بداية فنقوم بتعين فترة يقع بها الجذر وهي الفترة [0, 2]

ملاحظة: يوجد أكثر من فترة ولك الاختيار، المهم أن نقطة البداية هي النقطة التي تتوسط تلك الفترة وهي $x_0 = \frac{b+a}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$

وبوضع n=0

$$\therefore x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + x_0 - 1}{3x_0^2 + 1} = 1 - \frac{1+1-1}{3+1} = 0.75,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + x_1 - 1}{3x_1^2 + 1} = 0.750.75 - \frac{0.1718}{2.6875}$$
$$= 0.686047$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 + x_2 - 1}{3x_2^2 + 1} = 0.686047 - \frac{(0.686047)^3 + (0.686047) - 1}{3(0.686047)^2 + 1}$$
$$= 0.68234,$$

$$x_4 = 0.6823278$$

يتضح من النتائج أن x_4 هي الحل لأن الفرق بينها وبين x_3 أقل ما يمكن، أي أن: $x_3 - x_4 = [(1.177865).(10)]^{-5} \to 0$

* * *

طريقة هورنر

Horner`s Method

فى بعض الأحيان لا نستطيع أن نوجد جذور المعادلة تحليليًا ومن ثم فمن الطبيعي أن نستخدم طريقة تقريبية لإيجاد هذه الجذور عدديًا. ومن هـــذه الطرق **طريقة هورنر**.

*أولا: نبدأ باستخدام قاعدة الإشارات

*والعلاقات بين الجذور لتعيين نقطة الانطلاق التي سنقوم بقسمة المعادلة عليها وذلك.

*لتعيين المعادلة التي تنقص جذورها بهذا المقدار.

*ونعين حل هذه المعادلة الجديدة وذلك بحذف القيم الكبيرة.

*ونكرر العملية هذه أكثر من مرة ثم نقوم بجمع هذه الزيادات كلها.

مثال: استخدم طريقة هورنر لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$$

الواقع بين $(2,3)$.

الحل: باستخدام طريقة هورنر حيث إن

$$f(3) = (3)^4 - 12(3)^2 + 12(3) - 3 \Rightarrow$$

$$f(3) = 81 - 108 + 36 - 3 = (107) - (111) = 6$$

وأيضا

$$f(2) = (2)^4 - 12(2)^2 + 12(2) - 3 \Rightarrow$$
$$f(2) = 16 - 48 + 24 - 3 = (40) - (51) = -11$$

فنتيجة لتغير الإشارة يعني أن أحد جذور المعادلة يقع في تلــك الفتــرة وبالتالي تكون الفترة المناسبة لبداية الحل. وطريقة هورنر تتلخص فــي خطوات ثلاث.

(1) نحصل على معادلة تنقص جذورها بمقدار "2" وذلك كما يلي:

	1	0	-12	12	-3
2					
		2	4	-16	-8
	1	2	-8	-4	$-11=R_1$
		2	8	0	
	1	4	0	$-4=R_2$	
		2	12		
	1	6	$12=R_3$		
		2			
	1	$8=R_4$			
	1				

تكون المعادلة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار 2 هي

$$g(y) = y^4 + 8y^3 + 12y^2 - 4y - 11 = 0$$

ولتحويل الحسابات إلى التعامل مع أرقام صحيحة نضرب جذور المعادلة

(1) في العدد 10 لنحصل على

$$y^4+80y^3+1200y^2-4000y-110000=0 \ldots \quad (2)$$

جذورها تقع في الفترة (0,10) بإهمال الحدين الأولين في المعادلة (2) نجد أن لها جذر موجب وحيد يقع في الفترة (8,9) وبذلك يكون الرقم العشري الأول في جذر المعادلة الأصلية هو (0.8) .

