الباب السادس عشر
حلول بعض تمارين الهندسة التحليلية

حل تمارين الباب التاسع

التمرين الاول :

(1) معادلة المستقيم المار بنقطتين هي:

$$\frac{x-x_1}{y-y_1}=\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$

بما أن النقطتين هما:

$$\begin{array}{cccc} (2, & 4) \;, & (1, & -6) \\ \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow \\ x_1 & y_2 & x_2 & y_2 \end{array}$$

∴ معادلة المستقيم هي:

$$\frac{x-2}{y-4}=\frac{1-2}{-6-4}=\frac{1}{10}\Rightarrow 10x-20=y-4$$

$$\therefore 10x-y-16=0$$

(2) بما أن المستقيم يقطع من محور X جزءًا طوله 4

∴ المستقيم يمر بالنقطة $\begin{array}{cc} (4, & 0) \\ \swarrow & \searrow \\ x_1 & y_1 \end{array}$ وبالتالي تكون معادلة المستقيم هي:

$$(y-y_1)=(x-x_1)\tan\theta$$

$$\therefore y - 0 = (x - 4)\tan 250^o$$

$$\therefore y = \frac{-\sqrt{3}}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}x\,4$$

$$\therefore \sqrt{3}x + 3y - 4\sqrt{3} = 0$$

(3) بما أن المستقيم يوازي محور Y

$\therefore$ المستقيم عمودي على محور X

$$\therefore \theta = 90^o$$

$$\therefore slope = \tan\theta = \frac{1}{0}$$

(undefined)

وبالتالي تكون معادلة المستقيم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Rightarrow \frac{y + 3}{x - 4} = \tan\theta \Rightarrow \frac{x - 4}{y + 3} = \cot\theta = 0$$

$$\therefore x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

هذه هي معادلة المستقيم .

(4) نفترض أن المستقيم يقطع من محور y طولا $= b$

$\therefore$ المستقيم يقطع من محور X طولا $= a = 2b$ وبالتالي تكون معادلة المستقيم

$$\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x + 2y}{2b} = 1$$

$$\therefore x + 2y = 2b$$

بما أن المستقيم يمر بالنقطة $(5, 1)$ فإنها تحقق معادلته .

بالتعويض عن النقطة $(5, 1)$ في معادلة المستقيم

$5+2(1)=2b+7 \Rightarrow b=\frac{7}{2}=3.5$

$a=2b=3.5\times 2=1$

وبالتالي تكون:

∴ معادلة المستقيم هي:

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{3.5}=1$$

(5)

بما أن $ABCD$ هو مستطيل ، $B=(5,0), D=(0,3)$

$\therefore C=(5,3)$

فيكون الميل

For $\overline{AD}$: slope $= m=\frac{-3-0}{0-0}=\frac{3}{0}$ (undefined)

$\therefore$ equation of the straight line : $\frac{y-3}{x}$

$\therefore x=0$

For $\overline{AB}$: slope $= \tan\theta=\tan 0^o=0$

$\therefore$ equation of the straight line : $\frac{y-0}{x-5}=0 \Rightarrow y=0$

Then by $pt\,(5,0)$

For $\overline{CD}$ slope $= m=\frac{3-3}{5-0}=0$

$\therefore$ equation of the straight line : $\frac{y-3}{x-5}=0 \Rightarrow y=3$

By point (5, 3)

For $\overline{BC}$: slope = $\tan\theta = \tan 90^o = \frac{1}{0}$ (undefined)

$$\therefore \text{ equation : } \frac{y-3}{x-5} = \tan\theta \Rightarrow \frac{x-5}{y-3} = \cot = 0$$

$$\therefore x-5=0 \Rightarrow x=5$$

بما أن القطر $\overline{AC}$ يمر بالنفطتين $A(0,0), C=(5,3)$

وبالتالي تكون معادلته:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_1-x_1}$$

$$\therefore \frac{y-0}{x-0} = \frac{3-0}{5-0} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3x-5y=0$$

