الباب الحادى عشر

الهندسة التحليلية في الفراغ

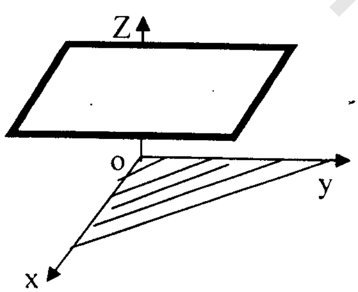
Analytic Geometry in the space

مقدمـــــة :

نرمز للفراغ ثلاثي الأبعاد الذي بـــه منظومـــة محـــاور متعامـــدة (x,y,z) بالرمز R^3 فإن فئة جميع النقط (x,y,z) في R^3 الذي يحقـــق المعادلة:

$$f(x,y,z)=0, \quad or \quad z=g(x,y)$$

تكون عمومًا سطحًا في الفراغ ونقول: إن معادلـــة الـــسطح هـــي المعادلة المعطاة. على سبيل المثال إذا كانت f دالة من الدرجة الأولـــى في المتغيرات x,y,z فإن المعادلة $f(x,y,z) = 0$ تمثل مستويًا فـــي R^3 وتكون على ذلك معادلة المستوى yz هي x=0 ومعادلة المستوى الـــذي يوازي المستوى x-y هي z = constant



كمثال آخر إذا كانت c(h,k,l) نقطة ثابتة فـــي الفـــراغ R^3 فـــإن المعادلة:

$$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-l)^2=r^2 \qquad (1)$$

تمثل السطح المكون من جميع النقط (x,y,z) التي تبعد مسافات متساوية r وبالتالي فإن هذه المعادلة تمثل سطح كرة مركزها النقطة c ونصف قطرها r بالإضافة إلى ذلك فإن أي معادلة على الصورة:

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

تمثل أيضا سطح كرة يمكن تعيين مركزها ونصف قطرها كما في طريقة إكمال المربعات.

مثال: اذكر ماذا تمثل المعادلة

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z-11=0$$

الحل: نقوم بعملية إكمال المربع لكل متغير على حده

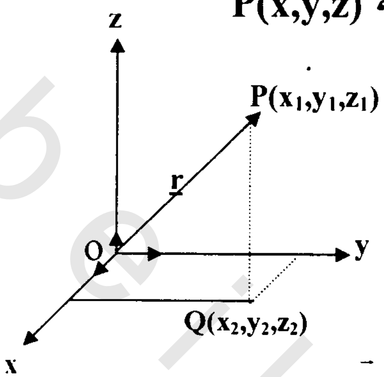
$$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)-11=0 \Rightarrow$$
$$(x-2)^2+(y+1)^2-(z-3)^2=11+1+4+9$$
$$=5^2$$

وبالتالي فإن المعادلة المعطاة تمثل سطح كرة نصف قطرها 5 ومركزها النقطة (2,-1,3)

فى هذا الباب سوف **ندرس المستقيمات في الفراغ R^3 والمستويات وسطوح الدرجة الثانية** لإجراء هذه الدراسة بطريقة نظامية جيدة سوف نحتاج إلى بعض المعلومات عن **المتجهات في الفراغ** نوردها بإيجاز في البند القادم لعلمنا بأن الطالب يعلم الشيء غير القليل عنها.

المتجهات في الفراغ

1) متجه الموضع Position vector للنقطة P(x,y,z)



هو المتجه $\vec{r} = \overrightarrow{0P} = r(x, y, z)$

حيث x,y,z أطوال مساقط الإحداثيات. باستخدام قانون البعد بين نقطتين نرى أن طول هذا المتجه هو:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

المتجه $\overrightarrow{PQ}$ الممثل بسهم من النقطة $P(x_1,y_1,z_1)$ إلى النقطة $Q(x_2,y_2,z_2)$ يمكن التعبير عنه

$$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

وطوله هو البعد بين هاتين النقطتين

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2 = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]$$

ملاحظة 1 : أي متجه طولة يساوي 1 يسمى متجه الوحدة

unit vector ومتجهات الوحدة هى كالتالي:

$\underline{i} = (1,0,0), \quad \underline{j} = (0,1,0), \quad \underline{k} = (0,0,1)$

وتسمى بمتجهات الوحدة الأساسية basic unit vector

ويمكن التعبير عن أي متجه

$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3)$

في R^3 بدلالة متجهات الوحدة الأساسية كما يلي:

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k}$$

ملاحظة 2:

من المعروف أن ضرب أي متجه في عدد موجب لا يغير اتجاهه ولكن يغير طوله فقط وضرب أي متجه في عدد سالب يغير طوله واتجاهه.