نعمل على إنقاص جذر المعادلة (2) بمقدار 8 نحصل على

$$z^4-112\,z^3+350\,z^2+32608\,z-21044=0 \qquad (3)$$

جذورها تقع بين (0,1) ثم نضرب الجذر في العدد 10 نحصل على

$$z^4-(1120)\,z^3+(35000)\,z^2+(32608000)\,z-210440000=0 \quad (4)$$

نلاحظ أن الحدين الآخرين في معادلة (4) هما اللذان يؤثران على قيمة الجذر ولذلك نهمل الحدود الأخرى عند التجربة في تعين الفترة التي تقع فيها الجذور ومن ثم نرى أن المعادلة (4) لها جذر يقع في الفترة (6,7) وبالتالي فإن الجذر الموجب للمعادلة الأصلية لرقمين عشريين هو $x=2.86$

طريقة أخرى لشرح الخطوة السابقة:

بإهمال الحدين الأولين في المعادلة (2) نجد أن لها جذر موجب وحيد يقع في الفترة (8,9) وبذلك يكون الرقم العشري الأول في جذر المعادلة الأصلية هو (0.8) . نعمل على إنقاص جذر المعادلة (2) بمقدار 8 نحصل على

$$g(y) = y^4 + 8y^3 + 12y^2 - 4y - 11 = 0$$

نهمل الحدود الكبيرة ينتج أن

$$g(y) = 12y^2 - 4y - 11 = 0$$

1) ومنها نستطيع إيجاد قيمتين لـــ Y من خلال القانون العام وهما 0.805,1.13.- نعوض في المعادلة ونختار القيمة التي تعطي أقـــل قيمة ونكون المعادلة التي ينقص جذورها بمقـــدار القيمـــة المطلقـــة 0.8 تقريبيًا لأقرب رقم عشري.

0.8	1	8	12	-4	-11
		0.8	7.04	15.232	8.9856
	1	8.8	19.04	11.232	-2.0144
		0.8	7.68	21.376	
	1	9.6	26.72	32.608	
		0.8	8.32		
	1	10.4	35.04		
		0.8			
	1	11.2			
	1				

فتكون المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 0.8 عن المعادلة g(y)

هي: $h(z) = z^4 + 9.6z^3 + 31.16z^2 + 29.5z - 2.8336$

بإزالة الحدود الكبيرة وإيجاد جذور المعادلة

$z = 0.058 \quad or \quad z = -0.9887$

وبالتعويض عن قيم في المعادلة ونأخذ القيمة التي تعطي أقل ناتج

$\therefore z \cong 0.06$

2) بنفس الطريقة نقوم بإزالة الحدود الكبيرة وإيجاد الحل لأقرب رقم مئوي ويكون 0.06 ويكون الحل النهائي هو

$x = 2 + 0.8 + 0.06 = 2.86$

وهو الحل التقريبي الذي حصلنا عليه.

طريقة الوضع الزائف

Method of false position

تتلخص تلك الطريقة في أنه إذا كانت F(x) دالة مستمرة في الفترة $[a_n, b_n]$ وتحقق الشرط:

$$F(a_0).F(b_0) < 0$$

(أي أن إشارتي $F(a_0), F(b_0)$ مختلفتين) فإن الحل التقريبي **بطريقة التكرار(iteration) هو:**

$$C = \frac{a_n F(b_n) - b_n F(a_n)}{F(b_n) - F(a_n)}$$

وبعد حساب القيمة C يبقى أمامنا ثلاث خيارات:

(1) إذا كانت F(C)=0 فتكون القيمة C هي الجذر المطلوب.

(2) أما إذا كانت $F(a_n).F(C) < 0$

نضع $a_{n+1} = a_n, \qquad b_{n+1} = c$

(3) ماعدا ذلك نضع

$a_{n+1} = C, \qquad b_{n+1} = b_n$

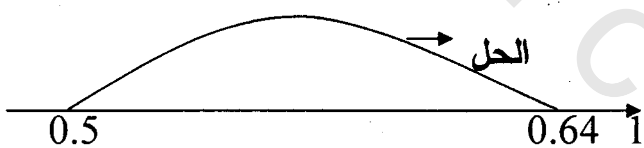
مثال: استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة:

$$F(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

القريب من النقطة x=1.