القطر $\overline{BD}$ يمر بالنفطتين $B(5,0), D(0,3)$

وبالتالي تكون معادلته

$$\frac{y-0}{x-5} = \frac{3-0}{0-5} \Rightarrow \frac{y}{x-5} = \frac{3}{-5}$$

$$\therefore 3x-15=-5y \Rightarrow 3x+5y-15=0$$

(6) نفترض أن $\overline{AB}$ يقطع من محور y طولا $C =$

$\therefore$ معادلة $\overline{AB}$ تكون $y = mx + C$

$\therefore$ معادلة $\overline{CD}$ تكون $y = mx + C$

حيث إن m تمثل ميل كل منهما

لأن $\overline{AB} // \overline{CD}$

بما أن $\overline{AB}$ يمر بالنقطة $A(-0,0)$ فهي تحقق معادلته

$$\therefore 0 = -6m + C \qquad (1)$$

بما أن معادلة $\overline{BC}$ هي $4x + 3y - 12 = 0$

$$\therefore \text{slope} = \frac{-x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = \frac{-4}{3}$$

$$\because \overline{BC} \perp \overline{AB}, \overline{BC} \perp \overline{CD} \Rightarrow m \times m' = -1$$

$$\therefore m = \frac{-1}{m'} = \frac{3}{4} = 0.75$$

بالتعويض في (1)

$$0 = -6 \times 0.75 + C \Rightarrow C = 4.5$$

$\therefore$ معادلة $\overline{AB}$ $(y = 0.75x + 4.5)$

ومعادلة $\overline{CD}$ $(y = 0.75x - 4.5)$

حل تمارين الباب العاشر

التمرين الثاني :

(1) معادلة المستوى المار بالنقطة $(3, 1, -1)$ حيث $x_0 \; y_0 \; z_0$ وعمودي على

المتجه $(3, 1, -1)$ حيث $a \; b \; c$ هي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

$$5(x - 3) + 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$$

$$5x - 15 + 2y - 2 + 3z + 3 = 0$$

$$5x + 2y + 3z - 14 = 0$$

(2) بما أن المستوى يوازي المستوى xz

∴ المستوى عمودي على محور y

بما أن المستوى يمر بالنقطة
$$\begin{array}{ccc} (5, & 7, & -6) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{array}$$

$$\therefore \quad \begin{array}{ccc} (0, & 7, & 0) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{array} = \bar{n}$$
عمودي على المستوى

∴ معادلة المستوى هي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$(0)(x-5)+7(y-7)+(0)(z+6)=0$$

$$\therefore 7(y-7)=0 \Rightarrow y-7=0 \Rightarrow y=1$$

(3) بما أن المستوى المطلوب يوازي المستوى $4x-2y=5$ ،

$$\begin{array}{ccc} (4, & -2, & 0) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{array} = \bar{n}$$
عمودي ايضاً على المستوى المطلوب .

بما أن المستوى المطلوب معادلته يمر بالنقطة
$$\begin{array}{ccc} (2, & 6, & -1) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{array}$$

∴ المعادلة المطلوبة هي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$4(x-2)-z(y-6)+0=0$$

$$4x-8-2y+123=0 \Rightarrow 4x-2y+4=0$$

(4) بما أن المستوى يمر بالنقطتان $A=(1,0,5), B=(0,2,-1)$

$\therefore$ المتجه $\overline{AB}$ يقع في المستوى

$$\overline{AB} = (0,2,-1)-(2,0,5) = (-2,2,-6)$$

$$\because \text{Plane}_{(1)} \perp \text{Plane}_{(2)}, \quad \overline{n_2} \perp \text{Plane}_{(2)}$$

$$\therefore \overline{n_2} // \text{plane}_{(1)} \quad \text{where} \quad \overline{n_2} = (1,3,0-1)$$

نفرض أن $\overline{AC} // \overline{n_2}$

حيث إن: $ptC \in \text{Plane}_{(1)}$

$$\therefore \overline{AC} = K\overline{n_2} = (K, K, -K)$$

$$\therefore \overline{n_2} = \overline{AB} \times \overline{AV} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ -2 & 2 & -6 \\ J & 3K & -K \end{vmatrix} = (16K, -8K -8K)$$

