الباب الثانى عشر

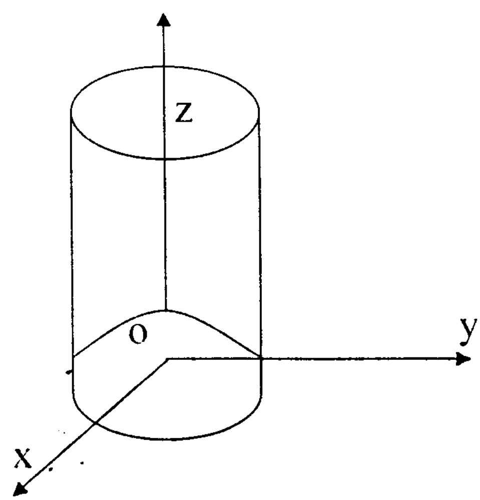
السطوح في الفراغ Surfaces in the space

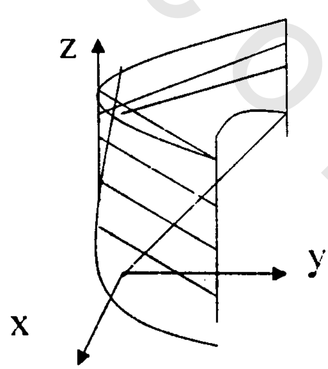
العلاقة بين المتغيرات x,y,z تمثل سطحًا في الفراغ أي أن السطح في الفراغ تكون معادلته على الصورة $F(x,y,z)=0$

فمثلا كما رأينا فإن أي معادلة من الدرجة الأولى في المتغيرات x,y,z تمثل مستويًا في الفراغ. كذلك المعادلة $x^2+y^2+z^2=a^2$

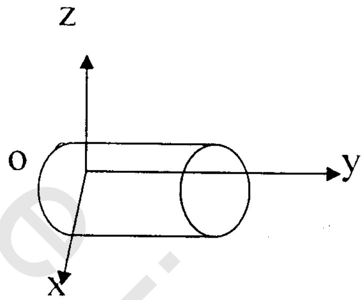
تمثل سطح كرة نصف قطرها a ومركزها نقطة الأصل. السطح المتولد من حركة مستقيم موازي لمستقيم ثابت يسمى سطحًا أسطوانيًّا كما يسمى المستقيم المتحرك بالراسم. إذا كان الراسم موازيًا لمحور z فإن معادلة السطح تكون على الصورة $F(x,y)=0$ على سبيل المثال المعادلة $x^2+y^2=a^2$ تمثل معادلة أسطوانة دائرية رأسها يوازي محور z.
ولرسم هذه الاسطوانة نرسم في مستوى x-y الدائرة $x^2+y^2=a^2$

فتكون الاسطوانة هي السطح الناشىء من حركة مستقيم موازي لمحور z على محيط هذه الدائرة :





بالمثل المعادلة $y = x^2$ تمثل سطح أسطوانه رأسية موازية لمحور z ، ويتحرك على القطع المكافيء $y = x^2$ الموجود في المستوى x-y.



السطوح من الدرجة الثانية Surfaces of the second degree

هي السطوح التي تمثل بمعادلة من الدرجة الثانية في x,y,z وهنا لن نتناول هذه السطوح بالتفصيل، ولكننا باختصار وفي حدود الاحتياجــات العملية سوف ندرس أهم هذه السطوح ومعادلاتها في أبسط صورة.

1) الكـــــــــــرة The sphere

الصورة العامة لمعادلة الكرة التي مركزها (a,b,c) ونصف قطرهــا r هي:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

أما إذا كانت المعادلة في الصورة

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2hx + 2gy + 2fz + c = 0$$

[لاحظ أن معاملات (x^2, y^2, z^2) تساوي واحد وأن معاملات (xy, yz, zx)تساوى الصفر) وهى تمثل سطح كرة مركزها النقطة

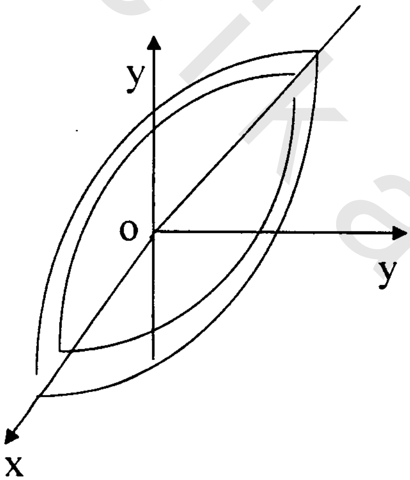
$(-h, \; -g, \; -f)$ ونصف قطرها $r=\sqrt{h^2+g^2+f^2-c}$

