الباب الأول

الاعداد المركبة

Complex numbers

تعريف

اى عدد مركب يمكن كتابتة على الصورة $a+ib$ حيث a,b اعداد حقيقية وهذا العدد الحقيقى يتكون من مركبتين الاولى مركبة حقيقية والثانية مركبة تخيلية.

وكذلك العدد i هو عدد تخيلى بحيث -1 اى $i=\sqrt{-1}$

وعموما اذا كان العدد C هو اى عدد موجب فيمكن كتابتة على الصورة: $\sqrt{-c}=\sqrt{c}\,i$

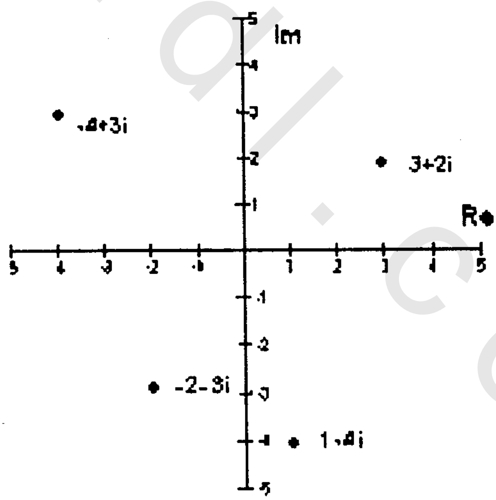


Figure 1

فاذا كان لدينا العدد المركب z بحيث

obeikandl.com

$$z = a + ib$$

فتكون المركبة الحقيقية لهذ العدد المركب على الصورة (Re z)

ويمثل العدد b الجزء التخيلى للعدد z ويرمز له بالرمز (Im z)

وعلى سبيل المثال المركبة الحقيقية للعدد z=4+3i هى العدد

هى العدد 4 والمركبة التخيلية هى العدد 3

من هذا يتضح ان اى (a+bi) and (c+di) يكونان متساويين اذا كان العددين

a=c and b=d

اى ان اذا تساوت المركبات الحقيقية والمركبات التخيلية.

ويمكن تمثيل العدد $a+ib$ عن طريق الزوج المرتب (a,b)

او بالمستوىcomplex plane والمستوى الذى يمثلهم بالمستوى

المركب Argand Plane وتمثل المركبة الافقية المحور الحقيقى real axis

بينما المركبة التخيلية بالمحور العمودى imaginary axis

كما هو موضح بالشكل 1.

والامتداد الطبيعى والمفيد للغاية هو معرفة الأرقام الحقيقية. ويمكن تقديمها على النحو التالى:

obeikandl.com

لنعتبر ثنائية الأبعاد الحقيقية (a_1,a_2).وهندسيا يمكن تحديد هذا الفضاء للفضاء وتحتوى كل الاعداد الثنائية المرتبة كمركبات لنقطة فى الفضاء الاقليدى متخذا الاعداد a_1, a_2للمستوى.

جمع المتجهات

The addition of vectors

يعرف جمع المتجهات كالتالى:

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=\left(a_1+b_1,a_2+b_2\right)$$

كما هو مستخدم فى قانون متوازى الاضلاع لجمع المتجهات.

ضرب المتجهات

The multiplication of a vector

يعرف ضرب المتجة (a_1,a_2) فى عدد حقيقى ثابت C كالتالى:

$$c(a_1,a_2)=(ca_1,ca_2),$$

$$(a_1,a_2).(b_1,b_2)=\left(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1\right)$$

الاحداثيات القطبية

Polar coordinates

ويمكن تمثيلها كالتالى

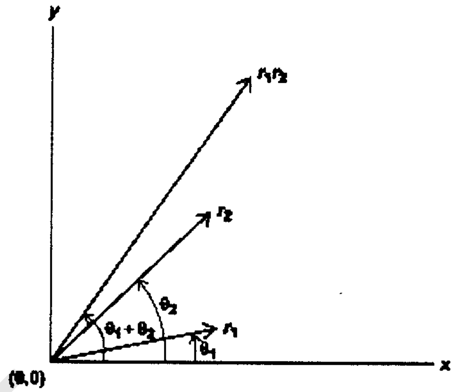
$$(a_1,a_2)=\left(r\cos\theta,r\sin\theta\right),$$