وبالتالي فإن معادلة المستوى هي:

$$16K(x-2)-8K(y-0)-8K(z-5)=0$$

$$\therefore 2(x-2)-(y-0)-(z-5)=0 \Rightarrow 3x-y-z+1=0$$

(5) بما أن المستوى يحتوي على محور x

$\therefore$ المستوى يمر بالنقاط $A(0,0,0), B(1,0,0)$

بما أن المستوى يمر بالنقطة $C(3,-5,1)$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{C} - \overline{A} = (3,-5,1)$$

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A} = (1,0,0)$$

نفترض أن $\bar{n}$ عمودي على المستوى

$$\therefore \bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(1-0) + \hat{K}(-5-0)$$

$$= -\hat{j} - 5\hat{K}$$

$$\therefore \bar{n} = \begin{array}{ccc} (0, & -1, & -5) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{array}$$

$\therefore$ معادلة المستوى بإستخدام النقطة $\begin{array}{ccc} (3, & -5, & 1) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{array}$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\therefore 0 - (y + 5) - 5(z - 1) = 0 \Rightarrow -y - 5 - 5z + 1 = 0$$

$$\therefore y + 5z + 4 = 0$$

(6)

$$A(0,0,0), B(-3,0,4), C = (2,1,1)$$

$$\overline{AB} = (-3,0,4), \overline{AC} = (2,1,1)$$

$$\therefore \bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0-4) - \hat{j}(-3-8) + \hat{K}(-3-0)$$

$$= -4\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{K}$$

$$\therefore \overline{n} = \begin{array}{ccc} (-4, & 11, & -3) \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{array} \qquad \perp \text{ plane}$$

$\therefore$ معادلة المستوى بدلالة النقطة $A(0,0,0)$

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)+c(z-z_o)=0$$

$$-4x+11y-3z=0$$

(7) بما أن كلا من

$$\text{plane}_{(1)}: x-y+z=3$$

$$\text{plane}_{(2)}: 2x+y+4z=0$$

عمودي على $\text{plane}_{(3)}$

$$\therefore \overline{n_1}=(1,-1,1)\,//\,\text{plane}_{(3)},$$

$$\therefore \overline{n_2}=(2,1,4)\,//\,\text{plane}_{(3)}$$

نفترض أن $\overline{AB}, \overline{AC}$ يقعان في المستوى $\text{plane}_{(3)}$ حيث إن النقطة A هي النقطة المعطاه .

$A = (4, 0, -2)$

ونفترض أن :

$$\overline{AC}\,//\,\overline{n_1} \Rightarrow \overline{AC}=K\overline{n_1}$$

$$\overline{AB}\,//\,\overline{n_2} \Rightarrow \overline{AB}=m\overline{n_2}$$

$$\therefore \overline{AC}=(K,-K,K), \overline{AB}=(2m,m,4m)$$

$$\therefore \overline{n_3} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ 2m & m & 4m \\ K & -K & K \end{vmatrix} = mK \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \overline{n_3} = mK\,[\hat{i}\,(1+4) - \hat{j}\,(2-4) + \hat{K}\,(-2-1)]$$

$$\therefore \overline{n_3} = (5mK\,, 2mK\,, -3mK\,)$$

حيث إن $\overline{n_3} \perp \text{plane}_3$

وبالتالي تكون معادلة المستوى المطلوبة

$$5mK\,(x-4) + 2mK\,(y-0) - 3mK\,(2+2) = 0$$

$$\therefore 5(x-4) + 2(y-0) - 3(z+2) = 0$$

$$\therefore 5x - 20 + 2y - 3z - 6 = 0$$

$$5x + 2y - 3z - 26 = 0$$

(8) بما أن المستوى يقطع جزأين طولهما 2,5 من محورى x, y على الترتيب .