ملاحظة 3: للحصول على متجه وحده لأى متجه معلوم يعين بالقانون

$$\underline{u} = \frac{a}{|a|}$$

حاصل الضرب القياسي (أو العددى) لمتجهين

Dot (or Scalar) Product

يعرف حاصل الضرب القياسي لمتجهين

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k} \quad , \quad \underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

على أنه:

$$\underline{a}\,\underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

كما يمكن التعبير عنه بدلالة طول المتجهين والزاوية المحـــصورة بينهم كالتالى $\underline{a}.\underline{b}=|a||b|\cos\theta$

نتائج من تعريف حاصل الضرب القياسي

1) شرط تعامد أي متجهين $\underline{a},\underline{b}$ هو $\underline{a}\underline{b}=0$ أو بمعنى أخر

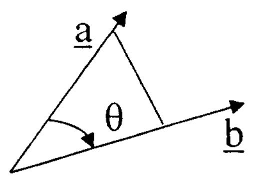
$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

2) لإيجاد الزاوية بين أي متجهين نستطيع تطبيق القانون

$$\cos\theta=\frac{\underline{a}.\underline{b}}{|a||b|}$$

3) لإيجاد مركبة component متجه **a** في اتجاه متجه آخر **b** طوله لا يساوي الصفر نطبق القانون التالي:

$$comp_b\,\underline{a}=\frac{\underline{a}.\underline{b}}{b}=a\cos\theta=\frac{ab\cos\theta}{b}$$



مثال: :

أوجد الزاوية بين المستقيم الواصل بـــين النقطتـــين p(1,-1,2) , Q(3,1,0) والمتجه $\underline{b}(4,-1,1)$، وأوجد طول مسقط $\overrightarrow{PQ}$ على اتجاه $\underline{b}$

الحل:

أولا نعين المتجه $\overline{PQ}$

$$\overline{PQ} = Q - P = (3,1,0) - (1,-1,2) = (2,2,-2)$$

$$\cos\theta = (\overline{QP}\,\underline{b}) / \left|\overline{QP}\right| \left|\underline{b}\right| = (8-2-2)/\sqrt{12}\sqrt{18}$$

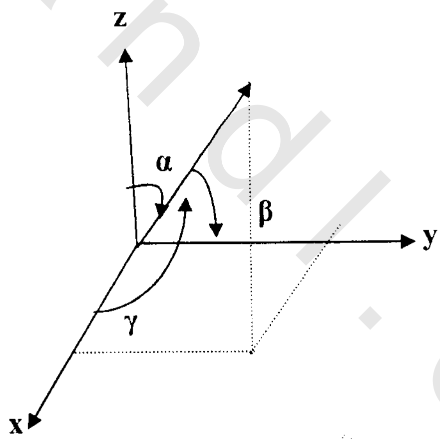
$$\theta = \cos^{-1}(0.27216) = 74^{0}.2$$

$$comp_b\,\overline{PQ} = \overline{PQ}\,(\underline{b}/\left|\underline{b}\right|) = 4/\sqrt{18} = 0.942$$

Direction angles زوايا الاتجاه

تسمى الزوايا α,β,γ التي يصنعها المتجه **a** (غير الـــصفري) مع المتجهات المتعامدة بزوايا الاتجاه للمتجه، ونستطيع تعيين تلك الزوايا بالقوانين:

$$\cos\alpha = (a_1/|a|)\underline{i}, \quad \cos\beta = (a_2/|a|)\underline{j}, \quad \cos\gamma = (a_3/|a|)\underline{k}$$



جيوب تمام الزوايا الاتجاهية تسمى بجيوب التمام الاتجاهية للمتجه وكما نرى فهي عبارة عن مركبات متجه الوحدة في اتجاه المتجه ومنها نستنتج أن:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

عادة ما نستخدم الرموز l , m, n للدلالة على جيــوب التمـــام $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ على الترتيب وعلى ذلك يكون

$$l = (a_1 / |a|)$$
$$m = (a_2 / |a|)$$
$$n = (a_3 / |a|)$$

إذن النسب الاتجاهية للمتجه $\underline{a}$ هي ببساطة مركباته ولتحويلها إلـــى جيوب تمام اتجاهيه نقسمها على طول المتجه $\underline{a}$

مثال: اعتبر المتجه $\underline{a} = < 2,3,-1 >$ عين زواياه الاتجاهيه.

الحل: $|a| = \sqrt{[(2)^2 + (3)^2 + (-1)^2]} = \sqrt{14}$

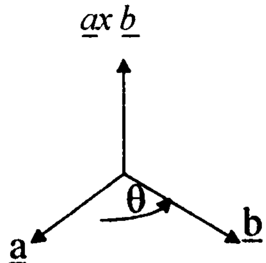
$$\alpha = \cos^{-1}(2/\sqrt{14}) = 57^0.69,$$
$$\beta = \cos^{-1}(3/\sqrt{14}) = 36^0,$$
$$\gamma = (\cos^{-1} - 1/\sqrt{14}) = 105^0.5$$

حاصل الضرب الاتجاهى Vector product

يعرف حاصل الضرب الاتجاهي للمتجهين

$$\underline{a} = a_1 \underline{i} + a_2 \underline{j} + a_3 \underline{k} \quad , \qquad \underline{b} = b_1 \underline{i} + b_2 \underline{j} + b_3 \underline{k}$$

على أنه



$$\underline{a} x\, \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}$$

هذا المتجه $\underline{a} \times \underline{b}$ عمودي على المستوى الذي يحوي المتجهين $\underline{a}, \underline{b}$ ويتحدد اتجاه الدوران من المتجه الأول إلى الثاني.