حيث r يمثل طول المتجة (a_1,a_2) وكذلك مقياس العدد المركب يعرف كالتالى

$$r^2=a_1^2+a_2^2 .$$

والزاوية θ تعرف كالتالى:

$$\tan\theta = \frac{a_2}{a_1}$$



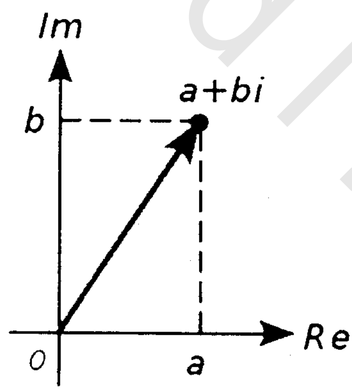
Multiplication of complex numbers.

ويمكن تمثيل اى متجة كالتالى

$$z = (x, y) = xl + yi$$

او على الصورة

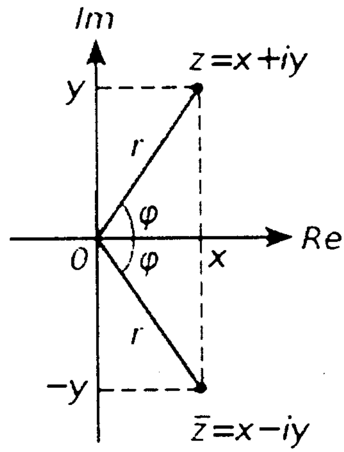
$$z = x + yi.$$



المستوى المركب

The complex plane

obeikandl.com



يمكن تمثيلة كما موضح بالشكل

القيمة المطلقة، المرافق و المسافة

Absolute value, conjugation and distance

تعرف القيمة المطلقة، المرافق و المسافة كالتالى:

$$z = re^{i\varphi} \text{ is defined as } |z| = r.$$

وجبريا كالتالى:

$$z = x + iy \quad \text{then} \quad |z| = \sqrt{x^2 y^2}.$$

والقيمة المطلقة لها ثلاث خواص هامة كالتالى:

$$|z| \geq 0, \quad \text{where} \quad |z| = 0$$

<u>if and only if</u> $z = 0$ اذا وفقط اذا كان

$$|z + w| \leq |z| + |w|$$

(<u>triangle inequality</u>)

$$|z\,w| \leq |z|.|w|$$

obeikandl.com

$$\overline{z+w}=\overline{z}+\overline{w}$$

$$\overline{z\,w}=\overline{z}\,\overline{w}$$

$$\overline{(z/w)}=\overline{z}/\overline{w}$$

$$\overline{\overline{z}}=z$$

if and only if z is real $\overline{z}=z$ اذا وفقط اذا كان z عدد حقيقى

$\overline{z}=-z$ عدد تخيلى zاذا وفقط اذا كان

$$\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$$

$$\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$$

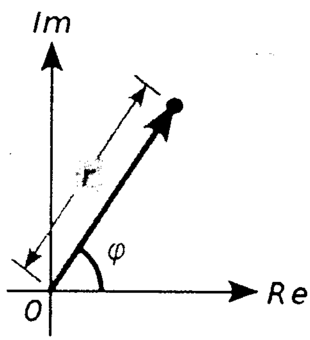
$$|z|=|\overline{z}|$$

$$|z|^2=z\,\overline{z}$$

$$z^{-1}=\frac{\overline{z}}{|z|^2},\qquad z>0$$

الصورة القطبية

Polar form



obeikandi.com

يمكن تمثيلها كالتالى:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \pm\arctan\frac{y}{x}$$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$r_1 e^{i\varphi_1} . r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

تطبيقات هندسية للاعداد المركبة

Applications

والاعداد المركبة لها العديد فى التطبيقات الهندسية مثل:

نظرية التحكم، الإشارات، التكاملات المعتلة، ميكانيكا الكم، والنسبية، والرياضيات التطبيقية، وديناميكا السوائل.