الحل: باستخدام طريقة الوضع الزائف أولا نبحث عن فترة يكون بها الحل وذلك عن طريق إيجاد دوال بعض النقط حتى نحصل على نقطتين تتبادلان الإشارة مثل **$f(1) = 1$**, **$F(0.5) = -0.25$**

إذن يمكن اختيار **$a_0=0.5$** , **$b_0=1$**



فيكون الحل موجود في الفترة [0.5 , 1] وعلى ذلك نستطيع تعيين قيمة الـ x_1 والحل التقريبي الأول باستخدام القانون:

$$x_1 = \frac{a_0F(b_0) - b_0F(a_0)}{F(b_0) - F(a_0)} =$$

$$= \frac{0.5 \times 1 - 1 \times (-0.25)}{1 - (-0.25)} = C = 0.6$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية بالقيمة $x_1 = 0.6$ فنحصل على قيمة دالة النقطة الجديدة $F(0.6) = -0.04$

وعلى ذلك يكون الحل يقع في الفترة [0.6,1] وبوضع

$a_{n+1}=0.6,\ b_{n+1}=1$

$$x_2 = \frac{(0.6).1 - (1)(0.04)}{1 + 0.04} = 0.615384615$$

ونكرر نفس القانون لكن بالنسبة للفترة الجديدة وهكذا حتى نتوقف نتيجة لتكرار جذران.

تمارين

(1) أوجد الحل الحقيقي للمعادلات الآتية باستخدام طريقة الوضع الزائف

$(1)x^4 = 3,$

$(2)x^3 - 5x = 6,$

$(3)x^3 - 2x = 5.$

(2) باستخدام الثلاث طرق أوجد مجموعة الحلول التقريبية لإيجاد الجذور الحقيقية للمسائل التالية:

1) $f(x) = x^3 - 5x + 3$ 2) $f(x) = x^4 - x^3 - 2x - 34$

3) $f(x)=x^3-3.5x^2+4.79x-1$ 4) $f(x)=x^3-2x+5$

(3) استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة:

$i) F(x)=3x^6-7x^5+5x^4-x^2-6x-8$

على $(x+2)$

$ii) F(x)=5x^5-7x^3+6x^2-2x+4$

على $(x-1)$

$iii) F(x)=x^5-4x^4+9x^3-6x^2-16x+13$

على (x^2-3x+2)

(4) إذا كانت $F(x)=2x^3-8x^2+5$

أوجد g(x) التي تزيد عن جذور F(x) بمقدار 2 وأيضا h(x) التي تنقص جذورها بمقدار 3 عن g(x).

(5) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة:

$F(x)=x^4-2x^3-3x^2-5x+4$

(6) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي لكل من

$2x^3+3x-4=0.$ $3x^3+x^2-11x+6=0,$

* * *

المعادلات من الدرجة الثالثة

Equations of third degree

Kardan`s Method طريقة كاردان

أولا: معلوم الشكل العام للمعادلة من الدرجة الثالثة هو:

$$x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 = 0$$

ولتطبيق طريقة كاردان لابد وأن يكون معامل x^2 يساوي الصفر وللتخلص من هذا نتبع الآتى قبل إجراء الطريقة:

نقوم بإجراء تعويضة وهي:

$$x = y - \frac{b_1}{3}$$

وبذلك نحصل على معادلة خالية من الحد التربيعي ويكون شكلها العام:

$$y^3 + ay + b = 0$$

ثم نقوم بتطبيق الطريقة وهي تتلخص في ثلاث احتمالات للحل تعتمد على قيمة معينة اسمها المميز: Δ

الاحتمال الأول: أن تكون قيمة المميز قيمة موجبة (أكبر من الصفر)

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \succ 0$$

في هذه الحالة يكون للمعادلة جذر حقيقي وجذران تخيليان مترافقان

ويمكن تعيينهم عن طريق حل المعادلة $m^2 - bm - (\frac{a}{3})^3 = 0$

تم نوجد الجذور m_1, m_2 ثم نعين القيم $l = (m_1)^{\frac{1}{3}}, n = (m_2)^{\frac{1}{3}}$

ومنها تكون الجذور الثلاث هي $(l + n, lw + nw^2, lw^2 + nw)$

الاحتمال الثاني:

أن تكون قيمة المميز Δ تساوي الصفر $\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$

في هذه الحالة يكون للمعادلة **جذور حقيقية ومنها جذران متساويان**

ونعينهم عن طريق حل المعادلة $m^2 - bm - (\frac{a}{3})^3 = 0$

ثم نوجد الجذور $m_1 = m_2$ ثم نعين القيم $l = (m_1)^{\frac{1}{3}}$ ومنها تكون الجذور الثلاث هي $(2l, -l, -l)$