$\therefore$ المستوى يمر بالنقط

$$A = (2,0,0), B = (0,5,0)$$

If $\quad ptC = (1,3,-2)$

$$\therefore \overline{AC} = (1,3,-2) - (2,0,0) = (-1,3,-2)$$

$$\overline{AB} = (0,5,0) - (2,0,0) = (-2,5,0)$$

$$\therefore \bar{n} = \overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(0-10) - \hat{j}\,(0-4) + \hat{K}\,(-5+6)$$

$\therefore \bar{n} = (10,4,1)$ where $\bar{n} \perp$ plane

وبالتالي تكون معادلة المستوى باستخدم النقطة A

$$10(x-2)+4(y-0)+z-0=0$$

$$10x-20+4y+z=0 \Rightarrow 10x+4y+z-20=0$$

(10) بما أن المستوى يبعد مسافات متساوية عن النقطتين (-1, 1, 0) و (2, 7, 3)

$\therefore$ النقطة A تقع على المستوى حيث أن

$$A = (\frac{2-1}{2}, \frac{7+1}{2}, \frac{3+0}{2}) = (0.5, 4, 1.5)$$

بما أن المستوى يمر بصفور y فإن النقطتين

$$B = (0,0,0), C = (0,1,0)$$

تقع على المستوى

$$\therefore \overline{AB} = \bar{B} - \bar{A} = (-0.5, -4, -1.5)$$

$$\overline{AC} = \bar{C} - \bar{A} = (-0.5, -3, -1.5)$$

$$\therefore \bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ -0.5 & -4 & -1.5 \\ -0.5 & -3 & -1.5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\,(1.5) - \hat{j}\,(0) + \hat{K}\,(-0.5)$$

$\therefore \vec{n} = (1.5, 0, -0.5) \perp$ plane

وبذلك تكون المعادلة المطلوبة عن طريق النقطة A .

$$1.5(x-0.5)+(0)(y-4)-0.5(2-1.5)=0$$

$$\therefore 1.5x-0.5z=0 \Rightarrow 3x-z=0$$

(12)

$$D=\frac{ax_o+by_o+cz_o+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

where $\quad x_o=-2, y_o=6, z_o=3$

$$a=5, b=11, c=2, d=-30$$

$$\therefore D=\frac{-2x\,5+11x\,6+2x\,3-30}{\sqrt{5^2+11^2+2^2}}=\frac{16\sqrt{6}}{15}\text{ units}$$

$$=2.613\text{units}$$

(13) لحساب البعد بين المستويين نحسب البعد العمودي بين نقطة على المستوى الثاني ولتكن (x_0, y_0, z_0) والمستوى الأول

$$ax+by+cz+d_1=0$$

$$D=\frac{ax_0+by_0+cz_0+d_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\because pt\,(x_0, y_0, z_0) \in \text{plane}: ax+by+cz+d_2)=0$$

وبالتالي فإنها تحقق معادلته:

$$\therefore ax_0+by_0+cz_0+d_2=0$$

$$\therefore ax_0+by_0+cz_0=-d_2$$

$$\therefore D = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

وبالتالي تكون المسافة العمودية بين المستويين

$$4x - 8y - 2 + 9 = 0, \qquad 4x - 8y - z - 6 = 0$$

$$D = \frac{9 - (-6)}{\sqrt{4^2 + 8^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{3} = 1.667 \quad \text{units}$$