امثلة محلولة

Solved Problems

مثال:

اكتب حاصل جمع وضرب $(-2,-i)$ و $(4-5i)$ فى الصورة $(a+ib)$ للاعداد المركبة.

الحل

$$(4-5i)+(-2-i)=(2-6i)$$

$$(4-5i)(-2-i)=-13+6i$$

$$z=(2-3i)^3=-46-9i$$

مثال: اوجد مقياس وزاوية ميل العدد المركب $\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}$

الحل

$$\frac{1+2i}{1-(1-i)^2}=\frac{1+2i}{1-(1-2i-1)}=1=1+0i$$

$$\therefore \left|\frac{1+2i}{1+2i}\right|=1$$

وزاوية ميل العدد المركب(a +ib) هى

$$\theta=\tan^{-1}\frac{b}{a}\Rightarrow$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{0}{1}=0$$

مثال: اكتب الدالة $\frac{1+2i}{1-3i}$ فى الصورة $r(\cos\theta+i\sin\theta)$

الحل: بالضرب فى $\frac{(1+3i)}{(1+3i)}$ نحصل على

$$\frac{1+2i}{1-3i}=\frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}i\Rightarrow$$

$$r\cos\theta=\frac{-1}{2},\qquad r\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{4}.$$

خواص المجموعات المركبة

Properties of the Complex Set

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

$$(a-bi)+(c-di)=(a-c)+(b-d)i$$

فمثلا

$$(3+i)+(1-7i)=(3+1)+(1-7)i$$

$$=(4-6i)$$

$$(a+bi)(c+di)=a(c+d)+bi(c+di)$$

$$=ac+adi+bci+bdi^{2}$$

مثال: اكتب الدالة $\dfrac{-3+i}{7-3i}$ فى الصورة $a+bi$

الحل: بالضرب بسطا ومقاما فى $7-3i$ نحصل على

$$\left(\frac{-3+i}{7-3i}\right)\left(\frac{7+3i}{7+3i}\right)=\frac{-21-9i+7i+3i^{2}}{7^{2}-(3i)^{2}}$$

$$=\frac{-24-2i}{58}$$

$$=-\frac{12}{29}-\left(\frac{1}{29}\right)i$$

obeikandl.com

خواص المرافق

Conjugates Properties

العدد المركب $z = x + iy$ له الخواص التالية

1) $\overline{\overline{z}} = z$

2) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

3) $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

4) $\overline{z^n} = \overline{z}^{\,n}$

5) $If \quad z \neq 0, \quad then \quad \overline{w/z} = \overline{w}/\overline{z}$

$i.e \quad z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}$

6) $z \quad is \quad real \quad \leftrightarrow \overline{z} = z$

$i.e \quad z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2}$

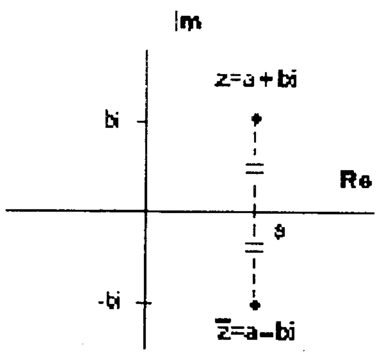


Figure 2

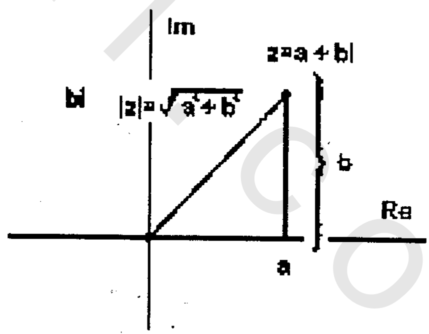


Figure 3:

obeikandl.com

$$z\,\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2$$
$$= a^2 + b^2$$
$$z\,\bar{z} = |z|^2$$

