رياضيات الأولمبياد

مرحلة الإعداد

الهندسة

معروف عبدالرحمن سمحان

نجلاء بنت عبدالعزيز التويجري

ليانا توبان

مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع

King Abdulaziz & his Companions Foundation for Giftedness & Creativity

موهبة

العبيكان

Obeikan

ح العبيكان، ١٤٣٧هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر.
سمحان، معروف عبدالرحمن.
رياضيات الأولمبياد - مرحلة الإعداد: الهندسة.
معروف عبدالرحمن سمحان؛ نجلاء التويجري؛
ليانا نوبان. الرياض، ١٤٣٦هـ.
٤٣٢ ص؛ ١٦,٥ × ٢٤ سم.
ردمك: ٩-٨٦٦-٥٠٣-٦٠٣-٩٧٨
١- الرياضيات - الهندسة.
أ. التويجري، نجلاء (مؤلف مشارك).
ب. نوبان، ليانا (مؤلف مشارك) ج. العنوان
ديوي ٥١٠,٧٦ رقم الإيداع ١٤٣٧/٧٨٦

الطبعة الأولى
١٤٣٧هـ / ٢٠١٦م

الناشر العبيكان Obeikan للنشر
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٠٨٠٩٥
ص.ب ٦٧٦٢٢ الرياض ١١٥١٧

موقعنا على الإنترنت
www.obeikanpublishing.com
متجر العبيكان Obeikan على أبل
http://itunes.apple.com/sa/app/obeikan-store

امتياز التوزيع شركة مكتبة العبيكان Obeikan
المملكة العربية السعودية - الرياض - المحمدية
طريق الأمير تركي بن عبدالعزيز الأول
هاتف ٤٨٠٨٦٥٤ فاكس ٤٨٨٩٠٢٣
ص. ب ٦٢٨٠٧ الرمز ١١٥٩٥
www.obeikanretail.com

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

Introduction

تعد مسابقات الرياضيات التي يتم تنظيمها دورياً من سمات القرن الواحد والعشرين، حيث ازداد عدد المتقدمين لهذه المسابقات بشكل ملحوظ وسجلت السنوات الأخيرة أعداداً تجاوزت عشرات الملايين، ولهذه الزيادة في أعداد المتسابقين أسباب عديدة من أهمها، أن هذه المسابقات هي وسيلة للتعرف على الطلاب الموهوبين والمبدعين الذين يواصلون دراستهم بتفوق ، ليس في الرياضيات فقط وإنما في المجالات العلمية المختلفة ، كما أن للمسابقات تأثيراً إيجابياً على التعليم، إذ أنها أدت إلى إنشاء أندية علمية في المدارس وإلى تطوير مواد إثرائية في العديد من دول العالم، انعكس أثرها على تطوير المناهج التعليمية وأدى إلى بروز باحثين متميزين في الرياضيات أسهموا في حل العديد من المسائل العلمية الصعبة. كما أن لمسابقات الرياضيات تأثيراً إيجابياً على تغيير ثقافة المجتمعات ونظرتهم إلى مادة الرياضيات.

عقدت أول مسابقة أولمبياد دولية في الرياضيات (IMO) في رومانيا عام 1959م حيث بلغ عدد الدول المشاركة في هذه المسابقة سبع دول ،

بعد ذلك توالى عقد المسابقة سنوياً وبانتظام إلى وقتنا الحاضر (ما عدا العام 1980م بسبب ظروف طرأت على الدولة المضيفة). ولقد ازداد عدد الدول المشاركة باطراد إلى أن وصل عدد الدول المشاركة في العام 2009م إلى 104 دولة.

كانت أول مشاركة للمملكة العربية السعودية في الأولمبياد الدولي في العام 2004م حيث كان أداء الفريق السعودي متواضعاً نتيجة لقلة الخبرة والإعداد الجيد في التدريب. استمر هذا الأداء المتواضع إلى العام 2008م. بعد ذلك أوكلت وزارة التربية والتعليم مهمة الإعداد للأولمبياد لمؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة" واتخذت موهبة عدة قرارات نوعية تحسب لها، أهمها الاستفادة من خبرات الدول المتفوقة في مسابقة الأولمبياد في إعداد البرامج التدريبية للفريق السعودي . ومن القرارات الأخرى المهمة، توفير مادة تدريبية باللغة العربية تغطي مراحل التدريب المختلفة فأوعزت إلى فريق من الأكاديميين المهتمين بالمسابقات بوضع سلسلتين من الكتب، السلسلة الأولى تخدم الناشئين الراغبين في التدريب المبكر ، وأما السلسلة الثانية فهي موجهة للمراحل المتقدمة. تحتوي السلسلة الأولى على ثمانية كتب تعالج أربعة مواضيع هي نظرية الأعداد، الجبر ، والهندسة، والتركيبات ، وكل من هذ الكتب مكون من جزأين يغطيان المرحلة الأولى والثانية من تدريب الناشئين.

أما السلسلة الثانية فموجهة إلى المرحلتين الثالثة والرابعة من التدريب ومكونة من عشرة كتب تغطي المواضيع الأربعة السابقة وهي المواضيع المطلوب من المتدرب معرفتها للتحضير لمسابقة الأولمبياد.

هذا الكتاب هو الجزء الأول من الهندسة للمرحلة الأولى. ويقع في أربعة فصول تغطي ما نراه أساسيا في هذه المرحلة العمرية.

ولقد حرصنا أن تكون المسائل متنوعة وبمستويات صعوبة تتفق مع الاختلاف في القدرات بين الطلاب حيث العديد منها مأخوذ من مسائل مسابقات الناشئين لعدة دول، منها الولايات المتحدة الأمريكية، وكندا، والمملكة المتحدة ، واستراليا. إن الهدف الأهم من هذه الكتب هو مساعدة الطالب على فهم المادة المطروحة حتى مع غياب المدرب ثم يقوم بمحاولة حل المسائل دون النظر إلى حلولها ومن ثم يقوم بمقارنة حلوله مع الحلول المقدمة في الكتاب لهذه المسائل . كما يتضمن الكتاب مسائل غير محلولة مع وجود الإجابات النهائية لها ، لزيادة التحدي لدى الطلاب.

الوسيلة الوحيدة للتعلم والتدريب على حل المسائل هي أن يقضي الطالب وقتاً كافياً في التفكير في المسألة ثم يضع لنفسه استراتيجية لحل المسألة، بعد ذلك يجرب هذه الاستراتيجية لمعرفة مدى نجاحها، وقد يضطر إلى تعديلها بصورة تدريجية إلى أن يصل إلى الحل الصحيح. إن تكرار

المحاولات في مسائل مختلفة ومتنوعة تكسب الطالب الخبرة اللازمة للوصول إلى المستوى التنافسي في المسابقات.

وفي النهاية نود أن نتقدم بالشكر إلى مؤسسة الملك عبدالعزيز ورجاله للموهبة والإبداع "موهبة" على اهتمامها بوضع برامج مدروسة دراسة جيدة لتدريب الطلاب على المسابقات ، سواء المسابقات المحلية أو مسابقات الأولمبياد مما شجعنا على القيام بتأليف هذا الكتاب، الذي نرجو الله أن يجعله محققاً للهدف الذي أعد من أجله، كما نرجو أن يوفق طلابنا وطالباتنا في المنافسة على المستوى الوطني والعالمي .

المؤلفون

الرياض

1436هـ (2015م).

المحتويات

الفصل الأول

المستقيمات والزوايا
Lines And Angles

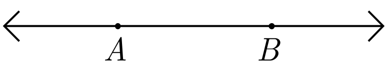
تبدأ دراسة الهندسة عادة بتقديم مفاهيم بدائية (مفاهيم تُقبل بدون تعريف) وهي النقطة والمستقيم والمستوى وبعض المسلمات التي تقدم بدون برهان.

النقطة [Point]

يستخدم رمز البائنة "**.**" لتمثيل النقطة وعادة ما يكون للبائنة مساحة ولكن النقطة التي تمثلها ليس لها مساحة. نستخدم حروف اللغة الصغيرة أو الكبيرة لنرمز إلى النقطة.

المستقيم [Line]

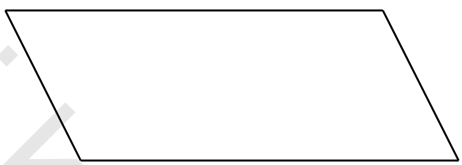
يتكون المستقيم من عدد غير منته من النقاط ويتم تمثيله كما في الشكل



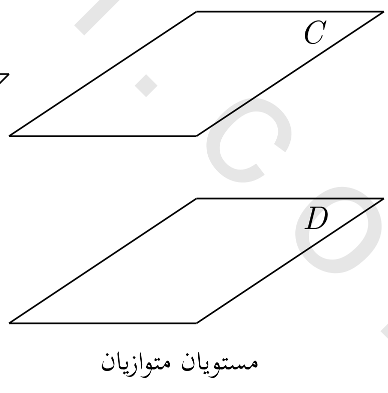
وبما أنه يحتوي النقطتين A و B فيمكن التعبير عنه على النحو $\overleftrightarrow{AB}$ أو يمكن تسميته بأحد حروف اللغة، مثل، l.

المستوى [Plane]

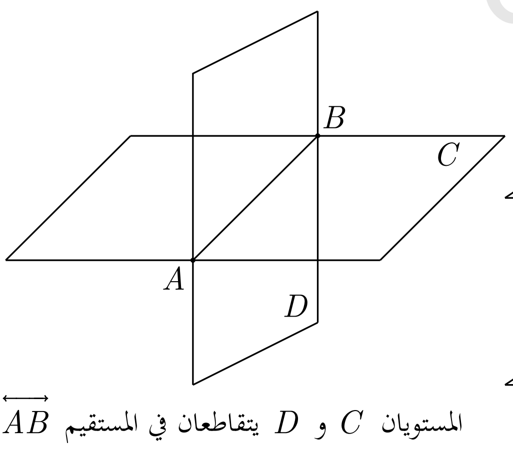
المستوى هو سطح منبسط ليس له سماكة ويتكون من عدد غير منته من النقاط، مثل، سطح المكتب أو أرضية غرفة ولكن لوح زجاج نافذة لا يعتبر مستوى لوجود سماكة للوح. ولأنه من المستحيل تمثيل صورة تمتد إلى مالانهاية فعادة نعبر عن المستوى بشكل مكون من أربعة أضلاع كما هو مبين أدناه



لاحظ أن المستوى هو مجموعة من النقاط، ولذا فتقاطع مستويين يجب أن يكون مجموعة النقاط المشتركة بين المستويين، فإذا وجد بالفعل نقاط مشتركة بين المستويين فإننا نقول إن المستويين متقاطعان ومجموعة تقاطعهما هي مستقيم، وأما في حالة عدم وجود نقاط مشتركة بين مستويين فنقول إنهما متوازيان ونمثل ذلك على الصورة



مستويان متوازيان



المستويان C و D يتقاطعان في المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$

تعريف

(١) الفضاء هو مجموعة جميع النقاط.

(٢) نقول إن مجموعة من النقاط على استقامة واحدة إذا وقعت جميعاً على مستقيم واحد وخلاف ذلك تكون النقاط ليست على استقامة واحدة.

(٣) نقول إن مجموعة من النقاط مستوية إذا وقعت جميعاً داخل مستوى واحد.

نقدم الآن بعض مسلمات الهندسة وسنضيف إلى هذه القائمة مسلمات أخرى كلما دعت الحاجة إلى ذلك.

مسلمة (١): يحتوي المستقيم نقطتين على الأقل.

مسلمة (٢): يحتوي المستوى ثلاث نقاط على الأقل.

مسلمة (٣): يحتوي الفضاء أربع نقاط على الأقل.

مسلمة (٤): لأي نقطتين مختلفتين يوجد مستقيم وحيد يمر بهما.

مسلمة (٥): لأي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يوجد مستوى وحيد يحويها.

مسلمة (٦): إذا وقعت نقطتان مختلفتان في مستوى فأي مستقيم يمر بهما يجب أن يقع بكامله في المستوى نفسه.

مسلمة (٧): إذا تقاطع مستويان مختلفان فإن تقاطعهما يجب أن يكون مستقيماً.

تستخدم المسلمات لإثبات بعض المبرهنات. نقدم بعض المبرهنات الأساسية دون تقديم برهان لمعظمها.

مبرهنة (١): إذا تقاطع مستقيمان فإنهما يتقاطعان في نقطة واحدة فقط.

مبرهنة (٢): إذا كانت النقطة A خارج المستقيم l فيوجد مستوى واحد فقط يحوي النقطة A والمستقيم l معاً.

مبرهنة (٣): إذا تقاطع مستقيمان فيوجد مستوى واحد فقط يحويهما.

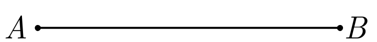
القطع والأشعة المستقيمة [Segments and Rays]

المسافة بين نقطتين (distance between two points): من الممكن إقران عدد حقيقي مع كل نقطة من نقاط خط مستقيم بنفس الطريقة التي ألفها الطالب في خط الأعداد الحقيقية. إذا كانت A و B نقطتين على مستقيم وكان العدد x مقروناً بالنقطة A والعدد y مقروناً بالنقطة B فإن المسافة بين النقطتين A و B يرمز لها بالرمز $|AB|$ أو AB وتعرف على أنها

$$AB = |AB| = |x - y| = |y - x|$$

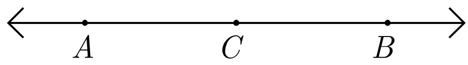
لاحظ أن المسافة بين A و B غير سالبة.

القطعة المستقيمة (segment): إذا كانت A و B نقطتين على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإن القطعة المستقيمة بين النقطتين A و B يرمز لها بالرمز $\overline{AB}$ وهي مجموعة النقاط الواقعة بين A و B بما في ذلك النقطتين A و B. تسمى النقطتان A و B طرفي القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.



$\overline{AB}$

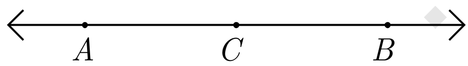
نقطة واقعة بين نقطتين (a point between two points): نقول إن النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ تقع بين النقطتين A و B إذا وفقط إذا كان $|AC| + |CB| = |AB|$. نستخدم عادة الرمز $\overline{ACB}$ ليعني أن النقطة C تقع بين A و B.



الشعاع (ray): الشعاع (أو نصف المستقيم) الذي يبدأ بالنقطة A باتجاه النقطة B يرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$ وهو اتحاد مجموعة نقاط $\overline{AB}$ ومجموعة جميع النقاط C بحيث تقع B بين A و C.

الشعاع $\overrightarrow{AB}$

وإذا كانت النقطة C واقعة بين النقطتين A و B على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإننا نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ متعاكسان.



$\overrightarrow{CA}$ معاكس للشعاع $\overrightarrow{CB}$

القطع المستقيمة المتطابقة (congruent segments): نقول إن القطعتين المستقيمتين $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ متطابقتان ونكتب $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ إذا كان $|AB| = |CD|$ (أي $AB = CD$).

ملحوظة: لقياس طول قطعة مستقيمة نستخدم عادة المسطرة لإنجاز ذلك أو إحداثيات طرفي القطعة على خط الأعداد.

نقطة المنتصف (midpoint): تسمى النقطة M منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ إذا وقعت M على $\overline{AB}$ وكان $\left|MB\right| = \left|AM\right|$. لاحظ أن نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة وحيدة (لماذا ؟).

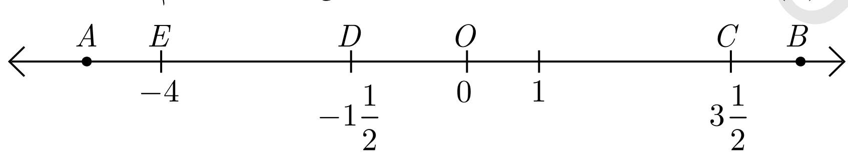
مُنَصِّف قطعة (bisector of a segment): إذا قطع مستقيم أو قطعة مستقيمة أو شعاع أو مستوى قطعة مستقيمة $\overline{AB}$ عند منتصفها فإنه يسمى منصفاً للقطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

مثال (١): جد طول القطعة $\overline{MN}$ في الشكل المرفق

إذا كان $\left|MO\right| = 36$.

الحل: النقطة N واقعة بين النقطتين M و O. إذن، $\left|MO\right| = \left|MN\right| + \left|NO\right|$. أي أن $36 = \left|MN\right| + 7$. من ذلك نجد أن $\left|MN\right| = 36 - 7 = 29$. ◇

مثال (٢): خط الأعداد المرفق يبين إحداثيات بعض نقاط المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$



جد طول القطعة $\overline{EC}$.

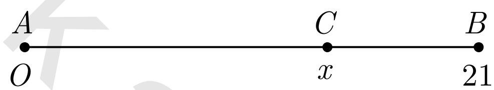
الحل: $7\dfrac{1}{2} = \left|3\dfrac{1}{2} - (-4)\right| = \left|EC\right|$. ◇

مثال (٣): إذا كان $\left|AB\right| = 5$ و $\left|BC\right| = 2$ و $\left|AC\right| = 7$ فأي من النقاط A ، B ، C تقع بين النقطتين الأخريين ؟

الحل: B تقع بين A و C لأن

$$\left|AC\right| = 7 = 5 + 2 = \left|AB\right| + \left|BC\right|$$ ◇

مثال (٤): العلاقة بين نقاط القطعة المستقيمة



هي $\left|AC\right| = 2\left|CB\right|$. ما قيمة x ؟

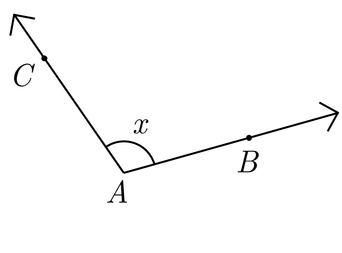
الحل: بما أن C تقع بين A و B وأن $\left|AC\right| = 2\left|CB\right|$ فإن

$$\left|AB\right| = \left|AC\right| + \left|CB\right| = 2\left|CB\right| + \left|CB\right| = 3\left|CB\right|.$$

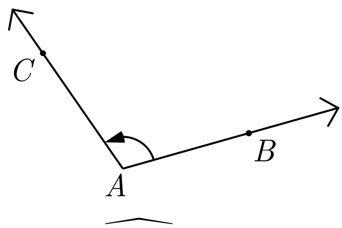
إذن، $7 = \dfrac{21}{3} = \left|CB\right|$. وبهذا يكون $\left|AC\right| = 14$ ومن ثم $x = 14$. ◇

الزوايا وقياسها [Angles and their Measure]

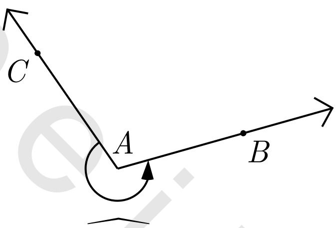
تعريف: تُعرف الزاوية على أنها اتحاد شعاعين يشتركان في نقطة البداية. تسمى نقطة البداية رأس الزاوية ويسمى الشعاعان ضلعي الزاوية. فمثلاً،



زاوية رأسها A وضلعاها هما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. لاحظ وجود زاوية أخرى ضلعاها $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$. متى شئنا التفريق بين هاتين الزاويتين سنتقيد بالحركة عكس عقارب الساعة فنسمي مثلاً الزاوية المرسومة في الشكل $\widehat{BAC}$، ونسمي الأخرى $\widehat{CAB}$.



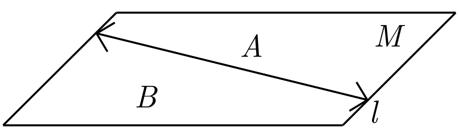
$\widehat{BAC}$



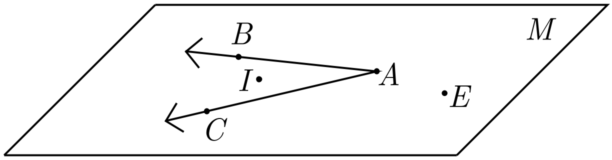
$\widehat{CAB}$

أما إذا كانت الزاوية المعنية مفهومة من السياق (كأن تكون مرسومة في الشكل) فقد نسميها بأي من الرمزين أو حتى $\widehat{A}$ أو x. نستخدم أياً من الرموز التالية للدلالة على هذه الزاوية: $\widehat{CAB}$ أو $\widehat{BAC}$ أو $\widehat{A}$ أو x.

نحتاج للتعامل مع الزوايا إلى مفهوم نصف المستوى. في الشكل المرفق المستقيم l يجزئ المستوى M إلى ثلاث مجموعات هي المستقيم l نفسه ونصف المستوى الذي يحوي النقطة



A ونصف المستوى الآخر الذي يحوي النقطة B. المستقيم l هو حافة كل من نصفي المستوى ولكنه لا يقع في أي منهما. الزاوية $\widehat{BAC}$ المبينة في الشكل أدناه تقع في المستوى M والنقاط A، B، C تقع على الزاوية. النقطة I تقع داخل الزاوية $\widehat{BAC}$ والنقطة E تقع خارجها. المنطقة التي تقع داخل الزاوية $\widehat{BAC}$

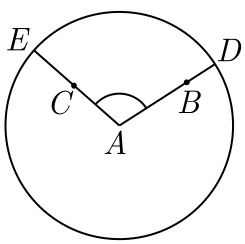


هي المنطقة داخل نصف المستوى الذي يحوي النقطة B والذي حافته $\overleftrightarrow{AC}$ مع نصف المستوى الذي يحوي النقطة C وحافته $\overleftrightarrow{AB}$. أما خارج الزاوية $\widehat{BAC}$ فهي مجموعة النقاط التي لا تقع على الزاوية ولا تقع داخل الزاوية.

تقاس الزاوية عادة بمقدار الدوران من أحد الأضلاع باتجاه عكس عقارب الساعة إلى الضلع الآخر وتستخدم في ذلك الدرجات كوحدات القياس حيث تساوي الدورة الكاملة 360 درجة (يرمز لذلك $360°$).

دورة كاملة $360°$

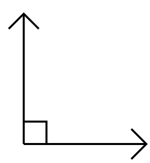
ملحوظة: هناك طريقة أخرى لقياس الزاوية تستخدم ما يعرف باسم وحدات الراديان. هنا نرسم دائرة نصف قطرها 1 ومركزها عند رأس الزاوية (انظر الشكل). قياس الزاوية بالراديان هو طول القوس $\widehat{DE}$. وبما أن محيط الدائرة يساوي 2π فإن $2\pi\,(rad) = 360°$ أو $\pi = 180°$.



بعض الزوايا الخاصة [Some Special Angles]

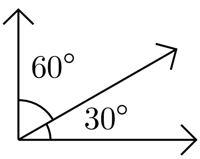
الزاوية الحادة (acute angle): هي الزاوية التي قياسها أصغر من $90°$.

الزاوية القائمة (right angle): هي الزاوية التي قياسها يساوي $90°$ وعادة تمثل الزاوية القائمة بالشكل

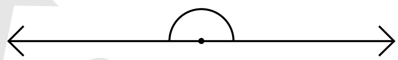


الزاوية المنفرجة (obtuse angle): هي الزاوية التي يزيد قياسها عن $90°$.

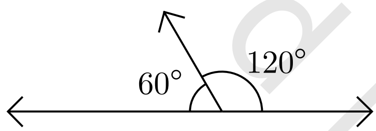
الزاويتان المتتامتان (complementary angles): يقال عن زاويتين أنهما متتامتان إذا كان مجموع قياسيهما يساوي $90°$.



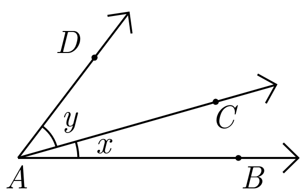
الزاوية المستقيمة (straight line angle): هي الزاوية التي قياسها $180°$.



الزاويتان المتكاملتان (supplementary angles): تسمى الزاويتان متكاملتين متى ما كان مجموع قياسيهما يساوي $180°$.

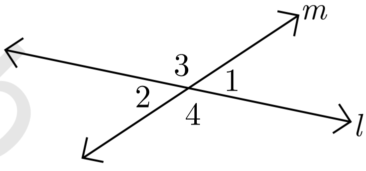


الزاويتان المتجاورتان (adjacent angles): هما زاويتان في المستوى تشتركان في ضلع ولكنهما لا تشتركان بنقاط داخلية.

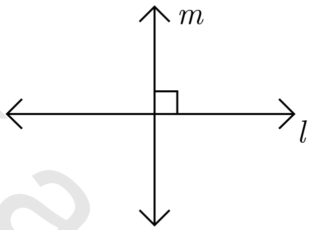


x و y زاويتان متجاورتان ويسمى كل من الضلعين $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB}$ ضلعاً خارجياً.

الزاويتان المتقابلتان بالرأس (vertical angles): إذا تقاطع المستقيمان l و m كما هو مبين في الشكل فإنه ينشأ عن ذلك عدد من الزوايا. نقول إن الزاويتين 1 و 2 (أو الزاويتين 3 و 4) متقابلتان بالرأس.

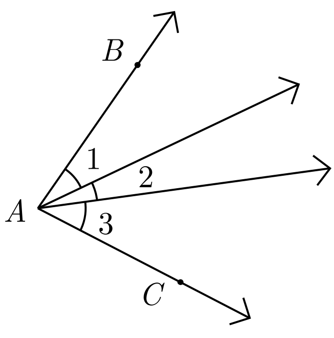


وإذا كانت إحدى الزوايا الناتجة عن هذا التقاطع قائمة (ومن ثم جميع الزوايا الأخرى قائمة) فإننا نقول إن المستقيمين متعامدان ونكتب $l \perp m$.



تعريف: نقول إن الزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ متطابقتان إذا تساوى قياسهما. أي أن $\widehat{A} = \widehat{B}$.

مسلمة (٨): إذا تجاورت زوايا فإن قياس الزوايا الكبيرة يساوي مجموع قياسات الزوايا الصغيرة الناشئة عن هذا التجاور.



في الشكل أعلاه لدينا $\widehat{BAC} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$.

مثال (٥): يزيد قياس زاوية بمقدار $58°$ عن مكملتها. ما قياس الزاوية المكملة ؟

الحل: لنفرض أن الزاوية هي $\widehat{A}$ ومكملتها $\widehat{B}$. عندئذ، $\widehat{A} + \widehat{B} = 180°$ و $\widehat{A} = \widehat{B} + 58°$. إذن،

$$\begin{aligned} \widehat{B} + 58° + \widehat{B} &= 180° \\ 2\widehat{B} &= 122° \\ \widehat{B} &= 61°. \end{aligned}$$

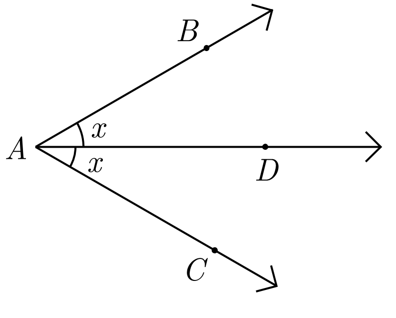
◇

مثال (٦): أضفنا زاوية إلى نصف متممتها فكان الناتج زاوية قياسها $72°$. ما قياس الزاوية الكبيرة ؟

الحل: لنفرض أن $\widehat{A}$ هي الزاوية الكبيرة وأن $\widehat{B}$ هي الزاوية الصغيرة. عندئذ، $\widehat{A} + \widehat{B} = 90°$ و $\widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B} = 72°$. بحل المعادلتين نحصل على $\widehat{A} = 54°$ و $\widehat{B} = 36°$. إذن، قياس الزاوية الكبيرة هو $54°$.

◇

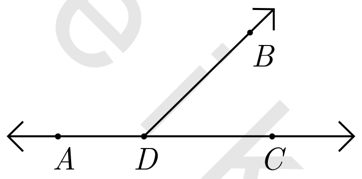
مُنَصِّف الزاوية (bisector of angle): نقول إن $\overrightarrow{AD}$ هو منصف الزاوية $\widehat{BAC}$ إذا وقعت D داخل الزاوية $\widehat{BAC}$ وكان $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.



مسلمة (٩): لأي زاوية يوجد منصف واحد فقط.

مبرهنة (٤): إذا وقع الضلعان الخارجيان لزاويتين متجاورتين على مستقيم واحد فإن الزاويتين متكاملتان.

البرهان: نفرض أن $\widehat{ADB}$ و $\widehat{BDC}$ زاويتان متجاورتان وأن $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ يقعان على $\overleftrightarrow{AC}$ كما هو مبين في الشكل. بما أن $\widehat{ADC} = 180^\circ$ وأن $\widehat{ADC} = \widehat{BDC} + \widehat{ADB}$ فنجد أن $\widehat{BDC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$. ومن ثم فهما زاويتان متكاملتان. $\square$



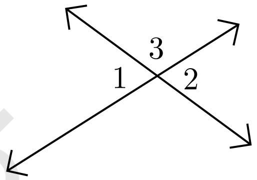
مبرهنة (٥): إذا وقع الضلعان الخارجيان لزاويتين متجاورتين حادتين على مستقيمين متعامدين فإنهما متتامتان.

مسلمة (١٠): من نقطة معطاة على مستقيم في مستوى يوجد شعاع وحيد يبدأ بالنقطة المعطاة ويكوّن زاوية وحيدة مع المستقيم.

مبرهنة (٦): من نقطة معطاة على مستقيم في مستوى يمكن إنشاء مستقيم عمودي وحيد على المستقيم المعطى.

مبرهنة (٧): الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان.

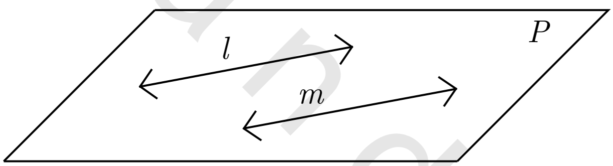
البرهان: لنفرض أن $\hat{1}$ تقابل الزاوية $\hat{2}$ بالرأس كما هو مبين في الشكل المرفق.



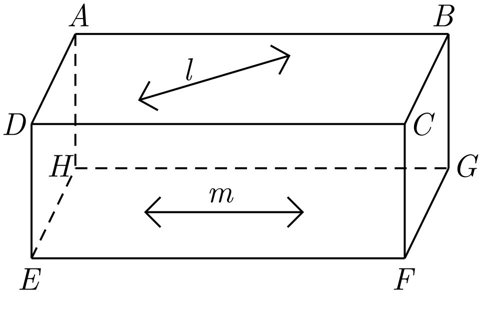
الآن، $\hat{1}+\hat{3}=180^\circ$ لأنهما يكونان زاوية مستقيمة و $\hat{2}+\hat{3}=180^\circ$ لأنهما يكونان زاوية مستقيمة. إذن، $\hat{1}+\hat{3}=\hat{2}+\hat{3}$ ومن ثم فإن $\hat{1}=\hat{2}$. □

المستقيمات المتوازية [Parallel Lines]

نقول إن المستقيمين l و m متوازيان ونكتب $l \parallel m$ إذا وقعا في المستوى نفسه ولم توجد نقاط مشتركة بينهما.



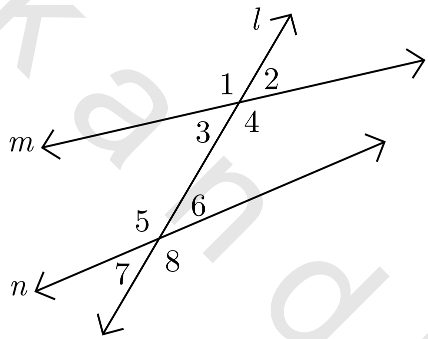
أما إذا كان المستقيمان في مستويين مختلفين ولم توجد نقاط مشتركة بينهما فإننا نقول في هذه الحالة إن المستقيمين متخالفان (skew). في الشكل المرفق، المستقيمان l و m متخالفان لأنهما واقعان في مستويين مختلفين $ABCD$ و $CDEF$.



لقد سبق وأن تعرفنا على مستويين متوازيين وهما مستويان لا توجد نقاط مشتركة بينهما، مثل $ABCD$ و $EFGH$.

إذا لم توجد نقاط مشتركة بين مستقيم ومستوى فنقول إنهما متوازيان. فمثلاً، المستقيم l في الشكل أعلاه يوازي المستوى $EFGH$.

المستقيم القاطع (transversal line): هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين (أو أكثر) في المستوى الذي يحويهما بنقاط مختلفة، مثل، المستقيم l يقطع المستقيمين m و n في الشكل المرفق.



ينشأ عن قطع مستقيم لمستقيمين عدد من الزوايا لها أهمية خاصة.

الزوايا الداخلية (interior angles): 3، 4، 5، 6 هي زوايا داخلية.

الزوايا الخارجية (exterior angles): 1، 2، 7، 8 هي زوايا خارجية.

الزوايا المتناظرة (corresponding angles): الزاويتان المتناظرتان تقعان على الجهة نفسها من القاطع ولهما رأسان مختلفان وإحداهما زاوية داخلية والأخرى زاوية خارجية. في الشكل أعلاه، أزواج الزوايا المتناظرة هي (1 و 5)، (2 و 6)، (3 و 7)، (4 و 8).

الزوايا التبادلية داخلياً (alternate interior angles): الزاويتان التبادليتان داخلياً هما زاويتان داخليتان لهما رأسان مختلفان ويقعان على جهتين مختلفتين من القاطع. في الشكل أعلاه يوجد زوجان من الزوايا التبادلية داخلياً هما (3 و 6) و (4 و 5).

الزوايا التبادلية خارجياً (alternate exterior angles): الزاويتان التبادليتان خارجياً هما زاويتان خارجيتان لهما رأسان مختلفان ويقعان على جهتين مختلفتين من القاطع. في الشكل أعلاه يوجد زوجان من الزوايا التبادلية خارجياً هما (1 و 8) و (2 و 7).

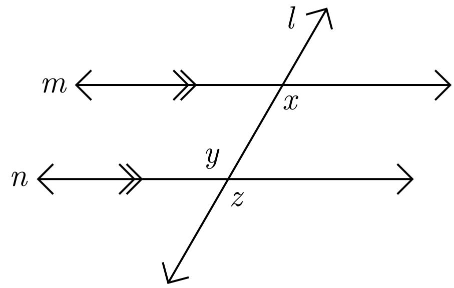
الزوايا المتقابلة بالرأس (vertical angles): الزاويتان المتقابلتان بالرأس هما زاويتان تشتركان في الرأس ومتقابلتان. أزواج الزوايا المتقابلة بالرأس في الشكل أعلاه هي (1 و 4)، (2 و 3)، (5 و 8)، (6 و 7).

مسلمة (١١): إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

مسلمة (١٢): إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزوايا المتناظرة متطابقة فإن المستقيمين متوازيان.

مبرهنة (٨): إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين وكانت الزاويتان $\widehat{x}$ و $\widehat{y}$ تبادليتين داخلياً فإن $\widehat{x} = \widehat{y}$.

البرهان: لنفرض أن المستقيم l يقطع المستقيمين المتوازيين m و n كما في الشكل المرفق



الآن: $\hat{z} = \hat{x}$ بالتناظر و $\hat{z} = \hat{y}$ بالتقابل بالرأس. إذن، $\hat{x} = \hat{y}$. □

مبرهنة (٩): إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت الزاويتان التبادليتان داخلياً متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.

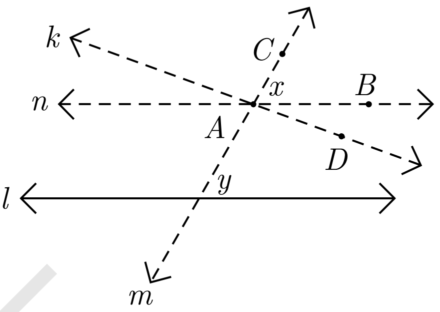
البرهان: لنفرض أن l قطع المستقيمين m و n وكان $\hat{x} = \hat{y}$ كما هو مبين في الشكل المرفق مع المبرهنة (٨). عندئذ، $\hat{z} = \hat{x}$ (لأن $\hat{z} = \hat{y}$ بالتقابل بالرأس). وبما أن $\hat{x}$ و $\hat{z}$ متناظرتان فإن $m \parallel n$. □

مبرهنة (١٠): لنفرض أن المستقيم l يقطع كلاً من المستقيمين m و n وكان $m \parallel n$ و $n \perp l$. عندئذ، $m \perp l$. وبالعكس، إذا كان $m \perp l$ و $n \perp l$ فإن $m \parallel n$. □

مبرهنة (١١): إذا قطع المستقيم l كلاً من المستقيمين m و n وكانت $\hat{x}$ و $\hat{y}$ زاويتين داخليتين واقعتين على الجهة نفسها من القاطع فإن $m \parallel n$ إذا وفقط إذا كان $\hat{x} + \hat{y} = 180°$.

مبرهنة (١٢): من نقطة A غير واقعة على المستقيم l يمكن إنشاء مستقيم وحيد يوازي l ويمر بالنقطة A .

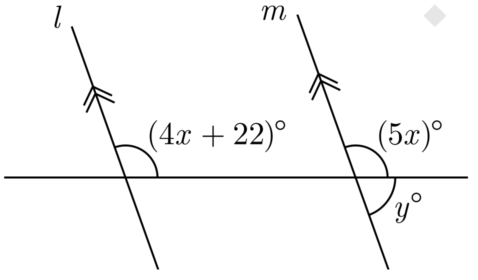
البرهان: ارسم مستقيماً m يمر بالنقطة A ويقطع l. الآن، ارسم الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بحيث يكون $\hat{y} = \hat{x}$. بما أن $\hat{x}$ و $\hat{y}$ متناظرتان ومتطابقتان فإن $n \parallel l$.



ولبرهان وحدانية المستقيم n نستخدم البرهان بالتناقض حيث نفرض وجود مستقيم آخر k يمر بالنقطة A ويوازي l. الآن، $C\hat{A}D = \hat{y}$ بالتناظر. ولكن $\hat{x} = \hat{y}$. إذن، $C\hat{A}D = \hat{x}$ وهذا مستحيل إلا إذا كان المستقيم k يطابق المستقيم n. □

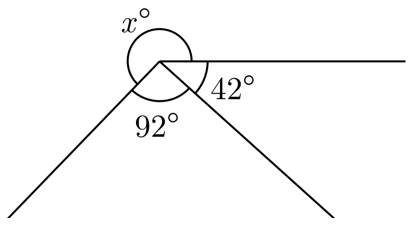
مبرهنة (١٣): من نقطة A غير واقعة على المستقيم l يمكن إنشاء مستقيم وحيد يعامد l.