(12) بما أن المستوى يوازي المستوى

$$p_1 : 2x + y - 4z = 0,$$

$$\overline{n_1} = (2, 1, -4) \perp p_1$$

فإن المتجه $\overline{n}_1$ عمودي على المستوى المطلوب

$$\therefore a = 2, b = 1, c = -4$$

(13) معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين تكون

$$(x + 2y + 3z - 4) + t(3x + z - 5) = 0$$

$$\therefore x + 2y + 3z - 4 + 3tx + tz - 5t = 0$$

$$\therefore (1 + 3t)x + (2)y + (3 + t)z - 4 - st = 0$$

المستوى المطلوب

$$\therefore \overline{n} = (1 + 3t, 2, 3 + t) \perp \text{plane}$$

بما أن المستوى المطلوب يوازي المستوى

$$7x + 2y + 5z = 8$$

$\therefore \overline{n'} = (7,2,5) // \overline{n}$

$\therefore \frac{1-3t}{7} = \frac{2}{3} = \frac{3+t}{5} = 1$

$\therefore 3+t = 5 \Rightarrow t = 2$

وبالتالي تكون معادلة المستوى المطلوب

$$7x + 2y + 5z = 14 = 0$$

(14) المستوى يمر بخط تقاطع المستويين

$3x + 2y + 2 = 6$ و x_y

معادلة المستوى x_y هي $z = 0$

وبذلك تكون معادلة المستوى المطلوبة هي:

$$3x + 2y + 2 - 6 + tz = 0$$

بما أن المستوى يمر بالنقطة $(1, 1, 1)$

$\therefore 3 + 2 + 1 - 6tt = 0$

$\therefore$ المعادلة المطلوبه :

$$3x + 2y + z = 6$$

حل تمارين

(1) (أ)

$$r = 4, c = \underset{h}{(1,}\ \underset{k}{0,}\underset{l}{-3)}$$

معادلة سطح الكرة هي :

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2$$

$$(x-1)^2+y^2+(z+3)^2-4^2$$

$$x^2+1-2x+y^2+z^2+9+6z-16=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x+6z-6=0$$

(ب)

$$c = (4,\ 5, -2)$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ h & k & l \end{array}$$

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(2-l)^2=r^2$$

$$(x-4)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=r^2$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2-8x-10y+42+45=r^2$$

بما أن الكرة تمر بالنقطة $(1, 0, 0)$

$\therefore$ النقطة تحقق معادلة سطح الكرة

$$1-8+45=r^2=38$$

$\therefore$ المعادلة

$$x^2+y^2+z^2-8x-10y+4z+7=0$$

ج) مركز الكرة هو

$$c=(\frac{7+3}{2},\frac{3+1}{2},\frac{1-3}{2})$$

$$\therefore c = (5, \ 2, -1)$$

$$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$$

$$h \quad k \quad \text{h}$$

بما أن الكرة تمر بالنقطة $A = (7, 3, 1)$

$$\overline{AC} = (5, 2, -1) - (7, 3, 1) = (-2, -1, -2)$$

$$\| \overline{AC} \| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

وبالتالي يكون نصف القطر $(r = 3)$.

$\therefore$ معادلة سطح الكرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

$$x^2 + 25 - 10x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 1 + 2z = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 4y + 2z + 21 = 0$$

(2)

$$\overline{PC} = \overline{Q} - \overline{P} = (5, 6, 7) - (-1, 2, -3)$$

$$\overline{PQ} = (6, 4, 10) \Rightarrow \| \overline{PQ} \| = PQ = \sqrt{6^2 + 4^2 + 10^2} = 2\sqrt{38} \quad \text{unit}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1} \frac{6}{2\sqrt{38}} = 60.88^o$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{4}{2\sqrt{38}} = 71.07^o$$

$$\gamma = \cos^{-1}\frac{10}{2\sqrt{38}} = 35.79^o$$

(3) (أ)

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{ab} = \frac{(-1,3,0).(2,-1,2)}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+1+4}}$$

$$\cos\theta = \frac{-5}{3\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = 121.81^o$$

(ب)

$$vt \quad \vec{a} + 2\vec{c} = \overline{D}$$

$$\overline{D} = (-1,3,0) + (2,8,2) = (1,11,2)$$

$$\cos\theta = \frac{\overline{D}\,\vec{b}}{\|\overline{D}\|\|\vec{b}\|} = \frac{(1,11,2).(2,-1,2)}{\sqrt{126}\sqrt{9}} = \frac{-5}{9\sqrt{14}}$$

$$\therefore \theta = 98,45^o$$

(جـ)

$$comp_b a = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{-5}{3}$$

$$comp_a b = \frac{\vec{b}.\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{-\sqrt{10}}{2}$$