حاصل الضرب الثلاثي القياسي Scalar triple product

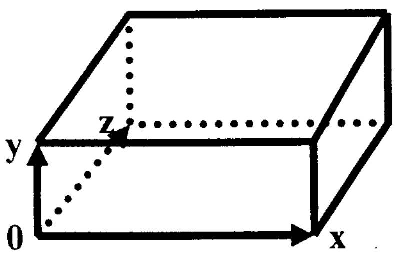
نفرض أن لدينا ثلاث متجهات في الفراغ

$$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}, \qquad \underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$$
$$\underline{c} = c_1\underline{i} + c_2\underline{j} + c_3\underline{k}$$

يسمى حاصل الضرب $\underline{a} . (\underline{b} \times \underline{c})$ بحاصل الضرب القياسي

$$\underline{a}.(\underline{b} x\, \underline{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$



وهذا الناتج يعبر هندسيًّا عن حجم متوازي السطوح الذي فيه a,b,c ثلاثة أضلاع متلاقية في نقطة وأهم استخدام لحاصل الضرب الثلاثي القياسي أنه:

يعطي شرط توازى ثلاث متجهات لمستوى في الصورة

$$\underline{a}.(\underline{b} x\, \underline{c}) = 0$$

مثال:

أوجد قيمة الثابت p بحيث تقع النقاط الأربعة الآتية في مستوى واحد:

A(1,-1,2) , B(0,0,1), C(3,2,0) D(5,4,p)

الحل: النقط الأربع تقع في مستوى واحد إذا كانت المتجهات , $\underline{AD}$, $\underline{AC}$ $\underline{AB}$ تقع (توازي) في مستوى واحد

وشرط ذلك أن يتلاشى حاصل الضرب الثلاثي القياسى:

$$\underline{a}.(\underline{b} x \underline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & p-2 \end{vmatrix} = 0$$

و بفك المحدد نجد أن:

$$\Rightarrow (3p+4)-(2p+4)+2=0$$
$$\Rightarrow p+2=0$$
$$\Rightarrow p=2$$

* * *

تمار يـــــــــــــــن

1) أوجد معادلة سطح الكره إذا علم

أ) مركزها C(1,0,-3) ونصف قطرها 4 .

ب) مركزها C(4,5,-2) وتمر بالنقطه (1,0,0) .

ج) نهايتى قطر فيها هما (3,1,-3), (7,3,1)

2) أوجد زوايا الاتجاه للمتجه $\underline{PQ}$ حيث $P(-1,2,-3)$، $Q(5,6,7)$

3) إذا كان $\underline{a} = (-1,3,0)$, $\underline{b} = (2,-1,2)$, $\underline{c} = (1,4,1)$ فأوجد

أ) الزاوية بين المتجهين $\underline{a}$, $\underline{b}$.

ب) الزاوية بين المتجهين $a + 2c$, b .

ج) $comp_a b$, $comp_b a$.

د) $comp_c (a + b)$.

4) لدينا ثلاث نقط $P(1,3,-2)$, $Q(2,4,5)$, $R(-3,-2,2)$ أوجد

أ) مساحة المثلث PQR .

ب) الزاوية QRP .

ج) حجم متوازى السطوح الذي فيه $\underline{OP}$, $\underline{OQ}$, $\underline{OR}$ ثلاث أضلاع متلاقية في نقطه.

د) أوجد متجه الوحدة U العمودي على المستوى PQR ومن ثم أوجد بعد نقطة الأصل عن هذا المستوى كمسقط $\underline{OP}$ على اتجاه U.

5) ما هو الشرط الذي يجب أن يتحقق للإحداثيات النقطة (X,Y,Z) حتى تقع في المستوى المار بالنقط $(3,-5,7)$,$(-4,-1,3)$,$(4,-3,0)$.

6) أوجد متجه الوحدة العمودي على محور Z وعلى المتجه الواصل بين النقطتين $P(1,-1,4)$, $Q(-3,2,4)$ هل توجد متجهات أخرى غير ذلك الذي حصلت عليه تحقق شروط المسألة.