مثال (٧): في الشكل المرفق، $m \parallel l$. احسب قياس $\hat{y}$.



الحل: $(5x)^\circ = (4x+22)^\circ$ بالتناظر. من ذلك نجد أن $x = 22^\circ$. إذن $5x = 110^\circ$. الآن، $y = 180^\circ - (5x)^\circ = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. ◇

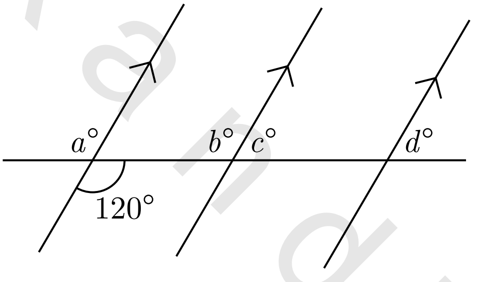
مثال (٨): في الشكل المرفق، جد قياس $\widehat{x}$.



الحل: $x^\circ + 42^\circ + 92^\circ = 360^\circ$ (لماذا؟). إذن،

$x^\circ = 360^\circ - 134^\circ = 226^\circ$. ◇

مثال (٩): في الشكل المرفق، جد قياس $\widehat{d}$.

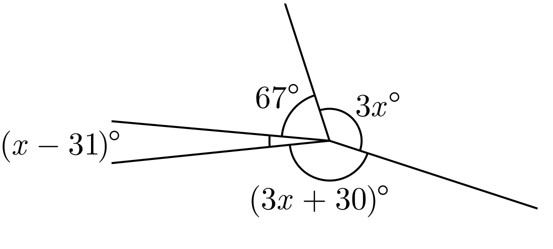


الحل: $\widehat{a} = 120^\circ$ بالتقابل بالرأس. $\widehat{b} = 120^\circ$ تناظر $\widehat{a}$.

$\widehat{c} = 180^\circ - b^\circ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ لأن $\widehat{b} + \widehat{c}$ زاوية مستقيمة.

إذن، $\widehat{d} = \widehat{c} = 60^\circ$ بالتناظر. ◇

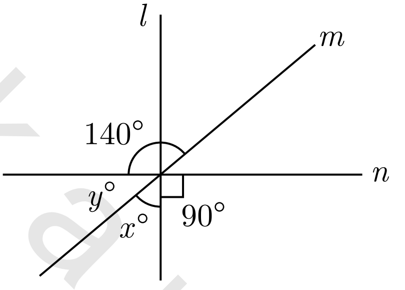
مثال (١٠): في الشكل المرفق، جد قيمة x.



الحل:

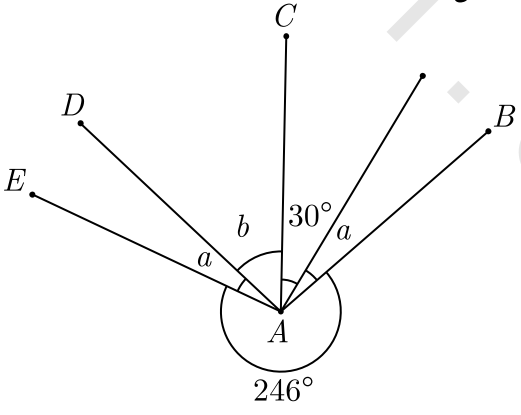
$$3x + 30 + x - 31 + 3x + 67 = 360^\circ$$
$$7x = 360^\circ - 66^\circ = 294^\circ$$
$$x = 42^\circ.$$
◇

مثال (١١): في الشكل المرفق l، m، n ثلاثة مستقيمات تلتقي في نقطة واحدة. احسب قياس $\hat{x}$.



الحل: المستقيمان l و n متعامدان، إذن، $x + y = 90^\circ$. لكن $y = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$. إذن، $x = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.
◇

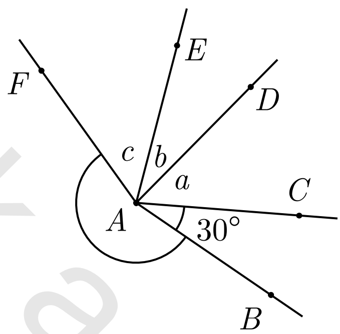
مثال (١٢): في الشكل المرفق



$\overleftrightarrow{AC}$ منصف للزاوية $\widehat{BAD}$. ما قيمة b ؟

الحل: بما أن $\overleftrightarrow{AC}$ منصف للزاوية $\widehat{BAD}$ فإن $b = a + 30^\circ$. أيضاً، $a + 30^\circ + b + a + 246^\circ = 360^\circ$. أي أن $2a + b = 84^\circ$. وبحل المعادلتين $b - a = 30^\circ$ و $2a + b = 84^\circ$ نجد أن $a = 18^\circ$ و $b = 48^\circ$. ◇

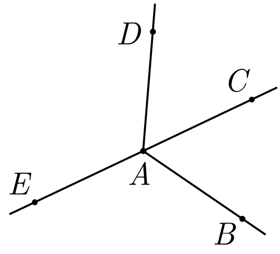
مثال (١٣): في الشكل المرفق



$\widehat{BAF} = 2\widehat{CAE}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ منصف $\widehat{BAF}$. جد قياس الزاوية $\hat{b}$.

الحل: بما أن $\widehat{BAF} = 2\widehat{CAE}$ فإن $30^\circ + a + b + c = 2(a + b)$. أي أن $a + b - c = 30^\circ$. وبما أن $\overleftrightarrow{AD}$ منصف للزاوية $\widehat{BAF}$ فإن $b + c = a + 30^\circ$. أي أن $-a + b + c = 30^\circ$. وبحل المعادلتين معاً نجد أن $2b = 60^\circ$. إذن $b = 30^\circ$. ◇

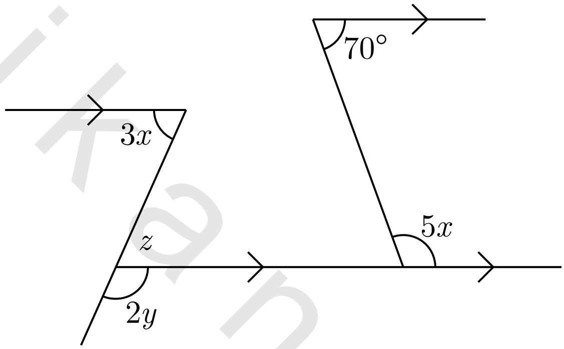
مثال (١٤): في الشكل المرفق



$\widehat{BAE} = \widehat{EAD}$ و $\widehat{CAB} = \widehat{CAD}$. أثبت أن EAC مستقيماً.

الحل: بما أن $\widehat{EAD} + \widehat{BAD} + \widehat{CAD} + \widehat{CAB} = 360^\circ$ فإن $2\widehat{EAD} + 2\widehat{CAD} = 360^\circ$. أي أن $\widehat{EAD} + \widehat{CAD} = 180^\circ$. وبهذا يكون EAC مستقيماً. ◇

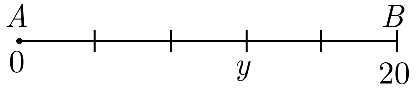
مثال (١٥): في الشكل المرفق جد قيمة $x + y$.



الحل: $5x + 70^\circ = 180^\circ$ زاويتان داخليتان تقعان على الجهة نفسها من القاطع. إذن، $x = 22^\circ$. أيضاً، $z = 3x$ بالتبادل. إذن، $z = 66^\circ$. الآن، $2y + z = 180^\circ$ زاوية مستقيمة. من ذلك نجد أن $2y = 114^\circ$ ومن ثم فإن $y = 57^\circ$. إذن، $x + y = 22^\circ + 57^\circ = 79^\circ$. ◇

مسائل محلولة

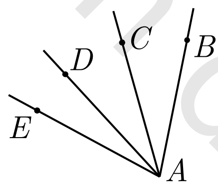
(١) [AJHSME 1989] إذا كانت المسافة بين النقاط على القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ متساوية فما قيمة y ؟



(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 16

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن المسافة بين جميع النقاط متساوية فإن المسافة بين أي نقطتين متتاليتين تساوي $4 = \frac{20}{5}$. إذن، $y = 3 \times 4 = 12$.

(٢) في الشكل المرفق $\widehat{BAE} = 73^\circ$ ، $\widehat{BAC} = 27^\circ$ ، $\widehat{DAE} = 19^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{CAD}$ ؟

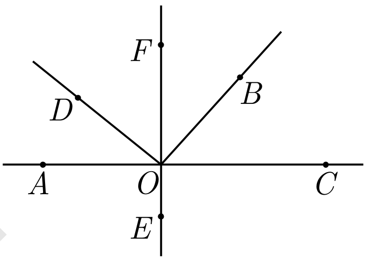


(أ) 19° (ب) 23° (ج) 27° (د) 32°

الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن الزوايا متجاورة، ولذا فإن

$$\widehat{BAE} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DAE}$$
$$73^\circ = 27^\circ + \widehat{CAD} + 19^\circ$$
$$\widehat{CAD} = 73^\circ - 46^\circ = 27^\circ.$$

(٣) في الشكل المرفق، $\widehat{AOB} = 132^\circ$ ، $\widehat{COD} = 141^\circ$. $\overleftrightarrow{AOC}$ و $\overleftrightarrow{EOF}$ مستقيمان متعامدان. ما قياس $\widehat{DOB}$ ؟



(أ) 88° (ب) 90° (ج) 91° (د) 93°

الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$\widehat{DOF} = \widehat{DOC} - 90^\circ = 141^\circ - 90^\circ = 51^\circ.$$

$$\widehat{BOF} = \widehat{AOB} - 90^\circ = 132^\circ - 90^\circ = 42^\circ.$$

إذن، $\widehat{DOB} = \widehat{DOF} + \widehat{FOB} = 51^\circ + 42^\circ = 93^\circ$.

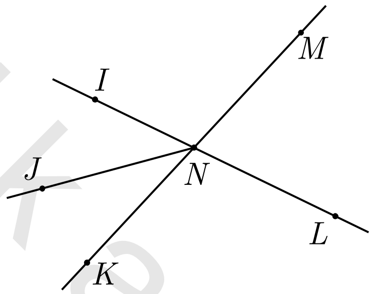
(٤) إذا كانت الزاوية $\widehat{B}$ متممة للزاوية $\widehat{A}$ وكان مجموع الزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ مكملاً للزاوية $\widehat{C}$ وكان قياس الزاوية $\widehat{A}$ يساوي $2r + 5^\circ$ وقياس الزاوية $\widehat{C}$ يساوي $8r + 10^\circ$ فإن قياس $\widehat{B}$ يساوي

(أ) 45° (ب) 55° (ج) 60° (د) 65°

الحل: الإجابة هي (د): بما أن $\widehat{B}$ متممة للزاوية $\widehat{A}$ فإن $\widehat{A} + \widehat{B} = 90^\circ$. وبما أن $\widehat{A} + \widehat{B}$ مكملة للزاوية $\widehat{C}$ فإن $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ$. إذن، $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 90^\circ$. ولكن $\widehat{C} = 8r + 10^\circ$. إذن،

$8r + 10^\circ = 90^\circ$. ومن ذلك يكون $r = 10^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{A} = 2r + 5 = 25^\circ$. وأخيراً، $\widehat{B} = 90^\circ - \widehat{A} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$.

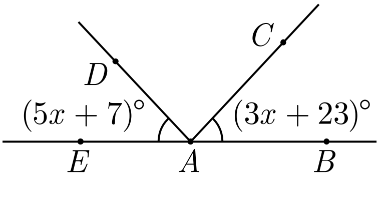
(٥) في الشكل المرفق، $\widehat{MNL} = 73^\circ$ و $\widehat{INJ} = 41^\circ$، $\overleftrightarrow{KNM}$ و $\overleftrightarrow{INL}$ مستقيمان. ما قياس الزاوية $\widehat{JNK}$ ؟



(أ) 22° (ب) 32° (ج) 42° (د) 52°

الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{INK} = \widehat{MNL} = 73^\circ$ بالتقابل بالرأس. إذن، $\widehat{JNK} = \widehat{INK} - \widehat{INJ} = 73^\circ - 41^\circ = 32^\circ$.

(٦) في الشكل المرفق، A نقطة واقعة على المستقيم $\overleftrightarrow{EB}$ والزاويتان $\widehat{BAC}$ و $\widehat{EAD}$ متطابقتان. ما قياس الزاوية $\widehat{DAC}$ ؟



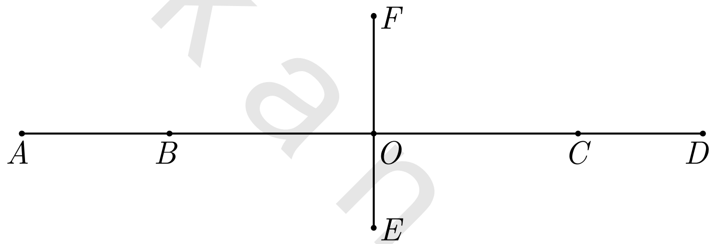
(أ) 77° (ب) 86° (ج) 90° (د) 95°

الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $\widehat{BAC} = \widehat{EAD}$ فإن

$$5x + 7 = 3x + 23$$
$$2x = 16$$
$$x = 8^\circ$$

إذن، $\widehat{EAD} + \widehat{BAC} = (5\times 8 + 7) + (3 \times 8 + 23) = 94^\circ$. وبهذا يكون $\widehat{DAC} = 180^\circ - 94^\circ = 86^\circ$.

(٧) في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{EOF}$ منصف عمودي للقطعة $\overline{BC}$. $OC = 18$، $AB = 2x + 1$ ، $CD = 3x - 7$ ، $BO = 4x - 6$. ما طول القطعة $\overline{AD}$ ؟



(أ) 60 (ب) 58 (ج) 54 (د) 50

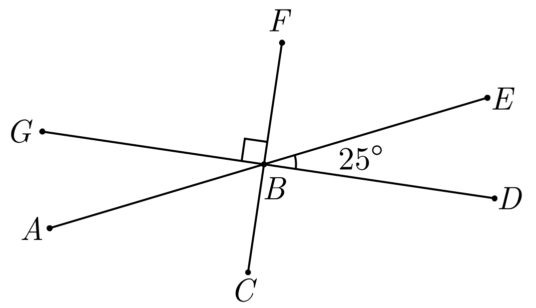
الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\overleftrightarrow{EOF}$ المنصف العمودي للقطعة $\overline{BC}$ فإن

$$BO = OC$$
$$4x - 6 = 18$$
$$x = 6$$

إذن، $AB = 2x + 1 = 13$ ، $CD = 3x - 7 = 11$. ولذا فإن

$$AD = AB + BO + OC + CD = 13 + 18 + 18 + 11 = 60 .$$

(٨) في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{ABE}$ ، $\overleftrightarrow{CBF}$ ، $\overleftrightarrow{DBG}$ ثلاثة مستقيمات تتقاطع في النقطة B . ما قياس الزاوية $\widehat{ABC}$ ؟

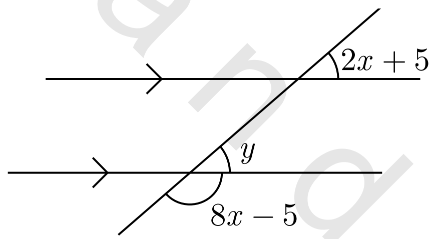


(أ) $65°$ (ب) $55°$ (ج) $50°$ (د) $45°$

الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\widehat{DBF} = 90°$ فإن $\widehat{EBF} = 90° - 25° = 65°$.

إذن، $\widehat{ABC} = \widehat{EBF} = 65°$ بالتقابل بالرأس.

(٩) ما قياس الزاوية y في الشكل المرفق؟



(أ) $21°$ (ب) $30°$ (ج) $41°$ (د) $50°$

الحل: الإجابة هي (ج): لدينا

$y = 2x + 5°$ بالتناظر

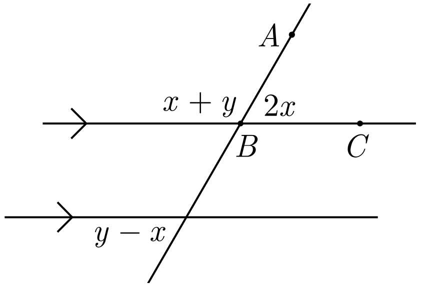
$y + 8x - 5° = 180°$ زاوية مستقيمة.

من ذلك نرى أن $y = 2x + 5°$ و $y = -8x + 185°$. ولذا فإن

$$2x + 5° = -8x + 185°$$
$$10x = 180°$$
$$x = 18°$$

وبالتالي فإن $y = 2x + 5° = 2 \times 18° + 5° = 41°$.

(١٠) ما قياس الزاوية $\widehat{ABC}$ في الشكل المرفق؟



(أ) $60°$ (ب) $65°$ (ج) $67°$ (د) $69°$

الحل: الإجابة هي (أ): لدينا

$x + y + 2x = 180°$ زاوية مستقيمة

$y - x = 2x$ زاويتان تبادليتان خارجياً.

من ذلك نجد أن $y = 180° - 3x$ و $y = 3x$. إذن، $3x = 180° - 3x$. أي أن $6x = 180°$. ومنه فإن $x = 30°$. وبهذا فإن

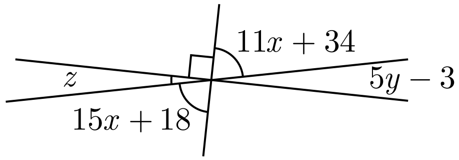
$$\widehat{ABC} = 2x = 2 \times 30° = 60° .$$

(١١) [AMC8 2001] زرعت ست أشجار على استقامة واحدة بحيث أن المسافات بينها متساوية. إذا كانت المسافة بين الشجرة الأولى والرابعة تساوي 60 متراً فما المسافة بالأمتار بين الشجرة الأولى والأخيرة ؟

(أ) 90 (ب) 100 (ج) 105 (د) 120

الحل: الإجابة هي (ب): يوجد ثلاث مسافات بين الشجرة الأولى والرابعة. ولذا كل من هذه المسافات تساوي $\frac{60}{3} = 20$ متراً. إذن، المسافة بين الشجرة الأولى والأخيرة هي $5 \times 20 = 100$ متراً.

(١٢) قيمة y في الشكل المرفق تساوي



(أ) 3° (ب) 5° (ج) 7° (د) 9°

الحل: الإجابة هي (أ): لدينا

$$11x + 34 + 5y - 3 = 90$$ (زاوية قائمة)

أي أن $$11x + 5y = 59$$ (١)

كما أن $$z = 5y - 3$$ (بالتقابل بالرأس)

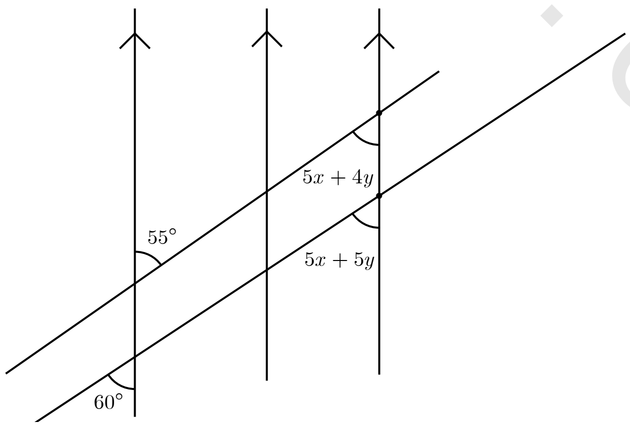
ولكن $$z = 90 - 15x - 18$$

إذن، $$5y - 3 = 90 - 15x - 18$$

أي أن $$15x + 5y = 75$$ (٢)

بحل المعادلتين (١) و (٢) نجد أن $x = 4^\circ$ وأن $y = 3^\circ$.

(١٣) ما قيمة المجموع $x + y$ في الشكل المرفق ؟



(أ) 12° (ب) 20° (ج) 24° (د) 26°

الحل: الإجابة هي (أ): لدينا

$$5x + 5y = 60^\circ \quad \text{(بالتناظر)}$$

$$5x + 4y = 55^\circ \quad \text{(بالتبادل الداخلي)}$$

بحل المعادلتين نجد أن $x = 7^\circ$ و $y = 5^\circ$. إذن، $x + y = 12^\circ$.

(١٤) ما قياس الزاوية التي قياس مكملتها يساوي ثلاثة أمثال قياس متممتها ؟

(أ) 30° (ب) 40° (ج) 45° (د) 50°

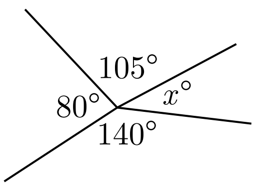
الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن قياس الزاوية هو x. إذن، قياس متممتها هو $90 - x$ وقياس مكملتها $180 - x$. من ذلك نجد أن

$$180 - x = 3(90 - x)$$

$$2x = 90$$

$$x = 45^\circ$$

(١٥) [AUST.MC 1986] قيمة x في الشكل المرفق تساوي

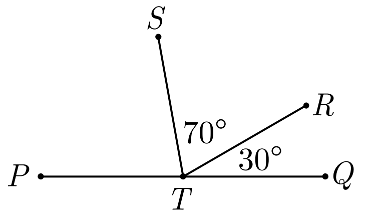


(أ) 35° (ب) 40° (ج) 45° (د) 75°

الحل: الإجابة هي (أ):

$$x^\circ = 360^\circ - (105^\circ + 80^\circ + 140^\circ) = 360^\circ - 325^\circ = 35^\circ.$$

(١٦) [AUST.MC 1982] في الشكل المرفق، النقطة T واقعة على المستقيم $\overleftrightarrow{PQ}$. ما قياس الزاوية $\widehat{PTS}$ ؟



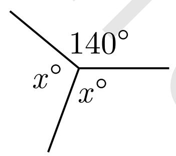
(أ) 80° (ب) 85° (ج) 90° (د) 95°

الحل: الإجابة هي (أ):

$$\widehat{PTS} = 180^\circ - (30^\circ + 70^\circ) = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ .$$

(١٧) [AUST.MC 1981] قيمة x في الشكل المرفق تساوي

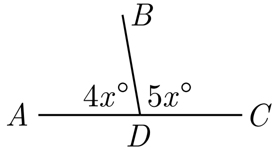
(أ) 20° (ب) 70° (ج) 110° (د) 220°



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $x^\circ + x^\circ + 140^\circ = 360^\circ$ فإن $2x = 220^\circ$. وبهذا فإن $x = 110^\circ$.

(١٨) [AUST.MC 1979] في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{ADC}$ مستقيم. قياس الزاوية $\widehat{BDC}$ يساوي

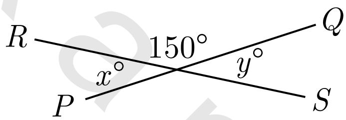
(أ) 20° (ب) 50° (ج) 80° (د) 100°



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $4x + 5x = 180°$ فإن $x = 20°$. إذن، $\widehat{BDC} = 5 \times 20 = 100°$.

(١٩) [AUST.MC 1978] في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{PQ}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ مستقيمان متقاطعان. قيمة $x + y$ تساوي

(أ) $15°$ (ب) $30°$ (ج) $60°$ (د) $180°$

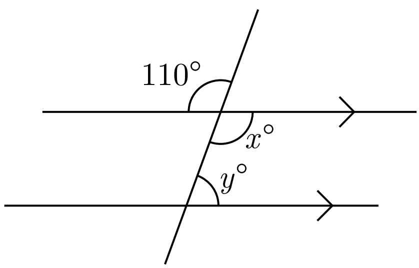


الحل: الإجابة هي (ج):

$x = y = 180° - 150° = 30°$. إذن، $x + y = 60°$.

(٢٠) قياس الزاوية $\hat{y}$ في الشكل المرفق يساوي

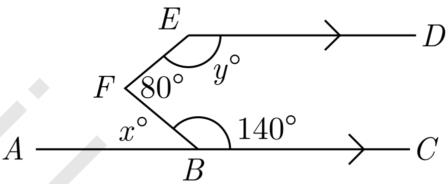
(أ) $70°$ (ب) $90°$ (ج) $100°$ (د) $110°$



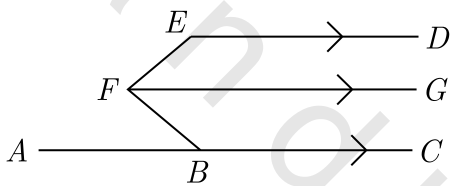
الحل: الإجابة هي (أ): $x = 110^\circ$ بالتقابل بالرأس. إذن، $y = 180^\circ - x = 70^\circ$.

(٢١) قيمة $x + y$ في الشكل المرفق تساوي

(أ) 120° (ب) 140° (ج) 160° (د) 180°



الحل: الإجابة هي (د): ارسم مستقيماً موازياً للمستقيم $\overleftrightarrow{ABC}$ من النقطة F وليكن $\overleftrightarrow{FG}$.



لدينا

$$x = 180 - 140 = 40^\circ \qquad \text{(زاوية مستقيمة)}$$

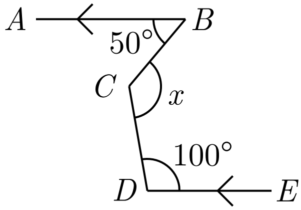
$$\widehat{GFB} = \hat{x} = 40^\circ \qquad \text{(بالتبادل الداخلي)}$$

إذن، $G\widehat{F}E = 80 - 40 = 40^\circ$. من ذلك نجد أن $y = 180 - 40 = 140^\circ$.

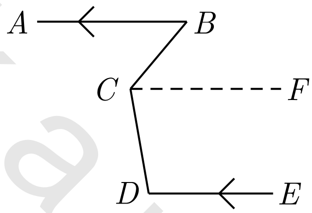
وبهذا يكون $x + y = 40 + 140 = 180^\circ$.

(٢٢) قياس الزاوية $\hat{x}$ في الشكل المرفق تساوي

(أ) 70° (ب) 110° (ج) 120° (د) 130°



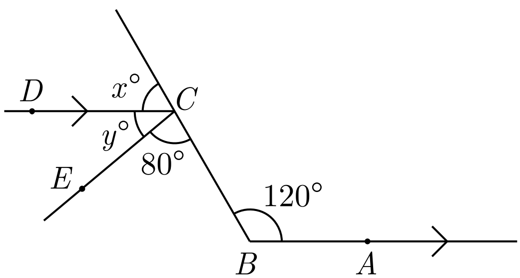
الحل: الإجابة هي (د): ارسم مستقيماً موازياً للمستقيم $\overleftrightarrow{DE}$ ويمر بالنقطة C وليكن $\overleftrightarrow{CF}$.



عندئذ، $\widehat{FCD} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ و $\widehat{FCB} = 50^\circ$ بالتبادل الداخلي.
إذن، $\hat{x} = \widehat{FCD} + \widehat{FCB} = 80^\circ + 50^\circ = 130^\circ$.

(٢٣) في الشكل المرفق، قيمة $x - y$ تساوي

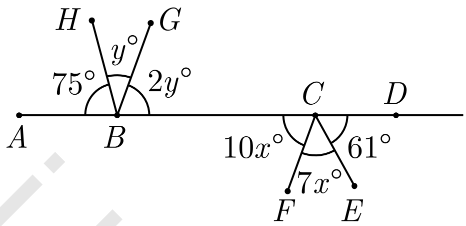
(أ) 10° (ب) 20° (ج) 30° (د) 40°



الحل: الإجابة هي (ب): لدينا $y + 80 = 120^\circ$ بالتبادل الداخلي. إذن،

$\hat{y} = 40°$. الآن، $x + y + 80 = 180°$ لأنها زاوية مستقيمة. إذن، $\hat{x} = 60°$.
وبهذا يكون $x - y = 20°$.

(٢٤) في الشكل المرفق



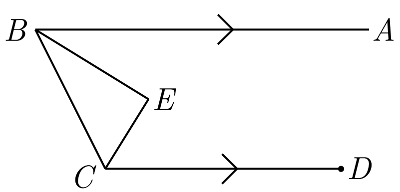
(أ) $\widehat{GBC} = 80°$ (ب) $\widehat{FCE} = 60°$

(ج) $\overleftrightarrow{BG} \parallel \overleftrightarrow{CF}$ (د) $\overleftrightarrow{HB} \parallel \overleftrightarrow{CF}$

الحل: الإجابة هي (ج): لدينا $75 + y + 2y = 180°$.
ومن ثم فإن $y = 35°$ وأن $2y = 70°$. أيضاً، $10x + 7x + 61 = 180°$.
إذن، $x = 7°$ ومن ثم فإن $10x = 70°$. من ذلك نجد أن $2y = 10x$ وهما زاويتان تبادليتان داخلياً. إذن، $\overleftrightarrow{BG} \parallel \overleftrightarrow{CF}$.

(٢٥) في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$، $\overline{BE}$ ينصف $\widehat{ABC}$، $\overline{CE}$ ينصف $\widehat{DCB}$. قياس $\widehat{BEC}$ يساوي

(أ) $80°$ (ب) $90°$ (ج) $95°$ (د) $100°$



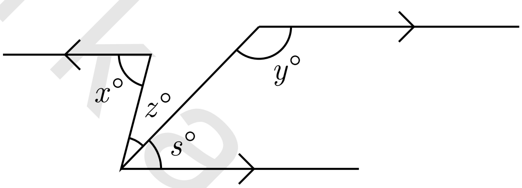
الحل: الإجابة هي (ب): لدينا $\widehat{ABC} + \widehat{DCB} = 180^\circ$. وبما أن $\overline{BE}$ و $\overline{CD}$ منصفان نجد أن $2\widehat{ABE} + 2\widehat{ECD} = 180^\circ$. أي أن $\widehat{ABE} + \widehat{ECD} = 90^\circ$.

الآن، برسم موازياً $\overleftrightarrow{EF}$ للمستقيم $\overleftrightarrow{CD}$ نجد أن

$$\widehat{BEC} = \widehat{BEF} + \widehat{FEC} = \widehat{ABE} + \widehat{ECD} = 90^\circ .$$

(٢٦) في الشكل المرفق، قياس $x + y - z$ يساوي

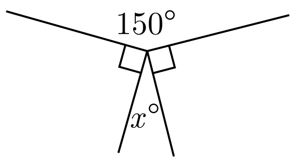
(أ) 100° (ب) 120° (ج) 150° (د) 180°



الحل: الإجابة هي (د): لدينا $y + s = 180^\circ$، $x = z + s$. من ذلك نجد أن $s = x - z$ وأن $180^\circ = y + s = y + x - z = x + y - z$.

(٢٧) [Gauss 2010] ما قياس الزاوية x في الشكل المرفق؟

(أ) 25° (ب) 30° (ج) 35° (د) 40°

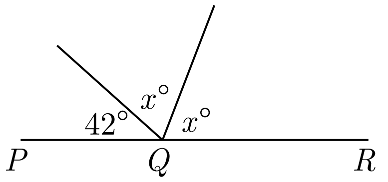


الحل: الإجابة هي (ب): لدينا $360^\circ = 90 + 150 + 90 + x$.

إذن، $x = 360 - 330 = 30^\circ$.

(٢٨) [Gauss 2010] في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{PQR}$ مستقيم. ما قيمة x ؟

(أ) 54° (ب) 64° (ج) 69° (د) 75°



الحل: الإجابة هي (ج): لدينا

$$\begin{aligned} x + x + 42 &= 180^\circ \\ 2x &= 138^\circ \\ x &= 69^\circ. \end{aligned}$$

(٢٩) [MAΘ 2011] الزاويتان $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ متكاملتان والزاويتان $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ متكاملتان أيضاً. إذا كان $\widehat{A} = (3x + 16)^\circ$ و $\widehat{C} = (5x - 24)^\circ$ فما قياس الزاوية $\widehat{B}$ ؟

(أ) 70° (ب) 84° (ج) 104° (د) 134°

الحل: الإجابة هي (ج): لدينا

$$\begin{aligned} &\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ \\ &3x + 16 + B = 180 \\ &B = 164 - 3x \end{aligned} \qquad (١)$$

أيضاً،

$$\begin{aligned} &\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \\ &B + 5x - 24 = 180 \\ &B = 204 - 5x \end{aligned} \qquad (٢)$$

من (١) و (٢) نحصل على

$$\begin{aligned} 164-3x &= 204-5x \\ 2x &= 40 \\ x &= 20^\circ \end{aligned}$$

إذن، $\widehat{B}=164-3\times 20=104^\circ$.