(د)

$$vt \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{e} = (1,2,2)$$

$$\therefore comp_c e = \frac{\bar{e}.\bar{c}}{\|\bar{c}\|} = \frac{(1,2,2).(1,4,1)}{3\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{6}$$

(4) (أ)

$$\overline{PQ} = \overline{Q} - \overline{P} = (1,1,7)$$

$$\overline{PR} = \overline{R} - \overline{P} = (-4,-5,4)$$

$$\overline{PQ} x\, \overline{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (39,-32,-1)$$

$$\therefore |\overline{PQ} x\, \overline{PR}| = 50.46$$

Area of $\Delta\, PQR$

$$= \frac{1}{2} |\overline{PQ} \times \overline{PR}| = 25.23 \quad \text{square units}$$

(ب)

$$\overline{RP} = -\overline{PR} = (4,5,-4)$$

$$\overline{PQ} = \overline{Q} - \overline{R} = (5,6,3)$$

$$\therefore \cot(P\hat{R}Q) = \frac{\overline{PQ}.\overline{RP}}{\|\overline{RQ}\| \|\overline{R}\|} = \frac{(4,5,-4).(5,6,3)}{\sqrt{57}\sqrt{70}} = \frac{38}{\sqrt{3990}}$$

$$\therefore m(\angle PRQ) = 53.02^o$$

(ج)

$$\overline{OR} = (-3,-2,2)$$

$$\overline{OP} = (1,3,-2)$$

$$\overline{OQ} = (2,4,5)$$

$$\therefore \overline{OP}.(\overline{OQ} \times \overline{OR}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 + 10 - 3(4 + 15) - 2(-4 + 12) = -55$$

وبالتالي يكون حجم متوازي السطوح

$$\text{Volume} = |-55| = 55 \quad \text{units of volume}$$

(د)

$$\overline{PQ} = \overline{Q} = \overline{P} = (1,4,5) - (1,3,-2) = (1,1,7)$$

$$\overline{PR} = (-3,-2,2) - (1,3,-2) = (-4,-5,4)$$

$$\therefore \overline{n} = \overline{PQ} x \overline{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 7 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (39,-32,-1)$$

حيث إن $\overline{n}$ عمودي على المستوى PQR .

ومتجه الوحدة العمودي على المستوى هو متجه الوحدة في الاتجاه $\overline{n}$

$$\overline{u} = \frac{\overline{n}}{\|\overline{n}\|} = \frac{(39,-32,-1)}{\sqrt{2546}}$$

$$\therefore \overline{n} = \left(\frac{39}{\sqrt{2546}}, \frac{-32}{\sqrt{2546}}, \frac{-1}{\sqrt{2546}} \right)$$

(5) الشرط المطلوب يتمثل في معادلة المستوى المار بالنقاط الثلاث

$$A = (4,-3,0)$$

$$B = (-4,-1,3), C = (3,-5,7)$$

$$\therefore \overline{AB} = (-8,2,3), \quad \overline{AC} = (-1,-2,7)$$

$$\therefore \overline{n} = \overline{AB} x \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -8 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = (39,-32,-1)$$

$$= \hat{i}(14+6) - \hat{j}(-56+3) + \hat{k}(16+2)$$

$$\therefore \overline{n} = (20,53,18) \perp \quad \text{plane}$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى باستخدام $B = (-4, -1, 3)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\therefore 20(x + 4) + 53(y + 1) + 18(z - 3) = 0$$

هذا هو الشرط المطلوب

$$20x + 53y + 18z + 79 = 0 \Rightarrow$$

(6)

$$\overline{PQ} = (-3, 2, 4) - (1, -1, 4) = (-4, 3, 0)$$

إذا كان المتجه $\bar{n}$ عموديًا على محور z و $\overline{PQ}$

$$\therefore \bar{n} = \overline{PQ} \times \bar{K} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(3 - 0) - \hat{j}(-4 - 0) + \hat{k}(0)$$

$$\therefore \bar{n} = (3, 4, 0) \Rightarrow \bar{U} = \frac{(3, 4, 0)}{5} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$$