* * *

المستقيمات في الفراغ Lines in spaces

المعادلات البارامترية للمستقيم :

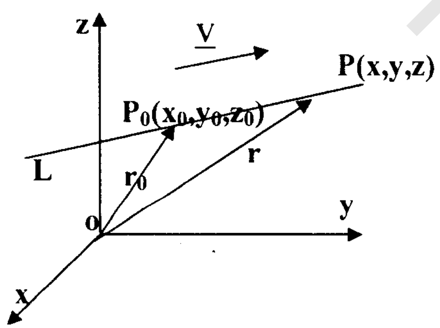
يتحدد المستقيم في الفراغ بواسطة:

(أ) نقطتين عليه أو

(ب) نقطة عليه ومتجه يوازية

نفرض أن المستقيم L يمر بالنقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ويوازي المتجه $\underline{v}=\langle a,b,c\rangle$ كما نفرض أن النقطة $P(x,y,z)$ أية نقطة أخرى على هذا المستقيم. إذا فرضنا أن متجهي الموضع للنقطتين P, P_0 هما $\underline{r}_0$, $\underline{r}$

فإن المتجه: $\overline{PP_0}=\underline{r}-\underline{r}_0$



وبالتالي $\underline{v}$ يوازي المتجه

$$\overline{PP_0}=t\underline{v}$$

حيث t بارامتر parameter ويمثل عددا ما وبالتالي فأن:

$$\underline{r}=\underline{r}_0+t\underline{v}$$

وهذه هي المعادلة المتجهه للمستقيم L ، وحيث إن المتجهين يكونان متساويان إذا تساوت مركباتهما المتناظرة فنجد أن:

$$x=x_0+ta\ ,\ y=y_0+tb\ ,\ z=z_0+tc\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

وهذه المعادلات تسمى **المعادلات البارامترية للمستقيم.**

مثال: أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم الذي نسبه الاتجاهية هى <2,4,-3> ويمر بالنقطة (1,0,5)، ومن ثم أوجد نقطة تقاطعه مع المستوى $2x + y + 3z = 15$

الحل: المستقيم المطلوب يوازي المتجه $\underline{v} = \langle a,b,c\rangle = \langle 2,4,-3\rangle$

ويمر بالنقطة (1,0,5) وعلى ذلك يمكن إيجاد المعادلات البارامترية كما يلي

$$\because x = x_0 + ta \ , \ y = y_0 + tb \ , \ z = z_0 + tc \Rightarrow$$
$$x = 1 + 2t, \quad y = 4t, \quad z = 5 - 3t$$

وهوالمطلوب أولا.

ولتعيين نقطة تقاطعه مع المستوى نعوض عن القيم x_0, y_0, z_0 للنقطة المعطاة (1,0,5) في معادلة المستوى لتعيين قيمة t كالتالى:

$$2(1 + 2t) + 4t + 3(5 - 3t) = 15 \Rightarrow t = 2$$

ومنها نستطيع تعيين قيم x,y,z وتصبح نقطة التقاطع هي (5,8,-1)

المعادلة المتماثلة Symetric Equations

معادلة المستقيم بمعلومية نقطة عليه ومتجه اتجاهه هي

$$\frac{(x - x_0)}{a} = \frac{(y - y_0)}{b} = \frac{(z - z_0)}{c} \quad \text{.......................}(11)$$

وهذه هي المعادلات المتماثلة للمستقيم L.

على سبيل المثال المعادلات المتماثلة للمستقيم الوارد في المثال السابق هي

$$\frac{(x-1)}{2}=\frac{(y)}{4}=\frac{(z-5)}{-3}$$

المستقيم كخط تقاطع مستويين:

يمكن تحديد المستقيم كخط تقاطع مستويين معلومين كما سيتضح من المثال القادم:

مثال: أوجد المعادلات المتماثلة والمعادلات البارامترية لخط تقاطع المستويين:

$$x+3y-z=9, \quad 2x-3y+4z+3=0$$

ومن ثم أوجد جيوب التمام الاتجاهية لهذا المستقيم.

الحل: توجد عدة طرق لحل هذه المسألة نورد منها ثلاثة طرق لما في ذلك من فائدة في زيادة معلومات الطالب.

الطريقة الأولى :

نوجد نقطتين على هذا الخط عن طريق وضع $y = 0$ ثم نحل المعادلتين:

$$x-z=9, \quad 2x+4z=-3$$

لإيجاد قيم z , x نجد أن: $x = 5.5, \quad z = -3.5$

إذن المستقيم يمر بالنقطة p(5.5,0,-3.5) ثم نضع z = 0

فنجد أن $x = 2, \quad y = 7/3$

إذن المستقيم يمر أيضا بالنقطة Q(2,7/3,0) وبالتالي فإن المتجه:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (-3.5, 7/3, 3.5) = (7/6)(-3, 2, 3)$$

فيكون معلوم متجه اتجاه الخط المستقيم $\overrightarrow{PQ}$ ونقطة عليه من النقطتين

فتصبح المعادلة المطلوبة هي: $\dfrac{(x - 5.5)}{-3} = \dfrac{(y)}{2} = \dfrac{(z + 3.5)}{3}$

الطريقة الثانية:

العمودي على المستوى الأول هو $\underline{a}$ = <1,3,-1> والعمودي على المستوى الثاني هو المتجه $\underline{b}$ = <2,-3,4> وكل من المتجهين $\underline{a}$,$\underline{b}$ عمودي على خط تقاطع المستوين وناتج الضرب الاتجاهي $\underline{a}$ x $\underline{b}$ يوازي خط تقاطع المستويين ويكون متجه اتجاه الخط المستقيم هو:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (12-3)\overline{i} - (4+2)\overline{j} + (-3-6)\overline{k} = <9, -6, -9>$$