(٣٠) [MAΘ 2010] لنفرض أن T نقطة واقعة بين M و H على القطعة المستقيمة $\overline{MH}$ والنقطة A واقعة بين M و T. إذا كان $MA:AT:TH$ يساوي $2:4:5$ وكان $AT=20$ فما طول القطعة $\overline{MH}$ ؟

(أ) 25　　(ب) 30　　(ج) 35　　(د) 55

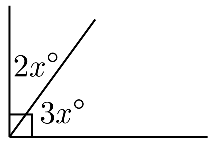
الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن $MA=2x$. عندئذ، $AT=4x$ و $TH=5x$. وبما أن $AT=20$ نجد أن $x=5$. إذن،

$$MH=11x=11\times 5=55\,.$$

مسائل غير محلولة

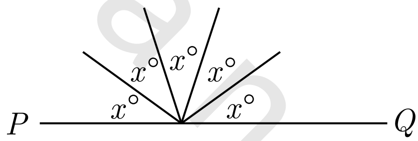
(١) [Gauss 2011] ما قيمة x في الشكل المرفق؟

(أ) 15° (ب) 18° (ج) 20° (د) 22°



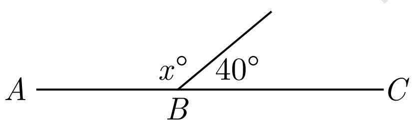
(٢) [Gauss 2008] في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{PQ}$ مستقيم. ما قيمة x ؟

(أ) 20° (ب) 36° (ج) 45° (د) 72°

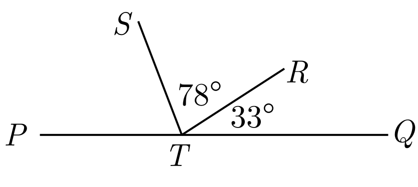


(٣) [Gauss 2006] في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{ABC}$ مستقيم. ما قيمة x ؟

(أ) 50° (ب) 100° (ج) 120° (د) 140°



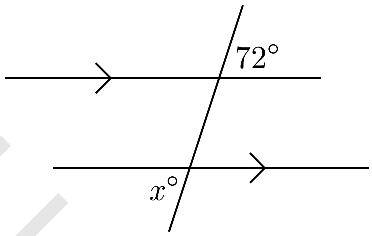
(٤) [AUST.MC 1990] في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{PQ}$ مستقيم. ما قياس الزاوية $\widehat{STP}$ ؟



(أ) 69° (ب) 89° (ج) 101° (د) 111°

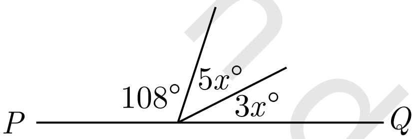
(٥) [AUST.MC 1989] ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ في الشكل المرفق؟

(أ) 72° (ب) 108° (ج) 118° (د) 128°



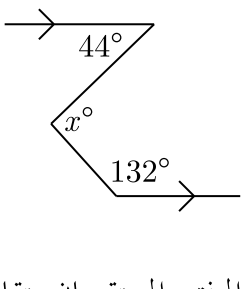
(٦) [AUST.MC 1987] في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{PQ}$ مستقيم. ما قيمة x ؟

(أ) 9° (ب) 11° (ج) 16° (د) 27°

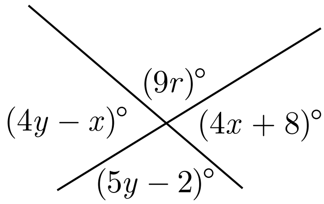


(٧) [AUST.MC 1985] في الشكل المرفق، قياس الزاوية $\widehat{x}$ يساوي

(أ) 90° (ب) 92° (ج) 96° (د) 112°



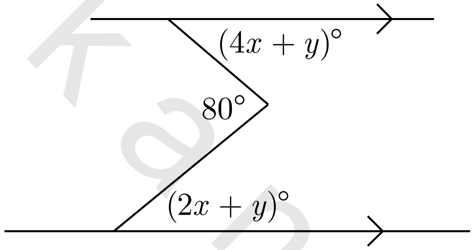
(٨) [MAΘ 2010] في الشكل المرفق، المستقيمان متقاطعان. ما قيمة r ؟



(أ) 6° (ب) 8° (ج) 12° (د) 14°

(٩) [MAΘ 2007] ما قيمة $3x+y$ في الشكل المرفق؟

(أ) 40° (ب) 50° (ج) 80° (د) 100°

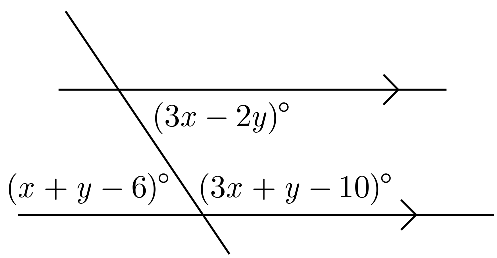


(١٠) ما قياس الزاوية التي قياس متممتها يساوي 40% من قياس مكملتها؟

(أ) 24° (ب) 26° (ج) 30° (د) 35°

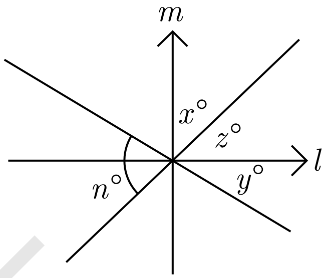
(١١) [MAΘ 2005] ما قيمة x في الشكل المرفق؟

(أ) 22° (ب) 24° (ج) 36° (د) 40°



(١٢) [MAΘ 2005] في الشكل المرفق، المستقيمان l و m متعامدان، قياس الزاوية $\hat{n}$ يساوي $75°$ ما قيمة $x - y$ ؟

(أ) $15°$ (ب) $20°$ (ج) $30°$ (د) $45°$



(١٣) [MAΘ 2003] مجموع قياسي زاوية حادة وزاوية منفرجة يساوي $140°$. مجموع ضعف مكملة الزاوية المنفرجة وثلاثة أمثال متممة الزاوية الحادة يساوي $340°$. ما خارج قسمة الزاوية المنفرجة على الزاوية الحادة ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 13

(١٤) [MAΘ 2003] النقطة B هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AC}$ وإحداثيها هو 5. إذا كان إحداثي A أكبر من إحداثي C وكان $BC = 9$ فإن طول القطعة $\overline{AC}$ يساوي

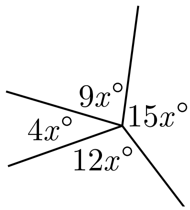
(أ) 14 (ب) 16 (ج) 18 (د) 20

(١٥) [MAΘ 2002] قياس مكملة الزاوية $\widehat{A}$ يساوي أربعة أضعاف قياس متممتها. ما قياس الزاوية $\widehat{A}$ ؟

(أ) $36°$ (ب) $54°$ (ج) $60°$ (د) $120°$

(١٦) [MAΘ 2002] في الشكل المرفق، ما قيمة المقدار $4x^2$ ؟

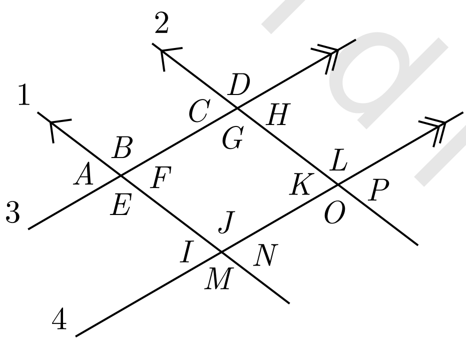
(أ) 64 (ب) 324 (ج) 362 (د) 1296



(١٧) [MAΘ 2001] في الشكل المرفق، المستقيم 1 يوازي المستقيم 2 والمستقيم 3 يوازي المستقيم 4 والحروف على الشكل هي قياسات الزوايا. إذا كان المستقيم 3 لا يعامد المستقيم 1، فكم عبارة من العبارات التالية صائبة ؟

(i) $A = B$ (ii) $C = G$ (iii) $M = P$ (iv) $O = D$

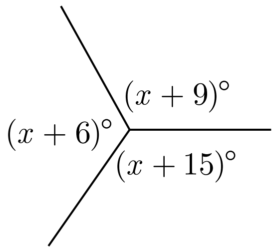
(v) $L = F$ (vi) $E = N$ (vii) $H = I$ (viii) $J = K$



(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

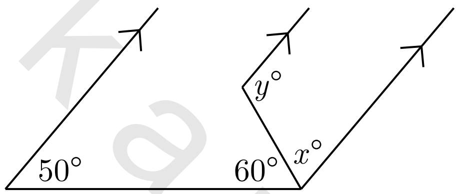
(١٨) [AUST.MC 1995] ما قياس الزاوية الكبرى في الشكل المرفق ؟

(أ) 116° (ب) 120° (ج) 125° (د) 130°

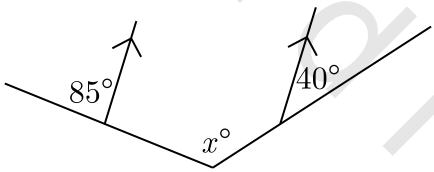


(١٩) [AUST.MC 2000] قيمة $y-x$ في الشكل المرفق تساوي

(أ) 30° (ب) 40° (ج) 60° (د) 70°

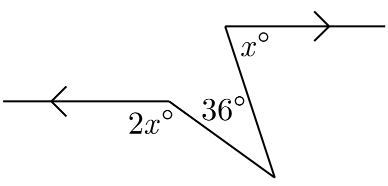


(٢٠) ما قياس الزاوية $\hat{x}$ في الشكل المرفق ؟



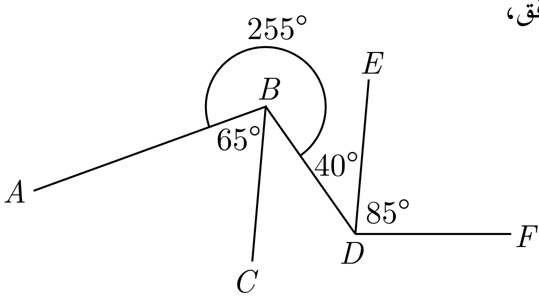
(أ) 85° (ب) 95° (ج) 110° (د) 125°

(٢١) ما قياس الزاوية $\hat{x}$ في الشكل المرفق ؟



(أ) 72° (ب) 80° (ج) 120° (د) 144°

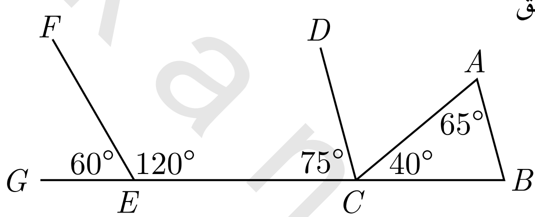
(٢٢) في الشكل المرفق،



(أ) $C\widehat{B}D = 65^\circ$ (ب) $\overleftrightarrow{DF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(ج) $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ (د) $\widehat{BDF} = \widehat{ABD}$

(٢٣) في الشكل المرفق

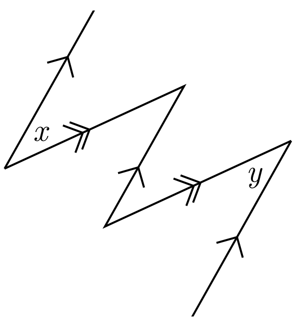


(أ) $\widehat{B} = 80^\circ$ (ب) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

(ج) $\widehat{DCA} = 75^\circ$ (د) $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

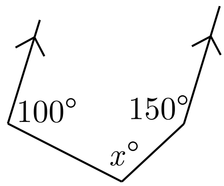
(٢٤) في الشكل المرفق، ما قيمة $x - y$ ؟

(أ) 0° (ب) 20° (ج) 30° (د) 40°



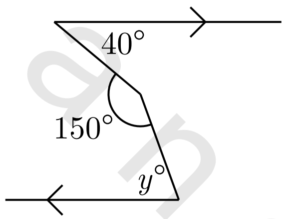
(٢٥) ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ في الشكل المرفق ؟

(أ) 30° (ب) 50° (ج) 80° (د) 110°



(٢٦) ما قياس الزاوية $\widehat{y}$ في الشكل المرفق ؟

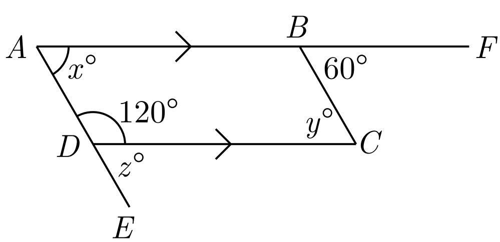
(أ) 50° (ب) 70° (ج) 75° (د) 80°



(٢٧) في الشكل المرفق:

(أ) $\widehat{x} = 120^\circ$ (ب) $\widehat{y} = 120^\circ$

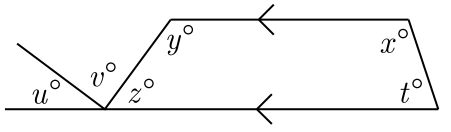
(ج) $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ (د) $\widehat{y} + \widehat{z} = 80^\circ$



(٢٨) في الشكل المرفق:

(أ) $\hat{y} = \hat{v}$ (ب) $\hat{z} + \hat{u} + \hat{v} = 90°$

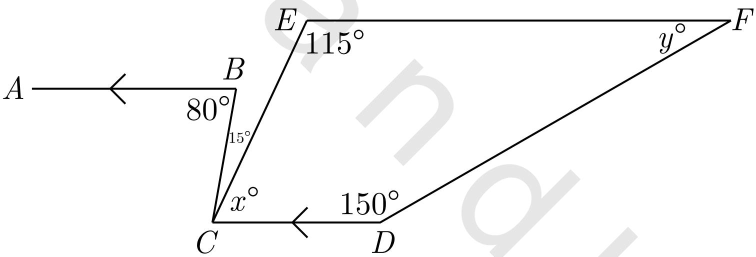
(ج) $\hat{x} + \hat{y} + \hat{z} + \hat{t} = 180°$ (د) $\hat{y} - \hat{x} = \hat{t} - \hat{z}$



(٢٩) في الشكل المرفق:

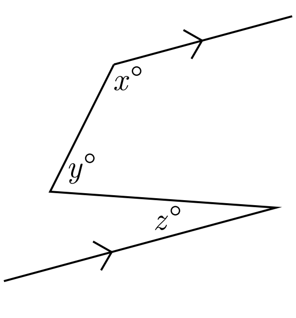
(أ) $\hat{x} = 60°$ (ب) $\hat{x} = 55°$

(ج) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ (د) $\hat{x} + \hat{y} = 90°$



(٣٠) في الشكل المرفق قيمة $x + y - z$ يساوي

(أ) $90°$ (ب) $120°$ (ج) $150°$ (د) $180°$



إجابات المسائل غير المحلولة

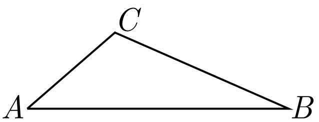
(١) ب	(٢) ب	(٣) د	(٤) أ	(٥) أ
(٦) أ	(٧) ب	(٨) ج	(٩) أ	(١٠) ج
(١١) ج	(١٢) أ	(١٣) د	(١٤) ج	(١٥) ج
(١٦) ب	(١٧) ج	(١٨) ج	(١٩) ب	(٢٠) د
(٢١) أ	(٢٢) ج	(٢٣) ب	(٢٤) أ	(٢٥) د
(٢٦) ب	(٢٧) ج	(٢٨) د	(٢٩) ج	(٣٠) د

الفصل الثاني

المثلثات
Triangles

المثلثات من المفاهيم الأساسية في الهندسة وهي حالة خاصة من المضلعات التي سندرسها في الفصل الثالث ولكننا نفرد هذا الفصل لدراسة المثلثات لما لها من خواص مميزة.

المثلث L نرمز له عادة بالرمز $\triangle$ هو اتحاد ثلاث قطع مستقيمة تتحدد بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. تسمى النقاط A، B، C رؤوس المثلث والقطع المستقيمة $\overline{AB}$، $\overline{BC}$، $\overline{CA}$ أضلاع المثلث وزوايا المثلث هي $\widehat{A}$، $\widehat{B}$، $\widehat{C}$. تصنف المثلثات حسب أضلاعها وحسب زواياها:



(١) **المثلث الحاد الزوايا** (**acute triangle**): هو المثلث الذي تكون جميع زواياه حادة.

(٢) **المثلث القائم الزاوية** (**right triangle**): هو المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة. يسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة الوتر (hypotenuse) ويسمى كل من ضلعي القائمة ساقاً (leg).

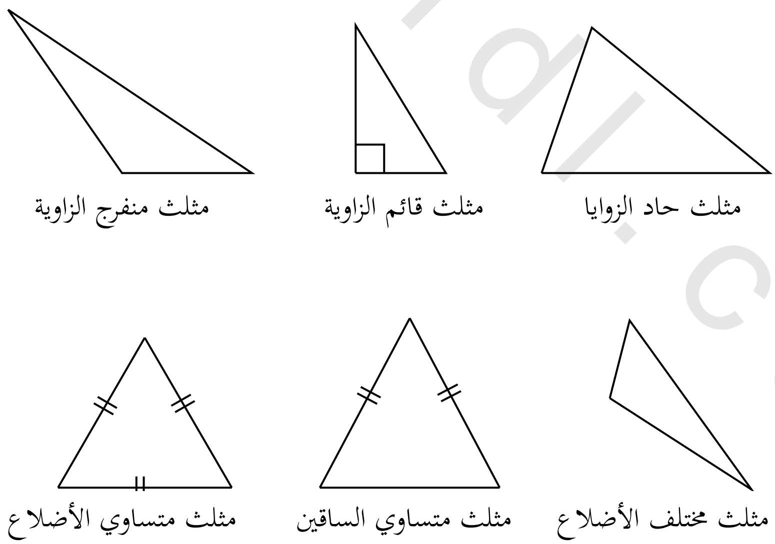
(٣) **المثلث المنفرج الزاوية** (**obtuse triangle**): هو المثلث الذي إحدى

زواياه منفرجة

(٤) **المثلث المختلف الأضلاع** (**scalene triangle**): هو المثلث الذي أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة.

(٥) **المثلث المتساوي الساقين** (**isosceles triangle**): هو المثلث الذي يكون فيه ضلعان متساويان والزاويتان المقابلتان للضلعين المتساويين متساويتان أيضاً. يسمى كل من الضلعين المتساويين ساقاً ويسمى الضلع الثالث قاعدة المثلث (base) كما تسمى الزاوية المقابلة للقاعدة بزاوية الرأس وتسمى كل من الزاويتين المتساويتين بزاوية القاعدة.

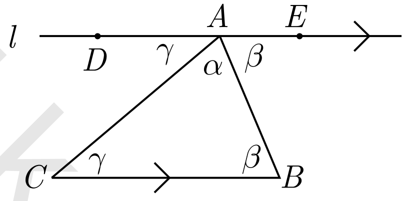
(٦) **المثلث المتساوي الأضلاع** (**equilateral triangle**): هو المثلث الذي تكون جميع أضلاعه متساوية وفي هذه الحالة تكون جميع زواياه متساوية وقياس كل منها $60°$ (انظر المبرهنة أدناه).



إحدى أهم الحقائق عن المثلث هي أن مجموع زواياه يساوي $180°$ وهي فحوى المبرهنة التالية

مبرهنة (١): مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$.

البرهان: لنفرض أن ABC مثلث زواياه α، β، γ كما هو مبين في الشكل أدناه. ارسم المستقيم l المار بالرأس A والموازي للضلع BC.

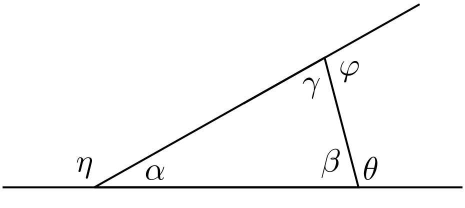


الزاويتان $\widehat{ACB}$ و $\widehat{CAD}$ متساويتان بالتبادل. وأيضاً الزاويتان $\widehat{ABC}$ و $\widehat{BAE}$ متساويتان بالتبادل. إذن،

$$\gamma + \alpha + \beta = 180° \qquad \text{(زاوية مستقيمة)}$$

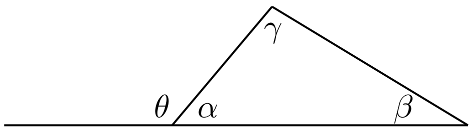
وبهذا يكون مجموع زوايا المثلث يساوي $180°$. $\square$

إذا مددنا أحد أضلاع المثلث فتسمى الزاوية التي تنشأ عن ذلك زاوية خارجة (exterior angle) فمثلاً الزوايا θ، φ، η في الشكل أدناه هي زوايا خارجة.



مبرهنة (٢) [مبرهنة الزاوية الخارجة]: قياس زاوية خارجة في مثلث تساوي مجموع قياس الزاويتين غير المجاورتين لها.

البرهان:



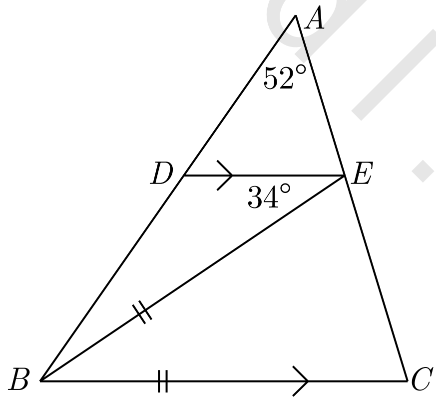
سنبرهن أن $\theta = \gamma + \beta$. لاحظ أن

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \qquad \text{(مجموع زوايا مثلث)}$$

$$\alpha + \theta = 180^\circ \qquad \text{(زاوية مستقيمة)}$$

إذن، $\theta = \beta + \gamma$. □

مثال (١): في المثلث $\triangle ABC$، DE و BC متوازيان، $BE = BC$ إذا كان $\widehat{BED} = 34^\circ$ و $\widehat{BAE} = 52^\circ$ فجد $\widehat{ABE}$.



الحل: بما أن $DE \parallel BC$ فإن $y = \widehat{EBC} = 34^\circ$. وبما أن $\triangle BEC$ متساوي الساقين فإن $\widehat{BEC} = \widehat{BCE}$ ولتكن كل منهما x. إذن،

$y + x + x = 180^\circ$ (مجموع زوايا مثلث)

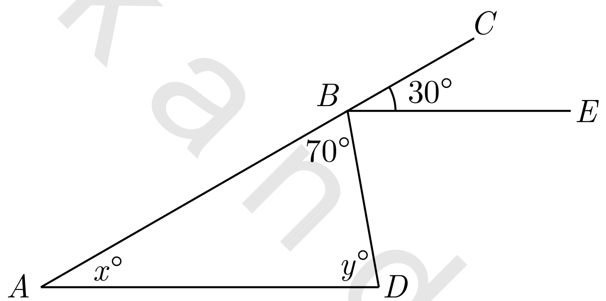
وبهذا نرى أن $x = \frac{1}{2}(180^\circ - y) = \frac{1}{2}(180^\circ - 34^\circ) = 73^\circ$.

الآن،

$x = 52^\circ + \widehat{ABE}$ (خارجة عن المثلث $\triangle ABE$)

إذن، $\widehat{ABE} = x - 52^\circ = 73^\circ - 52^\circ = 21^\circ$. ◇

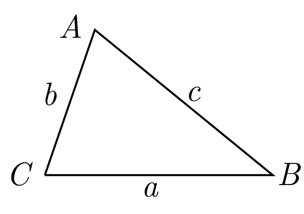
مثال (٢): في الشكل أدناه ABC خط مستقيم و BE يوازي AD . جد قياس الزاوية y .



الحل: بما أن $BE \parallel AD$ فإن $x = 30^\circ$ بالتناظر. إذن،

$y = 180^\circ - x - 70^\circ = 80^\circ$. ◇

إذا كان ABC مثلثاً فنرمز لطول الأضلاع BC ، AC ، AB بالرموز a ، b ، c على التوالي (انظر الشكل أدناه).

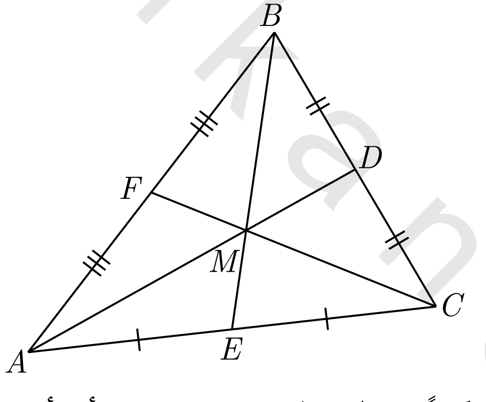


محيط المثلث (perimeter) هو مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة وعادة نرمز للمحيط بالرمز p ونرمز لنصف المحيط بالرمز s. أي أن

$$p = a + b + c$$
$$s = \frac{a + b + c}{2}.$$

متوسطات المثلث [Medians]

يسمى المستقيم المرسوم من أحد رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل متوسطاً (median) ونقطة التقاء متوسطات المثلث الثلاثة تسمى المركز المتوسط أو المركز (centroid) للمثلث. سنبرهن في كتاب المرحلة الثانية من هذه السلسلة أن متوسطات المثلث تلتقي في نقطة واحدة وأن المركز يقسم كلاً من المتوسطات بنسبة $1:2$. أي أن



$$\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{CM}{MF} = \frac{2}{1}.$$

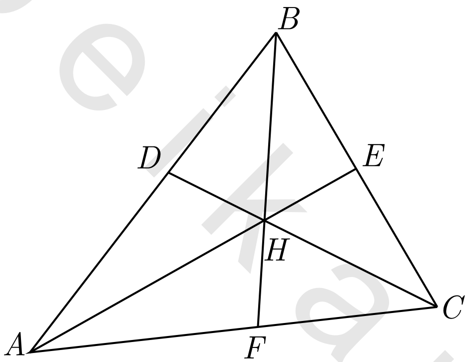
منصفات الزوايا [Angle Bisector]

يسمى الشعاع المار برأس زاوية مثلث ويقسم الزاوية إلى زاويتين متساويتين منصف الزاوية (angle bisector). سنرى لاحقاً أن منصف الزاوية هو مجموعة النقاط التي تقع على مسافات متساوية من ضلعي الزاوية (المسافة من نقطة إلى مستقيم هي طول العمود المرسوم من النقطة إلى المستقيم).

كما هو الحال للمتوسطات فإن منصفات الزوايا تلتقي في نقطة واحدة وهذا فحوى المبرهنة التالية.

مبرهنة (٣):تتلاقى منصفات زوايا مثلث في نقطة واحدة.

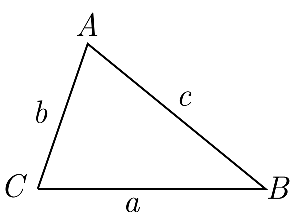
البرهان: لنفرض أن H نقطة تقاطع المنصفين AE و DC. بما أن H تقع على AE فإنها تبعد مسافة متساوية عن AB و AC. وبما أن H تقع على DC فإنها تبعد مسافة متساوية عن AC و BC. ولذا فهي تبعد مسافة متساوية عن AB و BC. إذن، H تقع على منصف الزاوية $\widehat{ABC}$. وبهذا فمنصفات الزوايا الثلاث تتلاقى في النقطة H. □



متباينة المثلث [Triangle Inequality]

تنص متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين في المثلث يجب أن يكون أكبر من طول الضلع الثالث. أي، في المثلث ABC لدينا

$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$



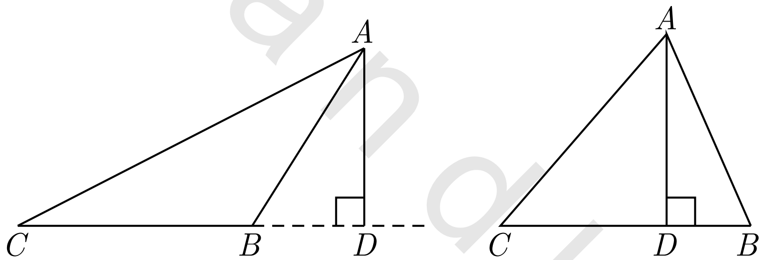
أما إذا كان مجموع طولي ضلعين في المثلث يساوي طول الضلع الثالث فيسمى المثلث مثلثاً مُضْمَحِلاً (degenerate). أي أن الرؤوس الثلاثة تقع على استقامة واحدة.

مثال (٣): إذا كان طولا ضلعي مثلث هما 8 و 14 فما القيم الممكنة لطول الضلع الثالث ؟

الحل: لنفرض أن x هو طول الضلع الثالث. عندئذ، $x + 8 > 14$. ومن ذلك يكون $x > 6$. أيضاً، $8 + 14 > x$. أي أن $x < 22$. وبهذا نجد أن $6 < x < 22$. ◇

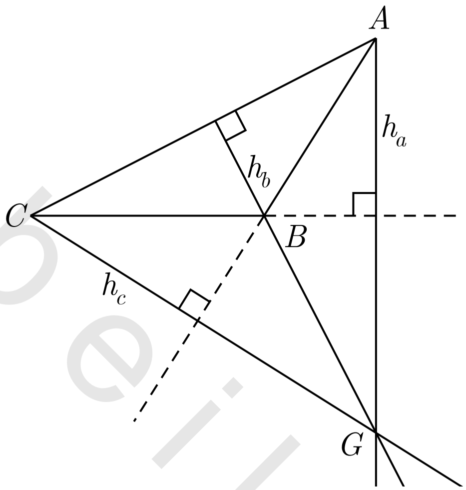
ارتفاعات المثلث [Altitudes or Heights]

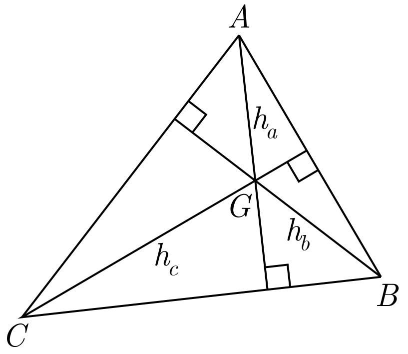
يسمى العمود النازل من رأس مثلث إلى الضلع المقابل أو امتداد الضلع المقابل بارتفاع المثلث (انظر الشكل أدناه)



AD ارتفاع للمثلث AD ارتفاع للمثلث

ترمز عادة لارتفاعات المثلث بالرموز h_a، h_b، h_c حيث h_a هو الارتفاع النازل من الرأس A إلى الضلع BC، h_b هو الارتفاع النازل من الرأس B إلى الضلع AC، h_c هو الارتفاع النازل من الرأس C إلى الضلع AB. تتلاقى ارتفاعات المثلث الثلاث في نقطة واحدة G تسمى مركز التعامد (orthocenter) كما هو مبين في الشكلين أدناه





لاحظ أن مركز تعامد المثلث المنفرج الزاوية يقع خارج المثلث.

مساحة المثلث [Area of a Triangle]

توجد العديد من الطرق لحساب مساحة مثلث وأحد الطرق الشائعة هي التي تستخدم القاعدة والارتفاع (سنقدم طرق أخرى في كتاب المرحلة الثانية من هذه السلسلة). سنرمز لمساحة المثلث ABC بالرمز $[ABC]$.

مبرهنة (٤): مساحة المثلث ABC هي $[ABC] = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$.

إحدى أشهر مبرهنات الهندسة هي مبرهنة فيثاغورس والتي تنص على أن مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي مربع طول الوتر. يوجد عدد كبير من البراهين لهذه المبرهنة وسنقدم لاحقاً برهاناً سهلاً لها.

مبرهنة (٥) مبرهنة فيثاغورس [Pythagorean Theorem]: إذا كان ABC مثلثاً قائم الزاوية عند B فإن

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

عادة ما تكون تطبيقات مبرهنة فيثاغورس سهلة.

مثال (٤): في المثلث القائم الزاوية عند B لدينا $AC = 10$ و $BC = 8$. جد AB.

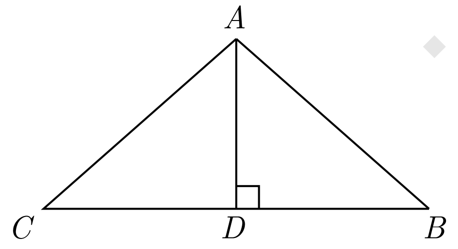
الحل: من مبرهنة فيثاغورس نعلم أن

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$
$$(AB)^2 + 8^2 = 10^2$$
$$(AB)^2 = 100 - 64$$

إذن، $AB = \sqrt{36} = 6$. ◇

مثال (٥): جد مساحة المثلث ABC إذا كان $AB = AC = 40$ و $BC = 60$.

الحل:



بما أن المثلث ABC متساوي الساقين فإن الارتفاع h_a ينصف القاعدة CB. إذن، $CD = DB = 30$. ومن مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$\left(h_a\right)^2 = (40)^2 - (30)^2 = 1600 - 900 = 700$$

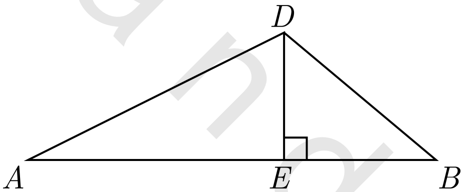
إذن، $h_a = \sqrt{700} = 10\sqrt{7}$ وتكون المساحة:

$$[ABC] = \frac{1}{2} h_a \times BC = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{7} \times 60 = 300\sqrt{7}\,.$$ ◇

مثال (٦): إذا كانت A ، D ، B ثلاث نقاط حيث $AD + DB = AB$ فأثبت أن D تقع على القطعة المستقيمة AB .

الحل: سنستخدم طريقة البرهان بالمكافئ العكسي لإثبات ذلك. أي سنثبت أنه إذا لم تكن D واقعة على القطعة المستقيمة AB فإن $AD + DB \neq AB$.

لنفرض أن D غير واقعة على AB (انظر الشكل)



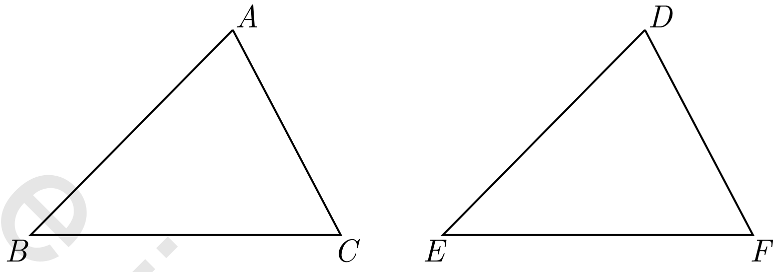
وليكن DE العمود النازل من D إلى AB . باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث القائم ADE نجد أن $(AD)^2 = (AE)^2 + (DE)^2 > (AE)^2$. إذن، $AD > AE$. وبالمثل $DB > EB$. من ذلك نرى أن

$$AB = AE + EB < AD + DB\,.$$

وبهذا يكون $AB \neq AD + DB$. ◇

المثلثات المتطابقة [Congruent Triangles]

لنفرض أن لدينا $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$



ولنفرض أننا قابلنا بين رؤوسهما $\mathrm{A} \leftrightarrow \mathrm{D}$ ، $\mathrm{B} \leftrightarrow \mathrm{E}$ ، $C \leftrightarrow F$. وبهذا نكون قد وجدنا التقابل $\triangle ABC \leftrightarrow \triangle DEF$ بين المثلثين. إذا نتج عن هذا التقابل أن

$$\widehat{A} = \widehat{D} \text{ ، } \widehat{B} = \widehat{E} \text{ ، } \widehat{C} = \widehat{F}$$

$$AB = DE \text{ ، } BC = EF \text{ ، } AC = DF$$

فإننا نقول إن المثلثين متطابقان (Congruent) ونكتب $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

وعندما يكون المثلثان متطابقين فإن الزوايا المتقابلة تتطابق والأضلاع المتقابلة تتطابق.

هناك طرق عديدة لإثبات تطابق مثلثين وهي:

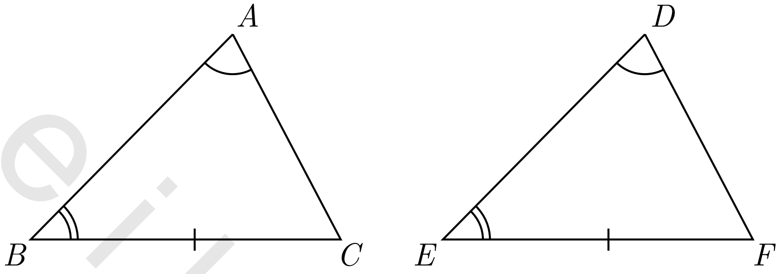
مسلمة (١) $[SSS]$: إذا طابقت ثلاثة أضلاع في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مسلمة (٢) $[SAS]$: إذا طابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مسلمة (٣) $[ASA]$: إذا طابقت زاويتان وضلعهما المشترك في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مبرهنة (٦) $[AAS]$: إذا طابقت زاويتان وضلع (ليس بالضرورة مشترك بين الزاويتين) في $\triangle ABC$ ما يقابلها في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

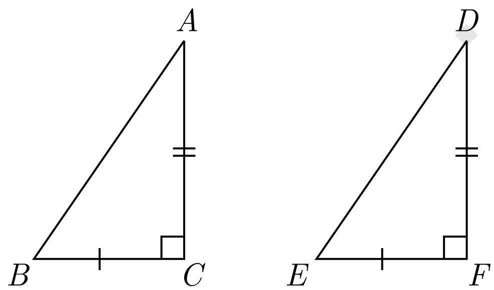
البرهان: في $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ نفرض أن



$\widehat{A} = \widehat{D}$، $\widehat{B} = \widehat{E}$، $BC = EF$. بما أن مجموع زوايا المثلث يساوي 180° فإن $\widehat{C} = \widehat{F}$. إذن، $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (ASA). □

مبرهنة (٧) $[LL]$: إذا طابق ضلعا القائمة في $\triangle ABC$ القائم الزاوية ما يقابلهما في $\triangle DEF$ القائم الزاوية فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

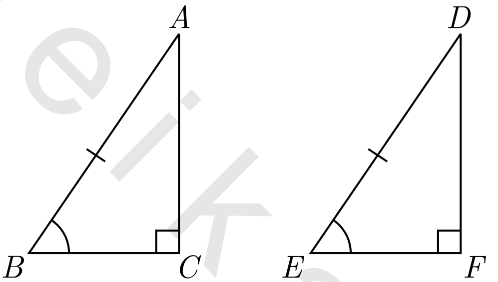
البرهان: لنفرض أن $BC = EF$ وأن $AC = DF$ في المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$.



بما أن $\widehat{C} = \widehat{F} = 90^\circ$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (SAS). □

مسلمة (٤) $[HL]$: إذا تطابق الوتر وأحد ضلعي القائمة في المثلث $\triangle ABC$ القائم الزاوية ما يقابلهما في المثلث $\triangle DEF$ القائم الزاوية فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

مبرهنة (٨) $[HA]$: إذا تطابق الوتر وزاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ ما يقابلهما في المثلث القائم الزاوية $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.



البرهان: لنفرض أن $AB = DE$ وأن $\widehat{B} = \widehat{E}$ في المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$. وبما أن $\widehat{C} = \widehat{F} = 90°$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ (AAS). □

مبرهنة (٩) $[LA]$: إذا تطابق أحد ضلعي القائمة وزاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ ما يقابلهما في المثلث القائم الزاوية $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

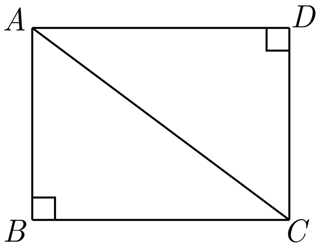
البرهان: متروك للقارئ. □

نقدم الآن برهاناً لكل من المبرهنتين (٤) و (٥).

برهان للمبرهنة (٤) [إيجاد مساحة مثلث]:

(أ) المطلوب هو برهان أن مساحة المثلث $\triangle ABC$ هي $[ABC] = \frac{1}{2} a h_a$.

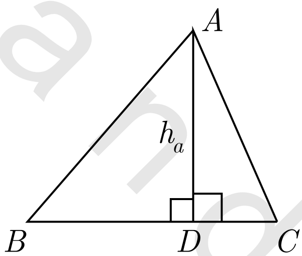
لنفرض أولاً أن ABC قائم الزاوية في $\widehat{B}$.



أنشئ المستطيل $ABCD$. من الواضح أن $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$. ولهذا $[ABC] = [CDA]$. إذن،

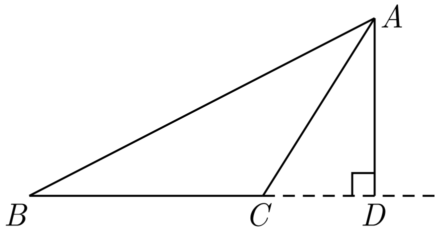
$$[ABC] = \frac{1}{2}[ABCD] = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{1}{2}ah_a$$

لنفرض الآن أن المثلث $\triangle ABC$ حاد الزوايا



$$\begin{aligned}[ABC] &= [ABD] + [ADC] \\ &= \frac{1}{2}(BD)h_a + \frac{1}{2}(DC)h_a \\ &= \frac{1}{2}(BD + DC)h_a \\ &= \frac{1}{2}(BC)h_a \\ &= \frac{1}{2}ah_a\end{aligned}$$

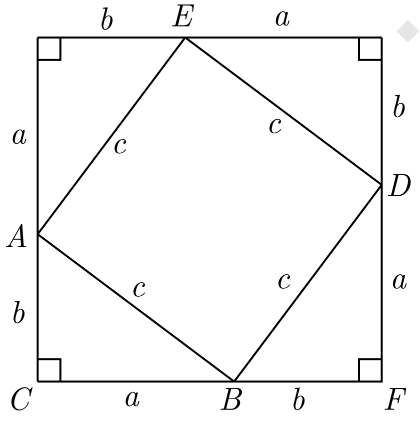
وأخيراً نفرض أن $\triangle ABC$ منفرج الزاوية



$$
\begin{aligned}
[ABC] &= [ABD] - [ACD] \\
&= \frac{1}{2}(BD)h_a - \frac{1}{2}(CD)h_a \\
&= \frac{1}{2}(BD - CD)h_a \\
&= \frac{1}{2}(BC)h_a \\
&= \frac{1}{2}ah_a
\end{aligned}
$$

وهذا ينهي البرهان. $\square$

برهان المبرهنة (٥) [مبرهنة فيثاغورس]: لنفرض أن $\triangle ABC$ قائم الزاوية في $\widehat{C}$. أنشئ مربعاً طول ضلعه $a+b$ كما هو مبين في الشكل أدناه



من السهل أن نرى أن مساحة المربع الكبير تساوي مجموع مساحة المربع الصغير ومساحة الأربعة مثلثات المتطابقة (لماذا ؟). عندئذ،

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2} ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

إذن، $a^2 + b^2 = c^2$. $\square$

بعض المثلثات القائمة الخاصة [Some Special Right Triangles]

(١) المثلث $45° - 45° - 90°$

إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية حيث $\widehat{A} = \widehat{B} = 45°$ و $\widehat{C} = 90°$ فنقول إن المثلث $\triangle ABC$ هو مثلث $45° - 45° - 90°$ ويكون

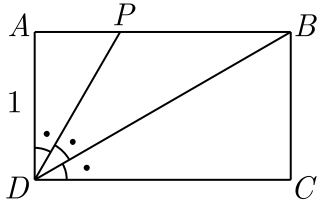
$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{a}{b} = 1$$

(٢) المثلث $30° - 60° - 90°$

إذا كان $\triangle ABC$ قائم الزاوية حيث $\widehat{A} = 60°$، $\widehat{B} = 30°$، $\widehat{C} = 90°$، فنقول إن المثلث هو مثلث $30° - 60° - 90°$ ويكون

$$\frac{a}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{a}{b} = \sqrt{3} .$$

مثال (٧) [AMC 10 2000]: في المستطيل $ABCD$ لدينا $AD = 1$ ، P نقطة واقعة على AB ، DB و DP يثلثان الزاوية $\widehat{D}$ (يقسماها إلى ثلاث زوايا متساوية). جد محيط المثلث $\triangle BDP$.



