الباب الرابع عشر

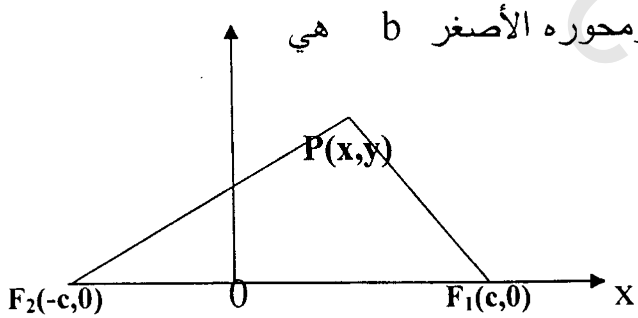
القطع الناقــص Ellipse

تظهر أهمية هذا المنحى في أنه يمثل الأفلاك أو المدارات التـــي تتخذها الكواكب في دورانها حول النجوم إذ أنه يمكن إثبـــات أن حركـــة جسيم واقع تحت تأثير قانون التربيع العكسي هو قطـــع نـــاقص تحـــت مجموعة من الشروط.

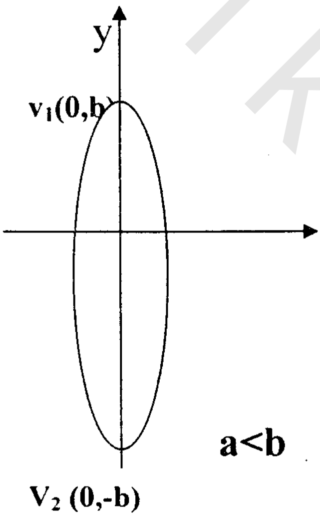
تعريف: القطع الناقص هو المحل الهندسي للنقط التي يكون مجموع بعدى أي نقطة منها عن نقطتين مثبتتين في المستوى (تسميان البؤرتين) مقدارا ثابت ويكون هذا المقدار الثابت أكبر من البعد بين النقطتين فإذا رمزنا لبؤرتين القطع بالرمز f_1, f_2 فمن الواضح أن مجموع بعدي أي نقطة $p(x,y)$ عن البؤرتين لا يمكن أن يكون أقل من بعد البؤرتين عن بعضهما

1- الصورة القياسية للقطع الناقص

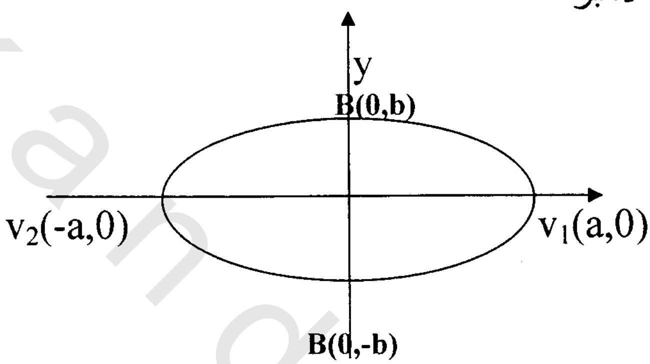
معادلة القطع الناقص الذي مركزه هو نقطة الأصل وطول محوره الأكبر a ومحوره الأصغر b هي $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$



وهي نفس المعادلة في حالة أن يكون a محوره الأصغر و b هو محوره الأكبر



a<b



a>b

ويكون رأسي هذا القطع $V_1(a,0)$,$V_2(-a,0)$

أما في حالة $b > a$ يكون رأسي القطع هما $V_1(0,b)$, $V_2(0,-b)$

وبعده البؤري يمكن تعيينه من العلاقة

$$c^2 = a^2 - b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a > b$$

$$c^2 = b^2 - a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots b > a$$

مثال: ارسم المنحنى $4x^2 + 18y^2 = 36$

الحل: يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة

$$4x^2 + 18y^2 = 36$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2}{36} + \frac{18y^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص

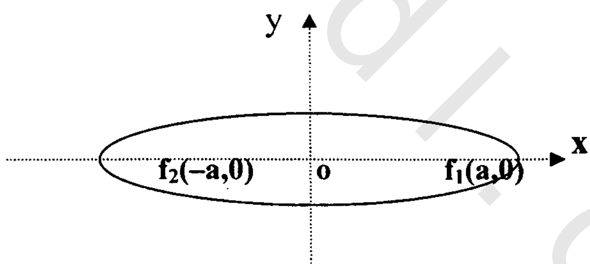
نصف طول المحور الأكبر $a = 3$

ونصف طول محوره الأصغر $b = \sqrt{2}$ فيكون محورة الاكبر هو محور x ومن ثم رأسى القطع هما $V_1(3,0), V_2(-3,0)$ والبعد البؤري

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 2 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$$

وبذلك تكون البؤرتين هما $f_1(c,0) = (\sqrt{7},0), f_2(-c,0) = (-\sqrt{7},0)$

كما هو موضح بالشكل التالى:



مثال: ارسم القطع $9x^2 + 4y^2 = 25$

الحل: يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة

$$9x^2 + 4y^2 = 25 \Rightarrow \frac{9x^2}{25} + \frac{4y^2}{25} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(25/9)} + \frac{y^2}{(25/4)} = 1$$

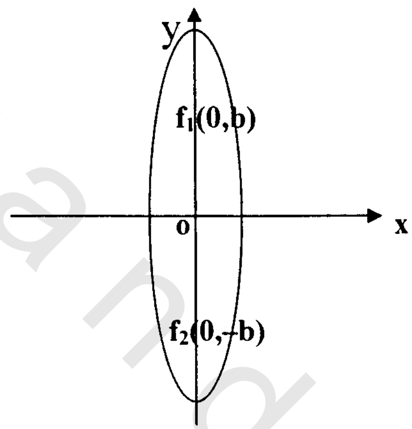
وهي عبارة عن قطع ناقص مركزه نقطة الأصل فيكون محورة الاكبر

هو محور y ومن ثم رأسى القطع هما $V_1(0,5/2), V_2(0,-5/2)$

ونصف طول محوره الأكبر b=5/2 والأصغر a=5/3 وطول وتره البؤري

$$c^2 = b^2 - a^2 = 25/4 - 25/9 \Rightarrow c = 5\sqrt{5/6}$$

كما هو موضح بالشكل التالى:



مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأسيه عند النقط

(4,0-) , (4,0+) وبؤرتيه هما (2,0-) ,(2,0)ومركزه نقطة الأصل.

الحل: فى هذه الحالة a = 4 , c = 2 ومحورة الاكبر هو محور x

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$

وتكون معادلة القطع المطلوبة هي $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

2- معادلة القطع الناقص في الحالة العامة

ومركز القطع عند النقطة c(h,k)

المعادلة العامة للقطع هي:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

مثال: ادرس معادلة القطع

$$9x^2+4y^2+36x-8y+4=0$$

الحل: بكتابة المعادلة على الصورة

$$9(x^2+4x)+4(y^2-2y)+4=0$$

نقوم بإكمال المربع لكل متغير على حده

$$9(x^2+4x+4)+4(y^2-2y+1)=-4+36+4\Rightarrow$$
$$9[(x+2)^2]+4[(y-1)^2]=36\Rightarrow$$
$$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-1^2)}{9}=1$$

وهذه معادلة قطع ناقص مركزه النقطة $c(-2,1)$ ونصف طول محوره الأصغر يساوي 2 ونصف طول محوره الأكبر يساوي 3 ويكون البعد العمودي $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

3- الاختلاف المركزي Eccentricity

يعرف الاختلاف المركزي للقطع على أنه النسبة بين a,c ويرمز له بالرمز e أي أن

$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-b^2/a^2} \quad or \quad b^2=a^2(1-e^2)$$

ونلاحظ هنا أن

قيمة e محصورة بين 0,1 ونجد أن الاختلاف المركزي يتحدد بالعلاقة بين طول محوري القطع الناقص، وأيضا طول محوري القطع تتحدد بدورهما بالاختلاف المركزي وبذلك يحدد الاختبلاف المركزي شكل القطع الناقص.