الاحتمال الثالث: أن تكون قيمة المميز أقل من الصفر

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \prec 0$$

وفي هذه الحالة نعين الجذور من العلاقة

$$2r^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\theta + 2\pi k}{3} \qquad , k = 0, 1, 2$$

حيث إن قيم المتغيرات هي

$$r^2 = -\left(\frac{a}{3}\right)^3, \qquad \cos\theta = -\frac{b}{2r}$$

Solved Problems أمثلة

مثال1: حل المعادلة

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

الحـــــل: المعادلة خالية من الحد التربيعي إذًا نبدأ الحل

عن طريق تعيين إشارة المميز بالمقارنة مع المعادلة العامة:

$$x^3 + ax + bx = 0$$

نحصل على: a = -9, b=28

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = (14)^2 + (-3)^3 \succ 0$$

وعلى ذلك تكون المعادلة من الدرجة الثانية هي:

$$m^2 - bm - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

$$m^2 - 28m + 27 = 0$$

ويكـــون حلهـــا هـــو $m_1 = -1, m_2 = -27$ وعلـــى ذلـــك قيمـــة $l = -1, n = -3$ ومنها الجذور للمعادلة المعطاة هي:

$$\left(l + n, lw + nw^2, lw^2 + nw\right)$$

$$l+n=-4,\Rightarrow\left(-4,-w-3w^2,-w^2-w\right)$$

$$\because w^2=-\frac{1}{2}-\frac{-\sqrt{3}}{2}i,w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

فإن الجذور هي: **(-4, 2+3i ,2-3i)**

مثال2: حل المعادلة

$$x^3-15x^2-33x+847=0$$

الحل: أولا نلاحظ أن المعادلة تحتوي على حد تربيعي لابد من التخلص منه قبل بداية الحل وذلك عن طريق التعويض

$$x=y-\frac{a_1}{3a_0}=y+5$$

وباستخدام التعويض المباشر أو أي طريقة أخرى (هورنرللقسمة التركيبية)

5	1	-15	-33	847
		5	-50	-415
	1	-10	-83	432
		5	-25	
	1	-5	-108	
		5		
	1	0		
	1			

نحصل على المعادلة الخالية من الحد التربيعي:

$$y^3 - 108y + 432 = 0 \qquad (3)$$

وبالمقارنة بالمعادلة:

$$y^3 + ay + b = 0$$

ويمكن إجراء الحل حيث $a = -108 \, , \, b = 432$

ومنها إيجاد قيمة المميز

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = (216)^2 + (-36)^3 = 0$$

وعلى ذلك نكون المعادلة هي:

$$\because m^2 - bm - (-a/3)^3 \Rightarrow$$

$$m^2 - 432m + (108/3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$m = \frac{432 \pm \sqrt{(432)^2 - 4(108/3)^3}}{2} = 216$$

وعلى ذلك قيمة

$m_1 = m_2$ ثم نعين القيم $l = (m_1)^{\frac{1}{3}}$ ومنها تكون الجذور الثلاث هي $(2l, -l, -l)$

$$\therefore l = (b/2)^{1/3} = \sqrt[3]{216} = 6$$

ومنها الجذور للمعادلة (3) هي (6,6,-12)وتكون الجذور الأصلية للمعادلة هي: (-7,11,11)

مثال3:

حل المعادلة $x^3 - 6x + 4 = 0$

الحل:

أولا المعادلة خالية من الحد التربيعي إذا نبدأ الحل عن طريـــق تعيـــين إشارة المميز حيث: a=-6, b=4

ومنه المميز:

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 \prec 0$$

وعلى ذلك تكون طريقة الحل هي إيجاد

$$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad \cos\theta = \frac{-b}{2r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

وتكون الجذور هي

$$2r^{\frac{1}{3}} \cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} = 2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi + 8\pi k}{12},$$

$$k = 0,1,2. \Rightarrow$$

$$x_1 = 1.82, \qquad x_2 = -2.6, \qquad x_3 = 0.732.$$

إذن مجموعة الحل هي: $(1.82, \quad -2.6, \quad 0.732)$

المعادلات من الدرجة الرابعة

Equations of fourth degree

طريقة فراري Ferrary Method

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الرابعة هي:

$$a_0x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (1)$$

وتتلخص طريقة الحل فيما يلي:

أولا : نجعل معامل x^4 يساوي الواحد وذلك بالقسمة على a_0 ثم نكتب المعادلة على الصورة