الحل: بما أن BD و PD يثلثان الزاوية $\widehat{D}$ فنجد أن

$$\widehat{CDB} = \widehat{BDP} = \widehat{PDA} = 30^\circ$$

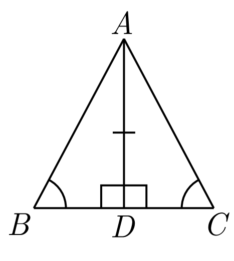
إذن، كل من المثلثين $\triangle DAB$ و $\triangle DAP$ هو مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. وبما أن $AD = 1$ فنجد أن $AP = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ، $DP = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ، $AB = \sqrt{3}$ ، $DB = 2$ ، $DC = AB = \sqrt{3}$. إذن، محيط المثلث $\triangle BDP$ يساوي

$$\begin{aligned} BD + DP + PB &= BD + DP + (AB - AP) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2 + \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

◇

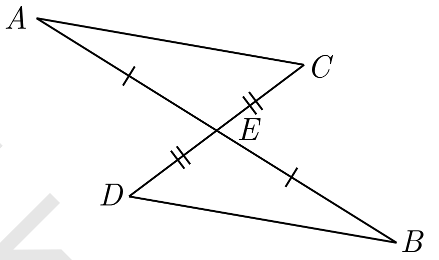
مثال (٨): إذا تساوت زاويتان في مثلث فأثبت أن الضلعين المقابلين لهما متساويان.

الحل: افرض أن $\widehat{B} = \widehat{C}$ في المثلث $\triangle ABC$. ارسم ارتفاعاً من A إلى BC .



$\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ لأن $AD = AD$ و $\widehat{B} = \widehat{C}$. إذن، $AB = AC$. ◇

مثال (٩): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ينصفان بعضهما البعض. أثبت أن $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$.



الحل: في $\triangle AEC$ و $\triangle BED$:

$$AE = BE \quad \text{(فرض)}$$

$$CE = DE \quad \text{(فرض)}$$

$$\widehat{AEC} = \widehat{BED} \quad \text{(بالتقابل بالرأس)}$$

إذن، $\triangle AEC \equiv \triangle BED$ (SAS). من التطابق نجد أن $\widehat{C} = \widehat{D}$. وبما أنهما متبادلتان داخلياً فإن $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$. ◇

المثلثات المتشابهة [Similar Triangles]

إذا كان a و b عددين حيث $b \neq 0$ فإن نسبة a إلى b وتكتب $a:\mathrm{b}$ هي $\frac{a}{b}$. تسمى المساواة $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ حيث $b \neq 0$ و $d \neq 0$ بالتناسب. يحقق التناسب الخصائص التالية:

(١) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $ad = bc$.

(٢) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. حيث $c\neq 0$

(٣) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$. حيث $a\neq 0$ و $c\neq 0$

(٤) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

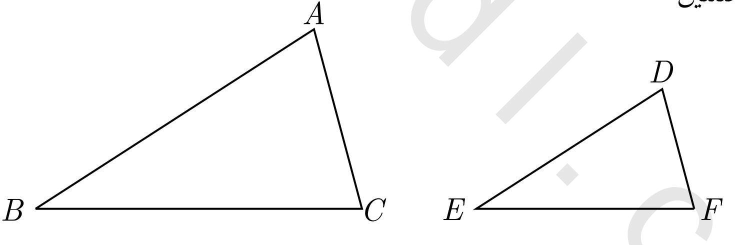
(٥) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(٦) إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ فإن $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

نقول إن المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهان ونكتب $\triangle ABC\sim\triangle DEF$ إذا وجد تقابل بين رؤوسهما بحيث يكون:

(أ) الزوايا المتقابلة متطابقة، (ب) أطوال الأضلاع المتقابلة متناسبة.

أي أن المثلثين



متشابهان إذا كان $\widehat{A}=\widehat{D}$ ، $\widehat{B}=\widehat{E}$ ، $\widehat{C}=\widehat{F}$ وكان $\frac{CA}{FD}=\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}$.

من المهم الانتباه حين نستخدم النسب الواردة إلى ضرورة التقيد بترتيب الحروف في وصف المثلثين، التشابه $\triangle ABC\sim\triangle DEF$ لا يعني تشابه $\triangle ABC$ و $\triangle FED$ ولذا لا نستطيع أن نكتب مثلاً $\frac{CA}{DF}=\frac{BC}{ED}=\frac{AB}{FE}$.

مبرهنة (١٠): إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين طول أي زوج من الأضلاع المتقابلة.

البرهان: لنفرض أن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ وأن p هو محيط $\triangle ABC$ و q هو محيط $\triangle DEF$. المطلوب إثبات أن $\frac{p}{q} = \frac{AB}{DE}$. الآن لدينا من التشابه

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$$

ولهذا فإن

$$\frac{AB + BC + CA}{DE + EF + FD} = \frac{AB}{DE}$$

إذن، $\frac{p}{q} = \frac{AB}{DE}$. □

نقدم الآن بعض الطرق لإثبات تشابه مثلثين.

مسلمة (٥) $[AA]$: إذا تطابقت زاويتان في $\triangle ABC$ مع زاويتين في $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

ملحوظات: في حالة المثلث القائم الزاوية والمثلث المتساوي الساقين لدينا:

(١) إذا طابقت زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ زاوية حادة في المثلث القائم الزاوية $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

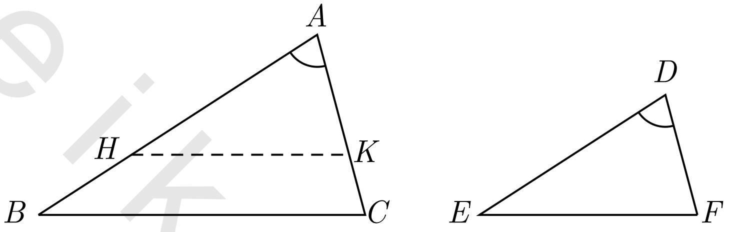
(٢) إذا طابقت زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين $\triangle ABC$ زاوية الرأس في المثلث المتساوي الساقين $\triangle DEF$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

مسلمة (٦): إذا قطع مستقيم ضلعين في مثلث تناسبياً فإنه يوازي الثالث.

المبرهنة التالية تزودنا بطريقة أخرى لإثبات تشابه مثلثين.

مبرهنة (١١) $[SAS]$: لنفرض أن $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ حيث $\widehat{A} = \widehat{D}$ و $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ فإن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

البرهان:

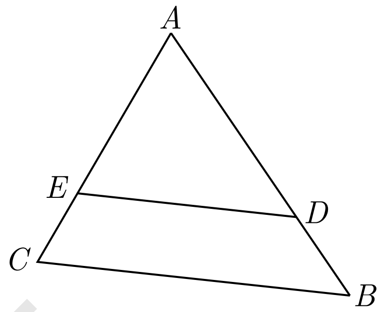


نفرض أن $\widehat{A} = \widehat{D}$ وأن $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$. لإثبات أن $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ يكفي أن نثبت استناداً إلى المسلمة (AA) أن $\widehat{B} = \widehat{E}$. الآن، نقوم بتعيين نقطتين H و K على $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ بحيث يكون $AH = ED$ و $AK = DE$ ونرسم $\overline{HK}$. الآن، $\triangle AHK \equiv \triangle DEF$ لأن:

$$AH = DE$$
$$AK = DF$$
$$\widehat{A} = \widehat{D}$$

ومن التطابق نجد أن $\widehat{AHK} = \widehat{E}$ وأن $\widehat{AKH} = \widehat{F}$. وبما أن $AH = ED$ و $AK = DF$ وأن $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}$ نجد أن $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{AC}{AK}$. إذن، HK يقسم AB و AC تناسبياً ومن ثم فإن $\overline{HK} \parallel \overline{BC}$. من ذلك نجد أن $\widehat{AHK} = \widehat{B}$ و $\widehat{AKH} = \widehat{C}$ بالتناظر. إذن، $\widehat{E} = \widehat{B}$ و $\widehat{F} = \widehat{C}$. $\square$

مثال (١٠): في الشكل المرفق، $AC = 10$ ، $AB = 12$ ، $AE = 7$ ، $AD = 8.4$. أثبت أن $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

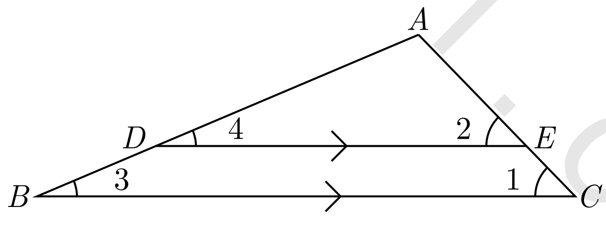


بما أن $\widehat{A} = \widehat{A}$ وأن

$$\frac{AB}{AD} = \frac{12}{8.4} = \frac{120}{84} = \frac{10}{7} = \frac{AC}{AE}$$

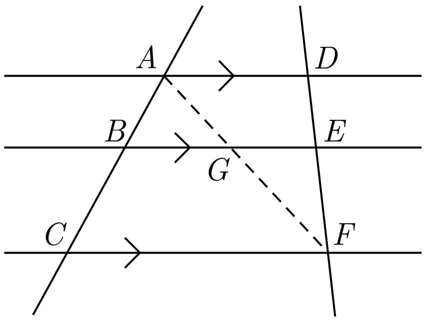
فإن $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (SAS). ◇

مثال (١١): في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ فيه $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$. أثبت أن $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$.



الحل: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ لأن $\hat{2} = \hat{1}$ و $\hat{4} = \hat{3}$ بالتناظر. إذن، $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AD}$. من ذلك نجد أن $\frac{AC - AE}{AE} = \frac{AB - AD}{AD}$. أي أن $\frac{CE}{EA} = \frac{BD}{DA}$. ◇

مثال (١٢): في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$. أثبت أن $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.



الحل: ارسم $\overline{AF}$ ليقطع $\overline{BE}$ في النقطة G.

الآن $\triangle FEG \sim \triangle FDA$ و $\triangle ABG \sim \triangle ACF$. إذن، استناداً إلى المثال (١١) نجد أن

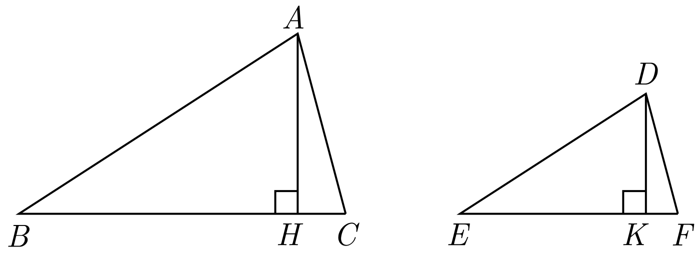
$$\frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF} \quad \text{و} \quad \frac{CB}{BA} = \frac{FG}{GA}.$$

من ذلك نجد أن $\frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF}$ و $\frac{BA}{CB} = \frac{GA}{FG}$. إذن، $\frac{BA}{CB} = \frac{DE}{EF}$. ◇

مبرهنة (١٢) [العلاقة بين مساحات المثلثات المتشابهة]: إذا كان $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ فإن

$$\frac{[ABC]}{[DEF]} = \frac{(AB)^2}{(DE)^2} = \frac{(BC)^2}{(EF)^2} = \frac{(AC)^2}{(DF)^2}.$$

البرهان: ارسم الارتفاعين $\overline{AH}$ و $\overline{DK}$ كما هو مبين في الشكل المرفق.



الآن،

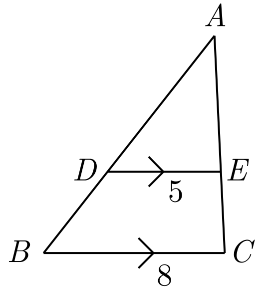
$$\frac{[ABC]}{[DEF]}=\frac{\frac{1}{2}BC\times AH}{\frac{1}{2}EF\times DK}=\frac{BC\times AH}{EF\times DK}$$

ولكن $\triangle ABH\sim\triangle DEK$ لأن $\widehat{B}=\widehat{E}$ ($\triangle ABC\sim\triangle DEF$) وأن $\widehat{AHB}=\widehat{DKE}$ (كل منهما قائمة). من ذلك نجد أن، $\frac{AB}{DE}=\frac{AH}{DK}$.

ولكن، $\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}$ ($\triangle ABC\sim\triangle DEF$). إذن، $\frac{BC}{EF}=\frac{AH}{DK}$. وبهذا نجد أن

$$\frac{[ABC]}{[DEF]}=\frac{BC}{EF}\times\frac{AH}{DK}=\frac{BC}{EF}\times\frac{BC}{EF}=\frac{(BC)^2}{(EF)^2}. \qquad \square$$

مثال (١٣): في المثلث $\triangle ABC$ المبين أدناه، DE يوازي BC، $DE=5$، $BC=8$، $[ADE]=15$. جد مساحة الشكل الرباعي $BCED$.



الحل: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$. وبهذا نجد أن $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{8}{5}$.

إذن، $\frac{64}{25}=\frac{8^2}{5^2}=\frac{[ABC]}{[ADE]}$. ومنه نرى أن

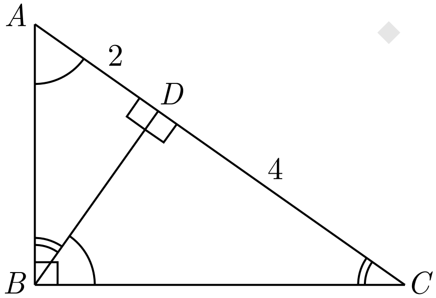
$$[ABC]=\frac{64}{25}\times[ADE]=\frac{64}{25}\times 15=\frac{192}{5}.$$

إذن، $[BCED]=\frac{192}{5}-15=\frac{117}{5}$. ◇

مثال (١٤): في المثلث المقدم في المثال (١٣) جد $\frac{AE}{EC}$.

الحل: بما أن $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ فإن $\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}=\frac{5}{8}$. بفرض أن $AE=5K$ وأن $AC=8K$ نجد أن $EC=3K$. إذن، $\frac{AE}{EC}=\frac{5K}{3K}=\frac{5}{3}$. ◇

مثال (١٥): في الشكل أدناه $\triangle ABC$ قائم الزاوية BD ارتفاع، $AD=2$ و $DC=4$. جد BD.

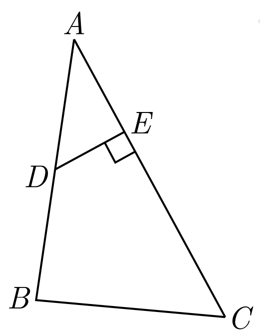


الحل: $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ لأن $\widehat{ABC}=\widehat{ADB}$ و $\widehat{DAB}=\widehat{CAB}$.

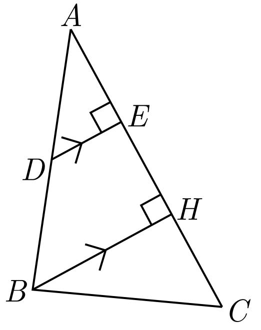
وبالمثل، $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. إذن، $\triangle BDC \sim \triangle ADB$. من ذلك نرى أن $\frac{DB}{DC} = \frac{AD}{BD}$. إذن، $(BD)^2 = (AD)(DC) = 2 \times 4 = 8$.
وبهذا يكون $BD = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. ◇

ملحوظة: يمكن استخدام المثلثات المتشابهة في المثال (١٥) لإثبات مبرهنة فيثاغورس على النحو التالي:
نفرض أن $AB = c$ ، $BC = a$ ، $AC = b$ ، $AD = x$ ، $DC = y$. من $\triangle ABC \sim \triangle ADB$ نجد أن $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AD}$ أي أن $\frac{b}{c} = \frac{c}{x}$. وبهذا فإن $c^2 = bx$. ومن $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ نجد أن $\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$. أي أن $\frac{b}{a} = \frac{a}{y}$.
وبهذا فإن $a^2 = by$. الآن، $c^2 + a^2 = b(x+y) = b^2$.

مثال (١٦) [MAΘ 1787]: في الشكل أدناه، لدينا $AD = DB = 5$ ، $EC = 8$ ، $AE = 4$ ، $\widehat{AED} = 90^\circ$. جد BC .



الحل: ارسم BH يوازي DE ويقطع AC في النقطة H .



الآن، $\triangle BAH \sim \triangle DAE$. ومن ذلك يكون

$$\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

وبما أن $AE = 4$ فنجد أن $AH = 8$. وبهذا $EH = AH - AE = 4$. ومنه فإن

$$HC = EC - EH = 8 - 4 = 4$$

الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(DE)^2 = (AD)^2 - (AE)^2 = 25 - 16 = 9$$

إذن، $DE = 3$. وبما أن $\frac{DE}{BH} = \frac{1}{2}$ فنجد أن $BH = 6$. وأخيراً باستخدام مبرهنة فيثاغورس مرة أخرى نجد أن

$$(BC)^2 = (HC)^2 + (BH)^2 = 16 + 36 = 52$$

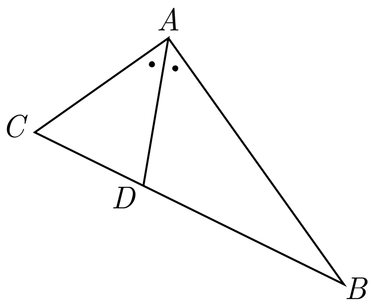
إذن، $BC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. ◇

المبرهنة التالية لها استخدامات عديدة.

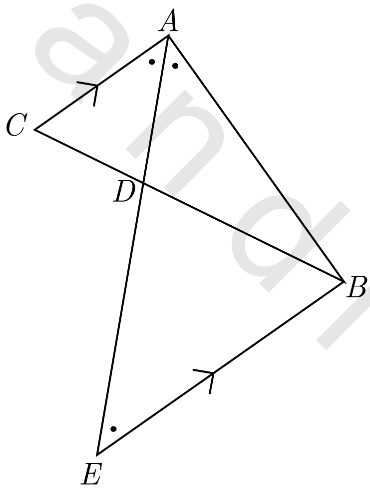
مبرهنة (١٣) [مبرهنة منصف الزاوية Angle Bisector Theorem]:

إذا كان AD منصفاً للزاوية $\widehat{A}$ في المثلث $\triangle ABC$ فإن $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$.

البرهان:

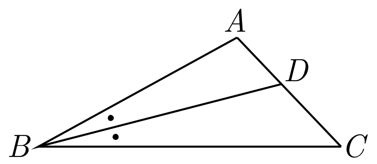


للبحث عن مثلثات متشابهة نقوم بمد AD إلى E حيث $BE \parallel AC$ كما هو مبين في الشكل أدناه



سنبرهن الآن أن $\triangle BDE \sim \triangle CDA$. لاحظ أن $\widehat{CAE} = \widehat{AEB}$ بالتبادل. وبما أن AD منصف الزاوية A فنرى أن $\widehat{CAD} = \widehat{DAB}$. إذن، $\widehat{EAB} = \widehat{AEB}$. وبهذا نجد أن $AB = BE$. الآن، $\widehat{CAD} = \widehat{DEB}$ و $\widehat{ADC} = \widehat{BDE}$. إذن، $\triangle BDE \sim \triangle CDA$. ومن التشابه نجد أن $\frac{AC}{CD} = \frac{BE}{BD} = \frac{AB}{BD}$. □

مثال (١٧) [AHSM 1966]: النسبة بين أضلاع المثلث $\triangle BAC$ هي $4 : 3 : 2$. BD منصف الزاوية المرسوم إلى الضلع الأصغر AC. إذا كان $AC = 10$ فجد طول القطعة الأكبر من AC.

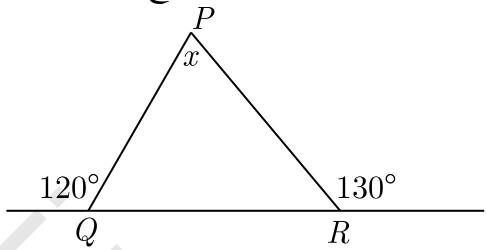


الحل: باستخدام مبرهنة منصف الزاوية لدينا $\frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AD}$. وبما أن AC هو الضلع الأصغر في المثلث فإن $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{4}$. لنفرض أن x هي القطعة الأطول وأن y هي القطعة الأقصر. إذن $y = \frac{3}{4}x$. وبما أن $AC = 10$ فإن $x + \frac{3}{4}x = 10$. وبهذا يكون $x = \frac{40}{7}$. ◇

مسائل محلولة

(١) [Anst.MC 1984] قيمة x في الشكل المرفق تساوي

(أ) $30°$ (ب) $50°$ (ج) $60°$ (د) $70°$

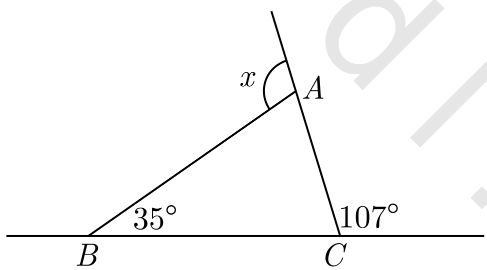


الحل: الإجابة هي (د): $\widehat{PQR} = 180 - 120 = 60°$

$\widehat{PRQ} = 180 - 130 = 50°$. إذن، $\hat{x} = 180 - (60 + 50) = 70°$.

(٢) [Aust.MC 1983] قيمة x في الشكل المرفق تساوي

(أ) $72°$ (ب) $108°$ (ج) $142°$ (د) $145°$

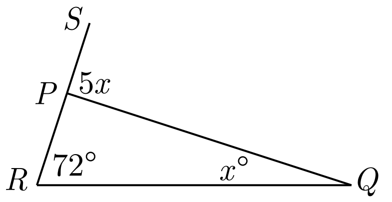


الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{ACB} = 180 - 107 = 73°$. ومن ثم فإن

$\hat{x} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 35 + 73 = 108°$.

(٣) [Aust.MC 1982] قياس الزاوية $\widehat{QPS}$ في الشكل المرفق يساوي

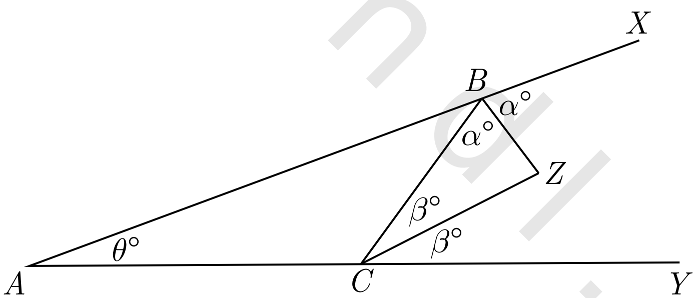
(أ) $60°$ (ب) $90°$ (ج) $96°$ (د) $105°$



الحل: الإجابة هي (ب): لدينا $x + 72 = 5x$. أي أن $4x = 72$. ومن ثم فإن $x = 18$. إذن، $\widehat{QPS} = 5 \times 18 = 90°$.

(٤) [Aust.MC 1978] في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{ABX}$ و $\overleftrightarrow{ACY}$ مستقيمان. منصفا الزاويتين $\widehat{XBC}$ و $\widehat{BCY}$ يلتقيان في النقطة Z. $\widehat{BZC} = 80°$. ما قياس $\widehat{BAC}$ ؟

(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $30°$ (د) $35°$



الحل: الإجابة هي (أ): في $\triangle ABC$ لدينا

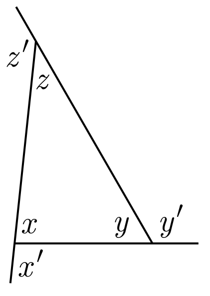
$$\theta + (180 - 2\alpha) + (180 - 2\beta) = 180\,.$$

إذن، $\theta = 2(\alpha + \beta) - 180$. ومن زوايا المثلث $\triangle BCZ$ نجد أن $\alpha + \beta + 80 = 180$. أي أن $\alpha + \beta = 100$. إذن،

$\theta = 2(\alpha + \beta) - 180 = 2 \times 100 - 180 = 20°$.

(٥) [Aust.MC 1983] النسبة $x' : y' : z'$ بين الزوايا الخارجية للمثلث المرفق هي $4 : 5 : 6$. ما النسبة بين الزوايا الداخلية $x : y : z$ ؟

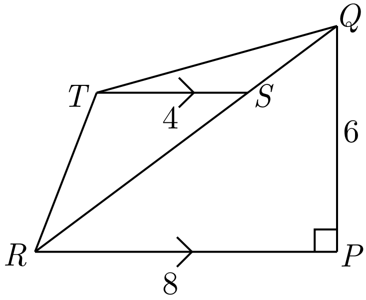
(أ) $3 : 5 : 7$ (ب) $1 : 2 : 3$ (ج) $2 : 5 : 8$ (د) $4 : 5 : 6$



الحل: الإجابة هي (أ): لدينا $x + y + z = 180$ و $(x + x') + (y + y') + (z + z') = 3 \times 180 = 540$. من ذلك نجد أن $x' + y' + z' = 360°$. وبما أن $4 + 5 + 6 = 15$ فإن $x' = \frac{4}{15} \times 360° = 96°$، $y' = \frac{5}{15} \times 360° = 120°$، $z' = \frac{6}{15} \times 360° = 144°$. إذن، $x = 180 - 96 = 84°$، $y = 180 - 120 = 60°$، $z = 180 - 144 = 36°$. وبهذا فإن $x : y : z$ هي $84 : 60 : 36$. أي $3 : 5 : 7$.

(٦) [Aust.MC 1982] في الشكل المرفق، $\triangle RPQ$ قائم الزاوية و $\overline{PR} \parallel \overline{ST}$، $PQ = 6$، $PR = 8$، $ST = 4$، مساحة $\triangle RQT$ تساوي:

(أ) 6 (ب) 10 (ج) 12 (د) 16



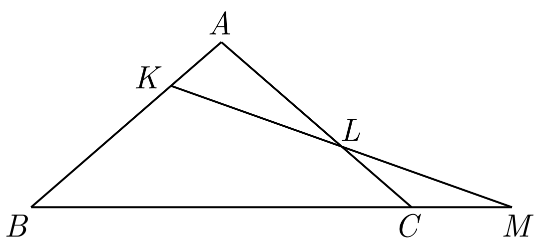
الحل: الإجابة هي (ج): مد $\overline{TS}$ ليلاقي $\overline{PQ}$ في S'. عندئذ،

$$\begin{aligned}[RQT] &= [TSQ] + [\mathrm{TSR}]\\ &= \frac{1}{2} \times TS \times QS' + \frac{1}{2} \times TS \times S'P\\ &= \frac{1}{2} \times TS \times (QS' + S'P)\\ &= \frac{1}{2} \times TS \times QP\\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12\end{aligned}$$

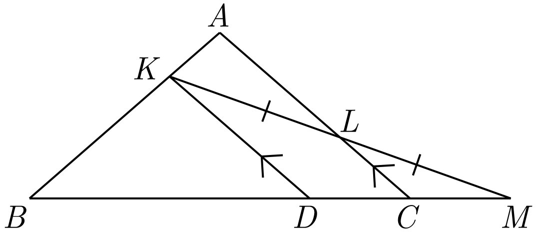
(٧) [Aust.MC 1978] في الشكل المرفق، $AB = AC$ و $KL = LM$.

عندئذ، النسبة $\dfrac{KB}{LC}$ هي

(أ) 1.5 (ب) 2 (ج) 2.5 (د) 3



الحل: الإجابة هي (ب): أنشئ $\overline{KD} \parallel \overline{LC}$ كما هو مبين في الشكل

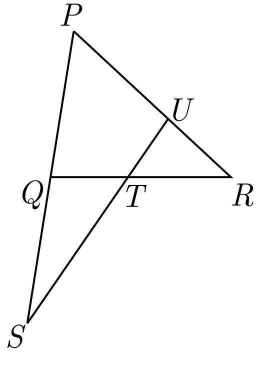


الآن، $\triangle MLC \sim \triangle MKD$ لأن

$\widehat{M} = \widehat{M}$، $\widehat{MLC} = \widehat{MKD}$، $\widehat{LCM} = \widehat{KDM}$. من التشابه نجد أن $\frac{1}{2} = \frac{LM}{KM} = \frac{LC}{KD}$. أيضاً، $\triangle ABC \sim \triangle KBD$ بتطابق ثلاث زوايا. ومن ذلك نجد أن $\frac{AC}{KD} = \frac{AB}{KB}$. وبما أن $AC = AB$ فإن $KD = KB$. إذن $\frac{1}{2} = \frac{LC}{KB} = \frac{LC}{KD}$. وبهذا يكون $2 = \frac{KB}{LC}$.

(٨) [Aust.MC 1984] في الشكل المرفق، Q منتصف $\overline{PS}$، $UR = \frac{2}{3}PU$، T نقطة تقاطع $\overline{QR}$ و $\overline{SU}$. النسبة $\frac{QT}{QR}$ تساوي:

(أ) $\frac{3}{7}$ (ب) $\frac{4}{7}$ (ج) $\frac{5}{11}$ (د) $\frac{4}{9}$



الحل: الإجابة هي (أ): أنشئ $\overline{SU} \parallel \overline{QX}$ حيث X نقطة على $\overline{PR}$. عندئذ، $\triangle PSU \sim \triangle PQX$ بتطابق ثلاث زوايا. من ذلك نجد أن $\frac{1}{2} = \frac{PQ}{PS} = \frac{PX}{PU}$.

وبما أن $PU = \frac{3}{2}UR$ فإن $PX = XU = \frac{3}{4}RU$. أيضاً $\triangle RQX \sim \triangle RTU$ بتطابق ثلاث زوايا. من ذلك نجد أن

$$\frac{RT}{RQ} = \frac{RU}{RX} = \frac{RU}{RU+UX} = \frac{RU}{RU+\frac{3}{4}RU} = \frac{4}{7}$$

إذن، $\frac{QT}{QR} = \frac{3}{7}$.

(٩) [Aust.MC 1983] أطوال أضلاع مثلث هي $7\frac{1}{2}$، 11، x حيث x عدد صحيح موجب. ما أصغر قيمة للعدد x ؟

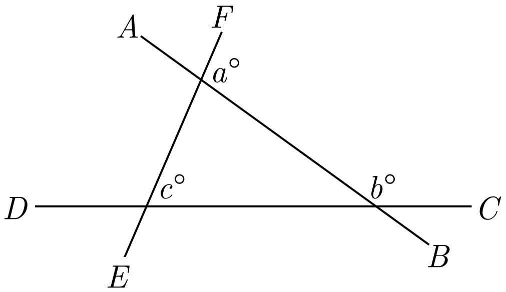
(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل: الإجابة هي (ج): من متباينة المثلث لدينا

$7\frac{1}{2} + x > 11$. أي أن $x > 3\frac{1}{2}$. وأصغر عدد صحيح يحقق ذلك هو $x = 4$.

(١٠) [Aust.MC 1979] في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{CD}$، $\overleftrightarrow{EF}$ ثلاثة مستقيمات. قيمة $a+b-c$ بالدرجات هي

(أ) 120 (ب) 150 (ج) 180 (د) 210



الحل: الإجابة هي (ج): قياس الزوايا الداخلية للمثلث هي $a - 180$، $b - 180$، c. إذن، $(180 - a) + (180 - b) + c = 180$. ومن ذلك يكون $a + b - c = 180^\circ$.

(١١) [Aust.MC 1984] مثلث مختلف الأضلاع، أطوال أضلاعه أعداد صحيحة ومحيطه 13. عدد المثلثات المختلفة التي تحقق ذلك هو

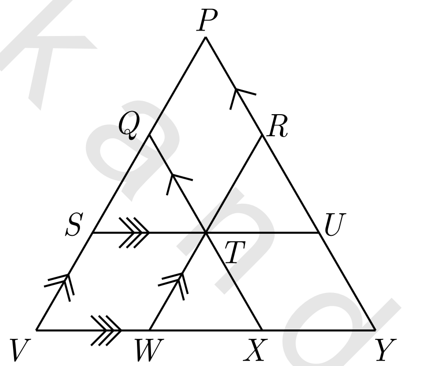
(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول الضلع الأكبر هو a. عندئذ، a أصغر من مجموع الضلعين الآخرين. وبهذا فإن a أصغر من نصف المحيط وهو $6\frac{1}{2}$. وبما أن a عدد صحيح فإن $a \leq 6$. إذا كان $a = 6$ فطولا الضلعين الآخرين هما (5 و 2) أو (4 و 3). وبهذا نحصل على مثلثين في هذه الحالة، هما $(6,5,2)$ و $(6,4,3)$. أما إذا كان $a \leq 5$ فإن مجموع طولي الضلعين الآخرين يجب أن يكون أكبر من أو يساوي 8. وبهذا فطول الضلع الذي يجيء قبل a مباشرة يجب أن يكون 5 أو أكبر ومن ثم فهو أكبر من أو يساوي a وهذا مستحيل. إذن، لدينا فقط مثلثان يحققان المطلوب.

(١٢) [Aust.MC 1984] $\triangle PVY$ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 3. Q، R، S، U، W، X تقسم الأضلاع إلى ثلاثة أقسام متساوية (كما هو مبين) طول كل منها 1. T نقطة تقاطع القطع المستقيمة $\overline{QX}$، $\overline{SU}$، $\overline{RW}$. $\overline{QX} \parallel \overline{PY}$، $\overline{RW} \parallel \overline{PV}$، $\overline{SU} \parallel \overline{VY}$.

كم عدد المثلثات المتساوية الأضلاع التي يمكن إنشاؤها بحيث تكون النقاط التي في الشكل رؤوساً لهذه المثلثات ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 15



الحل: الإجابة هي (د): نجد المثلثات من أطوال الأضلاع المختلفة وهي:

المثلثات التي طول ضلعها 3: $\triangle PVY$.

المثلثات التي طول ضلعها 2: $\triangle PSU$، $\triangle QVX$، $\triangle RWY$.

المثلثات التي طول ضلعها $\sqrt{3}$: $\triangle QUW$، $\triangle SRX$.

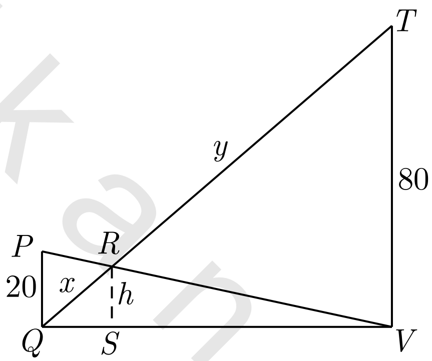
المثلثات التي طول ضلعها 1: $\triangle PQR$، $\triangle QST$، $\triangle QRT$، $\triangle RTU$، $\triangle SVW$، $\triangle SWT$، $\triangle TWX$، $\triangle TUX$، $\triangle UXY$.

إذن، عدد المثلثات هو $15 = 9 + 2 + 3 + 1$.

(١٣) [Aust.MC 1981] أقمنا عموداً من الإسمنت على سطح شارع مستقيم ارتفاعه 20 متراً. وبعد مسافة معينة أقمنا عموداً آخر ارتفاعه 80 متراً. وصلنا رأس العمود الأول مع قاعدة العمود الثاني ورأس العمود الثاني مع قاعدة العمود الأول. ما ارتفاع نقطة تقاطعهما عن الأرض بالأمتار ؟

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 18 (د) 50

الحل: الإجابة هي (ب): المطلوب إيجاد h في الشكل المرفق

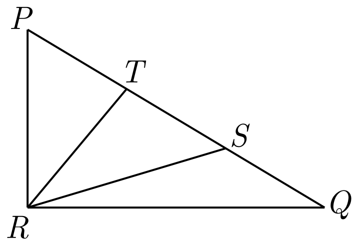


لاحظ أن $\triangle TRV \sim \triangle PRQ$ بتطابق زاويتين. من التشابه نجد أن $\frac{x}{y} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$. إذن، $\frac{QR}{QT} = \frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$. أيضاً، $\triangle QTV \sim \triangle QRS$ بتطابق ثلاث زوايا. من ذلك نجد أن $\frac{h}{80} = \frac{QR}{QT} = \frac{1}{5}$.

إذن، $h = \frac{80}{5} = 16$.

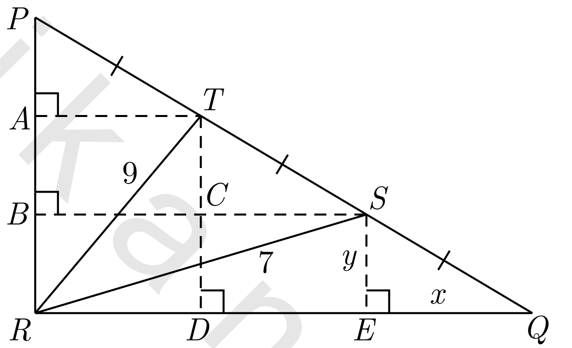
(١٤) [Aust.MC 1981] في الشكل المرفق، $\triangle PQR$ قائم الزاوية والنقطتان T و S تقسمان الوتر إلى ثلاث قطع متساوية. $RS = 7$ ، $RT = 9$. ما طول القطعة $\overline{ST}$ ؟

(أ) $\sqrt{15}$ (ب) $\sqrt{17}$ (ج) $\sqrt{26}$ (د) $\sqrt{32}$



الحل: الإجابة هي (ج):

أنشئ القطع $\overline{TA}$، $\overline{TD}$، $\overline{SB}$، $\overline{SE}$ كما هو مبين في الشكل



$\triangle PAT \equiv \triangle TCS \equiv \triangle SEQ$ (ASA). من هذا التطابق نجد أن $AT = CS = EQ = x$. وبهذا فإن E و D تقسمان $\overline{RQ}$ إلى ثلاث قطع متساوية. بالمثل B و A تقسمان $\overline{PR}$ إلى ثلاث قطع متساوية. الآن، في $\triangle SRE$ لدينا $(RE)^2 + (ES)^2 = 49$. أي أن

$$4x^2 + y^2 = 49 \qquad (١)$$

وبالمثل، في $\triangle ATR$ لدينا

$$x^2 + 4y^2 = 81 \qquad (٢)$$

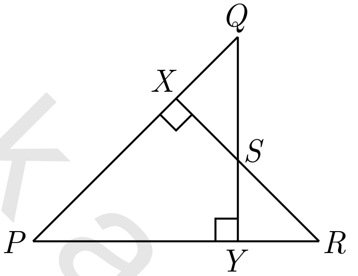
بجمع (١) و (٢) والاختصار نجد أن $x^2 + y^2 = 26$. ولكن

$(ST)^2 = (SQ)^2 = x^2 + y^2 = 26$.

