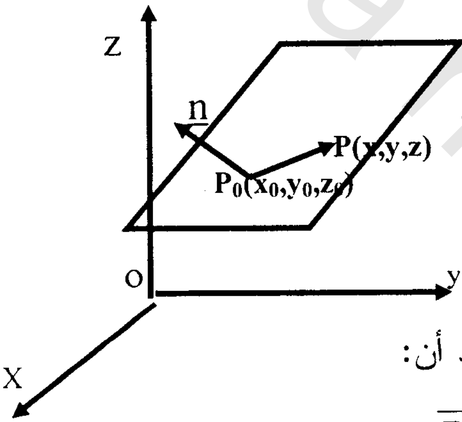
الباب العاشر
المستـــــويات
Planes

إنّ أبسط أنواع السطوح في الفراغ هو المستوى، وسوف نـــرى أن معادلة المستوى عبارة عن معادلة من الدرجة الأولى في x,y,z وفيمـــا يلي نورد التعريف الشائع للمستوى.

تعريف : إذا كانت P_0 نقطة معلومة، وكان $\underline{n}$ متجها غير صفري معلوم فإن فئة جميع النقط P بحيث $\overrightarrow{P_0P}$ عمودي علـــى $\underline{n}$ تعـــرف على أنها مستوى يمر بالنقطة P_0 عموديًا على المتجه $\underline{n}$.



إذا فرضنا أن $P_0(x_0,y_0,z_0)$ و النقطة $P(x,y,z)$ والمتجه $\underline{n}=<a,b,c>$ فإن

$$\underline{n}.\overline{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$$

وبالتالى من شرط التعامد للمتجهين نجد أن:

$$\underline{n}.\overline{P_0P}=0$$

أي إن معادلة المستوى بمعلومية نقطة تقع فـــي المـــستوى ومتجه عمودي عليه هي:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad \dots \quad (7)$$

Solved Proplems أمثلة محلولة

مثال: أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (5,-2,3) وعمودي على المتجه $\vec{n} = 2\underline{i} + 4\underline{j} - \underline{k}$

الحل: من تعريف معادلة المستوى نستنتج معادلة المستوى مباشرة:

$$2(x-5)+4(y+2)-(z-3)=0$$

إذن معادلة المستوى هي: $2x+4y-z+1=0$

والآن نثبت أن أية معادلة في الصورة العامة هي:

$$ax+by+cz+d=0$$

حيث واحد على الأقل من الثوابت a,b,c لا يساوي الصفر تمثل معادلة مستويًا متجه العمودي عليه هو **<a,b,c>** .

الإثبات نفرض أن a≠0 نعيد كتابة المعادلة على الصورة التالية

$$a(x+d/a)+b(y-0)+c(z-0)=0$$

وهذه كما نرى تمثل معادلة المستوى السابق ذكرها والذي يمر بالنقطة (d/a,0,0) وعموديًا على المتجه <a,b,c>

لاحظ أن معاملات x,y,z تعطى مركبات العمودي على المستوى.

الزاوية بين مستويين : Angel between two planes

تعرف على أنها الزاوية بين المتجهين العموديين على المستويين، وعلى ذلك يكون المستويان متعامدين إذا كان:

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

وأيضا المستويان متوازيًا إذا كان المتجهان العموديَّان عليهما متوازيين وشرط التوازي رياضيًّا هو:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

مثال: أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقط P(1,2,-1) , Q(2,3,1), R(3,-1,2) ، ثم أوجد الزاوية بينه وبين المستوى:

$$x + 3y - z = 6$$

الحل: بما أن النقط P,Q,R واقعة في مستوى فإن المتجهين $\overline{PQ},\ \overline{PR}$ يوازيان هذا المستوى، وبالتالي فإن حاصل الضرب الاتجاهي لهما يعطي متجه عمودي على المستوى المطلوب.

$$\overline{PQ} = (1,1,2),\quad \overline{PR}(2,-3,3)$$

$$\underline{n} = \overline{PQ} x \overline{PR} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = (9,1,-5)$$

وبمعلوميه المتجه العمودي على المستوى n وأي نقطة من النقط الثلاث ولتكن P يمكن تعيين معادلة المستوى وهى:

$$9(x-1) + (y-2) - 5(z+1) = 0$$

وهو المطلوب أولا: $9x + y - 5z - 16 = 0$

بما أن المتجه العمودي على المستوى الثاني هو: $\underline{n'} = <1,3,-1>$

$$\cos\theta = (\underline{n}.\underline{n}')/|\underline{n}||\underline{n}'| = 17/\sqrt{107}\sqrt{11} \Rightarrow \theta = 60^0.3$$

مثال: أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة (2,3,5) والموازي للمستوى:

$$3x - y - z + 9 = 0$$

الحل: بما أن المستوين متوازيان، إذن المتجه العمودي على أحدهما يكون عموديًّا على الآخر، وبالتالي فإن معادلة المستوى المطلوب يجب أن تكون على الصورة $3x - y - z + d = 0$

نوجد قيمة d بالتعويض بالنقطة المعطاة

$$6 - 3 - 5 + d = 0 \Rightarrow d = 2$$

إذن المستوى المطلوب تكون معادلة على الصورة

$$3x - y - z + 2 = 0$$

معادلة المستوى المار بخط تقاطع مستويين

مثال: أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين

$$2x - z = 0, \quad x + y - z + 5 = 0$$

وعمودي على المستوى $7x - y + 4z = 3$

الحل: يمكن كتابة هذه المعادلة في الصورة العامة وهى:

$$(2x - z) + t(x + y - z + 5) = 0$$

هذه المعادلة من الدرجة الأولى، وبالتالي فهي تمثل مستويًا حيث t مقدار ثابت، وهذه المعادلة تتحقق بنقط تقاطع المستويين المعطيين، إذن