ويوجد عدد لانهائي من المتجهات العمودية على محور z و $\overline{PQ}$ نحصل عليهما

$$\bar{N} = h(3, 4, 0) \qquad \text{where} \qquad h \in R$$

$$\therefore \bar{U} = \frac{(3h, 4h, 0)}{\sqrt{9h^2 + 16h^2}} = \frac{(3h, 4h, 0)}{5h} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$$

ولكنه لايوجد إلا متجه وحدة واحد فقد هو العمودي على محور z و $\overline{PQ}$

$$\bar{U} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$$

(1)

(أ)

$$(x-1)^2+(y-0)^2+(z+3)^2=(4)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2+z^2+6z=9-16$$

$$x^2+y^2+z^2+2x+6z-7=0$$

(ب)

$$(x-4)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=r^2$$

وبالتعويض في النقطة $(1, 0, 0)$

$$(-3)^2+(-5)^2+(2)^2=r^2 \Rightarrow r^2=38$$

$$(x-4)2+(y-5)^2+(z+2)^2=88$$

$$x^2+y^2+z^2-8x+16-10y+25+4z+4=38$$

$$x^2+y^2+z^2-8x-10y+4z+7=0$$

(جـ)

$$PQ=(7,3,1)-(3,1,-3)=(4,2,4)$$

$$PC=\frac{PQ}{2}=(2,1,2) \Rightarrow PC=C-P$$

$$(2,1,2)=C-(3,1,-3) \Rightarrow C=(5,2,-1)$$

$|PC|=$ نصف القطر $=\sqrt{(2)^2+1+(2)^2}=\sqrt{9}=3=r$

$$(x-5)^2+(y-2)^2+(z+1)^2-9$$

$$r^2-10x+25+y^2-4y=4+z^2+27+1-9=0$$

$$x^2+y^2+z^2-10x-4y+2z+21=0$$

(2)

$$PQ=Q-P=(5,6,7)-(-1,2,-3)=(6,4,10)$$

$$|PQ|=\sqrt{(6)^2+(4)^2+(10)^2}=2\sqrt{38}$$

$$\cos\propto=\frac{6}{2\sqrt{38}}\quad\Rightarrow\quad\propto=60^o\,52'42{,}35''$$

$$\cos\beta=\frac{1}{2\sqrt{38}}\quad\Rightarrow\quad\beta=71^o\,4'5{,}44''$$

$$\cos\gamma=\frac{10}{2\sqrt{38}}\quad\Rightarrow\quad\gamma=35^o\,47'44{,}74''$$

(أ)

$$\cos\theta=\frac{ab}{|a||b|}=\frac{(-1,3,0).(2,-1,2)}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+1+4}}=\frac{-2-3}{\sqrt{10}\sqrt{9}}=\frac{-5}{3\sqrt{10}}$$

$$\theta=121^o\quad 48'\quad 21{,}96''$$

(ب)

$$d=a+2=(-1,3,0)+(2,8,2)=(1,11,2)$$

$$\cos\theta=\frac{db}{|d||b|}=\frac{(1,11,2).(2,-1,2)}{\sqrt{1+(11)^2+(2)^2}\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$

$$\cos\theta=\frac{2-11+4}{3\sqrt{14}\sqrt{9}}\qquad\theta=81^o\quad 27'\quad 40{,}46''$$

(جـ)

$$comp_b a = \frac{a.b}{b} = \frac{(-1,3,0).(2,-1,2)}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{-2-3}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$comp_a b = \frac{b.a}{a} = \frac{(-1,3,0).(2,-1,2)}{\sqrt{1+9}} = \frac{-5}{\sqrt{10}} \frac{-\sqrt{10}}{2}$$

$$a + b = (1, 2, 2)$$

$$comp_c (a+b) = \frac{(a+b).c}{c} = \frac{(1,2,2).(1,4,1)}{\sqrt{1+16+1}}$$

$$comp_c (a+b) = \frac{1+8+2}{\sqrt{18}} = \frac{11}{\sqrt{18}} = \frac{11\sqrt{18}}{18} = \frac{33\sqrt{2}}{18} \frac{11\sqrt{2}}{6}$$