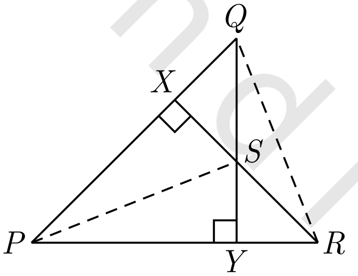
إذن، $ST = \sqrt{26}$.

(١٥) [Aust.MC 1982] في الشكل المرفق، قياس كل من الزوايا $\widehat{P}$ و $\widehat{Q}$ و $\widehat{R}$ يساوي $45°$ و S نقطة على $\overline{QY}$، امتدادا القطعتين المستقيمتين $\overline{RS}$ و $\overline{QS}$ عموديان على $\overline{PQ}$ و $\overline{PR}$ على التوالي. إذا كان $PS = 20$ فما طول $\overline{QR}$ ؟

(أ) $\frac{20}{\sqrt{2}}$ (ب) $10\sqrt{3}$ (ج) 20 (د) $20\sqrt{2}$



الحل: الإجابة هي (ج):



لتكن X و Y كما هو مبين على الشكل. في $\triangle QXS$، $\widehat{XQS} = 45°$ ومن ثم $\widehat{QSX} = 45°$. وبذلك يكون المثلث متساوي الساقين. إذن،

$$QX = SX \qquad (١)$$

وبالمثل، في $\triangle PXR$ لدينا

$$RX = PX \qquad (٢)$$

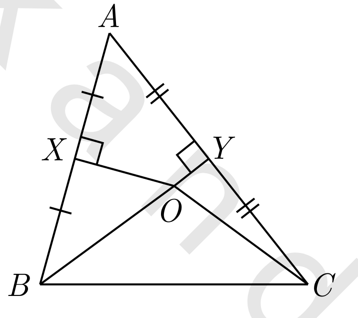
أيضاً،

$$\widehat{PXS} = 90^\circ = \widehat{RXQ} \quad (٣)$$

من (١)، (٢)، (٣) نجد أن $\triangle PXS \equiv \triangle RQX$ (SAS). إذن، $QR = PS = 20$.

(١٦) في الشكل المرفق، O نقطة تقاطع المنصفين العموديين للضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$. إذا كان $OB = 10$ فما طول $\overline{OC}$ ؟

(أ) 5 (ب) 7.5 (ج) 10 (د) 15



الحل: الإجابة هي (ج): ارسم AO. الآن

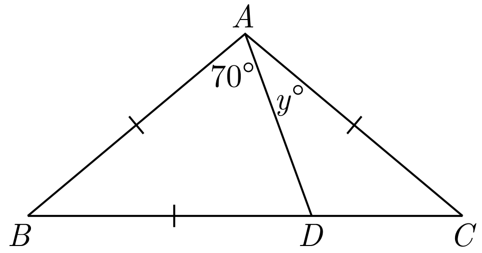
$$\triangle OAY \equiv \triangle OCY \quad (SAS)$$

$$\triangle OAX \equiv \triangle OBX \quad (SAS)$$

إذن، $AO = OC$، $OA = OB$. وبهذا يكون $OC = OA = OB = 10$.

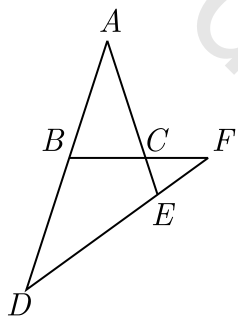
(١٧) في الشكل المرفق، $AB = AC = BD$. ما قياس الزاوية $\widehat{y}$ ؟

(أ) 20° (ب) 25° (ج) 30° (د) 35°



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $AB = BD$ فإن $\widehat{BDA} = 70^\circ$. إذن، $\widehat{B} = 180 - 2 \times 70 = 40^\circ$. وبما أن $AB = AC$ فإن $\widehat{C} = \widehat{B} = 40^\circ$. الآن، $70 + y + 40 + 40 = 180^\circ$. ومن ذلك يكون $y = 180 - 150 = 30^\circ$.

(١٨) مددنا أضلاع $\triangle ABC$ كما هو مبين في الشكل المرفق، إذا كان $AB = AC$ و $BD = BF$ و $AE = DE$ وكان $EF = 5$ فما طول $\overline{CF}$ ؟



(أ) 3 (ب) 3.5 (ج) 4 (د) 5

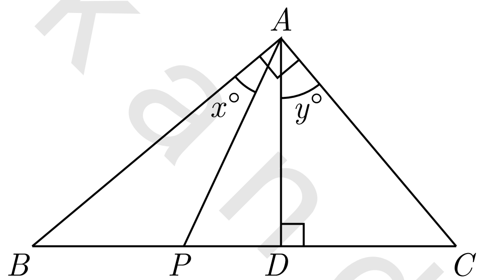
الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن $\widehat{A} = x^\circ$ وأن $\widehat{ABC} = y^\circ$. بما أن $AE = DE$ فإن $\widehat{D} = x$. وبما أن $BD = BF$ فإن $\widehat{F} = \widehat{D} = x$. الآن، $\widehat{DBF} = 180 - 2x$ (زوايا المثلث $\triangle BDF$). إذن، $y = 2x$. ويكون

$x + 2x + 2x = 180^\circ$. إذن، $x = 36^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{FCE} = \widehat{ACB} = 72^\circ$ بالتقابل بالرأس.

إذن، $\widehat{FEC} = 180 - (72 + 36) = 72^\circ$. أي أن $\triangle FCE$ متساوي الساقين ويكون $FC = EF = 5$.

(١٩) في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ قائم الزاوية عند $\widehat{A}$، $\widehat{D} = 90^\circ$، $AC = PC$، $\widehat{y} = 40^\circ$. ما قياس $\widehat{x}$ ؟

(أ) 20° (ب) 25° (ج) 30° (د) 40°



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $\widehat{PAD} = z^\circ$. عندئذ، $x + y + z = 90$.

وبما أن $AC = PC$ فإن $\widehat{APC} = \widehat{CAP} = z + y$. إذن،

$$\widehat{APC} + \widehat{PAD} = z + y + z = 2z + y = 90^\circ$$

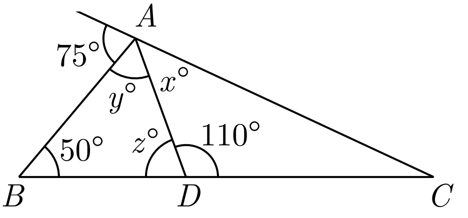
لأن $\triangle APD$ قائم الزاوية. من ذلك نجد أن

$$x + y + z = 2z + y = 90^\circ$$

أي أن $z = x$. وبما أن $y = 40^\circ$ فنجد أن $2x = 50^\circ$. وبهذا فإن $x = 25^\circ$.

(٢٠) [Aust.MC 1988] ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ في الشكل المرفق ؟

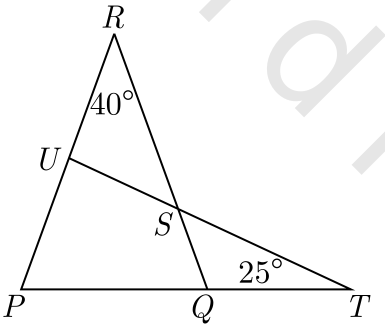
(أ) 30° (ب) 35° (ج) 40° (د) 45°



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $z + 110 = 180$ فإن $z = 70°$. وبما أن مجموع زوايا $\triangle ABD$ يساوي $180°$ فإن $y = 180 - (50 + 70) = 60°$. إذن، $x = 180 - (75 + y) = 180 - (75 + 60) = 45°$.

(٢١) [Aust.MC 1991] في الشكل المرفق، $PR = QR$ ، $\widehat{PRQ} = 40°$ ، $\widehat{PTU} = 25°$. ما قياس $\widehat{RST}$ ؟

(أ) $115°$ (ب) $125°$ (ج) $135°$ (د) $140°$



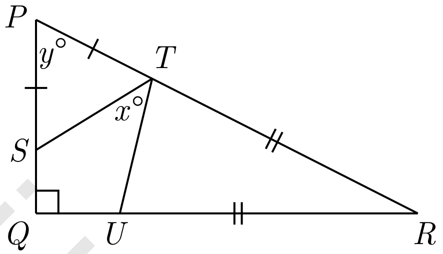
الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $PR = QR$ فإن $\widehat{RQP} = \widehat{RPQ} = 70°$.
وبهذا فإن $\widehat{RQT} = 180 - 70 = 110°$ ويكون

$$\widehat{QST} = 180 - (110 + 25) = 45°$$

إذن، $\widehat{RST} = 180° - 45° = 135°$.

(٢٢) [Aust.MC 1990] في الشكل المرفق، $\triangle PQR$ قائم الزاوية عند $\widehat{Q}$، $PT = PS$، $RT = RU$. ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ ؟

(أ) 30° (ب) 35° (ج) 40° (د) 45°



الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أولاً أن $\widehat{R} = 90 - y$ وأن

$$\widehat{PTS} = \widehat{PST} = \frac{1}{2}(180 - y) = 90 - \frac{1}{2}y$$
$$\widehat{UTR} = 90 - \frac{1}{2}(90 - y) = 45 + \frac{1}{2}y$$

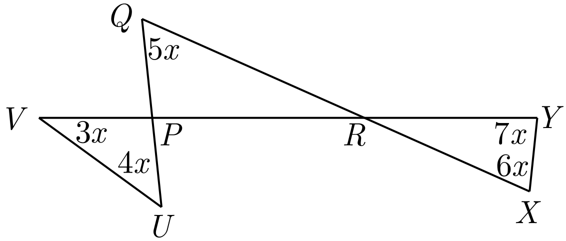
الآن، مجموع الزوايا عند النقطة T يساوي 180°. إذن،

$$x + 90 - \frac{1}{2}y + 45 + \frac{1}{2}y = 180$$

ومن ذلك نجد أن $x = 45^\circ$.

(٢٣) [Aust.MC 1988] في الشكل المرفق، قيمة x تساوي

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 15 (د) 18



الحل: الإجابة هي (ب): في المثلث $\triangle PQR$ لدينا

$$\widehat{QPR} = \widehat{UPV} = 180 - (3x + 4x)$$
$$\widehat{QRP} = \widehat{XRY} = 180 - (6x + 7x)$$

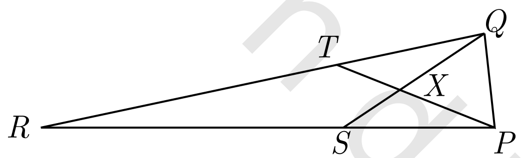
إذن،

$$180 - 7x + 180 - 13x + 5x = 180$$

أي أن $15x = 180$. وبهذا فإن $x = 12$.

(٢٤) [Aust.MC 1991] في الشكل المرفق، $PR = QR = 12$، $RS = RT = 8$. مساحة الشكل $RSXT$ تساوي 8 وحدات مربعة. مساحة $\triangle PRQ$ بالوحدات المربعة تساوي

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 17 (د) 18



الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن $\triangle QXT \equiv \triangle PXS$. ولذا فإن $[PXS] = [QXT]$. نفرض أن هذه المساحة هي x ولنفرض أن $y = [PXQ]$. عندئذ $\frac{4}{x} = \frac{[RXS]}{[PXS]}$. بما أن $RS = 8$ و $PS = 4$ فإن $\frac{8}{4} = \frac{[RXS]}{[PXS]}$. إذن، $\frac{8}{4} = \frac{4}{x}$. ومن ثم فإن $x = 2$. وبالمثل،

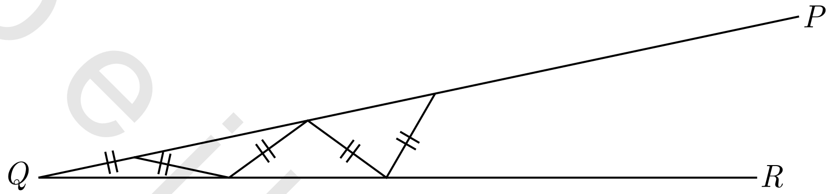
$$\frac{8}{4} = \frac{[PTR]}{[PTQ]} = \frac{8 + x}{y + x} = \frac{10}{y + 2}$$

وبهذا فإن $y = 3$. إذن

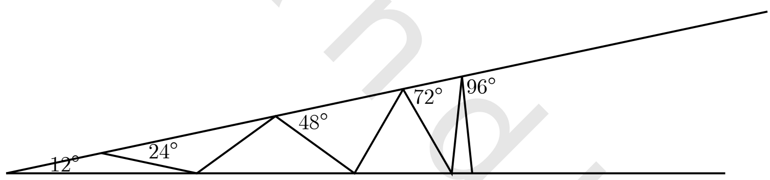
$$[PRQ] = 3 + 2 + 2 + 8 = 15\,.$$

(٢٥) [Aust.MC 1991] في الشكل المرفق، $\widehat{PQR} = 12°$. رسمنا متتالية من المثلثات المتساوية الساقين كما هو موضح في الشكل. ما أكبر عدد ممكن من مثل هذه المثلثات يمكن رسمها ؟

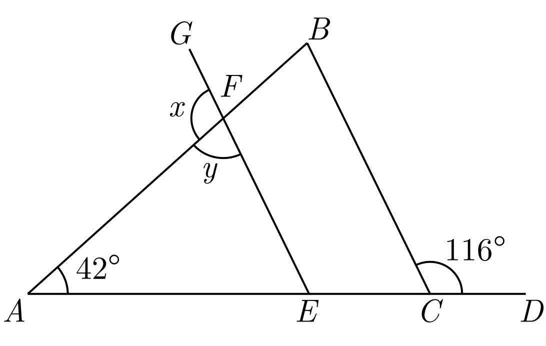
(أ) 4 (ب) 7 (ج) 9 (د) 12



الحل: الإجابة هي (ب): كما هو موضح في الرسم أدناه فإنه يمكن رسم 7 مثلثات فقط لأنه عند ظهور الزاوية ذات القياس $96°$ لا يمكن إنشاء مثلث متساوي الساقين لأن $96 + 96 > 180$.



(٢٦) في الشكل المرفق، $AECD$ ، AFB ، EFG مستقيمات. $EF \parallel CB$ ، $\widehat{BAC} = 42°$ ، $\widehat{BCD} = 116°$ ، ما قياس الزاوية x ؟

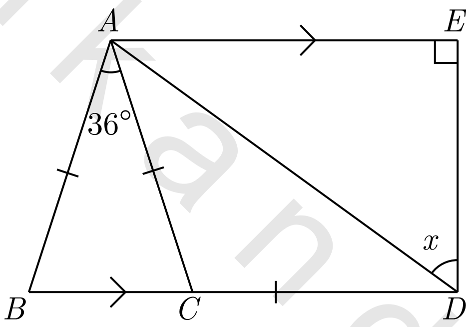


(أ) 74° (ب) 94° (ج) 96° (د) 106°

الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن $\widehat{B} + 42^\circ = 116^\circ$ (خارجة عن المثلث ABC). إذن، $\widehat{B} = 74^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{y} = \widehat{B} = 74^\circ$ (بالتناظر).

وبهذا يكون $\widehat{x} = 180^\circ - \widehat{y} = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$ (زاوية مستقيمة).

(٢٧) في الشكل المرفق، $AE \parallel BCD$ ، $\widehat{BAC} = 36^\circ$ ، $\widehat{AED} = 90^\circ$ ، $AB = AC = CD$. ما قيمة x ؟



(أ) 36° (ب) 54° (ج) 67° (د) 72°

الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{B} = \widehat{BCA} = 72^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث ABC يساوي 180° وأن $AB = AC$. ولذا فإن

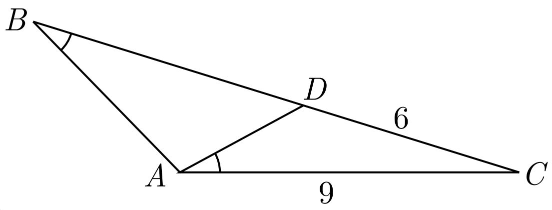
$$\widehat{ACD} = 36^\circ + 72^\circ = 108^\circ$$ (خارجة عن المثلث ABC).

$\widehat{CAD} = \widehat{CDA} = 36^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث ACD يساوي 180° وأن $AC = CD$. أيضاً،

$$\widehat{EAD} = \widehat{CDA} = 36^\circ$$ بالتبادل.

إذن، $x = 180^\circ - (36^\circ + 90^\circ) = 54^\circ$.

(٢٨) في الشكل المرفق، $\widehat{ABD} = \widehat{DAC}$ ، $AC = 9$ ، $CD = 6$ و $[BCA] = 18$. ما قيمة $[ABD]$ ؟

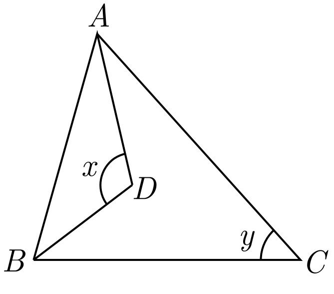


(أ) 6 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10

الحل: الإجابة هي (د): المثلثان $\triangle ACD$ و $\triangle BCA$ متشابهان لأن $\widehat{DBA} = \widehat{DAC}$ وَ $\widehat{C} = \widehat{C}$.

من ذلك نرى أن $\frac{CD}{CA} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. وبهذا فإن $\frac{[ACD]}{[BCA]} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. أي أن $[ACD] = \frac{4}{9}[BCA] = \frac{4}{9} \times 18 = 8$. إذن، $[ABD] = [BCA] - [ACD] = 18 - 8 = 10$.

(٢٩) في الشكل المرفق، AD و BD منصفان للزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ABC}$ على التوالي. ما قيمة y بدلالة x ؟



(أ) $y = x - 180^\circ$ (ب) $y = 2x - 180^\circ$

(ج) $y = 2x$ (د) $y = 2x - 90^\circ$

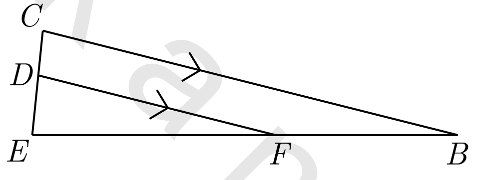
الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $\widehat{BAD}=z$ وأن $\widehat{ABD}=w$. عندئذ،

$$\widehat{BAD}=\widehat{CAD}=z$$
$$\widehat{ABD}=\widehat{CBD}=w$$

$x=180^\circ-(z+w)$ لأن مجموع زوايا المثلث ABD يساوي 180°. أيضاً، $y=180^\circ-2z-2w$ لأن مجموع زوايا المثلث ABC يساوي 180°. إذن،

$$y=180^\circ-2(z+w)=180^\circ-2(180^\circ-x)=2x-180^\circ$$

(٣٠) في الشكل المرفق، $BF:FE=3:4$ و $[DEF]=32$. ما قيمة $[BCE]$ ؟



(أ) 49 (ب) 64 (ج) 72 (د) 98

الحل: الإجابة هي (د): $\triangle BCE\sim\triangle FDE$ (AA). إذن،

$$\frac{BC}{FD}=\frac{CE}{DE}=\frac{BE}{FE}$$

ولكن

$$\frac{BE}{FE}=\frac{BF+FE}{FE}=\frac{BF}{FE}+1=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$$

من ذلك نرى أن

$$\frac{[BCE]}{[FDE]}=\left(\frac{7}{4}\right)^2=\frac{49}{16}$$

إذن، $[BCE]=\frac{49}{16}\times 32=98$.

(٣١) [AMC8 2010] مثلث أطوال أضلاعه بالبوصات أعداد صحيحة متتالية. إذا كان طول الضلع الأقصر يساوي 30% من المحيط فما طول الضلع الأكبر ؟

(أ) 8 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن طول الضلع الأكبر هو x. إذن، $x-1$ و $x-2$ هما طولا الضلعين الآخرين. محيط المثلث يساوي

$$P = x - 2 + x - 1 + x = 3x - 3$$

أيضاً،

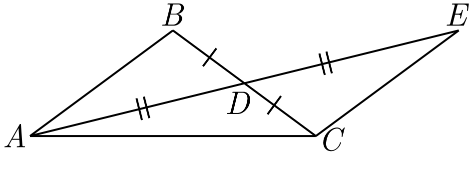
$$x - 2 = \frac{3}{10}P = \frac{3}{10}(3x-3) = \frac{9}{10}x - \frac{9}{10}$$

إذن،

$$x - \frac{9}{10}x = 2 - \frac{9}{10}$$
$$\frac{1}{10}x = \frac{11}{10}$$

وبهذا يكون $x = 11$.

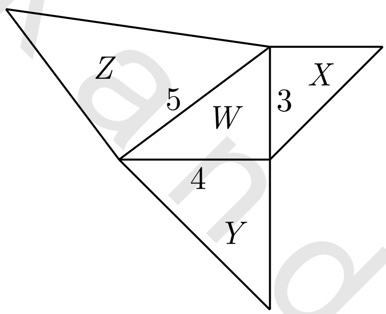
(٣٢) [AMC8 2006] في الشكل المرفق، المثلث $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = BC$ والنقطة D تنصف كلاً من BC و AE. إذا كان $CE = 11$ فما طول BD ؟



(أ) 4 (ب) 4.5 (ج) 5 (د) 5.5

الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أولاً أن $\triangle ECD \equiv \triangle ABD$ (SAS). ولذا فإن $AB = CE = 11$. إذن، $BC = 11$ لأن $\triangle ABC$ متساوي الساقين. وبهذا نجد أن $BD = \frac{11}{2} = 5.5$.

(٣٣) [AMC8 2002] رسمنا مثلثات قائمة متساوية الساقين على أضلاع مثلث قائم أطوال أضلاعه 3، 4، 5 كما هو مبين في الشكل حيث الحروف داخل المثلثات تمثل مساحة كل من هذه المثلثات. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية ؟



(أ) $X + Z = W + Y$ (ب) $W + X = Z$

(ج) $3X + 4Y = 5Z$ (د) $X + Y = Z$

الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$X = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

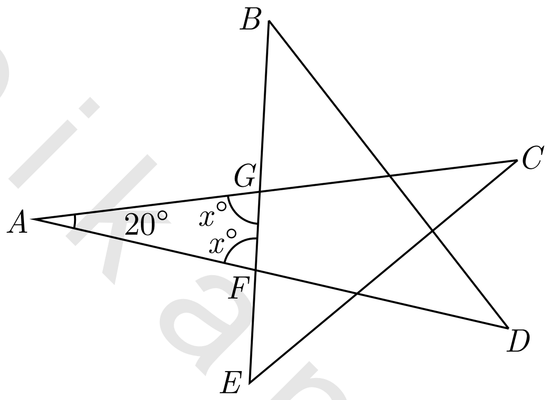
$$Y = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

$$Z = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

$$W = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

إذن، $Z = \frac{25}{2} = 8 + \frac{9}{2} = X + Y$.

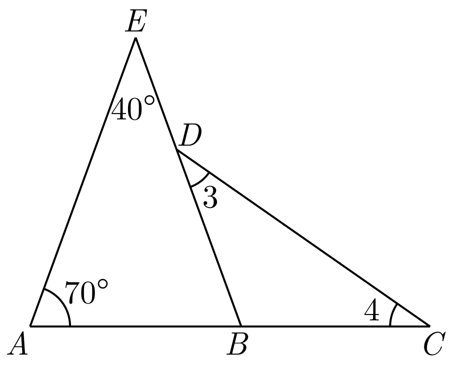
(٣٤) [AMC8 2000] في الشكل المرفق $\widehat{A} = 20^\circ$. ما قياس $\widehat{B} + \widehat{D}$ ؟



(أ) 48° (ب) 60° (ج) 70° (د) 80°

الحل: الإجابة هي (د): $2x = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$. إذن $x = 80^\circ$. الآن $x = \widehat{B} + \widehat{D}$ لأنها زاوية خارجة عن المثلث $\triangle FBD$. إذن، $\widehat{B} + \widehat{D} = 80^\circ$.

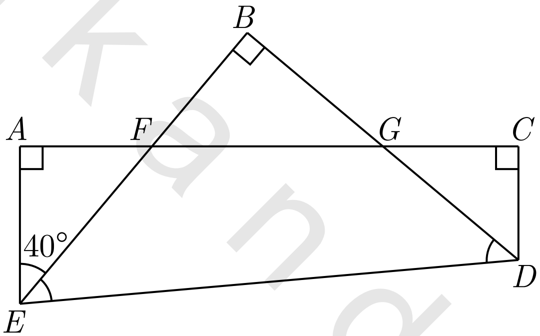
(٣٥) [AMC8 1997] في الشكل المرفق $\overleftrightarrow{ABC}$ مستقيم و $\widehat{4} = \widehat{3}$. ما قياس $\widehat{4}$ ؟



(أ) 20° (ب) 25° (ج) 35° (د) 40°

الحل: الإجابة هي (ج): لدينا $\widehat{EBA} = 180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث ABE يساوي 180°. إذن، $\widehat{EBC} = 110^\circ$ لأنها متممة للزاوية $\widehat{EBA}$. من ذلك يكون $\hat{3} = \hat{4} = \dfrac{180-110}{2} = 35^\circ$.

(٣٦) [AMC8 1995] في الشكل المرفق، كل من الزوايا $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ قائمة والمثلث EBD متساوي الساقين فيه $EB = DB$. ما قياس $\widehat{CDE}$ ؟



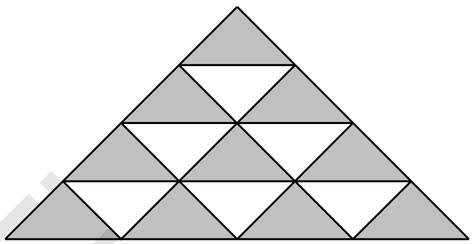
(أ) 80° (ب) 85° (ج) 90° (د) 95°

الحل: الإجابة هي (د):

$\widehat{AFE} = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$ لأن مجموع زوايا المثلث AFE يساوي 180°. وبهذا نرى أن $\widehat{BFG} = 50^\circ$ لأنها متقابلة بالرأس مع $\widehat{AFE}$. إذن، $\widehat{BGF} = 180^\circ - 50^\circ - 90^\circ = 40^\circ$. ومن ثم فإن $\widehat{DGC} = 40^\circ$ بالتقابل بالرأس. من ذلك يكون $\widehat{GDC} = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ$. ولكن $EB = BD$، ومن ذلك نرى أن $\widehat{BDE} = \widehat{BED} = 45^\circ$. إذن،

$$\widehat{CDE} = \widehat{CDG} + \widehat{GDE} = 50^\circ + 45^\circ = 95^\circ .$$

(٣٧) [AMC8 1992] قسمنا مثلثاً قائماً ومتساوي الساقين حيث طول كل من ساقيه 8 إلى 16 مثلثاً متطابقاً كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مساحة الجزء المظلل ؟



(أ) 10 (ب) 20 (ج) 30 (د) 40

الحل: الإجابة هي (ب): كل من المثلثات الصغيرة قائم ومتساوي الساقين وطول الساق يساوي 2. عندئذ، مساحة كل من هذه المثلثات تساوي

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

عدد المثلثات المظللة يساوي 10. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$10 \times 2 = 20$$

(٣٨) [AJHSME 1992] أطوال أضلاع مثلث هي $x, 10, 6.5$ حيث x عدد صحيح موجب. ما أصغر قيمة للعدد x ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

الحل: الإجابة هي (ب): من متباينة المثلث لدينا

$$x \leq 10 + 6.5 = 16.5$$
$$10 \leq 6.5 + x\,.$$

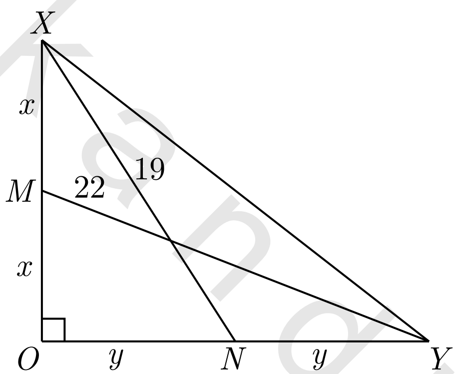
أي أن $3.5 \geq x$. إذن $3.5 \leq x \leq 16.5$. وبهذا تكون أصغر القيم الصحيحة

الموجبة للعدد x هي 4.

(٣٩) [AMCI2B 2002] ليكن $\triangle XOY$ قائم الزاوية في O، M و N نقطتي المنتصف لضلعي القائمة OX و OY على التوالي. إذا كان $XN = 19$ و $YM = 22$ فما طول XY ؟

(أ) 26 (ب) 28 (ج) 30 (د) 32

الحل: الإجابة هي (أ):



لنفرض أن $OM = MX = x$ وأن $ON = NY = y$. باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلثين $\triangle XON$ و $\triangle MOY$ نرى أن

$$4x^2 + y^2 = 19^2$$
$$x^2 + 4y^2 = 22^2$$

بجمع المعادلتين نجد أن

$$5x^2 + 5y^2 = 19^2 + 22^2 = 845$$

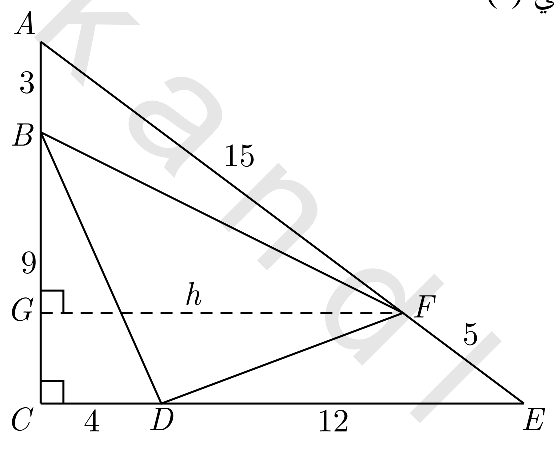
إذن، $x^2 + y^2 = \dfrac{845}{5} = 169$. الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle XOY$ نجد أن

$$XY = \sqrt{4x^2+4y^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{169} = 26 .$$

(٤٠) [AMC10B 2004] المثلث $\triangle ACE$ قائم الزاوية فيه $AC = 12$، $CE = 16$، $EA = 20$. رسمنا النقاط B، D، F على AC، CE، EA على التوالي بحيث يكون $AB = 3$، $CD = 4$، $EF = 5$. ما نسبة مساحة المثلث $\triangle DBF$ إلى مساحة المثلث $\triangle ACE$ ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{3}{8}$ (ج) $\frac{11}{25}$ (د) $\frac{7}{16}$

الحل: الإجابة هي (د):



لاحظ أولاً أن

$$\frac{AB}{AC} = \frac{CD}{CE} = \frac{EF}{EA} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DE}{CE} = \frac{FA}{EA} = \frac{3}{4}$$

ارسم الآن الارتفاع h من F إلى AC ليلاقي AC في النقطة G. عندئذ،

$$\triangle AFG \sim \triangle AEC \quad (AA).$$

إذن،

$$\frac{AF}{AE}=\frac{FG}{EC}=\frac{AG}{AC}=\frac{3}{4}$$

من ذلك نرى أن $h=FG=\frac{3}{4}EC$. الآن،

$$[ABF]=\frac{1}{2}\times AB\times h=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}AC\right)\left(\frac{3}{4}EC\right)$$
$$=\frac{3}{16}\left(\frac{1}{2}\times AC\times EC\right)=\frac{3}{16}[ACE]$$

وبالمثل، نرى أن $[BCD]=[DEF]=\frac{3}{16}[ACE]$. إذن،

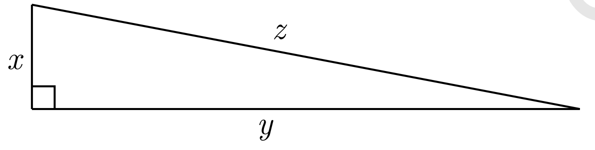
$$[DBF]=[ACE]-3\times\frac{3}{16}[ACE]=\frac{7}{16}[ACE]$$

وبهذا يكون $\frac{[DBF]}{[ACE]}=\frac{7}{16}$.

(٤١) [AMC10A 2008] مثلث قائم الزاوية محيطه 32 ومساحته 20. ما طول وتره ؟

(أ) $\frac{57}{4}$ (ب) $\frac{59}{4}$ (ج) $\frac{61}{4}$ (د) $\frac{63}{4}$

الحل: الإجابة هي (ب):



لدينا $x+y+z=32$ و $\frac{1}{2}xy=20$. من مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$z=\sqrt{x^2+y^2}$$

إذن،

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+y^2} &= 32-(x+y)\\ x^2+y^2 &= 32^2-64(x+y)+(x+y)^2\\ x^2+y^2+64(x+y) &= x^2+y^2+2xy+32^2\\ x+y &= \frac{2xy+32^2}{64}\end{aligned}$$

وبما أن $\frac{1}{2}xy = 20$ فإن $2xy = 80$. إذن،

$$x+y=\frac{80+32^2}{64}=\frac{69}{4}$$

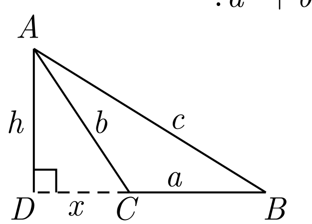
وبهذا يكون

$$z = 32-(x+y) = 32-\frac{69}{4}=\frac{59}{4}$$

(٤٢) ما عدد المثلثات المنفرجة الزاوية غير المتطابقة التي أطوال أضلاعها أعداد صحيحة ومحيطها يساوي 11 ؟

(أ) 2　　(ب) 3　　(ج) 4　　(د) 5

الحل: الإجابة هي (أ): سنبرهن أولاً أنه إذا كان $\triangle ABC$ منفرج الزاوية حيث $a \le b < c$ فإن $a^2+b^2<c^2$.



اسقط ارتفاعاً h من A ليلاقي امتداد BC في النقطة D. ولنفرض أن $DC = x$. الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس على المثلث $\triangle ADB$ والمثلث

$\triangle ADC$ نجد أن

$$\begin{aligned} c^2 &= (a+x)^2 + h^2 \\ &= a^2 + (h^2 + x^2) + 2ax \\ &= a^2 + b^2 + 2ax > a^2 + b^2 \end{aligned}$$

لأن $2ax > 0$. إذن، $a^2 + b^2 < c^2$. الآن، المثلثات المنفرجة الزاوية ذوات المحيط 11 التي أضلاعها أعداد صحيحة هي $(2,4,5)$، $(3,3,5)$، $(3,4,4)$. وبما أن $2^2 + 4^2 < 5^2$، $3^2 + 3^2 < 5^2$، $3^2 + 4^2 > 4^2$ فيوجد مثلثان فقط يحققان المطلوب.

(٤٣) [MAΘ 1992] يرتكز سلم طوله 25 بوصة على جدار رأسي حيث يبعد أسفل السلم 7 بوصات عن قاعدة الجدار. إذا انزلق أعلى السلم بمقدار 4 بوصات فما البعد الجديد لأسفل السلم عن قاعدة الجدار ؟

(أ) 8 (ب) 11 (ج) 15 (د) 24

الحل: الإجابة هي (ج): باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن بعد أعلى السلم عن أسفل القاعدة قبل الانزلاق هو $24 = \sqrt{25^2 - 7^2}$.

وبعد الانزلاق يكون بعد أعلى السلم عن القاعدة يساوي 20 بوصة. ولذا فبُعد أسفله عن قاعدة الجدار يساوي $15 = \sqrt{25^2 - 20^2}$.

(٤٤) [Mathcounts 1990] إذا كانت أطوال أضلاع المثلث $\triangle ABC$ هي 40، 60، 80 وكان أقصر ارتفاعاته يساوي حاصل ضرب عدد K مع أطول ارتفاعاته فما قيمة K ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) $\frac{3}{2}$ (د) 2

الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن الارتفاعات هي h_a, h_b, h_c حيث a, b, c مختلفة بحيث أن $h_a < h_b < h_c$. بما أن

$$2 \times [ABC] = ah_a = bh_b = ch_c$$

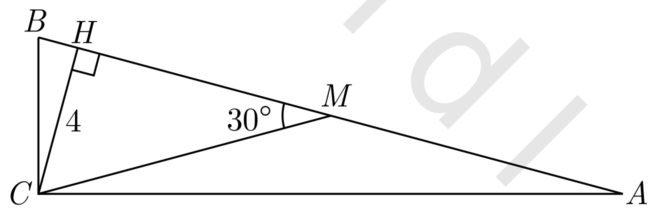
فنرى أن الارتفاع h_a مرسوم إلى الضلع الأطول وأن الارتفاع h_c مرسوم إلى الضلع الأقصر. إذن، $c = 40$ و $a = 80$. ومن ذلك نرى أن

$$80h_a = 40h_c$$

$$h_a = \frac{1}{2}h_c$$

وبهذا يكون $K = \frac{1}{2}$.