على سبيل المثال المعادلة

$$x^2+y^2+z^2-2x+4z-11=0$$

تمثل سطح كرة مركزها (1,0,-2) ونصف قطرها $r=4$

The ellipsoid السطح الناقص



معادلته في الصورة العامة هي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

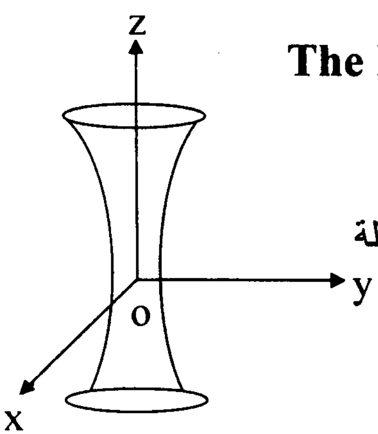
هذا السطح يقطع المحاور في النقط

$$(\pm a,0,0), \qquad (0,\pm b,0), \qquad (0,0,\pm c)$$

وإحداثيات أي نقطة على سطحه تحقق

$$|a|<a, \qquad |y|<b, \qquad |z|<c$$

3) السطح الزائدى The hyperboloid



يوجد نوعان من السطوح الزائديه فالمعادلة

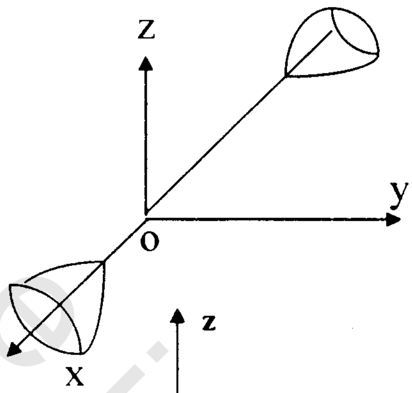
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

تمثل سطحًا زائد ذى طيه واحدة

والمعادلة

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

تمثل سطحًا زائدى ذات طيتين

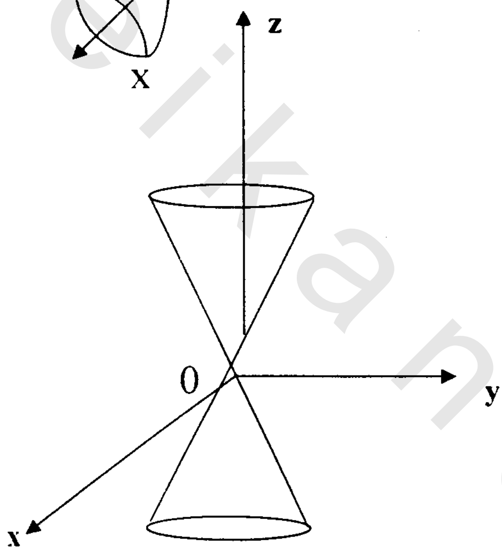


4) المخروط : The cone

الصورة العامة لمعادلته هي

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

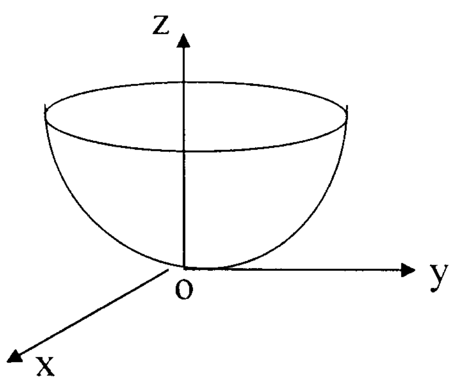
ورأسه النقطة (0,0,0)



5) السطح الناقص المكافيء Elliptic Parabolic

المعادلة هي:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



تمـــــــــــــــارين

- اذكر ما تستطيع استنتاجه عن السطوح التالية (الاسم – المركز – نصف القطر إن وجد ....) وارسم رسمًا تقريبيًّا لها