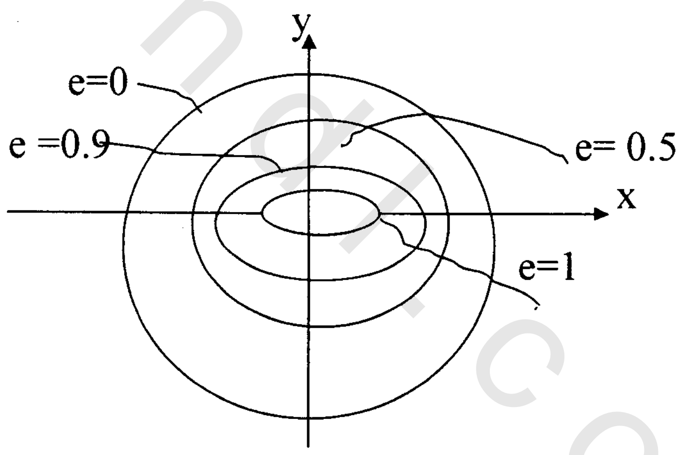
في حالة القطع الناقص قيمة e أقل من الواحد

1) في حالة الدائرة قيمة e تساوى الصفر

2) في حالة القطع المكافيء قيمة e تساوى الواحد

3) في حالة القطع الزائد e أكبر من الواحد

والشكل التالى يوضح العلاقة بين e والقطاعات المخروطية:

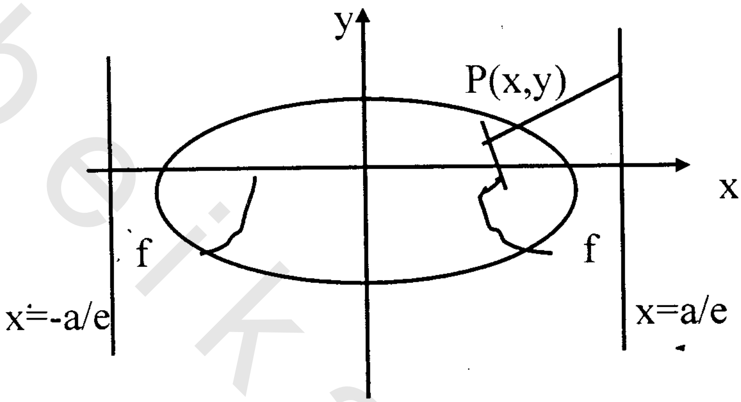


4- دليلا القطع الناقص Directrices

إذا تذكرنا القطع المكافيء له بؤرة واحدة ودليل واحد بينما في القطع الناقص فإن له بؤرتان، ولذلك نتوقع أن يكون له دليلان وهذان

الدليلان يكونان عموديَّان على المحور الأكبر وعلى بعـــدين $\pm a/e$ مـــن المركز، ويمكن إعادة تعريف القطع الناقص كما يلي

تعريف: القطع الناقِص هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى



بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابـــت (الدليل) يساوي مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) وهذا المقدار أقل مـــن الواحد.

5- الوتر البؤري العموديLatus Rectum

هو الوتر المار بالبؤرة وعمودي علـــى محـــور القطـــع الأكبـــر ولإيجاد طول الوتر البؤري العمودي نجد أنه يساوي ضعف الإحداثي y أو بمعنى أخر طول الوتر البؤري العمودي يساوي $-b^2/a$

6- معادلة المماس للقطع الناقص

إذا كانت معادلة القطع الناقص على الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

فأن معادلة المماس لهذا القطع عند النقطة $P_1(x_1,y_1)$ هي:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