(٤٥) في الشكل المرفق، $\widehat{BCA} = 90°$، CM متوسط من C إلى AB، $\widehat{CMH} = 30°$، $\widehat{H} = 90°$، $CH = 4$. ما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟

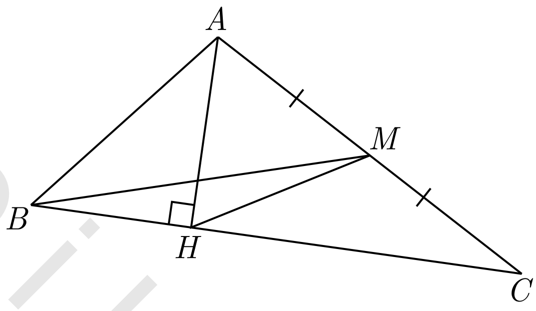


(أ) 24 (ب) 28 (ج) 32 (د) 36

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\triangle MCH$ هو مثلث $30° - 60° - 90°$ وأن $CH = 4$ فإن $CM = 2 \times 4 = 8$. وبما أن طول المتوسط إلى وتر المثلث القائم يساوي نصف طول الوتر فإن $AB = 2CM = 16$. إذن

$$[ABC] = \frac{1}{2} \times CH \times AB = \frac{1}{2} \times 4 \times 16 = 32$$

(٤٦) [AHSME 1989] في المثلث المرفق $\triangle ABC$ ، $\widehat{A} = 100°$ ، $\widehat{B} = 50°$ ، AH ارتفاع، BM متوسط. ما قياس الزاوية $\widehat{MHC}$ ؟



(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $30°$ (د) $50°$

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن HM متوسط إلى وتر المثلث القائم $\triangle AHC$ فإن $HM = \frac{1}{2}AC$. وبما أن BM متوسط في المثلث ABC فإن $AM = MC$. إذن، $HM = AM = MC$. وبهذا يكون المثلث $\triangle MHC$ متساوي الساقين فيه $\widehat{MHC} = \widehat{C}$. ولكن $\widehat{C} = 180° - (100° + 50°) = 30°$.

(٤٧) [AHSME 1986] طولا ارتفاعين من ارتفاعات مثلث مختلف الأضلاع ABC هما 4 و 12. إذا فرضنا أن طول الارتفاع الثالث هو أيضاً عدد صحيح فما أعلى قيمة يأخذها طول هذا الارتفاع ؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

الحل: الإجابة هي (ب): سنبرهن أولاً أن الارتفاعات h_c, h_b, h_a لأي مثلث تحقق المتباينة

$$\frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

بما أن $ah_a = bh_b = ch_c = 2[ABC]$ فإن $a = \dfrac{2[ABC]}{h_a}$ ، $b = \dfrac{2[ABC]}{h_b}$ ، $c = \dfrac{2[ABC]}{h_c}$. وبما أن $a < b + c$ فنرى أن $\dfrac{2[ABC]}{h_c} + \dfrac{2[ABC]}{h_b} < \dfrac{2[ABC]}{h_a}$. إذن، $\dfrac{1}{h_c} + \dfrac{1}{h_b} < \dfrac{1}{h_a}$. الآن، لنفرض الآن أن الارتفاع الثالث للمثلث هو x . إذن،

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x} + \frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{12} < \frac{1}{x} + \frac{1}{4}$$

من المتباينة الأولى نجد أن $x > 3$ ومن الثانية نرى أن $x < 6$ ومن الثالثة نجد أن $x > -6$ (أي $x > 0$). إذن، $3 < x < 6$. وبهذا فأكبر قيمة صحيحة يأخذها x هي 5 .

(٤٨) إذا كان محيط المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ يساوي 60 ومساحته تساوي 150 فما هو طول وتره ؟

(أ) 10 (ب) 20 (ج) 25 (د) 30

الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن طول الوتر هو c وأن طولي ضلعي القائمة هما a و b . إذن،

$$a + b + c = 60$$
$$ab = 2 \times 150 = 300$$

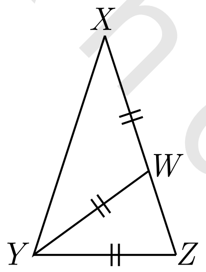
ومن ذلك نجد أن

$$a + b = 60 - c$$
$$(a+b)^2 = (60-c)^2$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = 60^2 + c^2 - 120c$$

ولكن $a^2 + b^2 = c^2$. إذن،

$$2ab = 60^2 - 120c$$
$$2 \times 300 = 3600 - 120c$$
$$120c = 3600 - 600 = 3000$$
$$c = \frac{3000}{120} = 25$$

(٤٩) [Cayley 2011] في الشكل المرفق، $\triangle XYZ$ مثلث متساوي الساقين فيه $XY = XZ$. W نقطة على XZ حيث $XW = WY = YZ$. ما قياس الزاوية $\widehat{XYW}$ ؟



(أ) $30°$ (ب) $36°$ (ج) $45°$ (د) $60°$

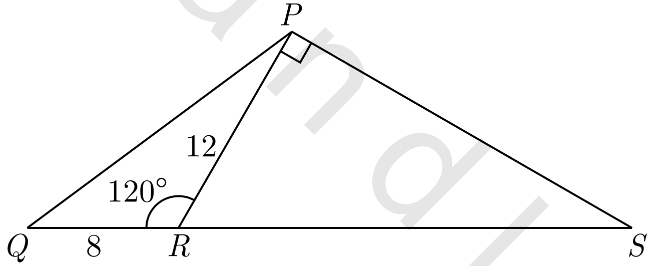
الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن x هو قياس الزاوية $\widehat{XYW}$. بما أن $\triangle XYW$ متساوي الساقين فإن $\widehat{YXW} = \widehat{XYW} = x$. إذن، $\widehat{XWY} = 180° - 2x$ لأن مجموع زوايا المثلث $\triangle XYW$ يساوي $180°$. وبما أن $\widehat{XWY} + \widehat{ZWY} = 180°$ (زاوية مستقيمة)، فإن $\widehat{ZWY} = 180° - (180° - 2x) = 2x$. وبما أن $\triangle YWZ$ متساوي الساقين إذن

$\widehat{YZW} = \widehat{ZWY} = 2x$. وبما أن $\triangle XYZ$ متساوي الساقين إذن $\widehat{XYZ} = \widehat{XZY} = \widehat{ZWY} = 2x$.

الآن، $\widehat{XYZ} + \widehat{XZY} + \widehat{YXZ} = 180^\circ$ (مجموع زوايا المثلث $\triangle XYZ$). إذن

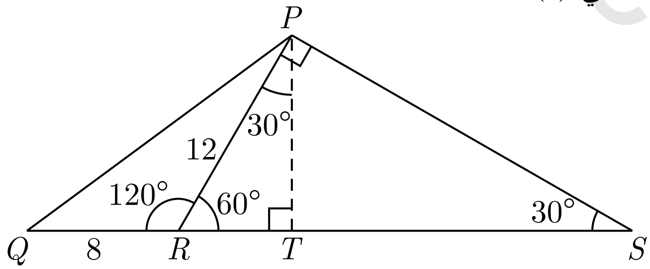
$$2x + 2x + x = 180^\circ$$
$$5x = 180^\circ$$
$$x = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$$

(٥٠) [Cayley 2008] في الشكل المرفق، النقطة R تقع على QS، $QR = 8$، $PR = 12$، $\widehat{PRQ} = 120^\circ$، $\widehat{RPS} = 90^\circ$. ما مساحة المثلث $\triangle QPS$ ؟



(أ) $36\sqrt{3}$ (ب) $60\sqrt{3}$ (ج) $72\sqrt{3}$ (د) $96\sqrt{3}$

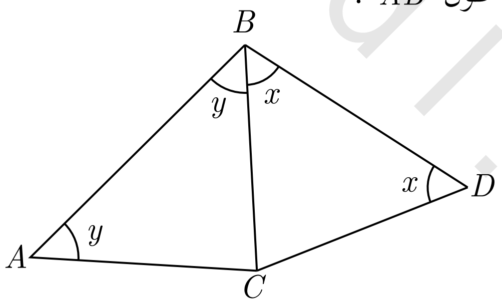
الحل: الإجابة هي (د):



بما أن $\widehat{PRT} = 60^\circ$ وأن $\widehat{PSR} = 30^\circ$ فإن المثلث $\triangle SRP$ هو مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. إذن، $RS = 2RP = 24$. الآن، ارسم الارتفاع PT ليلاقي QS في النقطة T. المثلث $\triangle PRT$ هو مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. إذن، $PT = \dfrac{\sqrt{3}}{2} PR = 6\sqrt{3}$. الآن، PT هو ارتفاع المثلث $\triangle QPS$ و QS قاعدته. إذن، مساحته هي

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times QS \times PT &= \frac{1}{2}(QR + RS) \times PT \\ &= \frac{1}{2}(8 + 24) \times 6\sqrt{3} \\ &= 96\sqrt{3}\end{aligned}$$

(٥١) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، كل من $\triangle ABC$ و $\triangle CBD$ متساوي الساقين. محيط $\triangle CBD$ يساوي 19 ومحيط $\triangle ABC$ يساوي 20، $BD = 7$. ما طول AB ؟



(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

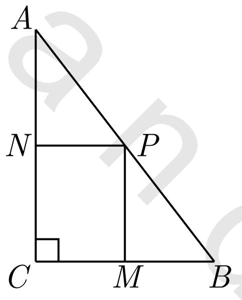
الحل: الإجابة هي (د): في $\triangle ABC$ لدينا $AC = BC$. وفي $\triangle BCD$ لدينا $CD = BC$. إذن، $AC = BC = CD$. الآن، محيط $\triangle CBD$ يساوي 19 و $BD = 7$. إذن،

$$7 + BC + CD = 19$$
$$2BC = 12$$
$$BC = 6$$

محيط $\triangle ABC$ يساوي 20 و $BC = 6$. إذن،

$$AB + 6 + 6 = 20$$
$$AB = 20 - 12$$
$$AB = 8$$

(٥٢) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ قائم الزاوية، $\widehat{C} = 90°$. M، N، P منصفات الأضلاع BC، AC، AB على التوالي. إذا كانت مساحة المثلث $\triangle APN$ تساوي 2 فما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟



(أ) 4 (ب) 6 (ج) 8 (د) 16

الحل: الإجابة هي (ج):

الحل الأول

$\frac{AP}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AN}{AC}$ والزاوية $\widehat{A}$ مشتركة في المثلثين $\triangle APN$ و $\triangle ABC$. إذن، $\triangle ABC \sim \triangle APN$. من ذلك نرى أن

$$\frac{[APN]}{[ABC]} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$[ABC] = 4[APN] = 4 \times 2 = 8$$

الحل الثاني

$\triangle APN \sim \triangle ABC$ (كما في الحل الأول). إذن، $\widehat{N} = \widehat{C} = 90^\circ$. بالمثل $\triangle PMB \sim \triangle ACB$. إذن، $\widehat{M} = \widehat{C} = 90^\circ$. إذن،

$$AN = NC = PM = \frac{1}{2}AC \text{ و } NP = CM = MB = \frac{1}{2}CB \,.$$

من ذلك يكون $\triangle ANP \equiv \triangle PMB$. إذن، $[PMB] = 2$. ومن الواضح أن $[NPMC] = 2[ANP] = 4$. إذن،

$$[ABC] = 2 + 2 + 4 = 8 \,.$$

الحل الثالث

صل بين النقطتين C و P. عندئذ، $\triangle CPN \equiv \triangle PCM$. بما أن $AN = NC$ وأن PN ارتفاع لكل من المثلثين $\triangle PNA$ و $\triangle PNC$ فإن $[PNA] = [PNC]$. وبالمثل، $[PMC] = [PMB]$. وبالتالي فمساحة المثلثات الأربعة الصغيرة متساوية وتساوي 2 إذن،

$$[ABC] = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$$

(٥٣) [MAΘ 2011] في المثلث $\triangle ABC$، $BC = 3$، $AC = 5$. ما عدد القيم الممكنة للطول AB لكي يكون $\triangle ABC$ قائم الزاوية ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

الحل: الإجابة هي (ج): هناك خياران لطول AB الأول منهما هو أن يكون AC هو الوتر (الأطول). في هذه الحالة $AB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. وأما الخيار الثاني فهو أن يكون AB هو الوتر. في هذه الحالة $AB = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$.

لاحظ استحالة أن يكون BC هو الوتر.

(٥٤) مثلث مختلف الأضلاع طول الضلعين الصغيرين هما 3 و 5. ما مجموع الخيارات الممكنة للأطوال الصحيحة للضلع الأكبر ؟

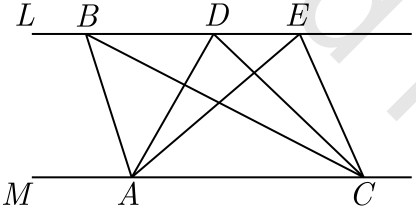
(أ) 6 (ب) 13 (ج) 18 (د) 22

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول الضلع الأكبر هو x. عندئذ،

$$x < 3 + 5$$
$$5 < x + 3$$
$$3 < x + 5$$

وبهذا يكون $2 < x < 8$. إذن، $x = 3, 4, 5, 6, 7$. وبما أن x هو الأطول فالخياران هما 6 و 7 ومجموعها يساوي 13.

(٥٥) المستقيمان L و M متوازيان. أي من المثلثات الثلاثة $\triangle ABC$، $\triangle ADC$، $\triangle AEC$ مساحته هي الأكبر ؟



(أ) $\triangle ABC$ (ب) $\triangle ADC$

(ج) $\triangle AEC$ (د) مساحات المثلثات الثلاثة متساوية

الحل: الإجابة هي (د): للمثلثات الثلاثة قاعدة مشتركة هي AC وارتفاع مشترك.

(٥٦) [AHSME 1950] في المثلث $\triangle ABC$، $AB = 12$، $AC = 7$، $BC = 10$. إذا ضاعفنا طول كل من AB و AC وبقي طول BC كما

هو فإن:

(أ) مساحة المثلث تتضاعف.

(ب) طول الارتفاع يتضاعف.

(ج) المساحة الجديدة تصبح أربعة أضعاف المساحة السابقة.

(د) المساحة الجديدة تساوي صفراً.

الحل: الإجابة هي (د): في المثلث الجديد $AB = AC + BC$. إذن، C تقع على AB. وبهذا يكون الارتفاع من C يساوي صفراً. وبالتالي فمساحة المثلث تساوي صفراً.

(٥٧) [AHSME 1951] إذا كانت عقارب الساعة تشير إلى أن الوقت هو $2:15$ فما قياس الزاوية بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق ؟

(أ) $7\frac{1}{2}°$ (ب) $15°$ (ج) $22\frac{1}{2}°$ (د) $30°$

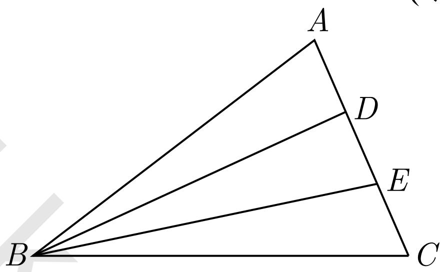
الحل: الإجابة هي (ج): في ساعة واحدة يدور عقرب الساعات بزاوية قياسها $30° = \frac{360°}{12}$. عند الساعة $2:15$ يكون عقرب الساعات قد تحرك بزاوية قيمتها $7\frac{1}{2}° = 30 \times \frac{1}{4}$ عن موقعه عند الساعة $2:00$. إذن، قياس الزاوية بين عقرب الساعات وعقرب الدقائق يساوي $22\frac{1}{2}° = 30° - 7\frac{1}{2}°$.

(٥٨) [AHSME 1952] في المثلث $\triangle ABC$، BD وَ BE يثلثان الزاوية B ويلاقيان AC في D و E على التوالي. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية:

(أ) $\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{AE}{DC}$ (ب) $\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{(AB)(BD)}{(BE)(BC)}$

(ج) $\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{AB}{BC}$ (د) $\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{(AE)(BD)}{(DC)(BE)}$

الحل: الإجابة هي (ب):



BD ينصف الزاوية $\widehat{ABE}$. إذن، $\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AD}{DE}$.

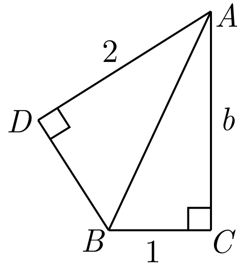
BE ينصف الزاوية $\widehat{DBC}$. إذن، $\dfrac{DB}{BC}=\dfrac{DE}{EC}$.

ومن ذلك يكون، $\dfrac{AD}{EC}=\dfrac{DE\left(AB/BE\right)}{DE(BC/BD)}=\dfrac{(AB)(BD)}{(BE)(BC)}$.

(٥٩) [AHSME 1952] رسمنا على الوتر AB للمثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$ مثلثاً آخر قائم الزاوية $\triangle ABD$ وتره AB. إذا كان $BC=1$، $AC=b$، $AD=2$ فما طول BD ؟

(أ) $\sqrt{b^2-3}$ (ب) $\sqrt{b^2-1}$ (ج) $\sqrt{b^2+1}$ (د) $\sqrt{b^2+3}$

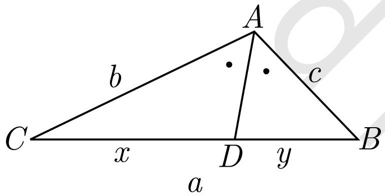
الحل: الإجابة هي (أ):



استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= b^2+1\\ (AB)^2 &= (BD)^2+4\\ (BD)^2+4 &= b^2+1\\ (BD)^2 &= b^2-3\\ (BD) &= \sqrt{b^2-3}\end{aligned}$$

(٦٠) [AHSME 1953] في المثلث $\triangle ABC$، AD منصف للزاوية A، $CD=x$، $DB=y$. ما النسبة الصحيحة من بين النسب التالية ؟



(أ) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{a}{b+c}$ (ب) $\dfrac{x}{b}=\dfrac{a}{a+c}$

(ج) $\dfrac{y}{c}=\dfrac{c}{b+c}$ (د) $\dfrac{y}{c}=\dfrac{a}{b+c}$

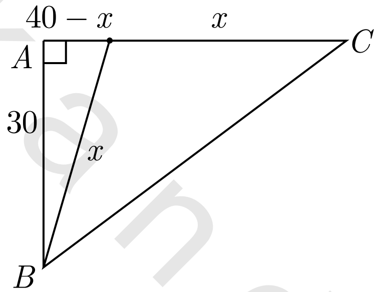
الحل: الإجابة هي (أ): باستخدام مبرهنة منصف الزاوية نجد أن $\dfrac{x}{b}=\dfrac{y}{c}$.

إذن، $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{x+y}{b+c}=\dfrac{x}{b}$.

(٦١) [AHSME 1953] يبعد مخيم صيفي عن شارع رئيسي مستقيم مسافة 30 كم. ويوجد على الشارع الرئيسي مخيم صيفي آخر يبعد مسافة 40 كم عن أقرب نقطة على الشارع من المخيم الصيفي الأول. يراد فتح مقهى على الشارع الرئيسي بحيث يكون على مسافة متساوية من المخيمين. ما المسافة بين المقهى وكل من المخيمين ؟

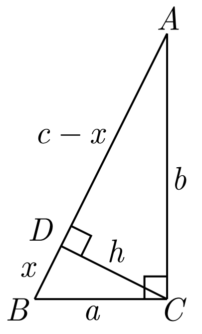
(أ) 40 كم (ب) 31.25 كم (ج) 25 كم (د) 22.5 كم

الحل: الإجابة هي (ب)



$$
\begin{aligned}
x^2 &= (30)^2 + (40-x)^2 \\
x^2 &= 900 + 1600 - 80x + x^2 \\
80x &= 2500 \\
x &= \frac{2500}{80} = 31.25
\end{aligned}
$$

(٦٢) [AHSME 1954] في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$، $a : b = 1 : 2$ ما هي النسبة $x : c - x$ ؟



(أ) $1:2$ (ب) $1:4$ (ج) $1:5$ (د) $1:\sqrt{5}$

الحل: الإجابة هي (ب): سنبرهن أولاً أن $xc=a^2$ و $(c-x)c=b^2$ لأي مثلث قائم الزاوية. لاحظ أن

$$\begin{aligned}a^2 &= x^2+h^2 = x^2+b^2-(c-x)^2\\ &= x^2+c^2-a^2-(c-x)^2\\ &= x^2+c^2-a^2-c^2+2xc-x^2\\ 2a^2 &= 2xc\\ a^2 &= xc\end{aligned}$$

أيضاً،

$$\begin{aligned}b^2 &= (c-x)^2+h^2 = (c-x)^2+a^2-x^2\\ &= c^2-2cx+x^2+a^2-x^2\\ &= c^2-2cx+a^2\\ &= c^2-2xc+c^2-b^2\end{aligned}$$

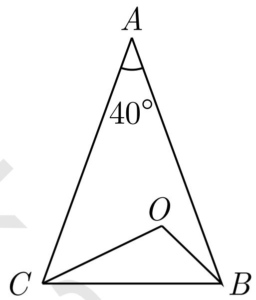
ومنه،

$$\begin{aligned}2b^2 &= 2c(c-x)\\ b^2 &= (c-x)c\end{aligned}$$

الآن، في المثلث المعطى $\frac{1}{2}=\frac{a}{b}$. إذن،

$$\frac{x}{c-x} = \frac{xc}{(c-x)c} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{4}.$$

(٦٣) [AHSME 1954] $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = AC$، $\widehat{OBC} = \widehat{OCA}$، $\widehat{A} = 40^\circ$. ما قياس $\widehat{BOC}$ ؟

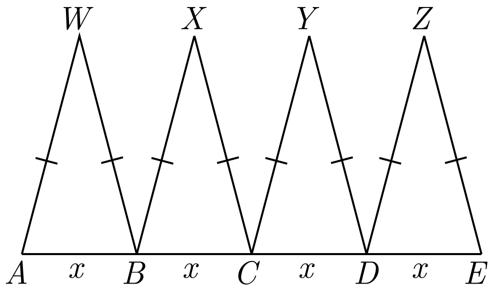


(أ) 100° (ب) 105° (ج) 110° (د) 120°

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\widehat{ACB} = \widehat{ABC} = 70^\circ$ وأن $\widehat{ACO} = \widehat{OBC}$ فإن $\widehat{OCB} + \widehat{OBC} = 70^\circ$. إذن،

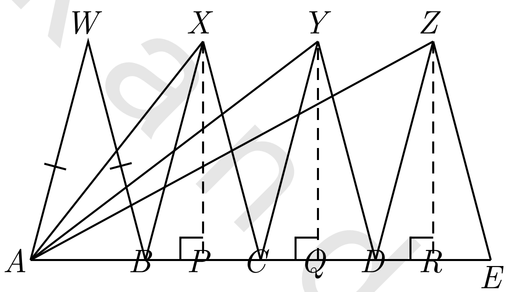
$$\widehat{BOC} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

(٦٤) [Cayley 2004] الشكل المرفق يبين أربعة مثلثات متساوية الساقين متطابقة AWB، BXC، CYD، DZE حيث A، B، C، D، E على استقامة واحدة. أنشأنا مثلثاً جديداً أطوال أضلاعه تساوي الأطوال AX، AY، AZ. إذا كان $AZ = AE$ فما أكبر قيمة صحيحة للعدد x التي تجعل مساحة المثلث المنشأ أصغر من 2004 ؟



(أ) 16 (ب) 18 (ج) 20 (د) 22

الحل: الإجابة هي (د):



سنجد أولاً أطوال أضلاع المثلث الجديد بدلالة x. ارسم الأعمدة XP، YQ، ZR. بما أن كلاً من المثلثات متساوي الساقين فنرى أن $BP = PC = CQ = QD = DR = RE = \frac{1}{2}x$. الآن، $\triangle ARZ$ قائم الزاوية في R وفيه $AZ = AE = 4x$. إذن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(RZ)^2 = (AZ)^2 - (AR)^2 = (4x)^2 - \left(\frac{7}{2}x\right)^2 = \frac{15}{4}x^2$$

ولذا فإن مربع طول ارتفاع كل من المثلثات الأربعة $\frac{15}{4}x^2$. الآن،

$$AY = \sqrt{(AQ)^2 + (QY)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}x^2 + \frac{15}{4}x^2} = \sqrt{10x^2} = \sqrt{10}x$$

$$AX = \sqrt{(AP)^2 + (PX)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x^2} = \sqrt{6x^2} = \sqrt{6}x$$

إذن، أطوال أضلاع المثلث الجديد هي $\sqrt{6}x$ ، $\sqrt{10}x$ ، $4x$. وبما أن

$$\left(\sqrt{6}x\right)^2 + \left(\sqrt{10}x\right)^2 = \left(4x\right)^2$$

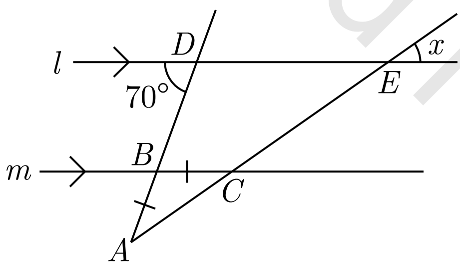
فيكون المثلث قائم الزاوية وطول وتره يساوي $4x$. إذن، مساحته تساوي

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}x\right)\left(\sqrt{10}x\right) = \frac{1}{2}\sqrt{60}x^2 = \sqrt{15}x^2$$

ولكي تكون المساحة أصغر من 2004 نرى أن $\sqrt{15}x^2 < 2004$. أي أن $x < 22.747$.

إذن، أكبر قيمة صحيحة للعدد x هي 22 .

(٦٥) ما قيمة الزاوية x في الشكل المرفق ؟



(أ) $25°$ (ب) $30°$ (ج) $35°$ (د) $40°$

الحل: الإجابة هي (ج): $\widehat{DBC} = 70°$ بالتبادل، $\widehat{CBA} = 110$ لأن $\widehat{DBA}$ مستقيمة. $\widehat{BCA} = \widehat{DEA} = \hat{x}$ بالتقابل بالرأس والتناظر. $\widehat{BAC} = x$ لأن $\triangle BCA$ متساوي الساقين. إذن،

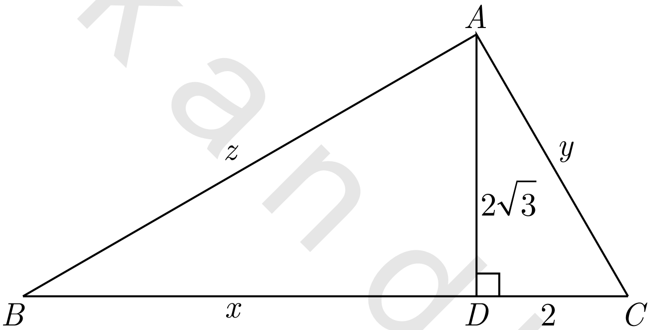
$$x + x + 110 = 180 \quad \text{(زوايا المثلث)}$$
$$2x = 70$$
$$x = 35^\circ$$

(٦٦) [MAΘ 2010] رسمنا ارتفاعاً طوله $2\sqrt{3}$ إلى وتر مثلث قائم الزاوية. إذا كان طول إحدى قطعتي الوتر يساوي 2 فما محيط المثلث ؟

(أ) $2\left(5 + 2\sqrt{3}\right)$ (ب) $2\left(6 + \sqrt{3}\right)$

(ج) $4\left(3 + \sqrt{3}\right)$ (د) $6\left(3 + \sqrt{3}\right)$

الحل: الإجابة هي (ج):



$$y = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{16} = 4$$
$$(x+2)^2 = y^2 + z^2 = 16 + z^2$$
$$x^2 + 4x + 4 = 16 + z^2$$

ولكن، $z^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + x^2 = 12 + x^2$. إذن،

$$x^2 + 4x + 4 = 16 + 12 + x^2$$
$$4x = 24$$
$$x = 6$$

وبهذا يكون، $z = \sqrt{12 + 36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. ولذا فإن محيط المثلث:

$$\begin{aligned} P = (x+2) + y + z &= 8 + 4 + 4\sqrt{3} \\ &= 12 + 4\sqrt{3} \\ &= 4(3+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

(٦٧) [AHSME 1956] إذا أبقينا قياس زاوية في مثلث كما هو ولكننا ضاعفنا الضلعين المحصورة بينهما فإن مساحة المثلث الجديد تساوي:

(أ) ضعف مساحة المثلث الأصلي

(ب) ثلاثة أمثال مساحة المثلث الأصلي

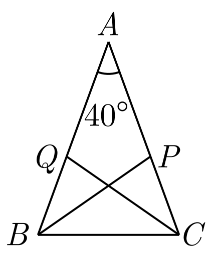
(ج) أربعة أمثال مساحة المثلث الأصلي

(د) ستة أمثال مساحة المثلث الأصلي

الحل: الإجابة هي (ج): المثلثان متشابهان. ولذا فإن

$$\frac{\text{مساحة المثلث الجديد}}{\text{مساحة المثلث الأصلي}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$

(٦٨) في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الساقين، $AB = AC$، $\widehat{A} = 40^\circ$. BP منصف للزاوية $\widehat{ABC}$، CQ منصف للزاوية $\widehat{ACB}$. ما قياس الزاوية $\widehat{APB}$ ؟



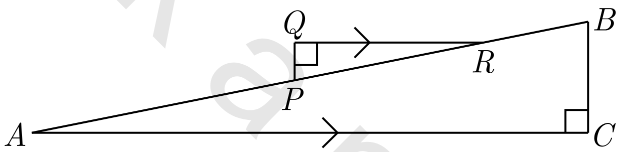
(أ) 100° (ب) 105° (ج) 110° (د) 115°

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $x = \widehat{ABP}$. عندئذ،

$$\widehat{ABP} = \widehat{QBP} = \widehat{QCB} = \widehat{QCP} = x$$

إذن، $40 + 2x + 2x = 180^\circ$ (مجموع زوايا $\triangle ABC$). من ذلك نرى أن $x = 35^\circ$. الآن، $40 + 35^\circ + \widehat{APB} = 180^\circ$ (مجموع زوايا $\triangle APB$). إذن، $\widehat{APB} = 105^\circ$.

(٦٩) في الشكل المرفق، $AB = 30$ ، $PQ = 2$ ، $QR = 10$. $AC \parallel QR$. ما طول BC لأقرب عدد صحيح ؟



(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $AC \parallel QR$ فإن $\widehat{QRP} = \widehat{BAC}$ بالتبادل. ولذا فإن $\triangle RPQ \sim \triangle ABC$ (AA). إذن،

$\frac{PQ}{RP} = \frac{BC}{AB}$. ولكن

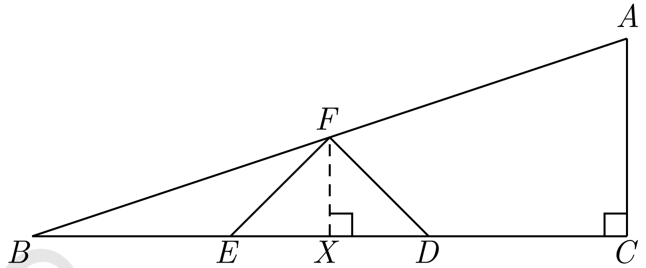
$$PR = \sqrt{\left(QP\right)^2 + \left(QR\right)^2} = \sqrt{4+100} = \sqrt{104}$$

إذن، $BC = \frac{PQ \times AB}{RP} = \frac{2 \times 30}{\sqrt{104}} = 5.88$.

وبهذا نجد أن $BC = 6$ (لأقرب عدد صحيح).

(٧٠) في الشكل المرفق، $\triangle ACB$ قائم الزاوية عند C ، $AF = FB$ ،

$BC = 3AC$ ، $CD = DE = EB$. ما قياس الزاوية $\widehat{FDC}$ ؟



(أ) 115° (ب) 125° (ج) 135° (د) 150°

الحل: الإجابة هي (ج): ارسم FX عمودياً على BC . الآن،

$\triangle FXB \sim \triangle ACB$ (AA).

بما أن $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{1}{2}$ فإن $\dfrac{1}{2} = \dfrac{FX}{AC} = \dfrac{BX}{BC}$. لنفرض أن $AC = a$. عندئذ،

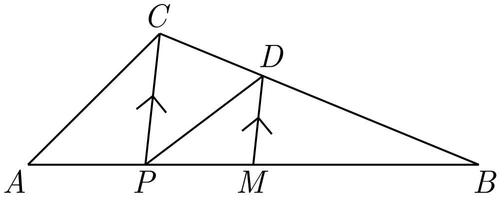
$FX = \dfrac{1}{2}a$ ، $BC = 3a$ ، $BX = \dfrac{3a}{2}$. من ذلك نرى أن:

$$EX = BX - BE = \frac{3}{2}a - a = \frac{a}{2} = FX$$

$$XD = BD - BX = \frac{a}{2} = FX$$

إذن، FX متوسط في $\triangle DEF$ وطوله يساوي $\dfrac{1}{2}ED$. إذن، $\widehat{EFD} = 90^\circ$. وبما أن $\triangle FXE \equiv \triangle FXD$ (SAS) فإن $FD = FE$. وبهذا يكون $\triangle DEF$ متساوي الساقين. إذن، $\widehat{FDE} = 45^\circ$ ويكون $\widehat{FDC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

(٧١) [AHSME 1966] في الشكل المرفق، $AM = MB$ ، $MD \parallel PC$. ما قيمة $\dfrac{[BPD]}{[ABC]}$ ؟



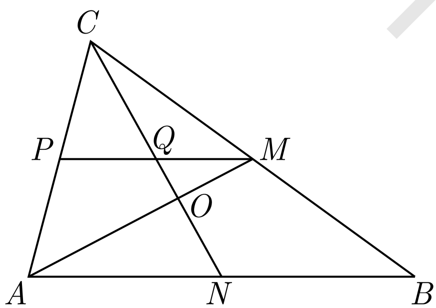
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{6}$

الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $PC \parallel MD$ فإن $[MDP] = [MDC]$ (بعد رسم المستقيم CM). الآن،

$$[BPD] = [BMD] + [MDP] = [BMD] + [MDC] = [BMC] = \frac{1}{2}[ABC]$$

لأن CM متوسط. إذن، $\frac{[BPD]}{[ABC]} = \frac{1}{2}$.

(٧٢) [AHSME 1966] في المثلث $\triangle ABC$ المرفق، AM و CN متوسطان يتقاطعان في النقطة O. $AP = PC$، Q نقطة تقاطع MP مع CN.
إذا كان $[OMQ] = n$ فإن $[ABC]$ تساوي:



(أ) $16n$ (ب) $18n$ (ج) $21n$ (د) $24n$

الحل: الإجابة هي (د): قاعدة المثلث $\triangle OMQ$ تساوي

$$OQ = CO - CQ = \frac{2}{3}CN - \frac{1}{2}CN = \frac{1}{6}CN$$

لنفرض أن h هو ارتفاع $\triangle OMQ$ من M إلى OQ. عندئذ، $2h$ هو ارتفاع $\triangle CNB$ من B. الآن:

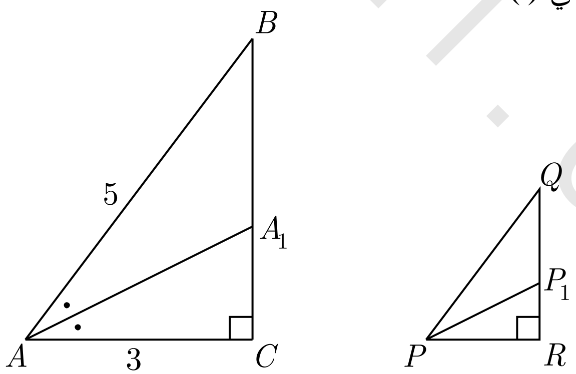
$$[OMQ] = \frac{1}{2}OQ \times h = \frac{1}{12}CN \times h = n$$

$$[ABC] = 2[CNB] = 2\left(\frac{1}{2}CN \times 2h\right) = 2CN \times h = 24n$$

(٧٣) [AHSME 1967] في المثلث القائم $\triangle ABC$، طول الوتر $AB = 5$ وطول $AC = 3$. AA_1 منصف الزاوية A. أنشئ مثلث قائم آخر PQR حيث طول وتره $PQ = A_1B$ وطول الضلع $PR = A_1C$. إذا كان PP_1 هو منصف الزاوية $\widehat{P}$ فما طول PP_1 ؟

(أ) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (ب) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (ج) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (د) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

الحل: الإجابة هي (أ):



استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $BC = \sqrt{25-9} = 4$. ومن مبرهنة منصف الزاوية نجد أن

$$\frac{5}{3}=\frac{A_1B}{A_1C}=\frac{A_1B}{4-A_1B}$$

إذن، $PQ=\frac{5}{2}=A_1B$ وَ $PR=\frac{3}{2}=A_1C$.

ومن مبرهنة فيثاغورس نجد أن $2=\sqrt{4}=\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{9}{4}}=RQ$.

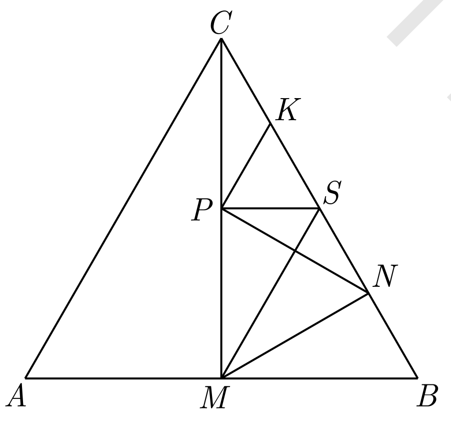
بما أن $\frac{2}{1}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}=\frac{AB}{PQ}$ فإن $\triangle PQR\sim\triangle ABC$.

وبهذا فإن $\frac{2}{1}=\frac{AA_1}{PP_1}$. ولكن

$$AA_1=\sqrt{\left(AC\right)^2+\left(CA_1\right)^2}=\sqrt{9+\frac{9}{4}}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

إذن، $\frac{3\sqrt{5}}{4}=AA_1\frac{1}{2}=PP_1$.

(٧٤) في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع، $AM=MB$ ، $CK=KS=SN=NB$ ، $CP=PM$. ما قياس الزاوية $\widehat{BNM}$ ؟



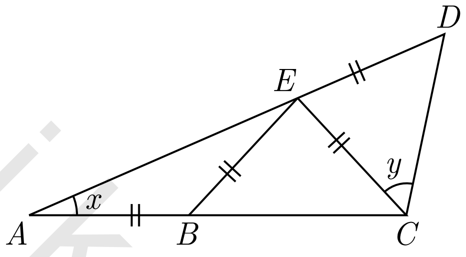
(أ) 70° (ب) 75° (ج) 80° (د) 90°

الحل: الإجابة هي (د): بما أن $\frac{BM}{BA} = \frac{1}{2} = \frac{BS}{BC}$ فإن $\triangle MSB \sim \triangle ACB$ (SAS). إذن، $\triangle MSB$ متساوي الأضلاع. وبما أن MN متوسط لمثلث متساوي الأضلاع فإنه ارتفاع أيضاً. إذن، $\widehat{BNM} = 90°$.