وبمعلومية أي نقطة كما سبق، وسبق ان عيناها في الطريقة الأولى فتصبح معادلة الخط المستقيم هي:

$$\frac{(x-5.5)}{9}=\frac{(y)}{-6}=\frac{(z+3.5)}{-9}\Rightarrow$$
$$\frac{(x-5.5)}{-3}=\frac{y}{2}=\frac{(z+3.5)}{3}$$

الطريقة الثالثة:

نحل معادلتي المستويين المعلومين في x , y بدلالة z فنجد أن:

$$x=-z+2, \quad y=(2/3)z+(7/3)\Rightarrow$$
$$(x-2)/-1=z, \quad (y-(7/3))/(2/3)=z\Rightarrow$$
$$\frac{(x-2)}{1}=\frac{(y-7/3))}{(2/3)}=z$$

بالضرب في (1/3) نحصل على المعادلات المتماثلة السابقة:

$$\frac{(x-2)}{-3}=\frac{(y-7/3)}{2}=\frac{z}{3}$$

من الواضح أن الطريقة الثالثة هي أسهلهم جميعا وللحصول على المعادلات البارامترية في الحالات الثلاث نساوى المعادلات بالمتغير t

$$x=2-3t, \quad y=7/3+2t, \quad z=3t$$

والآن نقوم بتعين الزوايا الاتجاهية لهذا الخط

بما أن المستقيم يوازي المتجه $<-3,2,3>$ الذي طوله $\sqrt{22}$

إذن جيوب التمام الاتجاهيه هي:

$$\cos\alpha=-3/\sqrt{22}, \quad \cos\beta=2/\sqrt{22}, \quad \cos\gamma=3/\sqrt{22}$$

مثـــال: أوجـــد معـــادلات المـــستقيم العمـــودي علـــى المـــستقيم $\frac{(x-1)}{2}=\frac{(y+2)}{5}=\frac{z}{-3}$ والموازي للمستوى $3x-y=6$ والذي يمـــر بالنقطة $(1,1,1)$.

الحل: المستقيم المطلوب عمودي على كلا المتجهين:

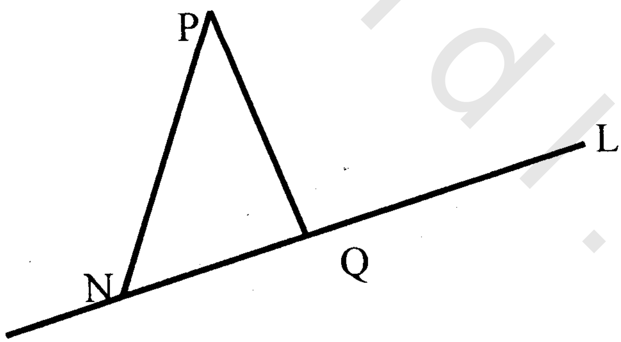
$\underline{a} = \langle 2,5,-3 \rangle$, $\underline{b} = \langle 3,-1,0 \rangle$

وبالتالي فهو يوازي المتجه: $\underline{a} \times \underline{b} = \langle -3,-9,-17 \rangle$

وبما أن المستقيم يمر بالنقطة $(1,1,1)$ فتكون معادلاته المتماثلة هي:

$$\frac{(x-1)}{3}=\frac{(y-1)}{9}=\frac{(z-1)}{17}$$

البعد العمودي بين نقطة ومستقيم في الفراغ



نوجد طول العمود $\overline{PN}$ من النقطة المعلومة P على المستقيم L كالتالي:

1) نوجد أي نقطة ولتكن Q على المستقيم

2) نحسب طول $\overline{QN}$ كمسقط $\overline{PQ}$ على اتجاه المستقيم L

3) نوجد طول العمودي $\overline{PN}$ باستخدام نظرية فيثاغورث

$$\left|\overline{PN}\right| = \sqrt{(\overline{PQ})^2 - (\overline{QN})^2}$$

مثال: أوجد البعد بين النقطة P(4,-1,3) والمستقيم:

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{y}{1} = \frac{(2-z)}{2}$$

الحل:

$$\frac{(x-1)}{3} = \frac{y}{1} = \frac{(2-z)}{2} \Rightarrow \frac{(x-1)}{3} = \frac{y}{1} = \frac{(z-2)}{-2}$$

1) المستقيم المعلوم يمر بالنقطة Q(1,0,2) ويوازي المتجه

$\underline{V} = <3,1,-2>$

2) $\overline{PQ} = (-3,1,-1), \quad \left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{11}$

3) $\overline{QN} = \left|\overline{PQ}\,\overline{V}\right| / \left|\overline{V}\right| = 6/\sqrt{14}$

$$\therefore \overline{PN} = \sqrt{(\overline{PQ})^2 - (\overline{QN})^2} = \sqrt{11 - 36/14} = \sqrt{59/7}$$

تمرين: بين أن النقطة N هي (16/7,3/7,8/7)