1) $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y = 3$
2) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8y + 8z = 8$
3) $x^2 + y^2 \;\; z^2 = x^2 + 4y^2$
4) $x^2 + z^2 = 1$
5) $x^2 / 4 + y^2 / 9 = 1$
6) $x^2 - y^2 + z^2 + 4x - 6y = 0$
7) $x^2 + 4y^2 = 1$
8) $z = x^2 + 2$

الإحداثيات الاسطوانية والكروية

1) الإحداثيات الاسطوانية Cylindrical Coordinates

الإحداثيات الاسطوانية بدلالة (r, θ, z) نحصل عليها باستبدال المتغيرات x, y بالإحداثيات القطبية مع الإبقاء على z كما هو مبين بالشكل، ويمكن كتابة العلاقة بين الإحداثيات الاسطوانية والكارتيزية كما يلي:

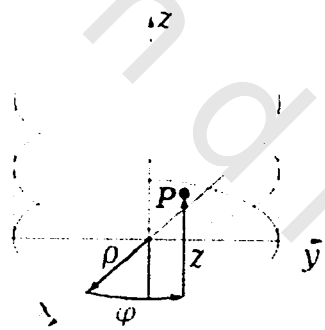
$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,\quad z = z,$$

حيث إن

$$r \ge 0,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

والعلاقات العكسية هي:

$$r^2 = x^2 + y^2,\quad \theta = \tan^{-1}(y/x),\quad z = z$$



مثال: اكتب المعادلات الأتية في الإحداثيات الاسطوانية

(1) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(2) $z = x^2 + y^2 + 2x - 3y$

الحل: باستخدام العلاقات السابقة نجد أن:

(1) $r^2 + z^2 = 4,$ (2) $z = r^2 + 2r\cos\theta - 3r\sin\theta$

مثال:

ا) إذا كانــت الإحــداثيات الاســطوانية لنقطــة مــا هــي: $(8,120^0,-2)$ أكتبها في الإحداثيات الكارتيزية.

2) إذا كانت معادلة سطح في الإحداثيات الاسطوانية هي:

$r = 6\sin\theta$ فأكتبها في الإحداثيات الكارتيزية، ثم أوصفها

الحل: 1- من العلاقات السابقة يمكن أن نجد أن إحداثيات النقطة المعطاة في الإحداثيات الكارتيزية هي

$$r = 8, \quad \theta = 120^0, \quad z = -2 \Rightarrow$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$r^2 = 8^2 = x^2 + y^2, \quad \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(y/x) \Rightarrow \quad 120^0 = \tan^{-1}(y/x)$$

$$\Rightarrow (-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, -2)$$

2- بضرب طرفي المعادلة في r والتعويض من العلاقات بين الإحداثيات نحصل على صورة المعادلة

$$x^2 + y^2 = 6y \quad or \quad x^2 + (y-3)^2 = 9$$

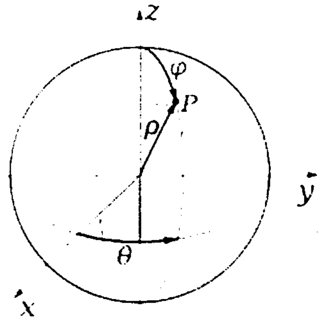
2) الإحداثيات الكرويه Spherical Coordinates

يمكن تحديد وضع نقطة في الفراغ R^3 بواسطة بعدها ρ عن نقطة الأصل

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \rho \geq 0,$$

وزاوية θ التي سبق ذكرها في الإحداثيات الاسطوانية

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$



وبواسطة الزاوية φ بين الاتجاه الموجب لمحور z والمستقيم OP

$$\cos\varphi = \frac{z}{\rho}, \qquad o \le \varphi \le \pi$$

تسمى العلاقة (ρ,θ,φ) **بالإحداثيات الكروية للنقطة P**

من الشكل نجد أن $\overline{OQ} = \rho\sin\theta$

$$x = \overline{oQ}\cos\theta = \rho\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = \overline{oQ}\sin\theta = \rho\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = \overline{oP}\cos\varphi = \rho\cos\varphi$$

مثال: أوجد الإحداثيات الكارتيزية للنقطة التي إحداثياتها الكروية هي $(2, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$

الحل: من النقطة الموضحة بالمثال

$$\rho = 2, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

من العلاقات السابقة نستطيع تعيين إحداثيات النقطة الكارتيزية

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta = 2\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta = 2\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = \rho \cos\varphi 2\cos\frac{3\pi}{4} - \sqrt{2}$$