مسائل غير محلولة

(١) في الشكل المرفق، AED و ABC مستقيمان.

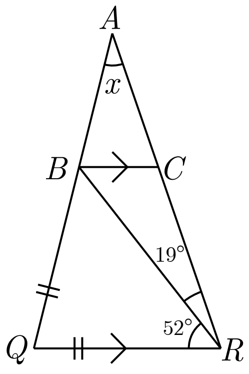
$AB = BE = EC = ED$ ، $\widehat{EAB} = x$ ، $\widehat{ECD} = y$ ما قيمة x بدلالة y ؟



(أ) $x = 60 - 2y$ (ب) $x = 60 - 3y$

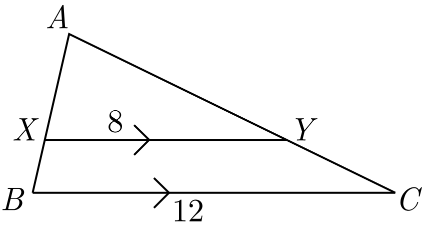
(ج) $x = 60 - \frac{2}{3}y$ (د) $x = 60 - \frac{3}{2}y$

(٢) في الشكل المرفق، $BC \parallel QR$ ، $BQ = QR$ ، $\widehat{BRC} = 19^\circ$ ، $\widehat{BRQ} = 52^\circ$. ما قيمة x ؟



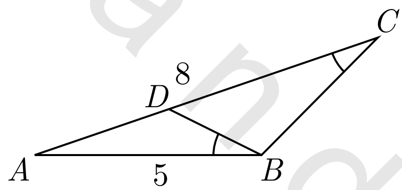
(أ) 20 (ب) 23 (ج) 33 (د) 43

(٣) في الشكل المرفق، $BC \parallel XY$ ، $XY = 8$ ، $BC = 12$. ما النسبة بين مساحة $\triangle AXY$ إلى مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟



(أ) $4 : 9$ (ب) $4 : 7$ (ج) $3 : 5$ (د) $3 : 7$

(٤) في الشكل المرفق، $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ ، $AB = 5$ ، $AC = 8$. ما قيمة $\frac{AD}{DC}$ ؟



(أ) $\frac{20}{39}$ (ب) $\frac{22}{39}$ (ج) $\frac{23}{39}$ (د) $\frac{25}{39}$

(٥) [AMC8 2009] زاويتان في مثلث متساوي الساقين هما x و $70°$. ما مجموع القيم الممكنة للمقدار x ؟

(أ) 95 (ب) 125 (ج) 140 (د) 165

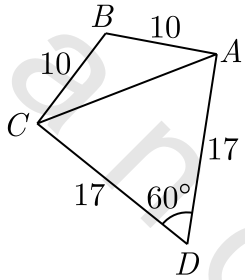
(٦) [AMC8 2007] طول قاعدة مثلث متساوي الساقين يساوي 24 ومساحته تساوي 60. ما طول أحد الساقين المتساويين ؟

(أ) 5 (ب) 8 (ج) 13 (د) 18

(٧) [AMC8 2005] غادر أحمد بيته متجهاً إلى الجنوب وقطع مسافة $\frac{1}{2}$ كلم ثم توجه شرقاً وقطع مسافة $\frac{3}{4}$ كلم وبعد ذلك اتجه إلى الجنوب مرة أخرى وقطع مسافة $\frac{1}{2}$ كلم ليصل إلى المدرسة. ما المسافة (المستقيمة) بين بيت أحمد والمدرسة ؟

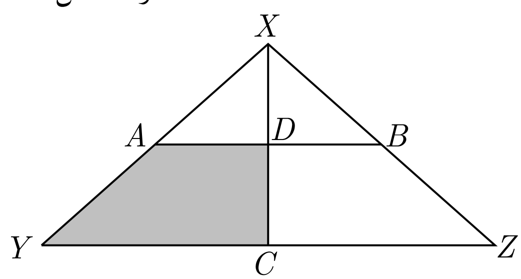
(أ) 1 كلم (ب) $\frac{5}{4}$ كلم (ج) $\frac{7}{4}$ كلم (د) 2 كلم

(٨) [AMC8 2005] ما طول AC في الشكل المرفق ؟



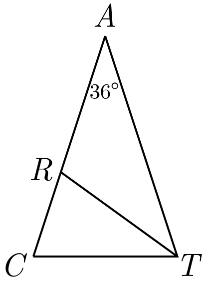
(أ) 10 (ب) 15 (ج) 17 (د) 19

(٩) [AMC8 2002] في الشكل المرفق، مساحة المثلث $\triangle XYZ$ تساوي 8 والنقطتان A و B هما منتصفا XY و XZ على التوالي، $XY = XZ$. XC ارتفاع ينصف القاعدة YZ. ما مساحة الجزء المظلل ؟



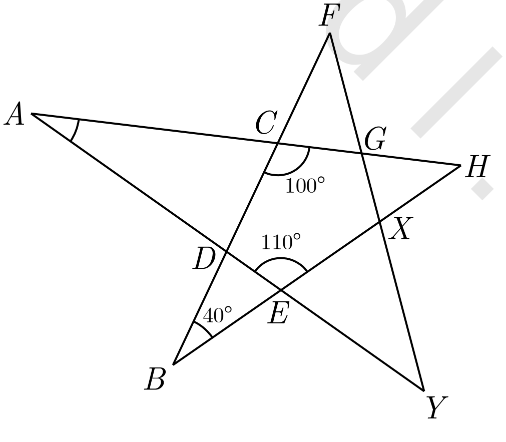
(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) 2 (ج) $\frac{5}{2}$ (د) 3

(١٠) [AMC8 2000] في المثلث $\triangle CAT$، $\widehat{CAT} = 36^\circ$، $\widehat{ACT} = \widehat{ATC}$. TR منصف للزاوية $\widehat{ATC}$. ما قياس $\widehat{CRT}$ ؟



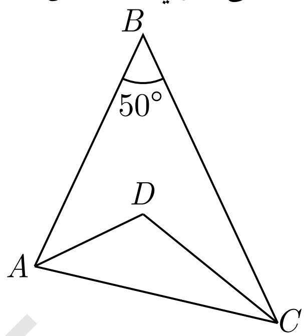
(أ) 36° (ب) 54° (ج) 72° (د) 108°

(١١) [AMC8 1999] في الشكل المرفق، أعطيت قياسات الزوايا الموضحة. ما قياس الزاوية $\widehat{A}$ ؟



(أ) 20 (ب) 30 (ج) 35 (د) 40

(١٢) [AMC8 1995] في الشكل المرفق، $\widehat{ABC} = 50°$، AD و CD منصفان للزاويتين $\widehat{BAC}$ و $\widehat{ACB}$ على التوالي. ما قياس الزاوية $\widehat{ADC}$ ؟



(أ) $90°$ (ب) $100°$ (ج) $115°$ (د) $125°$

(١٣) [AMC12A 2004] المثلثان $\triangle ABC$ و $\triangle ABE$ يشتركان في الضلع AB، فيهما $\widehat{ABC} = \widehat{EAB} = 90°$، $AB = 4$، $BC = 6$، $AE = 8$.
D نقطة تقاطع AC مع BE. ما الفرق بين مساحتي المثلثين $\triangle ADE$ و $\triangle BDC$ ؟

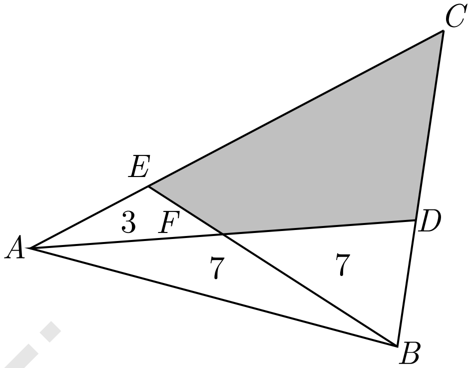
(أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 8

(١٤) [AMC10B 2005] المثلث $\triangle ABC$ فيه $AC = BC = 7$ و $AB = 2$.
لنفرض أن D نقطة على المستقيم AB بحيث تقع B بين A و D ولنفرض أن $CD = 8$. ما طول BD ؟

(أ) 3 (ب) $2\sqrt{3}$ (ج) 4 (د) $4\sqrt{2}$

(١٥) [AMC10B 2006] قسمنا مثلثاً إلى ثلاثة مثلثات وشكل رباعي كما هو مبين في الشكل أدناه. إذا كانت مساحات المثلثات هي 3، 7، 7 كما هو

مبين فما مساحة المنطقة المظللة ؟

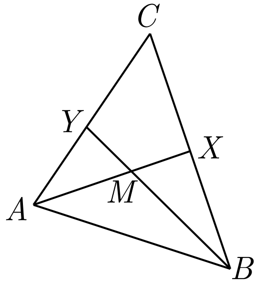


أ) 15 ب) 17 ج) $\frac{35}{2}$ د) 18

(١٦) ما عدد المثلثات القائمة غير المتطابقة التي أطوال أضلاعها أعداداً صحيحة موجبة متتالية ؟

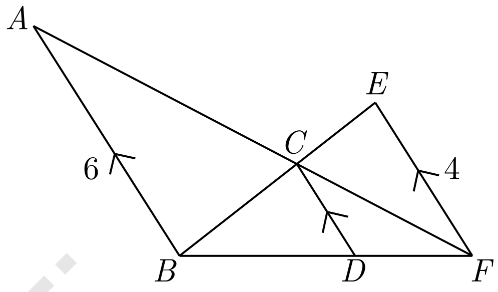
أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

(١٧) في المثلث $\triangle ABC$ المبين أدناه، AX و BY منصفان للزاويتين $\widehat{A}$ و $\widehat{B}$ على التوالي ويتقاطعان في النقطة M. إذا كان $\frac{AM}{MX} = \frac{5}{3}$ وكان $CX = 6$ فما طول AC ؟



أ) 6 ب) 8 ج) 10 د) 12

(١٨) في الشكل المرفق، $AB \parallel CD$ و $EF \parallel CD$، $AB = 6$، $EF = 4$. ما طول CD ؟

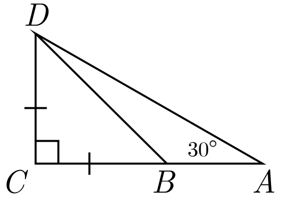


(أ) $\frac{12}{5}$ (ب) $\frac{11}{5}$ (ج) 2 (د) $\frac{9}{5}$

(١٩) [MAΘ 1990] في المثلث القائم الزاوية $\triangle ABC$، $AB = 66$، $BC = 77$. إذا كان AC أكبر من 50 وكان يساوي $x\sqrt{y}$ فما قيمة $x + y$ ؟

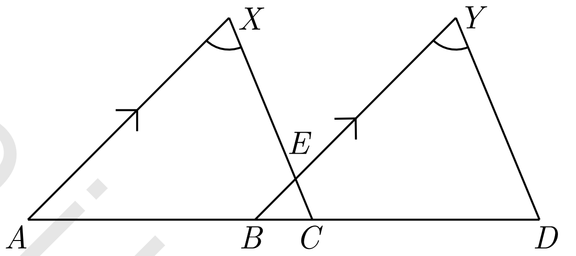
(أ) 85 (ب) 90 (ج) 96 (د) 102

(٢٠) [MAΘ 1992] في الشكل المرفق، $\widehat{ACD} = 90°$، A، B، C على استقامة واحدة، $\widehat{A} = 30°$، $\widehat{DBC} = 45°$. إذا كان $AB = 3 - \sqrt{3}$ فما مساحة المثلث $\triangle BCD$ ؟



(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) $\frac{7}{2}$

(٢١) في الشكل المرفق، A، B، C، D على استقامة واحدة، $AX \parallel BY$، $AB = CD$، $\widehat{X} = \widehat{Y}$. ما نسبة مساحة الشكل $AXEB$ إلى مساحة الشكل $DYEC$ ؟



(أ) 1 إلى 1 (ب) 2 إلى 3 (ج) 1 إلى 2 (د) 3 إلى 2

(٢٢) [Mandelbrot#2] المثلث $\triangle ABC$ قائم الزاوية، $\widehat{C} = 90°$، AD و BE متوسطان، $AB = 4$. ما قيمة $(AD)^2 + (BE)^2$ ؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 30 (د) 35

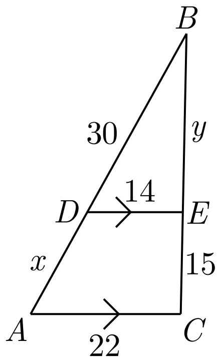
(٢٣) [M and IQ 1992] المثلث $\triangle ACB$ متساوي الأضلاع، CM متوسط. عينا نقطة N على BC بحيث يكون MN عمودياً على BC. ما هي النسبة $BN : BC$ ؟

(أ) $1 : 2$ (ب) $1 : 3$ (ج) $1 : 4$ (د) $2 : 3$

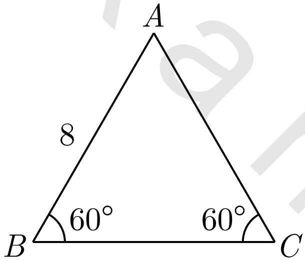
(٢٤) في المثلث $\triangle ABC$ المبين أدناه، $AC \parallel DE$. ما قيمتا x و y ؟

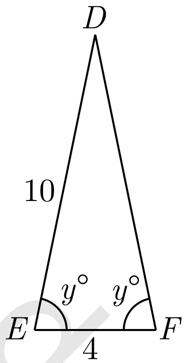
(أ) $x = 17.14$، $y = 26.25$ (ب) $x = 18$، $y = 27$

(ج) $x = 18.14$، $y = 27.25$ (د) $x = 19$، $y = 28$



(٢٥) كم يزيد محيط المثلث $\triangle ABC$ عن محيط المثلث $\triangle DEF$ ؟





(أ) 0 (ب) 2 (ج) 4 (د) 6

(٢٦) إذا كان طول ارتفاع مثلث يقل عن طول قاعدته بمقدار 5 بوصات وكانت مساحته تساوي 52 بوصة مربعة فما طول كل من ارتفاعه وقاعدته ؟

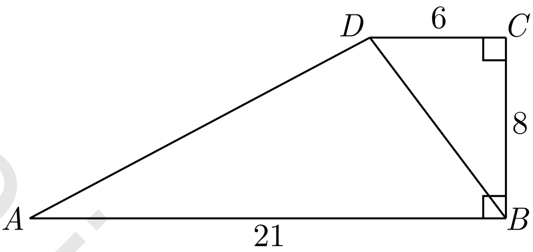
(أ) $h = 8$ ، $b = 13$ (ب) $h = 9$ ، $b = 14$

(ج) $h = 10$ ، $b = 15$ (د) $h = 11$ ، $b = 16$

(٢٧) إذا كان مجموع طولي ضلعي القائمة في مثلث قائم الزاوية يساوي 49 وكان طول الوتر 41 فما طولا ضلعي القائمة ؟

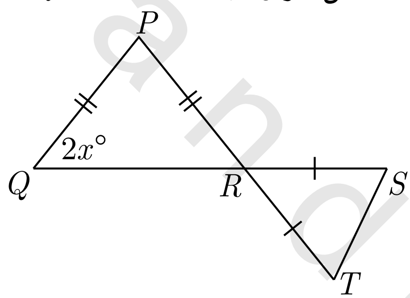
(أ) 35، 14 (ب) 36، 13 (ج) 38، 11 (د) 40، 9

(٢٨) في الشكل المرفق، ما قيمة $AD + BD$ ؟



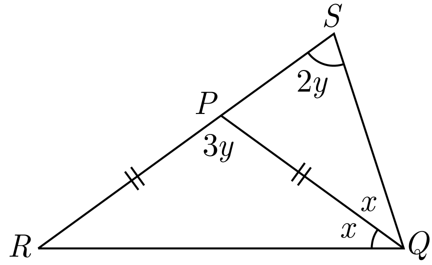
(أ) 22 (ب) 25 (ج) 27 (د) 29

(٢٩) [Cayley 2010] في الشكل المرفق، إذا كان $\widehat{Q} = 2x^\circ$ فما قياس الزاوية $\widehat{S}$ ؟



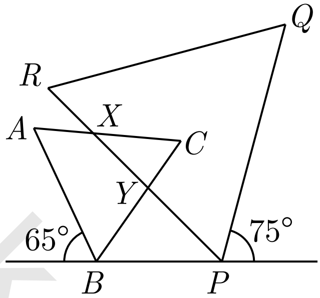
(أ) $45 - x$ (ب) $45 + 2x$ (ج) $90 - x$ (د) $90 + x$

(٣٠) [Cayley 2008] في الشكل المرفق، PQ منصف للزاوية Q ويقطع RS في النقطة P . $PR = PQ$. ما قياس الزاوية $\widehat{RPQ}$ ؟



(أ) 90° (ب) 108° (ج) 112° (د) 120°

(٣١) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، كل من $\triangle ABC$ و $\triangle PQR$ متساوي الأضلاع. ما قياس الزاوية $\widehat{CXY}$ ؟

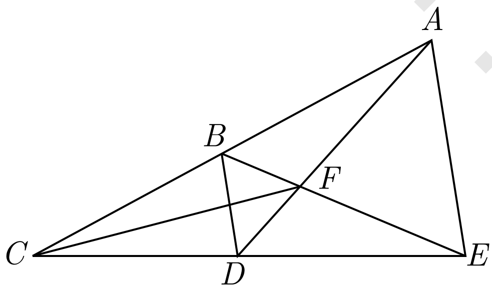


(أ) 30° (ب) 35° (ج) 40° (د) 45°

(٣٢) في الشكل المرفق، ACE مثلث، $BD \parallel AE$ ، F نقطة تقاطع BE و AD . كم عدد العبارات الصائبة من بين العبارات التالية ؟

(١) $\triangle BFA \sim \triangle DFE$ (٢) $\triangle AFE \sim \triangle DFB$

(٣) $\triangle ACE \sim \triangle BCD$ (٤) $\triangle BFC \sim \triangle DCF$



(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٣٣) [MAΘ 2011] قياس الزاوية الصغرى غير القائمة (بالدرجات) في مثلث قائم

الزاوية يساوي مجموع مربعي جذري المعادلة $x^2 - 7x + 5 = 0$. ما قياس الزاوية غير القائمة الكبرى ؟

(أ) $39°$ (ب) $41°$ (ج) $45°$ (د) $51°$

(٣٤) [MAΘ 2011] في $\triangle ABC$، $AC = 4$، $BC = 4\sqrt{2}$، $AB = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$. إذا كانت زوايا المثلث مقاسة بالدرجات فما قيمة $\left(\widehat{A} + \widehat{C}\right) \times \widehat{B}$ ؟

(أ) 4500 (ب) 6075 (ج) 7200 (د) 8000

(٣٥) [AHSME 1951] واحدة فقط من الصفات التالية للمثلث غير كافية لتحديد نوعه:

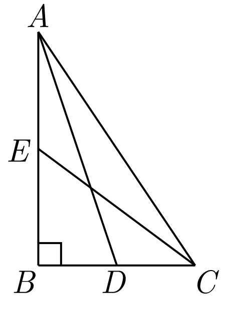
(أ) النسبة بين ضلعين من أضلاعه والزاوية المحصورة بينهما.

(ب) النسبة بين ارتفاعاته.

(ج) النسبة بين متوسطاته.

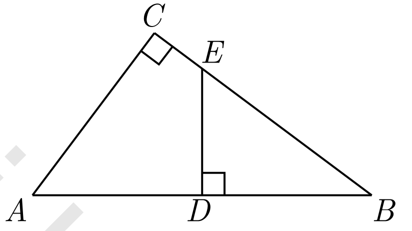
(د) النسبة بين ارتفاعه والقاعدة المقابلة لهذا الارتفاع.

(٣٦) [AHSME 1951] $\triangle ABC$ قائم الزاوية في B، AD و CE متوسطان طولاهما $\sqrt{40}$ و 5 على التوالي. ما طول وتر $\triangle ABC$ ؟



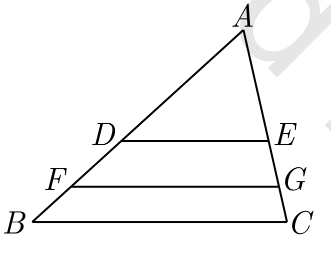
(أ) 10 (ب) $2\sqrt{40}$ (ج) $\sqrt{13}$ (د) $2\sqrt{13}$

(٣٧) [AHSME 1952] في الشكل المرفق، $\widehat{C} = 90^\circ$، $AD = BD$، $DE \perp AB$، $AB = 20$، ما مساحة الشكل $ADEC$ ؟



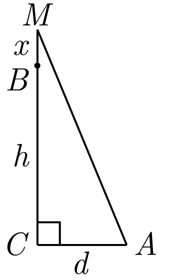
(أ) 75 (ب) $58\frac{1}{2}$ (ج) 48 (د) $37\frac{1}{2}$

(٣٨) [AHSME 1953] طول قاعدة مثلث يساوي 15. رسمنا المستقيمين DE و FG موازيان للقاعدة BC ويقسمان المثلث إلى ثلاث مساحات متساوية. ما طول FG ؟



(أ) $5\sqrt{6}$ (ب) 10 (ج) $4\sqrt{3}$ (د) 7.5

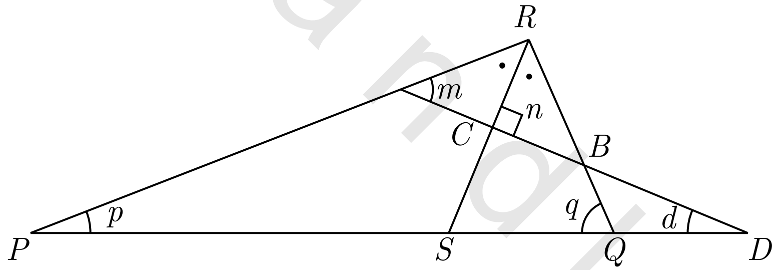
(٣٩) [AHSME 1954] في المثلث القائم المرفق، $x + MA = h + d$. عندئذ x يساوي:



(أ) $\dfrac{hd}{2h+d}$ (ب) $d-h$

(ج) $h+d-\sqrt{2d}$ (د) $\sqrt{h^2+d^2}-h$

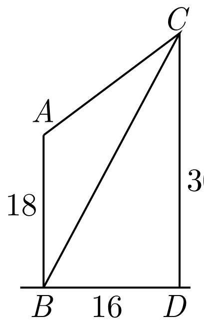
(٤٠) [AHSME 1954] في الشكل المرفق، RS ينصف الزاوية $\widehat{R}$ و $\widehat{n}=90°$، $PSQD$ على استقامة واحدة. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية ؟



(أ) $\widehat{n}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{p}+\widehat{q}\right)$ (ب) $\widehat{m}=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{p}+\widehat{q}\right)$

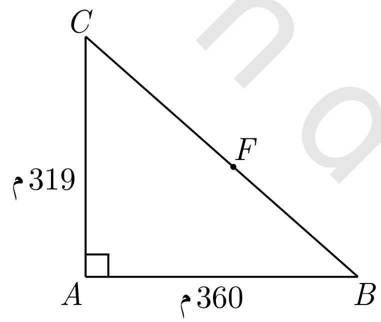
(ج) $\widehat{d}=\dfrac{1}{2}(\widehat{p}+\widehat{q})$ (د) $\widehat{d}=\dfrac{1}{2}\widehat{m}$

(٤١) [Cayley 2004] طول كل من البرجين AB و CD يساوي 18م و 30م على التوالي والمسافة بين القاعدتين تساوي 16م. ربطنا حبلين من A إلى C ومن B إلى C كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مجموع طولي الحبلين على فرض أنهما مشدودان ؟



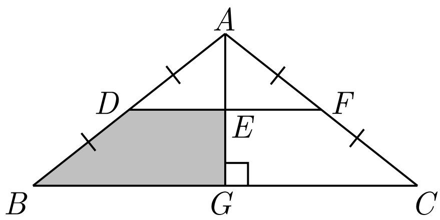
(أ) 54 (ب) 64 (ج) 44 (د) 48

(٤٢) في الشكل المرفق ABC يمثل طريقاً لممارسة رياضة المشي. قطع أحمد المسافة من A إلى B إلى F. وقطع سعود المسافة من A إلى C إلى F. إذا كانت المسافة التي قطعها أحمد تساوي المسافة التي قطعها سعود فما طول المسافة من F إلى B ؟



(أ) 115.5م (ب) 220م (ج) 315م (د) 321.5م

(٤٣) في الشكل المرفق $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = AC$ ، $AG \perp BC$ ، D و F منتصفا AB و AC على التوالي، $AE = EG$. ما النسبة بين مساحة الجزء المظلل ومساحة المثلث $\triangle ABC$؟

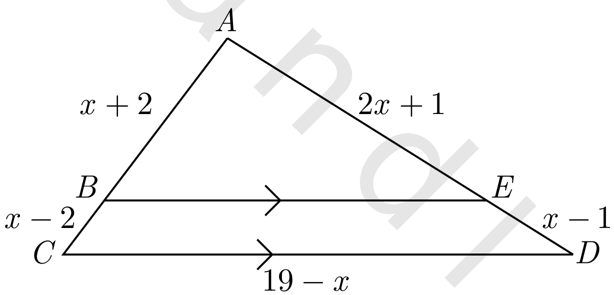


(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{1}{2}$

(٤٤) [MAΘ 2010] مجموع قياسي زاويتي القاعدة لمثلث متساوي الساقين يساوي أربعة أمثال قياس زاوية الرأس. ما قياس إحدى زاويتي القاعدة ؟

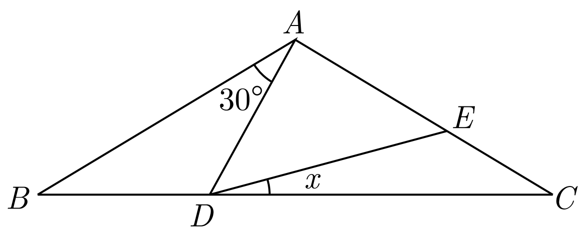
(أ) 30° (ب) 36° (ج) 72° (د) 80°

(٤٥) [MAΘ 2010] في الشكل المرفق، $BE \parallel CD$. ما محيط المثلث $\triangle ACD$ ؟



(أ) 33 (ب) 34 (ج) 35 (د) 43

(٤٦) [AHSME 1956] في الشكل المرفق $AB = AC$ ، $AE = AD$. ما قيمة الزاوية x ؟

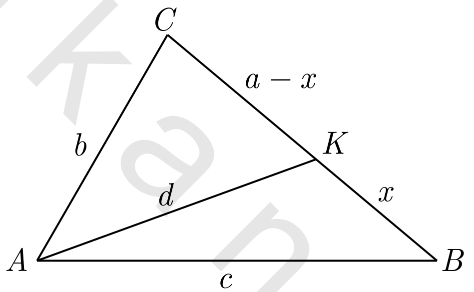


(أ) 15° (ب) 20° (ج) 22° (د) 25°

(٤٧) [AHSME 1956] مثلث متساوي الأضلاع طول ارتفاعه يساوي $\sqrt{6}$. ما مساحته ؟

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $3\sqrt{3}$ (ج) $6\sqrt{2}$ (د) 12

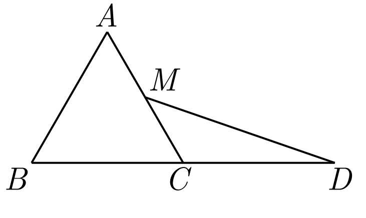
(٤٨) [Euclid 2011] في الشكل المرفق، $2\widehat{BAC} = 3\widehat{ABC}$، $\widehat{KAC} = 2\widehat{KAB}$. عندئذ:



(أ) $d = \dfrac{bc}{a}$، $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$ (ب) $d = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$، $x = \dfrac{bc}{a}$

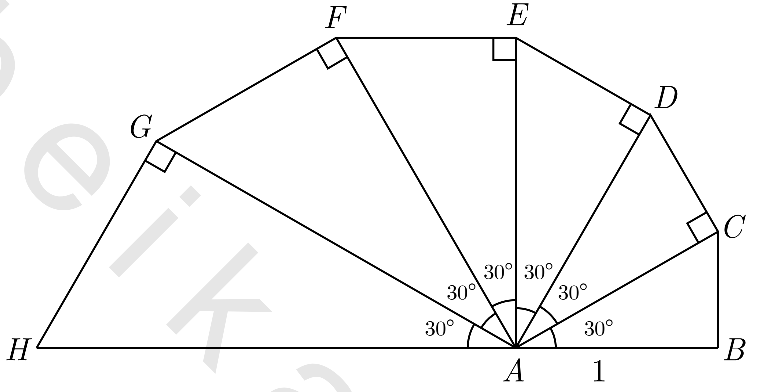
(ج) $d = \dfrac{ac}{b}$، $x = \dfrac{a^2 + b^2}{a}$ (د) $d = \dfrac{a^2 + b^2}{c}$، $x = \dfrac{ac}{b}$

(٤٩) [AMC10B 2005] $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع طول كل من أضلاعه يساوي 2. M منتصف AC و C منتصف BD. ما مساحة المثلث $\triangle CDM$ ؟



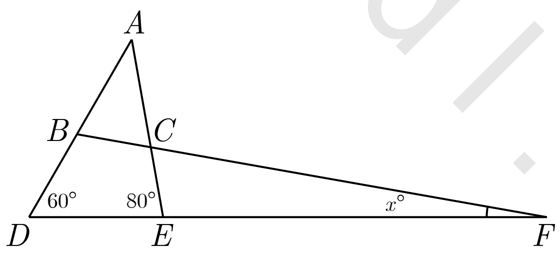
(أ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (د) $\sqrt{2}$

(٥٠) [Euclid 2010] ما طول AH في الشكل المبين أدناه ؟



(أ) $\frac{32}{27}$ (ب) $\frac{64}{27}$ (ج) $\frac{71}{27}$ (د) $\frac{82}{27}$

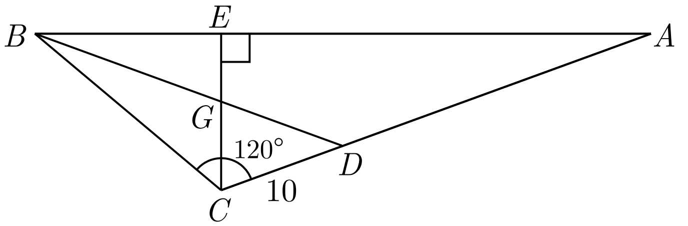
(٥١) في الشكل المرفق، $AB = AC$. ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ ؟



(أ) $10°$ (ب) $20°$ (ج) $30°$ (د) $35°$

(٥٢) في الشكل المرفق، $\widehat{BCA} = 120°$ ، $\widehat{ABC} = 40°$. $\overline{BD}$ منصف $\widehat{ABC}$ ، $\overline{AB} \perp \overline{CE}$ ، $CD = 10$. ما طول $\overline{DG}$ ؟

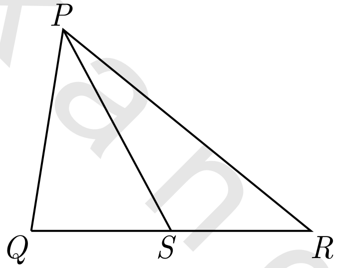
(أ) 5 (ب) 7 (ج) 10 (د) 12



(٥٣) [Aust.MC 1992] في الشكل المرفق، مساحة $\triangle PQS$ تساوي مساحة $\triangle PSR$، $\overleftrightarrow{QSR}$ مستقيم. ما العبارة الصحيحة من بين العبارات التالية ؟

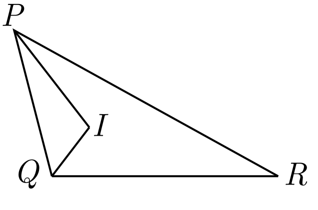
(أ) $\overline{PS} \perp \overline{QR}$ (ب) $QS = RS$

(ج) $PQ = PR$ (د) $\widehat{QPR} = 90°$

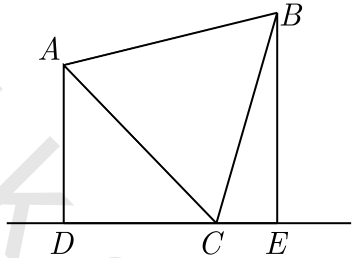


(٥٤) [Aust.MC 1997] في $\triangle PQR$ المرفق، $PQ = 2$ ، $QR = 3$، $RP = 4$. $\overline{PI}$ و $\overline{QI}$ منصفان للزاويتين $\widehat{P}$ و $\widehat{Q}$ على التوالي. ما قيمة $\frac{[PIQ]}{[PQR]}$ ؟

(أ) $\frac{2}{11}$ (ب) $\frac{2}{9}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$

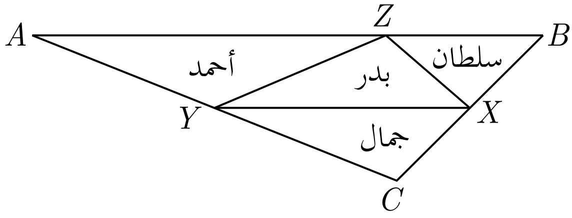


(٥٥) [Aust.CH 1992] راية كبيرة على شكل $\triangle ABC$ متساوي الأضلاع كما هو مبين في الشكل ومثبتة من الرأسين العلويين بعمودين رأسيين $AD = 3$ و $BE = 4$ والرأس الثالث للراية مثبت على الأرض. إذا كان طول ضلع الراية $\sqrt{\frac{a}{b}}$ حيث a و b أوليان نسبياً فإن $a + b$ يساوي:



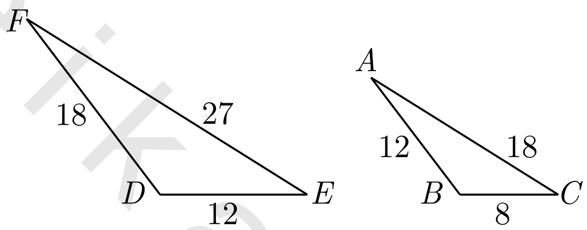
(أ) 51 (ب) 52 (ج) 53 (د) 55

(٥٦) [Aust.CH 1993] يمتلك رجل قطعة أرض مثلثة الشكل مساحتها 26000 متراً مربعاً. أراد توزيعها بين أولاده الأربعة: أحمد، بدر، جمال، سلطان بحيث يحصل كل منهم على قطعة مثلثة الشكل. في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ يمثل قطعة الأرض الكبيرة، X و Y منتصفا $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ على التوالي. اختار الرجل النقطة Z على $\overline{AB}$ بحيث تكون $[AZY]$ تساوي 9000 متراً مربعاً ومنحها لإبنه الأكبر أحمد. أما بقية الأولاد فحصصهم مبينة على الشكل. ما مساحة قطعة الإبن الأصغر سلطان ؟



(أ) 4000 (ب) 6500 (ج) 7500 (د) 9000

(٥٧) [Aust.CH 2002] نقول إن $\triangle ABC$ هو مثلث جيد إذا وجد مثلث آخر $\triangle DEF$ يشابهه ولا يطابقه وفيه $AB = DE$ و $AC = DF$، على سبيل المثال، $\triangle ABC$ المبين في الشكل هو مثلث جيد لأن المثلث $\triangle DEF$ يحقق الشروط.