1) $|z| = 0 \quad iff \quad z = 0$

2) $|z| = |\bar{z}|$

3) $|zw| = |z||w|$

4) $If \quad z \neq 0 \rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

5) $|z+w| \leq |z| + |w|$

الصورة القطبية

Polar Form

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$where \quad r = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \quad and \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$or \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$a = r\cos\theta \quad and \quad b = r\sin\theta$$

امثلة محلولة

Solved Problems

مثال: اكتب الدالة $z = \sqrt{3} - i$ فى الصورة القطبية .

الحل:

obeikandl.com

$$r = |z| = \left|\sqrt{3}^{\,2} + (-1)^2\right| = |3+1| = 4$$

$$\theta = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

وحيث ان الدالة تقع فى الربع الرابع فان

$$\theta = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

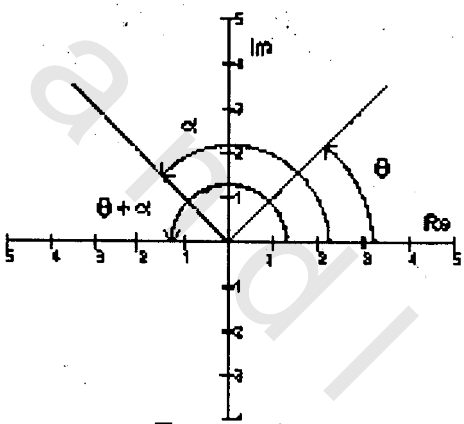


Figure 4:

والتفسير الهندسى لكل من الضرب والقسمة يمكن توضيحة من خلال الاحداثيات القطبية كالتالى:

obeikandi.com

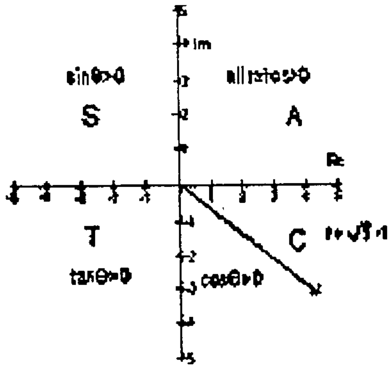


Figure 5

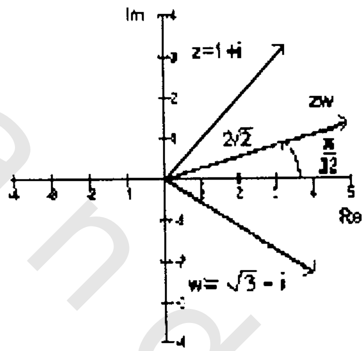


Figure 6

نفترض ان الاعداد التالية اعداد مركبة

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad w = s(\cos\alpha + i\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$zw = r(\cos\theta + i\sin\theta)^{*} s(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$= rs(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\alpha + i\sin\alpha)]$$

$$= rs[(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\cos\alpha) + i(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\sin\alpha)]$$

$$= rs[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)] \Rightarrow$$

$$zw = rs[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)] \Rightarrow$$

$$|zw||z||w| \text{ and } \quad Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w)$$

obeikandl.com

وبالمثل فى حالة القسمة:

$$\frac{z}{w}=\frac{r}{s}[\cos(\theta-\alpha)+i\sin(\theta-\alpha)], \quad w\neq 0$$

نظرية دى موافر

نظرية دى موافر هى تعميم لحساب قوى الاعداد المركبة فى صورة الاحداثيات القطبية كالتالى:

اذا كان

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z^2=(z)(z)=r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

$$\therefore z^3=(z^2)(z)=r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

.

.