إذن الإحداثيات الكارتيزية المطلوبة هي: $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$

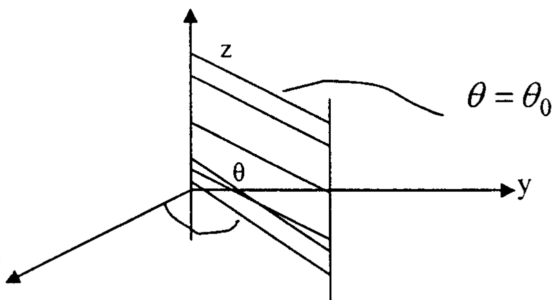
مثال: اذكر ماذا تمثل كل من المعادلات التالية:

$$1)\rho = \rho_0, \qquad 2)\theta = \theta_0, \quad 3)\varphi = \varphi_0$$

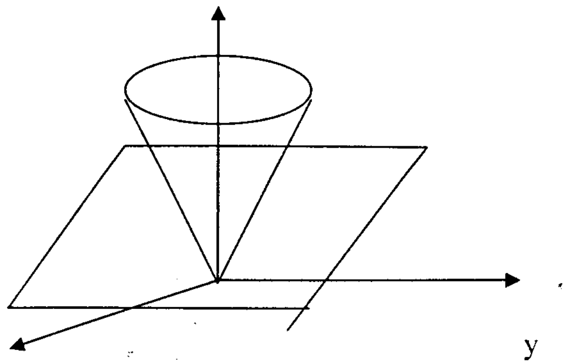
حيث ρ_0 θ_0 φ_0 ثوابت

الحل:

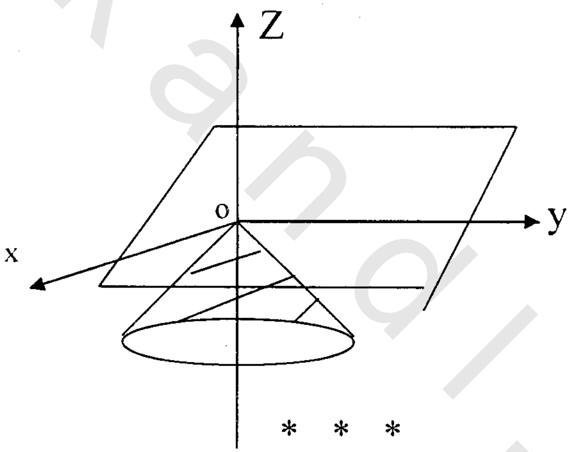
1- السطح $\rho = \rho_0$ مكون من جميع النقط التي تبعد مسافة ثابتة عن نقطة الأصل، وبالتالي فالمعادلة عبارة عن كرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها ρ_0



2- المعادلة $\theta = \theta_0$ تمثل نصف مستوى يصنع زاوية θ_0 مع الاتجاه الموجب لمحور x والنصف الآخر لهذا المستوى معادلته $\theta = 180^0 + \theta_0$



3- المعادلة $\varphi = \varphi_0$ تمثل السطح المكون من جميع النقط فهي تمثل مخروطًا قاعدة على شكل دائري سفلي أو علوي.



* * *

تمـــــــــارين

1) حول النقط التالية مــن الإحــداثيات الكارتيزيــة إلــى الإحــداثيات الاسطوانية

$(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1)$, $(4,-4,6)$, $(1,2,3)$, $(0,1,0)$, $(0,1,1)$

2) حول النقط التالية من الإحداثيات الاسطوانية إلى الكارتيزية

$(4,60^0,-3)$, $(5,0,2)$, $(0,60^0,0)$, $(0,0,90^0)$

3) حول النقط التالية من الإحداثيات الكارتيزية إلى الكروية

$(1,1,1)$, $(4,-4,0)$, $(2 \quad ,0,2)$

4) حول النقط التالية من الإحداثيات الكروية إلى الكارتيزية

$(5,30^0,45^0)$, $(2,90^0,90^0)$

5) حول النقط التالية من الإحداثيات الاسطوانية إلى الإحداثيات الكروية

$(2,270^0,0)$, $(2,0,-2)$

6) $x^2 + z^2 = 1$

7) $x^2 / 4 + y^2 / 9 = 1$

8) $x^2 - y^2 + z^2 + 4x - 6y = 0$

9) $x^2 + 4y^2 = 1$

10) $z = x^2 + 2$