هذه المعادلة تمثل مجموعة المستويات المارة بخط تقاطع المستويين المعطيين، وعادة ما يعطى شرط أخر لتعيين قيمة هذا الثابت، وبالتالي تعيين معادلة مستوى واحد من ضمن المستويات التي تمر بخط تقاطع المستويين مثل (يمر بنقطة – عمودي على مستوى – يوازي مستوى) أو غير هذا وكذلك المستوى عمودي على مستوى أخر فيكون **العموديّان متعامدين.**

أولاً نعيد كتابة المعادلة السابقة في الصورة:

$$(2+t)x+ty-(1+t)z+5t=0$$

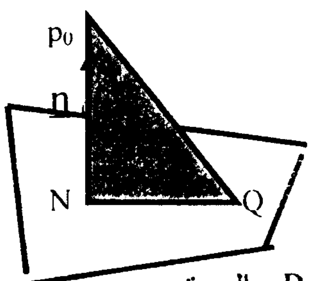
فالمتجه العمودي على المستوى هو $(2+t,t,-1-t)$، والمتجه العمودي على المستوى المعطى هو $(7,-1,4)$ وبالتالى:

$$(2+t,t,-1-t).(7,-1,4)=0 \Rightarrow 7(2+t)-t+4(-1-t)=0$$
$$\Rightarrow 2t+10=0 \Rightarrow \qquad t=-5.$$

وبالتعويض في المعادلة تصبح معادلة المستوى هي:

$$3x+5y-4z+20=0$$

طول العمود من نقطة على مستوى:



لإيجاد البعد بين النقطة $P_0(x_0,y_0,z_0)$ والمستوى

$$ax + by + cz + d = 0$$

نأخذ أي نقطة $Q(x_1,y_1,z_1)$ في المستوى فيكون البعد العمـــودي $\overline{P_0N}$ هو طول مسقط $\overline{QP_0}$ على اتجاه العمودي $\underline{n}$ على المستوى

$$\underline{n} = (a,b,c), \quad \overline{QP_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$\therefore \overline{P_0N} = (\underline{n}.\overline{QP_0}) / |\underline{n}|$$

$$\left[a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)\right] / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\left[(ax_0 + by_0 + cz_0) - (ax_1 + by_1 + cz_1)\right] / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

. وحيث إن النقطة Q واقعة في المستوى أي تحقق المعادلة فيكون:

$$(ax_1 + by_1 + cz_1) = -d$$

وعلى هذا يكون البعد العمودي بين نقطة ومستوى هو:

$$D = (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

مثال: أوجد البعد العمودي بين النقطة(5,12,-13) والمستوى

$$3x + 4y + 5z + 12 = 0$$

الحل: باستخدام العلاقة السابقة يكون:

$$D = (15 + 48 - 65 + 12) / \sqrt{9 + 16 + 25}$$
$$= 10 / \sqrt{50}\ cm.$$

* * *

تمارين

1) أوجد معادلة المستوى يمر بالنقطة (3,1,-1) وعموديًا على المتجه (5,2,3).

2) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (5,7,-6)، ويوازي المستوى xz .

3) أوجد معادلة المستوى يمر بالنقطة (2,6,-1) ويوازي المستوى $4x-2y=5$.

4) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطتين (0,2,-1) , (2,0,5)، وعمودي على المستوى $x + 3y - z = 7$.

5) أوجد معادلة المستوى يحتوي على محور x ويمر بالنقطة (3,-5,1).

6) أوجد معادلة المستوى يمر بالنقط (0,0,0) , (2,1,1) , (-3,0,4) .

7) أوجد معادلة المستوى العمودي على المستويان $x - y + z = 3$ و $2x+y+4z = 0$. ويمر بالنقطة (4,0,-2).

8) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (1,3,-2)، ويقطع جزئين طولهما 2,5 من محوري x,y على الترتيب.

9) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة (2,1,1)، ويصنع زاوية $\cos^{-1}2/3$ مع المستوى $2x - y\ 2z = 3$.

10) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بمحور y ، ويبعد مسافات متساوية عن النقطتين (-1,1,0) , (2,7,3).

11) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بنقطة الأصل، وعمودي على

المستوى

$5x-2y+5z=0$، ويصنع زاوية 45^0 مع المستوى $x-4y-8z=1$.

12) أوجد المسافة العمودية بين النقطة $(-2,6,3)$ والمستوى $5x+11y+2z=30$.

13) اثبت أن البعد بين المستويين المتوازين:

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \quad , \quad ax + by + cz + d_2 = 0$$

يساوى

$$[d_1 - d_2] \; / \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ثم أوجد منها المسافة العمودية بين المستويين:

$$4x - 8y - z + 9 = 0 \quad , \quad 4x - 8y - z - 6 = 0$$

14) أوجد معادلة المستوى الذي يوازي المستوى $2x + y - 4z = 0$، ويبعد مسافة $\sqrt{21}$ عن النقطة $(1,2,0)$.

15) أوجد معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين:

$$x + 2y + 3z - 4 = 0 , \quad 3x + z = 5$$

ويوازي المستوى $7x + 2y + 5z = 8$

16) أوجد معادلة المستوى الذي يمر بالنقطة $(1,1,1)$، ويقطع المستوى xy في نفس الخط الذي يقطعه فيه المستوى $3x+2y+z=6$.

* * *