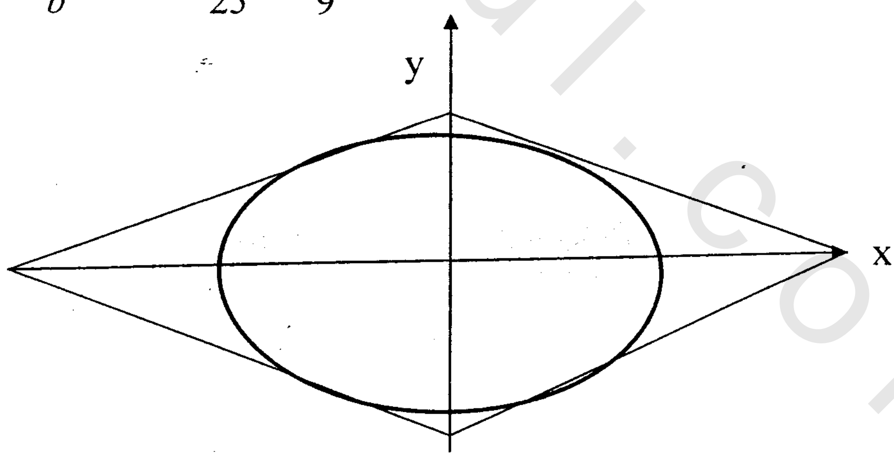
والبرهان تمرين للطالب(البرهان عن طريق ايجاد ميل المماس للقطع وذلك بأخذ التفاضل الاول لمعادلة القطع الناقص).

مثال: أوجد معادلة المماس للقطع $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

عند النقطة $(3,2.4)$.

الحل: معادلة المماس هي

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{3x}{25}+\frac{2.4y}{9}=1 \Rightarrow 9x+20y=25$$

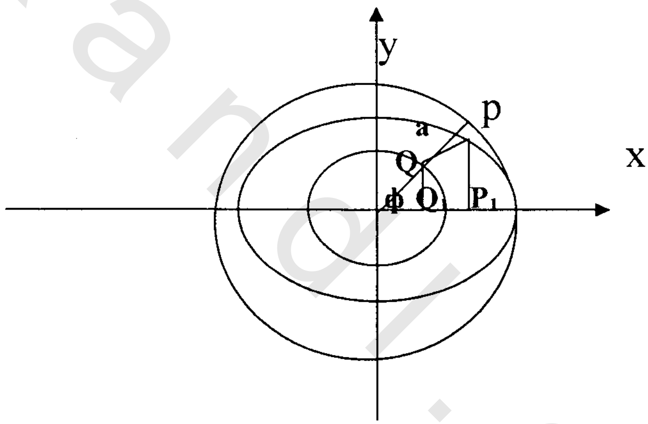


7- رسم القطع الناقص بالنقط

المعادلتان البارامتريتان للقطع الناقص :

نفرض أن لدينا القطع $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

نرسم دائرتين حول مركزه , دائرة نصف قطرها a ، الأخرى نصف قطرها b (ونعتبر a>b) ونمد من مركز القطع الناقص شعاعًا ما ونرمز للزاوية القطبية لهذا الشعاع بالرمز ϕ فيقطع الشعاع الممتد الدائرة الكبيرة في نقطة p ، والدائرة الصغيرة في نقطة Q . ثم نمد من النقطة p مستقيمًا موازيًا للمحور oy ومن النقطة Q مستقيمًا موازيًا للمحور ox . نفرض أن M هي نقطة تقاطع هذين المستقيمين ، وأن النقطتين P_1 , Q_1 هما مسقط P, Q على المحور الأفقي



نعبر عن إحداثيات النقطة M(x , y) بدلالة ϕ . يتضح بسهولة من الرسم أن:

$$x = op_1 = op \,.\, \cos\phi = a\cos\phi$$

$$y = p_1M = Q_1Q = o\,Q\sin\phi = b\sin\phi$$

$$x = a\cos\phi, \qquad y = b\sin\phi \text{.....................................}(12)$$

المعادلتان (12) تمثلان المعادلتان البارامتريتان للقطع الناقص منسوبة

إلى مركز القطع.