شرط وقوع مستقيمين في مستوى واحد

نعتبر المستقيمين

$$\frac{(x-x_1)}{a_1} = \frac{(y-y_1)}{b_1} = \frac{(z-z_1)}{c_1}$$

$$\frac{(x-x_2)}{a_2} = \frac{(y-y_2)}{b_2} = \frac{(z-z_2)}{c_2}$$

إذا كان هذان المستقيمان متوازين (**شرط ذلك** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$)

فإذا كانا متقاطعان فأنهما يقعان في مستوى واحد في هـذه الحالـة تقـع المتجهات الآتية:

$\underline{A} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad \underline{B} = (a_1, b_1, c_1)$
$\underline{C} = (a_2, b_2, c_2)$

فى مستوى واحد وكما نعلم فإن شرط ذلك هو تلاشى حاصل الضرب الثلاثي القياسي بمعنى $\underline{A}.(\underline{B} x \underline{C}) = 0$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad\quad (12)$$

للحصول على معادلة المستوى الذي يحوي هذين المستقيمين يكفي في هذا المحدد أن نستبدل النقطة (x_2, y_2, z_2) بالنقطة (x,y,z) وتصبح المعادلة:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

إذا كان المحدد لا يساوي الصفر فإن المستقيمين في هذه الحالة يكونان غير متوازين ولا متقاطعين **ويسميان مستقيمين شماليان.**

تعريف المستقيمان الشماليان: إذا كان المستقيمان غير متوازين ولا متقاطعان **يسميان مستقيمين شماليان Skew lines**

مثال: اثبت أن المستقيمين:

$$\frac{(x-18)}{-7} = \frac{(y-9)}{3} = \frac{(z-1)}{5}$$

$$\frac{(x+6)}{3} = \frac{(y-5)}{13} = \frac{(z-11)}{5}$$

يتقاطعان وأوجد نقطة تقاطعهما و معادلة المستوي الذي يحتويهما وكذلك معادلات العمودي على كليهما من نقطة تقاطعهما.

الحل: لإثبات أن المستقيمان متعامدان نكتب أولا المستقيمان في الصورة البارامترية:

$$x = 18 - 7t, \quad y = 9 + 3t, \quad z = 1 + 5t$$
$$x = -6 + 3r, \quad y = 5 + 13r, \quad z = 11 + 5r$$

على الطالب أن يلاحظ أن هذين **المستقيمين غير متوازيين** لأن النسب الاتجاهية غير متناسبة لكي يتقاطع هذان المستقيمان لابد من وجود قيمة للبارامتر t وقيمة للبارامتر r تعطيان نفس القيمة للنقطة. لذلك نساوي الأطراف اليمنى المتناظرة في المعادلات البارامترية بأعلى لنجد أن:

$$18 - 7t = -6 + 3r$$
$$9 + 3t = 5 + 13r$$
$$1 + 5t = 11 + 5r$$

بحل أول معادلتان نجد أن **t = 3 , r = 1** بالتعويض بهذه القيم في المعادلة الثالثة نجد أنها تتحقق (إذا حدث ولم تتحقق فمعنى هذا أن المستقيمين **لا يتقاطعان** وبالتالي فهما **شماليان**) وعلى ذلك فالمستقيمان المعلومان يتقاطعان في النقطة (-3,18,16)

معادلة المستوى الذي يحوى هذين المستقيمين هي:

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-18 & z-16 \\ -7 & 3 & 5 \\ 3 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - y + 2z = 11$$

المتجه $\underline{V} = <1,-1,2>$ عمودي على هذا المستوى وبالتالي عمودي على كل من المستقيمين المعلومين وتكون المعادلات المتماثلة لهذا العمـودي من نقطة التقاطع هي:

$$\frac{(x+3)}{1} = \frac{(y-18)}{-1} = \frac{(z-16)}{2}$$

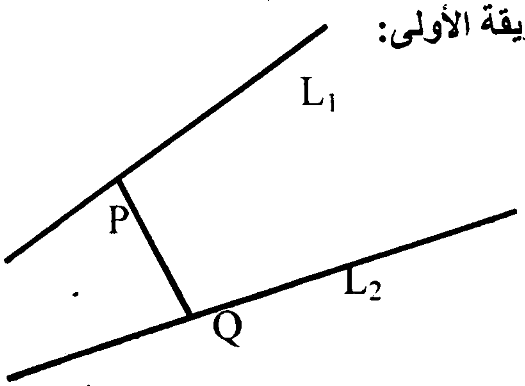
معادلات وطول أقصربعد بين مستقيمين شماليين

skew lines

توجد عدة طرق لإيجاد معادلات وطـول البعـد العمـودي $\overline{PQ}$ بـين المستقيمين الشماليين

$$L_1 : \ (x - x_1)/a_1 = (y - y_1)/b_1 = (z - z_1)/c_1$$
$$L_2 : \ (x - x_2)/a_2 = (y - y_2)/b_2 = (z - z_2)/c_2$$

الطريقة الأولى:



نكتب الإحداثيات البارامترية للنقطة P بدلالة البارامتر t والنقطة Q بدلالة البارامتر s ونوجد قيمتي t , s باستخدام شرط تعامد $\overrightarrow{PQ}$ مع كلا من L_1, L_2 فيكون طول أقصر بعد هو المسافة بين P,Q

مثال: أوجد معادلات وطول أقصر بعد بين المستقيمين الشماليين

$$L_1 :\ (x-5)/3=(3y-7)/3=(3z-26)/15$$
$$L_2 :\ (x+3)=4-y=(z+3)/3$$

الحل: نفرض أن $\overrightarrow{PQ}$ هو العمودي المشترك على المستقيمين $L_1,\ L_2$ وتكون المعادلات البارامترية لهذين المستقيمين هي:

$$L_1 :\ x=5+3t,\quad y=7/3+t,\quad z=26/3+5t$$
$$L_2 :\ x=-3+s,\quad y=4-s,\quad z=-3+3s$$

نفرض أن:

$$P(5+3t,7/3+t,26/3+5t,)\quad Q(-3+s,4-s,-3+3s)$$
$$\overrightarrow{QP}=(3t-s+8,t+s-5/3,5t-3s+35/3)$$

وبما أن $\overrightarrow{QP}$ عمودي على كل من المستقيمين L_1, L_2 إذن:

$$\overrightarrow{QP}.L_1=0$$
$$\Rightarrow 3(3t-s+8)+(t+s-5/3)+5(5t-3s+35/3)=0$$
$$\overrightarrow{QP}.L_2=0$$
$$\Rightarrow (3t-s+8)-(t+s-5/3)+3(5t-3s+35/3)=0$$

بعد فك الأقواس والاختصار نحصل على المعادلتين:

$$105t-51s=-242$$
$$51t-33s=-134$$

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$t = -4/3, \qquad s = 2$$

بالتعويض بقيم s , t نجد أن:

$$\overline{QP} = (2, -1, -1)$$

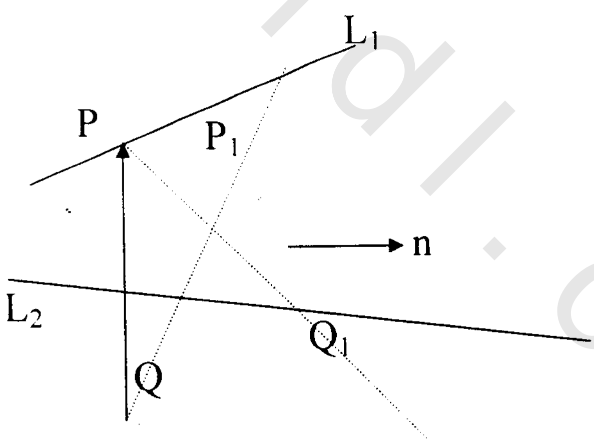
وبالتالي فإن أقصر طول هو:

$$\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

ومعادلته هي:

$$(x-1)/2 = (y-1)/-1 = (z-2)/-1$$

الطريقة الثانية



المستقيم $\overline{PQ}$ يوازي حاصل الضرب الاتجاهي لاتجاهي المستقيمين: L_1, L_2

$$\underline{n} = (a_1, b_1, c_1) X (a_2, b_2, c_2)$$

$n = (a_1,b_1,c_1) \times (a_2,b_2,c_2)$

باختيار النقطتين P_1 على L_1 والنقطة Q_1 على المستقيم L_2 فيكون طول $\overline{PQ}$ هو مسقط $\overline{P_1Q_1}$ على اتجاه $\underline{n}$ ويكون $\overline{PQ}$ هو خط تقاطع المستويين $P_1P\,Q$, $Q_1\,Q\,P$

مثال: حل المثال السابق بالطريقة الثانية.

الحل:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8\underline{i} - 4\underline{j} - 4\underline{k}$$

النقطة$Q_1(5,7/3,26/3)$ تقع على L_1 و $Q_2(-3,4,-3)$ تقع على L_2

$$\therefore \overline{Q_1Q_2} = (-8, 5/3, -35/3)$$

طول أقصر بعد هو مسقط $\overline{Q_1Q_2}$ على اتجاه $\underline{n}$

$$\left|\overline{PQ}\right| = (\overline{Q_1Q_2}.\underline{n})/|n|$$

$$= [-64 - 20/3 + 140/3]/\sqrt{64+16+16} = \sqrt{6}$$

معادلة المستوى P_1PQ هي:

$$\begin{vmatrix} x-5 & (y-7)/3 & (z-26)/3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 13y - 5z - 7 = 0$$

ومعادلة المستوى $Q_1Q\,P$ هي:

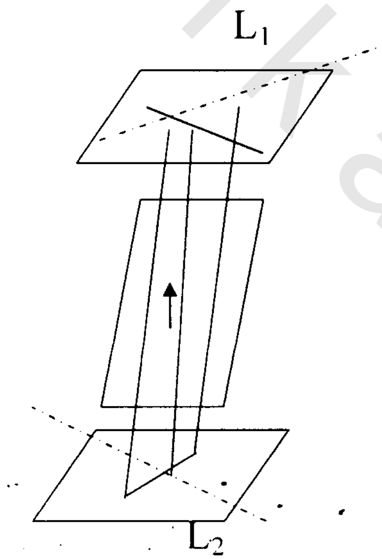
$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z+3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 7y + z - 13 = 0$$

معادلات أقصر بعد هي:

$$4x + 13y - 5z - 7 = 0 \quad , \qquad 4x + 7y + z - 13 = 0$$

الطريقة الثالثة



تتلخص في إيجاد مستويين متوازيين يمران بالمستقيمان L_1, L_2 فيكون البعد بينهما هو طول أقصر بعد بين المستقيمين.

مثال:

أوجد أقصر بعد بين المستقيمين في المثال السابق بالطريقة الثالثة.

الحل:

سبق وأن وجدنا

$$\underline{n} = 2\underline{i} - \underline{j} - \underline{k}$$

المستوى الذي يمر بالمستقيم L_1 عموديًا على $\underline{n}$ هو:

$$2(x-5)-(y-7/3)-(z-26/3)=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x-y-z+1=0$$

المستوى الذي يمر بالمستقيم L_2 عموديًا على $\underline{n}$ هو:

$$2(x+3)-(y-4)-(z+3)=0$$
$$\Rightarrow \quad 2x-y-z+7=0$$

أقصر بعد بين L_1, L_2 هو البعد بين هذين المستويين:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=[d_1-d_2]/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$
$$=6/\sqrt{4+1+1}$$
$$=\sqrt{6}$$

* * *

تمـــــــــارين

1) أوجـد المعـادلات البارامتريـة للمـستقيم الـذي يمـر بـالنقطتين $(2,3,1),(4,6,9)$ ، ومن ثم أوجد نقطة تقاطعه مع السطح

$$x^2 +2y^2-5z = 25$$

2) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيمين:

$$x - 2y + 4z = 0\ ,\ \ 3x - 2y + 5z = 0$$

3) أوجد المعادلات البارامترية للمستقيم الذي يمـر بالنقطـة $(-2,0,3)$ ويوازي المستقيم $x = 3 + 2t\ ,\ y = -5 - 3t\ ,\ z = 4 - t$

4) أوجد نقطة تقاطع المستقيم $z-(x + 1) / 2 = y - 3 = 4$ مع كـل من المستويات yz, xz, xy

5) أوجد معادلات مسقط المستقيم

$(x - 3)/-5 = (y - 4)/6 = (z-6)/8$ على مستوى xy

6) اثبت أن المستقيمين

$$x - 2 = (y - 2) /3 = z - 3\ ,\qquad x - 2 = (y - 3)/4 = (z - 4) /2$$

يتقاطعان وأوجد نقطة تقاطعهما، وأوجد معادلة المستوى الذي يحتويهما.

7) لدينا النقطة $P(2,3,4)$ والمستقيم

$$L : x + y - 2 z = 1\ ,\quad 2x - 3y + z + 3 = 0$$

ثم أوجد معادلات المستقيم الذي يمر بالنقطة P ويوازي L ، ومـن ثـم أوجد البعد بين هذين المستقيمين.

8) أوجد قيم x_1,x_2 بحيث إن النقطة $(x_1,1,x_2)$ تقع علـــى المـــستقيم المار بالنقطتين $(2,7,5), (0,2,3)$

9) أوجد معادلة المستوى الذي يحوي المستقيم

وعمودي على المستوى $3x - y + 4z = 0$

10) اثبـــت أن المـــستقيم $(x+1)/3 = (y-2)/6 = (z-3)/4$ يـــوازي المستوى $2x + 3y - 6z + 7 = 0$ ، ومن ثم أوجد البعد بينهما، وكذلك معادلات مسقط المستقيم المعلوم على هذا المستوى.

11) أوجد بعد النقطة $(2,2,1)$ و المستقيم

$$2x - y - z = 3 \;,\quad 3x - y - 3z = 4$$

12) لكل زوج من المستقيمات التالية حدد ما إذا كانا مستويين متوازيين أو شماليين أي إذا كانا مستويين، فأوجد معادلة المستوى الذي يحويهمـــا وإذا كانا شماليين أوجد معادلات وطول أقصر بعد بينهما:

a) $(x - 6)/2 = (y - 4)/5 = z - 2, \; (x - 1)/-4 = (y - 9)/5 = z-5$

b) $x - 4y - 13 = 0 \;,\; (x+3)/4 = (y-1)/2 = (z - 2)$

c) $x = 2 \;,\; y - z = 1 \;,\quad 6x = 3(y - 1) = 2(z - 2)$

13) أوجد معادلات البارامترية للمستقيم المار بنقطة الأصل ويقطع كلا من المستقيمين

$$x + 1 = y - 1 = (z+1)/-3 \;,$$
$$(x-1)/2 = (y - 1)/3 = (z - 2)/4$$