.

$$\therefore z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

حيث n هو عدد موجب

$$\therefore z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

$$r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right], \quad k=0,1,2,\ldots,n-1$$

$$w=s(\cos\alpha+i\sin\alpha), \qquad z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta), \quad w^n=z.$$

$$\therefore s^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\theta+i\sin\theta)\Rightarrow$$

$$s=r^{\frac{1}{n}}\Rightarrow \cos n\alpha=\cos\theta \quad and \quad \sin n\alpha=\sin\theta$$

obeikandl.com

Since sine and cosin have a 2π period

اذا كانت الدورة 2π

$$n\alpha = \theta + 2\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2\pi}{n}$$

امثلة محلولة

Solved Problems

<u>مثال:</u> اوجد حاصل ضرب الاعداد المركبة التالية:

$$z = 1+i \quad and \quad w = \sqrt{3} - i$$

<u>الحل:</u> من المثال السلبق نجد ان

$$z = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$w = 1+i \Rightarrow |w| = \left|1^2 + 1^2\right|| = \sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{1}{1} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$zw = 4\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + i\,\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 4\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\,\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

<u>مثال:</u> احسب $\left(1+\sqrt{3}i\right)^5$

<u>الحل:</u>

$$z = \left(1 + \sqrt{3}i\right) \Rightarrow |z| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

obeikandl.com

$$\therefore \left(1+\sqrt{3}i\right)^5 = 2^5\left(\cos\left(5\frac{\pi}{3}\right)+i\,\sin\left(5\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

<u>مثال:</u> أوجد الاربعة جذور للعدد $z=-1$

<u>الحل:</u>

$$z=-1=-1+0i\,, so \quad r=|z|=\sqrt{1+0}=1$$

$$\tan\theta=\frac{0}{-1}\Rightarrow\theta=0$$

$$k=0,1,2,3 \, and \quad n=4$$

$$w_k=z^{\frac{1}{n}}=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\,\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$w_0=z^{\frac{1}{4}}=\cos\left(\frac{0}{4}\right)+i\,\sin\left(\frac{0}{4}\right)=1$$

$$w_1=z^{\frac{1}{4}}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i$$

$$w_2=z^{\frac{1}{4}}=\cos(\pi)+i\,\sin(\pi)=-1$$

$$w_3=z^{\frac{1}{4}}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-i$$

معادلة اويلر

Euler's Formula

من حساب التفاضل للدوال e^x, sin x, cos x وجدنا ان لها مفكوك متسلسلة تيلور كالتالى:

obeikandl.com

$$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!}=1+z+\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{3}}{3!}+\ldots$$

$$\sin z=z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\ldots$$

$$\cos z=1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}-\ldots$$

وبالنظر الى الاعداد المركبة فيمكن تطبيق نفس المفكوك كاتالى:

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$$

$$\because z=iy$$

$$e^{iy}=1+iy+\frac{(iy)^{2}}{2!}+\frac{(iy)^{3}}{3!}+\frac{(iy)^{4}}{4!}+\ldots$$

$$=1+iy-\frac{y^{2}}{2!}-\frac{iy^{3}}{3!}+\frac{z^{4}}{4!}+\ldots$$

$$e^{iy}=\underbrace{\left(1-\frac{y^{2}}{2}+\frac{y^{4}}{4!}+\ldots\right)}_{Taylor\ series\ for\ \cos ine}+i\underbrace{\left(y-\frac{y^{3}}{3!}+\frac{y^{5}}{5!}-\ldots\right)}_{Taylor\ seires\ for\ sine}$$

$$=\cos y+i\sin y$$

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$$

<u>مثال:</u> اوجد المفكوك $e^{-1+i\frac{\pi}{6}}$

<u>الحل:</u>

obeikandi.com

$$e^{-1+i\frac{\pi}{6}} = e^{-1}e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= e^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2e}\left(\sqrt{3} + i\right)$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \quad , \quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\bar{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$$= r\left(\cos\theta - i\sin\theta\right) = re^{i(-\theta)}$$

$$z = re^{i\theta} \text{ then } \quad \bar{z} = re^{-i\theta}$$

obeikandl.com