مثال: أوجد الاختلاف المركزي وإحداثيات طرفي المحور الأكبر، وكذلك إحداثيات طرفي المحور الأصغر للقطع الناقص:

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 8 = 0$$

الحل: نستخدم طريقة اكمال المربع كالتالى:

$$(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) + 8 - 1 - 16 = 0 \Rightarrow$$
$$(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 9 \Rightarrow$$
$$\frac{(x-1)^2}{(3)^2} + \frac{(y-2)^2}{(3/2)^2} = 1$$

إذن مركز القطع عند النقطة(2 , 1):

طول المحور الأكبر $2a = 6$ ، طول المحور الأصغر $b = 3/2$

بوضع $x = 0$ نحصل على:

$$(y-2)^2/(3/2)^2 = 1 - 1/9 = 8/9 \Rightarrow$$
$$(y-2)^2 = (9/4).(8/9) = 2 \Rightarrow y - 2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \pm \sqrt{2}$$

أي أن المنحنى يقطع محور y في النقطتين $(0, 2\pm\sqrt{2})$

وبوضع $y = 0$ نحصل على $x^2/9 = 1 - (4.(4/9)) = -7/9$

بما أن $x^2 < 0$ إذن x تخيلية وبالتالي المنحنى لا يقطع محور x

$$e^2 = 1 - (b^2/a^2) = 1 - \frac{(3/2)^2}{(3)^2} = \frac{9 - (9/4)}{9}$$

$$= \frac{(36-9)/4}{9} = \frac{27}{36} = 3/4 \Rightarrow$$
$$e = \sqrt{3/4}$$

إذن إحداثيات طرفي المحور الأكبر هي:

$$V\,(h+a,k) = (4,2),$$
$$V\,'(h-a,k) = (-2,2)$$

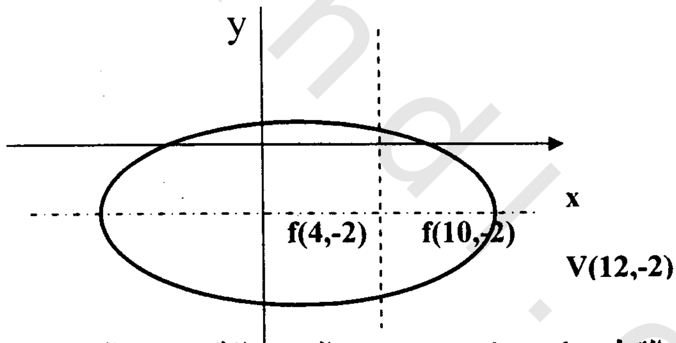
وإحداثيات طرفي المحور الأصغر هي:

$$M\,(1,7/2)\,\&\,M\,'(1,1/2)$$

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه عند النقط

(10,-2) , (4,-2) ورأسه عند النقطة(12,-2)، ثم أوجد معادلتا الدليلين

الحل:



بما ان مركز القطع يكون في منتصف المسافة بين البؤرتين أي أن مركز القطع هو النقطة (x_0 , y_0) حيث:

$$(x_0, y_0) = \left[\frac{(4+10)}{2}, \frac{(-2-2)}{2}\right] = (7,-2)$$

من الرسم نجد أن المسافة بين البؤرتين يساوي:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(10-4)+(-2+2)^2} = 6 \Rightarrow$$
$$2ae = 6 \Rightarrow ae = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$

وكذلك نجد أن رأس القطع (12,-2) تبعد مسافة $\frac{12-2}{2}=\frac{10}{2}=5$

عن المركز

$$\Rightarrow a=5$$

$$\because ae=3 \Rightarrow 5e=3 \Rightarrow e=3/5$$

$$b^2=a^2(1-e^2)=25(1-9/25)=16 \Rightarrow b=4$$

بما أن المحور الأكبر يوازي محور x فإننا نجد أن معادلة القطع الناقص

تأخذ الصورة: $\frac{(x-7)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$

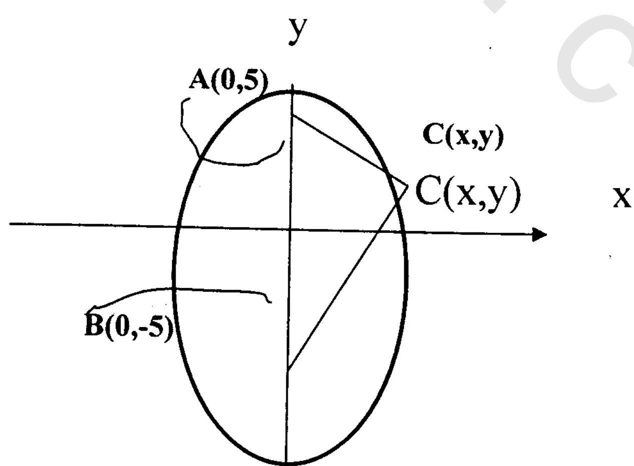
بما أن الدليلين يكونا عموديين على المحور الأكبر ويبعدان مسافة