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

ثانيا: بطريقة إكمال المربع:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + l\right)^2 = \frac{a^2}{4}x^2 + l^2 + (2l)x^2 + alx - bx^2 - cx - d,$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{a}{2}x + l\right)^2 = (\frac{a^2}{4} + 2l - b)x^2 + (al - c)x + l^2 - d$$

ثم نختار l بحيث يكون الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة على الصورة:

$$(mx + n)^2$$

وتصبح المعادلة الأخيرة النهائية على الصورة:

$$\left(x^2+\frac{a}{2}x+l\right)^2=(mx+n)^2 \qquad (2)$$

وبذلك يكون

$$m^2=\frac{a^2}{4+2l-b},$$
$$n^2=l^2-d, \qquad (3)$$
$$mn=\frac{1}{2}(al-c)$$

ومن (3) يكون:

$$\left(\frac{a^2}{4}+2l-b\right)(l^2-d)=\frac{1}{4}(al-c)^2$$

وهذه معادلة من الدرجة الثالثة في l ونوجد أحد جذورها بأبسط الطرق الممكنة (طريقة التخمين) ونعوض بقيمته في (3) فنحصل على قيمتي m,n ثم نعوض بقيمة m,n في (2) نحصل على معادلتين من الدرجة الثانية

$$x^2+\frac{a}{2}+l=\pm(mx+n)$$

ومنها نحصل على الأربع جذور للمعادلة (1) وستوضح الطريقة كما في المثال التالي:

مثال:

حل المعادلة

$$x^4+4x^3-6x^2+20x+8=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

الحل: $\because a = 4, \quad b = -6, \quad c = 20, \quad d = 8$

أولا نكتب المعادلة (1) في الصورة

$$x^4 + 4x^3 = 6x^2 - 20x - 8$$

وبعدها نكتب الطرف الأيسر في صورة إكمال مربع والباقي للطرف الآخر:

$$\because \left(x^2 + \frac{a}{2}x + l\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 2l - b\right)x^2 + (al - c)x + \left(l^2 - d\right)$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة الأصلية نحصل على

$$\left(x^2 + 2x + l\right)^2 = (10 + 2l)x^2 + (4l - 20)x$$
$$+ (l^2 - 8) = (mx + n)^2 \qquad (2)$$

وبتطبيق القاعدة

(معامل x^2)(الحد المطلق) = مربع (نصف معاملx)

وعلى ذلك يكون: $(10 + 2l)(l^2 - 8) = (2l - 10)^2$

ومنها نحصل على المعادلة التكعيبية التالية:

$$l^3 + 3l^2 + 12l - 90 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

ويمكن إيجاد أحد جذور هذه المعادلة باستخدام التخمين فنجد أن : $l = 3$

تحقق المعادلة (3) وأخيرا نجد أن:

$m^2 = 16 \quad , \quad n^2 = 1 \quad ,mn = 4 \Rightarrow m = 4,\ n = -1,$

$$\Rightarrow \left(x^2+2x+3\right)^2 = (4x-1)^2 \Rightarrow \left(x^2+2x+3\right) = \pm(4x-1)$$

أولا:

$$\left(x^2+2x+3\right) = (4x-1)$$

ومنها المعادلة التربيعية الأولى هي

$$x^2-2x+4$$

ويكون حلها

$$x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

والمعادلة الثانية هي

$$\left(x^2+2x+3\right) = -(4x-1)$$

وبالاختصار

$$x^2+6x+2$$

وتكون جذورها هي

$$x = (-3 \pm \sqrt{7})$$

وتكون الجذور الأربع هي

$$.(1 \pm \sqrt{3}i), (-3 \pm \sqrt{7})$$

* * *

تمارين

حل المعادلات الآتية:

$$1)x^3 - 18x - 35 = 0,$$

$$2)x^3 - 12x + 16 = 0,$$

$$3)x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0,$$

$$4)x^4 + 6x^3 + 12x^2 14x + 3 = 0,$$

$$5)x^4 + 32x - 60 = 0,$$

$$6)x^3 - 12x - 16 = 0,$$

$$7)(x-3)(x-5)(x+6)(x+8) = 504,$$

$$8)x^3 - 12x - 9 = 0,$$

$$9)x^3 - 3x + 1 = 0$$

* *