(3)

$\overline{PQ} = (1,1.7)$ $\overline{PR} = (-4,-5,4)$ $\overline{QR} = (-5,-6,-8)$

$$= \frac{|\overline{PQ}, x\,\overline{PR}|}{2} = PQR$$ مساحة المثلث

$$\overline{PQ} x\,\overline{PR} = \begin{vmatrix} i & J & K \\ 1 & 1 & 7 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (4+12)i - (4+38)J + 9 - 5 + 4)K = 16i - 32J - K$$

$$18 \simeq 17,895 = \frac{\sqrt{(16)^2 + (-32)^2 + (-1)^2}}{2} = PQR$$ مساحة المثلث

وحدة مساحة

(ب) الزاوية QRP

$$|\overline{PR} x\,\overline{QR}| = 2$$ مساحة المثلث

$$|\overline{PR}||\overline{QR}|\sin\theta = 2x\,17{,}895 = 35{,}79$$

$$\sin\theta = \frac{35{,}79}{\sqrt{(-4)^2+(-5)^2+(4)^2}\sqrt{(5)^2+(-6)^2+(-3)^2}} = \frac{85{,}79}{\sqrt{70}\sqrt{57}}$$

$$\theta = 34^o 30'52{,}23''$$

(جـ)

$$\overline{OP}.(\overline{OQ}x\,\overline{OR}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(8+10)-3(4+15)-2(-4+12) = 18-57-16 = -55$$

حجم متوازي السطوح = 55

$$U = \frac{(16,-32,-1)}{\sqrt{(16)^2+(32)^2+(-1)^2}} = (0{,}447,-0{,}894,-0{,}028)$$

$$= OP.U = (1,3,-2).(0{,}447,-0{,}894),-0{,}028)$$

$$= 0{,}447 - 2{,}682 + 0{,}056 = 2{,}179$$

بعد نقطة الأصل المستوى 2,179

حل آخر :

(1) ايجاد معادلة المستوى

$n = (16, -32, -1)$ $\qquad\qquad (1,3,-2)$

وبأخذ النقطة P التي تنتمي للمستوى

$$16(x-1)-32(y-3)-(z+2) = 0$$

$$.16x-16-32y+69-z-2 = 0$$

معادلة المستوى $16x - 32y - z - 78 = 0$

(2) لايجاد البعد العمودي نعوض عن النقطة (0, 0, 0)، ثم نقسم الناتج على معيار المتجه العمودي هو n.

البعد العمودي = $\frac{78}{\sqrt{(16)^2 + (-32)^2 + (-1)^2}} = 2,179$

$A(x, y, z) \quad B = (4,-3,0) \quad C = (-4,-1,3) \quad D(3,-5,7)$

$$BA = (x-4, y+3, z)$$

$$BC = (-8, 2, 3)$$

$$BD = (-1, -2, 7)$$

لكى تقع النقط في مستوى أفقى واحد يجب أن يكون

حاسل ضربهم الثلاثي = 0

$$\overline{BA}.(\overline{BC} x \overline{BD}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z \\ -8 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 4(14+6) - (y+3)(-56+3) + z(16+2) = 0$$

$$20x - 80 + 53y + 159 + 18z = 0$$

$$20x + 53y + 18z + 79 = 0$$

$$PQ = Q - P = (-3,2,4) - (1,-1,4) = (-4,3,0)$$

$$U = \frac{(0,0,n)x(-4,3,0)}{5} = (\frac{-3n}{5}, \frac{4n}{5}, 0)$$

المتجه العمودي $= \begin{vmatrix} i & J & K \\ 0 & 0 & n \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3ni + 4nJ$

(n عدد ينتمي إلى ج)

(مدة n تنتمي الح)

توجد متجهات أخرى تحقق الشروط .