$\pm a/e$ عن المركز فإن معادلتيهما على الصورة:

$$x=(h\pm\frac{a^2}{c})=(7\pm\frac{25}{3/5})=(7\pm\frac{125}{3})=(\frac{21\pm125}{3})=(\frac{146}{3},-\frac{104}{3})$$

مثال: مثلث محيطه 30 وإحداثيات رأسين من رؤوسه (5 ,0) , (0,-5)

أوجد المجل الهندسي للرأس الثالث.



الحل:

بفرض أن $A(0,+5)$, $B(0,-5)$ وأن الرأس الثالث $C(x,y)$

بما أن محيط المثلث = 30

$$AB + AC + CB = 30$$
$$10 + AC + CB = 30$$
$$CA + CB = 20$$

بما أن مجموع البعدين CA , CB مقدار ثابت

فإن مسار النقطة C يكون قطعًا ناقصًا حسب تعريف القطع الناقص.

بفرض أن A , B هما بؤرتيه فنجد من خواص القطع الناقص أن

$$2a = 20 \Rightarrow a = 10, \quad \frac{a}{e} = 5 \Rightarrow e = 5/10 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$b^2 = a^2(1-e^2) = 100(1-1/4) = 75$$

بما أن نقطة الأصل تنصف المسافة بين البؤرتين فإن القطع الناقص يكون مركزه هو نقطة الأصل.

وعلى ذلك تكون معادلته على الصورة:(المحل الهندسي لنقطة c)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$$

وبذلك لأن البؤرتين تقعا على محور y كما هم موضح بالرسم السابق.

مثال: أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته هي النقطة (-2,3) واختلافه المركزي 4/5 ودليله $2x - 3y + 4 = 5$

الحل: من تعريف القطع الناقص

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (4/5)^2[(2x+3y+4)/\sqrt{(2)^2+(3)^2}]$$

الاختلاف المركزي = (البعد عن البؤرة) ÷ (البعد عن الدليل)

$$(x+2)^2+(y-3)^2=(4/5)^2[(2x+3y+4)/\sqrt{(2)^2+(3)^2}]$$

إذن المعادلة تصبح بعد فك الأقواس:

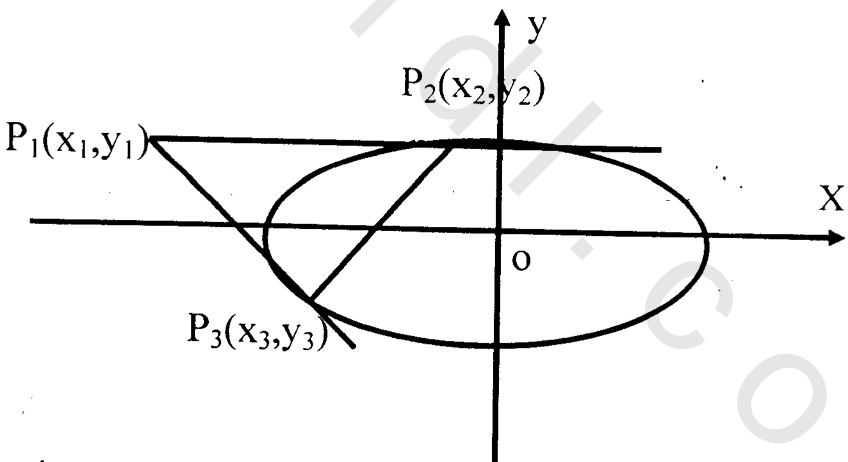
$$261x^2+181y^2-192xy+1044x-2334y+3969=0$$

معادلة وتر التماس من نقطة $p_1(x_1,y_1)$ للقطع الناقص:

بفرض أن $p_1(x_1,y_1)$ نقطة خارج القطع ورسم منها المماسين p_1p_2 , p_1p_3 يمسان القطع عند $p_2(x_2,y_2)$, $p_3(x_3,y_3)$ على الترتيب.

البرهان:

يترك للطالب (انظر الحالة المناظرة في القطع المكافيء)



يسمى الخط p_2p_3 بوتر التماس للقطع الناقص، ويمكن إثبات أن معادلتـــه تكون على الصورة:

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad (13)$$

البرهان: يترك للطالب

(انظر الحالة المناظرة في القطع المكافيء)

تمارين

في كل من التمارين الآتية أوجد معادلة القطع الناقص إذا علم المركز C والبؤرة f ونصف طول المحور الأكبر، a ثم ارسم القطع الناقص، وأوجد اختلافه المركزي.

(i) $c = (0,0)$, $f = (0,2)$, $a = 4$

(ii) $c = (0,0)$, $f = (-3,0)$, $a = 5$

(iii) $c = (0,2)$, $f = (0,0)$, $a = 3$

(iv) $c = (-3,0)$, $f = (-3,-2)$, $a = 4$

(v) $c = (2,2)$, $f = (-1,2)$, $a = \sqrt{10}$

1- النقط الأربعة الآتية $p_1(1,1)$, $p_2(3,4)$, $p_3(1,7)$, $p_3(-1,4)$ هم نهايات المحورين الأصغر والأكبر لقطع ناقص . ارسم القطع رسمًا بسيطًا، ثم أوجد معادلته واختلافه المركزي وأحداثي البؤرتين.

2- أوجد المركز والبؤرتين ورؤوس القطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2-100x+54y-44 = 0$ ارسم القطع، ثم أوجد اختلافه المركزي.

3- ارسم رسمًا بسيطا لكل من القطاعات الناقصة الآتية:

(i) $9x^2 + 4y^2 = 36$ (ii) $4x^2 + 9y^2 = 144$

(iii) $16(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 144$

(iv) $(x-1)^2/16 + (y+2)^2/4 = 1$

4- ارسم الشكل الذي تمثله المعادلة

$(x^2+4y)(2x-y-3)(x^2+y^2-25)(x^2+4y^2-4) = 0$

5- أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته(1,1-) ودليله المستقيم.

$x-y+3 = 0$ ومعامل اختلافه المركزي ½

6- أوجد معادلتي المماس والعمودي في كل من الحالات الآتية:

(أ) من النقطة (1,4/3) إلى الناقص
$4x^2 + 9y^2 = 20$

(ب) من نقطة على القطع
الناقص $5x^2+3y^2 = 137$ حيث
الإحداثي الراسي $y = 2$

7- أوجد معادلة المماس للقطع الناقص $4x^2+3y^2 = 15$ والذي يوازي المستقيم $y = 3x+7$

8- أوجد معادلتي المماسين للقطع الناقص $3x^2+2y^2 = 5$ المرسومين من النقطة(1,2)، واثبت أن الزاوية بينهما تساوي $\tan^{-1}(12\sqrt{5}/5)$

9- أوجد معادلة المماس للقطع الناقص $9x^2+4y^2 = 36$ عند النقطة (2,0) ثم أوجد معادلتي القطعين المكافئتين بحيث يكون المماس دليلهما هي بؤرتي القطع الناقص.

10- أوجد معادلة المماسين من النقطة $(4,0)$ للقطع الناقص $4x^2+y^2 = 16$ أوجد نقطتي التماس. أوجد معادلة الدائرة التي قطرها نقطتي التماس.

11- أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرته هي مركز الدائرة $x^2+y^2= 8x$ ودليله هو المماس للدائرة عند النقطة$(8,0)$ علمًا بأن مركز القطع هو نقطة الأصل. أوجد معادلة الدائرة التي تمس الدائرة المعلومة عند النقطة $(8,0)$ وتمر بالبؤرة الأخرى للقطع الناقص.