إذا كانت أطوال أضلاع مثلث جيد هي $d < e < f$ فإن

(أ) $f = e + d$ (ب) $e = \dfrac{d+f}{2}$

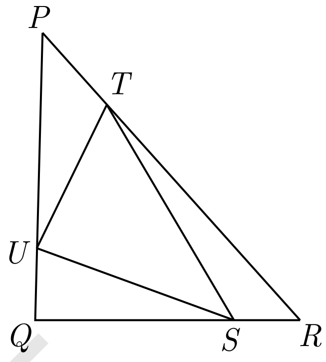
(ج) $e = \sqrt{df}$ (د) $f = d^2 + e^2$

(٥٨) [Aust.MC 1998] إذا أردنا إنشاء $\triangle PQR$ أطوال أضلاعه أعداد صحيحة حيث $PQ = 37$ و $QR = m$، m عدد صحيح أصغر من 37 فما القيم الممكنة لطول PR ؟

(أ) $2m - 2$ (ب) $2m - 1$ (ج) $2m$ (د) $2m + 1$

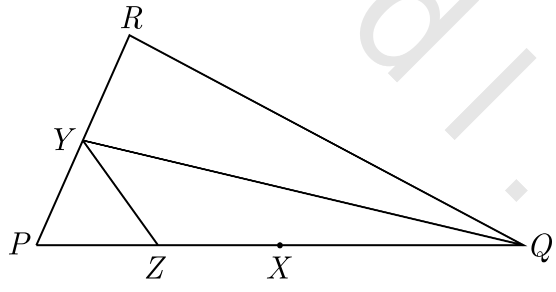
(٥٩) [Aust.MC 1995] في الشكل المرفق، $\dfrac{PT}{TR} = \dfrac{SR}{SQ} = \dfrac{QU}{UP} = \dfrac{1}{r}$ حيث r عدد صحيح موجب. $[STU] \geq \dfrac{3}{4}[PQR]$. ما أصغر قيمة للعدد r ؟

(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10



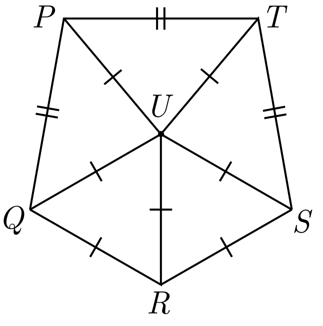
(٦٠) [Aust.MC 1999] في الشكل المرفق، X منتصف الضلع PQ، Y منتصف الضلع PR، Z منتصف الضلع PX. $[YZQ] = 21$. ما قيمة المساحة $[PQR]$ ؟

(أ) 42 (ب) 49 (ج) 56 (د) 63



(٦١) [Fermat 2012] في الشكل المرفق، $\triangle QUR$ و $\triangle SUR$ متساويا الأضلاع. كل من المثلثات $\triangle QUP$ و $\triangle PUT$ و $\triangle TUS$ متساوي الساقين حيث $PU = QU = SU = TU$ و $QP = PT = TS$. قياس الزاوية $\widehat{UST}$ يساوي:

(أ) 50° (ب) 54° (ج) 60° (د) 70°



إجابات المسائل غير المحلولة

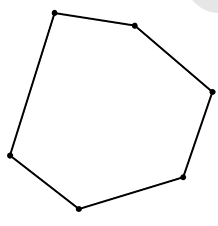
(١) ج	(٢) ج	(٣) أ	(٤) د	(٥) د
(٦) ج	(٧) ب	(٨) ج	(٩) د	(١٠) ج
(١١) ب	(١٢) ج	(١٣) ب	(١٤) أ	(١٥) د
(١٦) أ	(١٧) ج	(١٨) أ	(١٩) ج	(٢٠) ب
(٢١) أ	(٢٢) أ	(٢٣) ج	(٢٤) أ	(٢٥) أ
(٢٦) أ	(٢٧) د	(٢٨) د	(٢٩) ج	(٣٠) ب
(٣١) ج	(٣٢) ج	(٣٣) د	(٣٤) أ	(٣٥) د
(٣٦) د	(٣٧) ب	(٣٨) أ	(٣٩) أ	(٤٠) ب
(٤١) أ	(٤٢) ب	(٤٣) ج	(٤٤) ج	(٤٥) ج
(٤٦) أ	(٤٧) أ	(٤٨) أ	(٤٩) ج	(٥٠) ب
(٥١) أ	(٥٢) ج	(٥٣) ب	(٥٤) ب	(٥٥) د
(٥٦) أ	(٥٧) ج	(٥٨) ب	(٥٩) د	(٦٠) ج
(٦١) أ				

الفصل الثالث

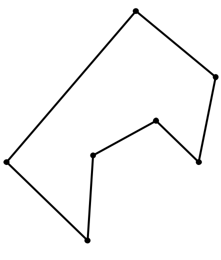
المضلعات

Polygons

لتكن $M_1, M_2, \cdots, M_n$ ، n من النقاط في مستوى حيث $n \geq 3$. نقول إن اتحاد القطع المستقيمة $\overline{M_1M_2} \cup \overline{M_2M_3} \cup \cdots \cup \overline{M_{n-1}M_n}$ حيث أي ثلاث نقاط متتالية ليست على استقامة واحدة وحيث $M_1 = M_n$ ، مضلع. تسمى كل من النقاط رأساً وكل من القطع المستقيمة ضلعاً. زوايا المضلع هي الزوايا التي تنشأ عن تقاطع أضلاع متجاورة. أقطار المضلع هي القطع المستقيمة بين أي رأسين غير متجاورين. يكون المضلع محدباً (convex) إذا قسم أي من أضلاعه المستوى إلى نصفين بحيث يقع المضلع تماماً في أحد نصفي المستوى. أي أن، أي قطعة مستقيمة تصل بين أي نقطتين داخليتين للمضلع تكون محتواة في المضلع. إذا لم يكن المضلع محدباً فإنه يسمى مقعراً (concave).



مضلع محدب

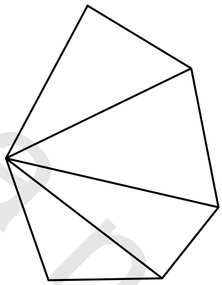


مضلع مقعر

المثلث هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع والرباعي هو مضلع مكون من أربعة أضلاع والخماسي هو مضلع مكون من خمسة أضلاع والسداسي هو مضلع مكون من ستة أضلاع وهكذا.

مبرهنة (١) [مجموع الزوايا الداخلية للمضلع]: مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه n يساوي $(n-2)\times 180^\circ$.

البرهان: اختر أي رأس من رؤوس المضلع وارسم جميع أقطاره من هذه النقطة.



إن ذلك يقسم المضلع إلى $n-2$ من المثلثات. وبهذا فإن مجموع زوايا المضلع الداخلية هو مجموع زوايا هذه المثلثات وهذا بدوره يساوي $(n-2)\times 180^\circ$. $\square$

مبرهنة (٢) [مجموع الزوايا الخارجية للمضلع]: مجموع الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n يساوي 360°.

البرهان: عند كل رأس من رؤوس المضلع مجموع الزاويتين الداخلية والخارجية يساوي 180° (لأنها زاوية مستقيمة). لنفرض الآن أن A هو مجموع الزوايا الخارجية وعددها n وأن B هو مجموع الزوايا الداخلية وعددها n أيضاً. إذن، $A+B=n\times 180^\circ$. ولكن $B=(n-2)\times 180^\circ$. وبهذا يكون

$$A+(n-2)\times 180^\circ = n\times 180^\circ$$
$$A = 2\times 180^\circ = 360^\circ$$

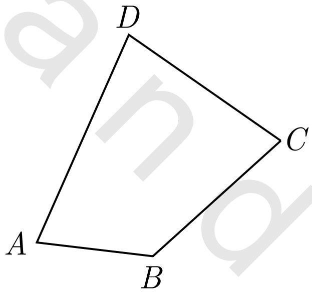
$\square$

المضلعات المنتظمة [Regular Polygons]

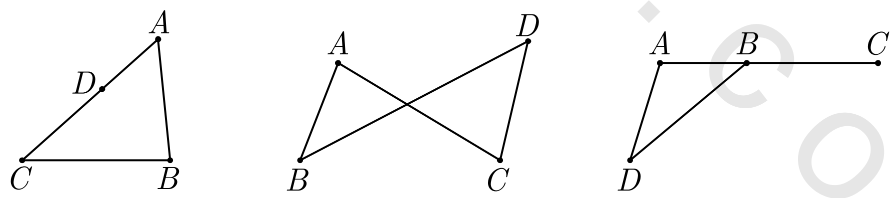
المضلع المنتظم هو مضلع محدب جميع أضلاعه متطابقة وقياس جميع زواياه متساوٍ. ولذا، إذا كان عدد أضلاع (زوايا) المضلع المنتظم هو n فإن قياس كل من زواياه الداخلية يساوي $\dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$.

الرباعيات [Quadrilaterals]

الرباعي هو مضلع مكون من أربعة رؤوس. أي أن الرباعي $ABCD$ هو اتحاد القطع المستقيمة $\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CD}\cup\overline{DA}$ حيث أي ثلاث نقاط يجب أن لا تكون على استقامة واحدة وحيث $\overline{AB}\cap\overline{CD}=\phi$ و $\overline{BC}\cap\overline{DA}=\phi$.



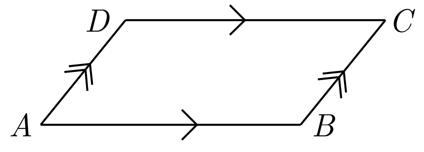
لاحظ أن كلاً من الأشكال التالية ليس رباعياً:



ملحوظة: من المبرهنة (١) نجد أن مجموع زوايا الرباعي يساوي 360°.

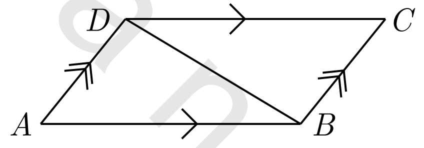
متوازيات الأضلاع [Parallelograms]

متوازي الأضلاع هو رباعي محدب فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان. أي أن $ABCD$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ و $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



مبرهنة (٣): كل ضلعين متقابلين في متوازي أضلاع متطابقان.

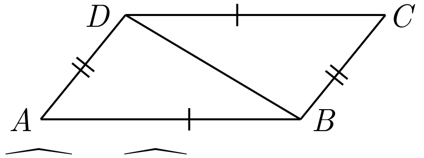
البرهان: ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. ارسم القطر $\overline{BD}$.



الآن، $\triangle CDB \equiv \triangle ABD$ (AAS). ومن التطابق نجد أن $AD = BC$ وأن $AB = DC$. □

مبرهنة (٤): إذا تطابق كل ضلعين متقابلين في رباعي محدب فإن الرباعي متوازي أضلاع.

البرهان: لنفرض أن $ABCD$ رباعي محدب فيه $AB = DC$ و $AD = BC$.

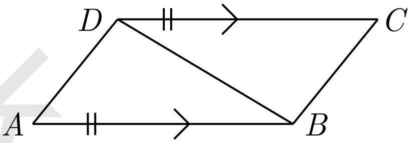


عندئذ، $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ ومن ثم $\widehat{ADB} = \widehat{CBD}$. وبما أنهما زاويتان

تبادليتان داخلياً فإن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وبالمثل، $\widehat{ABD} \equiv \widehat{CDB}$ ومن ثم فإن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. $\square$

مبرهنة (٥): إذا توازى وتطابق ضلعان متقابلان في رباعي محدب فإن الرباعي متوازي أضلاع.

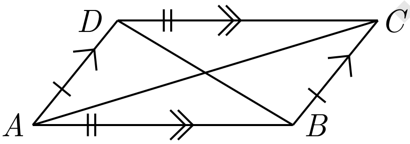
البرهان: لنفرض أن $ABCD$ رباعي محدب فيه $AB = DC$ و $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.



عندئذ، $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$. ومن ذلك يكون $AD = BC$ فنرى أن $ABCD$ متوازي أضلاع من مبرهنة (٤). $\square$

مبرهنة (٦): في متوازي الأضلاع، كل زاويتين متقابلتين متساويتان وكل زاويتين متتاليتين متكاملتان.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع.



بما أن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإننا نجد أن كل زاويتين متتاليتين متكاملتان. ومن $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ نجد أن $\widehat{DAB} = \widehat{DCB}$. وبالمثل من $\triangle ADC \equiv \triangle CBA$ نجد أن $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$. $\square$

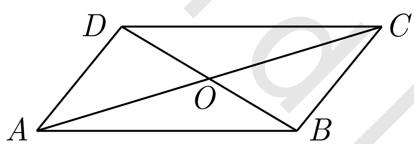
مبرهنة (٧): إذا تساوت كل زاويتين متقابلتين في رباعي محدب فإن الرباعي متوازي أضلاع.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ رباعي محدب حيث $\widehat{A}=\widehat{C}$ و $\widehat{B}=\widehat{D}$. بما أن $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C}+\widehat{D}=360°$ فإن $2(\widehat{A}+\widehat{B})=360°$. أي أن $\widehat{A}+\widehat{B}=180°$. وبالمثل، $\widehat{A}+\widehat{D}=180°$. إذن، $\overline{AD}\parallel\overline{BC}$ و $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$. وبهذا فإن $ABCD$ متوازي أضلاع. □

ملحوظة: لاحظ أن معرفة قياس زاوية واحدة فقط من زوايا متوازي أضلاع يؤدي إلى معرفة قياس بقية الزوايا.

مبرهنة (٨): نقطة تقاطع قطري متوازي أضلاع تنصف القطرين.

البرهان: نفرض أن O هي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$.

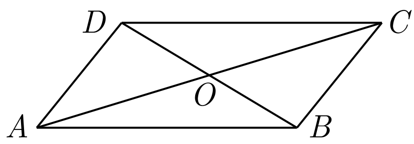


سنبرهن أن $OA=OC$ و $OB=OD$. بما أن $\widehat{ABO}=\widehat{CDO}$ و $\widehat{DCO}=\widehat{OAB}$ و $AB=DC$ فإن $\triangle COD\equiv\triangle AOB$. وبهذا فإن $OA=OC$ و $OB=OD$. □

ملحوظة: تسمى نقطة تلاقي قطري متوازي أضلاع، مركز متوازي الأضلاع.

مبرهنة (٩): إذا نصفت نقطة تلاقي قطري رباعي محدب القطرين فإن الرباعي متوازي أضلاع.

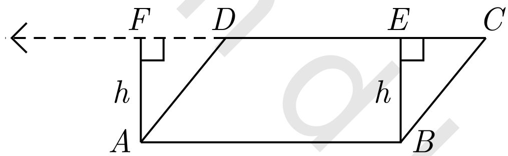
البرهان: لنفرض أن O نقطة تلاقي القطرين $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ في الرباعي المحدب $ABCD$ حيث $OA = OC$ و $OB = OD$. عندئذ،



$\triangle AOB \equiv \triangle COD$. ومن ذلك $\widehat{ABO} = \widehat{CDO}$ و $\widehat{DCO} = \widehat{OAB}$. أي أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ وبالمثل $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. وبهذا فإن $ABCD$ متوازي أضلاع. □

مساحة متوازي الأضلاع [Area of Parallelogram]

إذا كان $ABCD$ متوازي أضلاع فإن العمود النازل من أحد رؤوسه إلى الضلع (أو امتداد الضلع) المقابل للرأس يسمى ارتفاع (altitude) متوازي الأضلاع.



كل من $\overline{AF}$ و $\overline{BE}$ ارتفاع. في هذه الحالة، كل من $\overline{DC}$ و $\overline{AB}$ يسمى قاعدة.

مبرهنة (١٠): مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول العمود وطول القاعدة النازل عليها.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع وأن $\overline{EB}$ هو العمود النازل على القاعدة $\overline{DC}$ كما هو مبين في الشكل المرسوم قبل نص المبرهنة.

سنبرهن أن $[ABCD] = h \times DC$. من الشكل، نجد أن $\triangle BEC \equiv \triangle AFD$. من ذلك نجد أن $[ABCD] = [ABEF]$. الآن، برسم القطر $\overline{BF}$ نجد أن

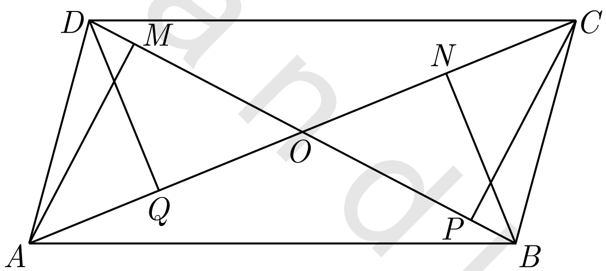
$\triangle ABF \equiv \triangle EFB$. وبهذا فإن $[ABF]=[EFB]$. ولكن

$$[ABF]=\frac{1}{2}\times h\times AB$$
$$[EFB]=\frac{1}{2}\times h\times EF=\frac{1}{2}\times h\times AB$$

لأن $AB=EF$. إذن،

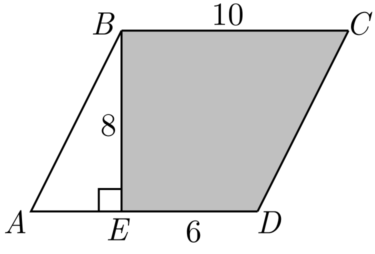
$$[ABCD]=[ABEF]=[ABF]+[EFB]=h\times AB\,.$$ □

مثال (١): في الشكل المرفق $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O، $\overline{AM}$ و $\overline{CP}$ عموديان على $\overline{BD}$، بينما $\overline{DQ}$ و $\overline{BN}$ عموديان على $\overline{AC}$. أثبت أن $MNPQ$ متوازي أضلاع.



الحل: $\triangle MOA \equiv \triangle POC$ لأن كلاهما قائم الزاوية و $\widehat{MOA}=\widehat{POC}$ و $OA=OC$. من ذلك نجد أن $OM=OP$. وبالمثل، $\triangle ODQ \equiv \triangle OBN$. ومن ذلك نجد أن $OQ=ON$. إذن، O نقطة منتصف قطري الرباعي $MNPQ$، وبهذا فهو متوازي أضلاع. ◇

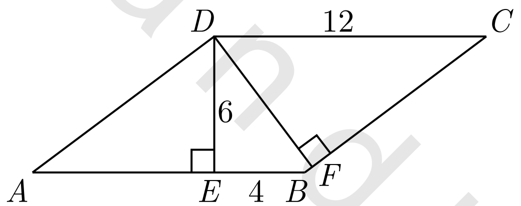
مثال (٢) [AJHSME 1989]: جد مساحة المنطقة المظللة $BEDC$ في متوازي الأضلاع $ABCD$.



الحل: بما أن $AD = 10$ فإن $AE = 10 - 6 = 4$. ويكون

$$[BEDC] = [ABCD] - [ABE] = 8 \times 10 - \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 64 . \quad \diamond$$

مثال (٣) [AJHSME 1995]: في الشكل المرفق $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AB} \perp \overline{DE}$ و $\overline{BC} \perp \overline{DF}$. إذا كان $DC = 12$ ، $EB = 4$ ، $DE = 6$ فجد DF .



الحل: $[ABCD] = AB \times ED = DF \times BC = 12 \times 6 = 72$.

إذن، $DF \times BC = 72$. الآن، $\triangle AED$ قائم الزاوية. إذن،

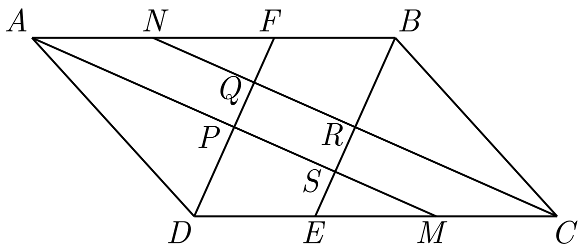
$$(AE)^2 + (ED)^2 = (AD)^2$$

$$(AD)^2 = 64 + 36 = 100$$

ولذا فإن $AD = BC = 10$. من ذلك يكون، $DF = \dfrac{72}{BC} = \dfrac{72}{10} = 7.2$. $\diamond$

مثال (٤) [Euclid 2000]: في الشكل المرفق، $ABCD$ متوازي أضلاع. نقاط تقاطع منصفات الزوايا هي رؤوس الرباعي $PQRS$. أثبت أن

$\widehat{SPQ} = \widehat{PQR} = \widehat{QRS} = \widehat{RSP} = 90^\circ$.



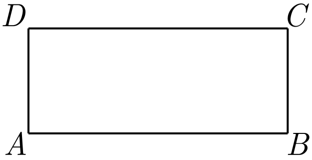
الحل: بما أن $\overline{DF}$ و $\overline{BE}$ منصفان للزاويتين $\widehat{ADC}$ و $\widehat{CBA}$ وأن $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$. إذن، $\widehat{ADF} = \widehat{CDF} = \widehat{ABE} = \widehat{CBE} = x^\circ$. وبالمثل، $\widehat{DAM} = \widehat{BAM} = \widehat{DCN} = \widehat{BCN} = y^\circ$. وبما أن $\widehat{CDF}$ و $\widehat{AFD}$ تبادليتان داخلياً فإن $\widehat{AFD} = \widehat{CDF} = x^\circ$. الآن، $2x + 2y = 180$. إذن، $x + y = 90$. وبهذا نجد في $\triangle PAF$ أن $\widehat{APF} = 90^\circ$. ومن ثم تكون $\widehat{SPQ} = 90^\circ$. وبطريقة مماثلة نجد أن $\widehat{PQR} = \widehat{QRS} = \widehat{RSP} = 90^\circ$. ◇

مثال (٥): جد PR في المثال (٤) إذا علمت أن $AB = 12$ و $BC = 8$.

الحل: بما أن $\overline{AM}$ منصف للزاوية $\widehat{DAB}$ فإن $\widehat{DAM} = \widehat{BAM} = y^\circ$. عندئذ، $\widehat{DMA} = y^\circ$ بالتبادل الداخلي. وبهذا فإن $\triangle ADM$ متساوي الساقين. وبالمثل، يمكن إثبات أن $\triangle CBN$ متساوي الساقين. وبهذا فإن $\triangle ADM \equiv \triangle CBN$. أيضاً، $\overline{AM} \parallel \overline{NC}$ بالتبادل الداخلي ومن ثم $\overline{AP} \parallel \overline{NR}$. وباستخدام المثلثات المتساوية الساقين (أو المتطابقة) نجد أن $AP = NR$. إذن، $APRN$ متوازي أضلاع. من ذلك نجد أن $AN = PR$. إذن، $AN = AB - NB = 12 - 8 = 4$. ◇

متوازيات أضلاع خاصة [Special Parallelograms]

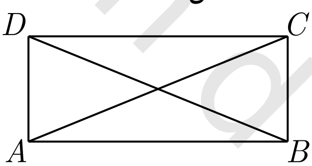
المستطيل [Rectangle]: هو متوازي أضلاع إحدى زواياه (ومن ثم جميع زواياه) قائمة. أي أن $ABCD$ مستطيل إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\widehat{A} = 90°$.



وبما أن المستطيل متوازي أضلاع فإنه يحقق جميع خواص متوازي الأضلاع. إضافة إلى ذلك فهو يحقق الخاصية التالية:

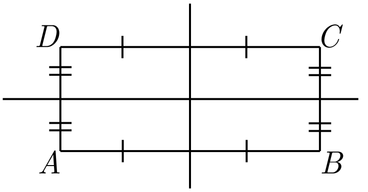
مبرهنة (١١): يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً إذا وفقط إذا كان قطراه متساويين.

البرهان: لنفرض أن $ABCD$ مستطيل.



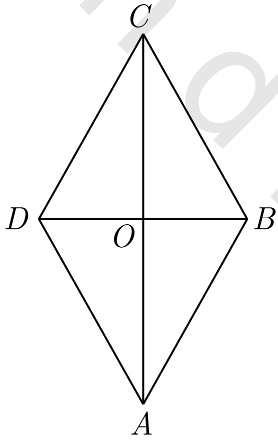
بما أن $AD = BC$، $AB = AB$ و $\widehat{A} = \widehat{B}$ فإن $\triangle CBA \equiv \triangle DAB$. ومن ذلك نجد أن $AC = BD$. ولبرهان العكس، نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $AC = BD$. عندئذ، $AD = BC$، $AB = AB$، $BD = AC$. ومن ذلك يكون $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$. إذن، $\widehat{DAB} = \widehat{CBD}$. وبما أنهما متكاملتان فإن كلاً منهما قائمة وبهذا يكون $ABCD$ مستطيلاً. □

للمستطيل محورا تناظر (axes of symmetry) هما المنصفان العموديان لأضلاع المستطيل.



بما أن ارتفاع المستطيل هو أحد أضلاعه فمساحة المستطيل هي حاصل ضرب ضلعين متعامدين من أضلاعه. عادة، يسمى الضلع الأطول بطول المستطيل والضلع الأقصر بعرض المستطيل. ولذا فإن مساحة المستطيل هي حاصل ضرب طوله في عرضه.

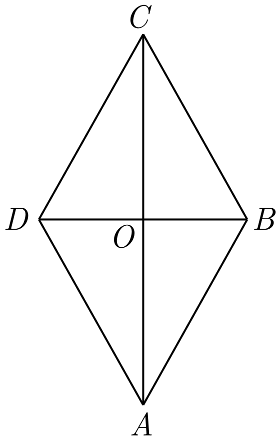
المعيَّن [Rhombus]: المعيَّن هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان ومن ثم فإن جميع أضلاعه متساوية. أي أن $ABCD$ معين إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $AB = BC = CD = DA$.



إضافة إلى خواص متوازي الأضلاع فإن المعيَّن يحقق بعض الخواص الأخرى.

مبرهنة (١٢): قطرا المعيَّن متعامدان وينصفان زوايا المعيَّن.

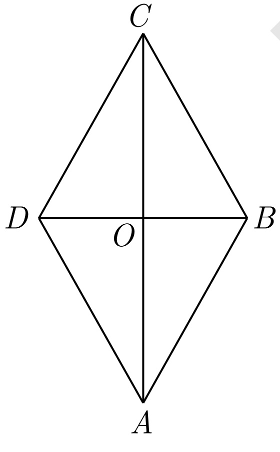
البرهان: لنفرض أن O هي نقطة تقاطع قطري المعيَّن $ABCD$.



بما أن O منتصف القطرين فإن $OB = OD$ و $OA = OC$ و $AB = AD$. من ذلك نجد أن $\triangle DOA \equiv \triangle BOA$. إذن، $\widehat{BAO} = \widehat{DAO}$. أي أن $\overline{AO}$ ينصف الزاوية $\widehat{BAD}$. إضافة إلى ذلك $\widehat{DOA} = \widehat{BOA}$. وبما أنهما متكاملتان فإن قياس كل منهما يساوي $90°$. أي أن $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. □

مبرهنة (١٣): إذا تعامد قطرا متوازي أضلاع فإنه معين.

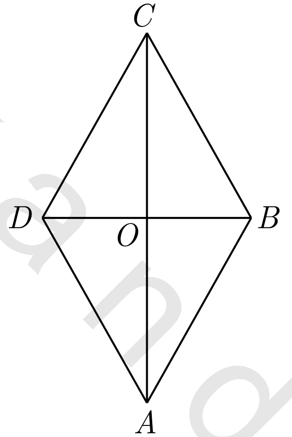
البرهان: لنفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.



عندئذ، نقطة تقاطع القطرين O هي منتصف $\overline{BD}$. من ذلك نجد أن $\triangle DOA \equiv \triangle BOA$ لأن $OB = OD$ و $OA = OA$ وهما مثلثان قائما الزاوية. إذن، $AB = AD$ وبهذا يكون $ABCD$ معين. □

مبرهنة (١٤): إذا نصَّف قطر متوازي أضلاع أحد زواياه فهو معين.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه $\widehat{BAC} = \widehat{DAC}$.



بما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ فإن $\widehat{DAC} = \widehat{BCA}$. إذن، $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$. وبهذا فإن $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = BC$. وبهذا نجد أن $ABCD$ معين. □

للمعين محورا تناظر هما قطراه.

مبرهنة (١٥) [مساحة المعين]: إذا كان $ABCD$ معيناً فيه القطران $DB = d_1$ و $AC = d_2$ فإن $[ABCD] = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$.

البرهان: بما أن $\triangle ABC \equiv \triangle DBC$ فإن

$$[ABCD] = 2[DBC] = 2 \times \frac{1}{2} \times d_1 \times \left(\frac{1}{2} d_2\right) = \frac{1}{2} d_1 \times d_2 . \qquad \square$$

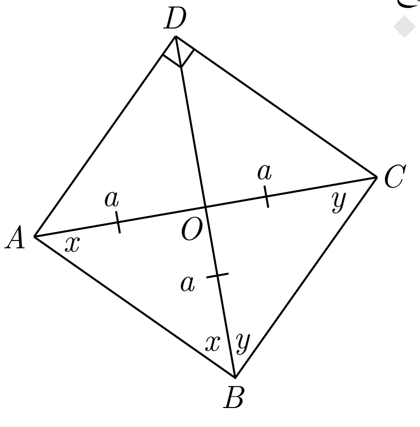
المربع [Square]: المربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان. أي أن $ABCD$ مربع إذا وفقط إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$، $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$، $\widehat{A} = 90^\circ$، $AB = BC$. لاحظ أن جميع الأضلاع متساوية وأن جميع الزوايا قائمة. من السهل أن نرى أن المربع هو معين زواياه قائمة. وبهذا فهو يتمتع بجميع خصائص المعين. للمربع أربعة محاور تناظر هي المنصفان العموديان للأضلاع والقطران. ومن الواضح أيضاً أن مساحة المربع تساوي مربع طول ضلعه.

مثال (٦): في الشكل المرفق، $ABCD$ رباعي محدب، O نقطة تقاطع القطرين، $AO = BO = CO$ و $\widehat{ADC} = 90^\circ$.

(أ) جد قياس $\widehat{ABC}$.

(ب) هل O منتصف القطعة $\overline{BD}$ ؟

(ج) هل $ABCD$ مربع ؟



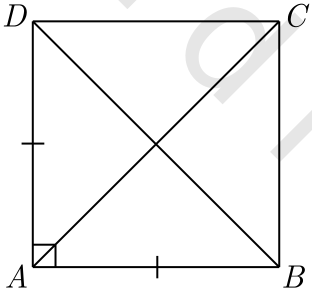
الحل:

(أ) بما أن $\triangle AOB$ و $\triangle BOC$ متساويا الساقين فإن $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = x^\circ$ وأن $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = y^\circ$. لنفرض أيضاً أن $OA = OB = OC = a$. الآن، في $\triangle ABC$ لدينا $2x + 2y = 180^\circ$. إذن، $\widehat{ABC} = x + y = 90^\circ$.

(ب) بما أن $\triangle ADC$ قائم الزاوية وأن $\overline{OD}$ ينصف $\overline{AC}$ فإن $OD = a$. وبهذا فإن O منتصف القطعة $\overline{BD}$.

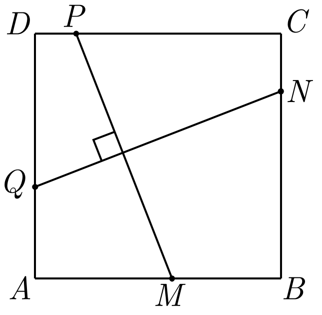
(ج) مما سبق نجد أن $ABCD$ رباعي مركزه ينصف قطريه ومن ثم فهو معين. وبما أن $\widehat{ADC} = 90^\circ$ فإنه مربع. ◇

مثال (٧): في الشكل المرفق، $ABCD$ رباعي محدب، فيه $AB = AD$، $\widehat{DAB} = 90^\circ$، $\triangle DAB \equiv \triangle BCD$. احسب قياس زوايا $ABCD$.

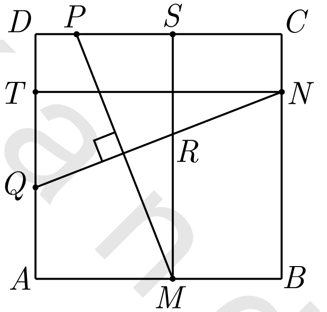


الحل: بما أن $\triangle DAB \equiv \triangle BCD$ فإن $\triangle BCD$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين.
إذن، $ABCD$ مربع ومن ثم جميع زواياه قائمة. ◇

مثال (٨): في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع، فيه $\overline{MP} \perp \overline{QN}$. أثبت أن $MP = QN$.

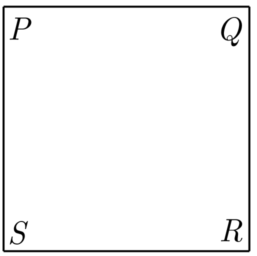


الحل: خذ S نقطة على $\overline{DC}$ و T نقطة على $\overline{AD}$ بحيث يكون $\overline{MS} \perp \overline{DC}$ و $\overline{DA} \perp \overline{NT}$ و R نقطة تقاطع $\overline{QN}$ و $\overline{MS}$.



بما أن $MS = NT$ و $\widehat{PMS} = 90° - \widehat{QRM} = 90° - \widehat{SRN} = \widehat{TNQ}$ فإن $\triangle SPM \equiv \triangle TQN$. وبهذا فإن $MP = QN$. ◇

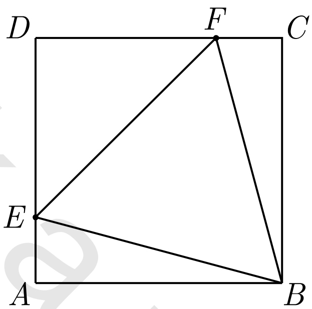
مثال (٩) [AJHSME 1998]: الشكل المرفق هو قطعة ورق مربعة $PQRS$. طابقنا الزاوية P على الزاوية R والزاوية Q على الزاوية S. مساحة الشكل الناتج تساوي 9 سم٢. جد محيط المربع $PQRS$.



الحل: الشكل الناتج هو مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين مساحته 9 سم٢. وبما أن المربع يطابق أربعة مثلثات من هذا النوع فمساحته

تساوي $4 \times 9 = 36$. إذن، طول ضلعه يساوي 6 سم ومحيطه يساوي $4 \times 6 = 24$ سم. ◇

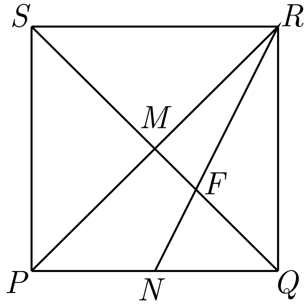
مثال (١٠) [AMC10A 2004]: في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع حيث $\triangle BEF$ متساوي الأضلاع و $ED = DF$. ما نسبة مساحة $\triangle DEF$ إلى مساحة $\triangle ABE$ ؟



الحل: لنفرض أن $AB = a$ وأن $ED = DF = x$. باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن $x^2 + x^2 = (EF)^2 = (EB)^2 = a^2 + (a-x)^2$.
إذن، $x^2 = 2a(a-x)$. من ذلك يكون

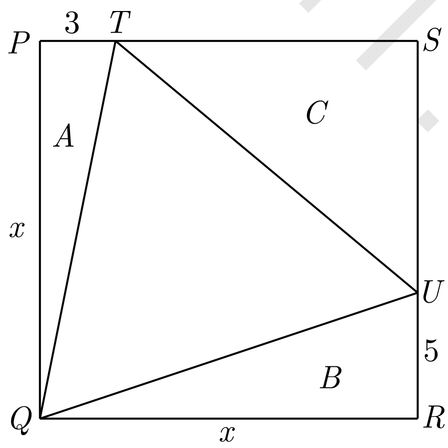
$$\frac{[DFE]}{[ABE]} = \frac{\frac{1}{2} \times x \times x}{\frac{1}{2} \times a \times (a-x)} = \frac{x^2}{a(a-x)} = \frac{2a(a-x)}{a(a-x)} = 2 \,. \quad \diamond$$

مثال (١١) [Aust.MC 2000]: في الشكل المرفق، $PQRS$ مربع، M نقطة تقاطع القطرين، N منتصف PQ و F نقطة تقاطع $\overline{NR}$ و $\overline{QS}$. إذا كانت مساحة المثلث $\triangle MFR$ تساوي 1 وحدة مربعة فما مساحة المربع ؟



الحل: ارسم $\overline{PF}$. بما أن $\triangle PFM \equiv \triangle RFM$ وأن $[RMF] = 1$ فإن $[PFM] = 1$. نفرض الآن أن $x = [PFN] = [QFN]$. عندئذ، بما أن $[RPN] = [RQN]$ فإن $2 + x = [RFQ] + x$. أي أن $[RFQ] = 2$. وبهذا تكون $[RMQ] = 3$. إذن $[PQRS] = 4 \times 3 = 12$. ◇

مثال (١٢) [Euclid 2000]: طول ضلع المربع $PQRS$ المبين في الشكل يساوي x. قسمنا المربع إلى أربعة مثلثات كما هو مبين في الشكل حيث مجموع مساحتي المنطقتين A وَ B يساوي مساحة المنطقة C. إذا كان $PT = 3$ وَ $RU = 5$ فما قيمة x ؟



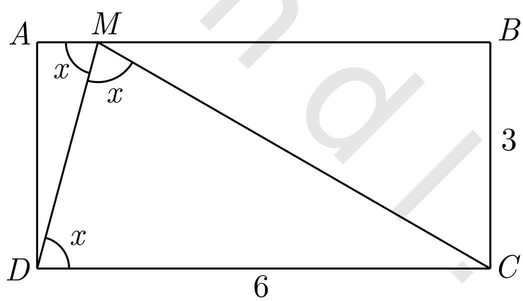
الحل: $TS = x - 3$ وَ $US = x - 5$.

الآن، $[\text{A}] = \frac{1}{2} \times 3 \times x$ ، $[B] = \frac{1}{2} \times 5 \times x$ ، $[C] = \frac{1}{2}(x-5)(x-3)$.
بما أن $[A] + [B] = [\text{C}]$ فإن

$$\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x = \frac{1}{2}(x-5)(x-3)$$
$$x^2 - 16x + 15 = 0$$
$$(x-15)(x-1) = 0$$

إذن، $x = 1$ أو $x = 15$. وبما أن $x \neq 1$ فإن $x = 15$. ◇

مثال (١٣) [AMC10B 2011]: في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل فيه $AB = 6$ وَ $BC = 3$. اخترنا النقطة M على AB حيث $\widehat{AMD} = \widehat{CMD}$. ما قياس الزاوية $\widehat{AMD}$ ؟

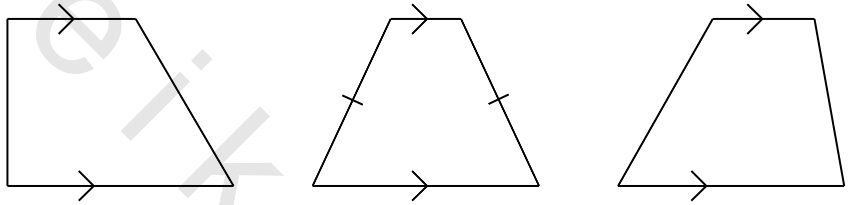


الحل: نفرض أن $\widehat{AMD} = x$. عندئذ، $\widehat{CDM} = x$ بالتبادل الداخلي. وبهذا فإن $\triangle CMD$ متساوي الساقين فيه $MC = DC = 6$. الآن، $\triangle MCB$ فيه، $BC = 3$ وَ $MC = 6$ وَ $\widehat{B} = 90°$. إذن، $\triangle MCB$ مثلث $30° - 60° - 90°$ حيث $\widehat{BMC} = 30°$ وَ $\widehat{BCM} = 60°$. وأخيراً، في $\triangle DMC$ لدينا

$$x + x + 30° = 180°$$
$$x = 75°.$$
◇

أشباه المنحرفات [Trapezoids]

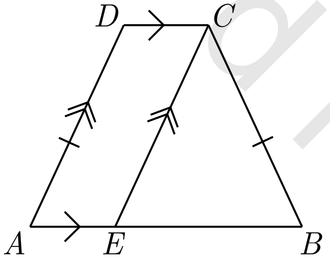
شبه المنحرف هو رباعي فيه ضلعان متوازيان وضلعان غير متوازيين. يسمى كل من الضلعين المتوازيين قاعدة شبه المنحرف ويسمى كل من الضلعين غير المتوازيين ساق شبه المنحرف. إذا كان أحد الساقين عمودياً على القاعدتين فنقول إن شبه المنحرف قائم وإذا كان الساقان متطابقين فنقول إن شبه المنحرف متساوي الساقين.



شبه منحرف   شبه منحرف متساوي الساقين   شبه منحرف قائم

مبرهنة (١٦): في شبه المنحرف المتساوي الساقين تتساوى زاويتا القاعدة.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف حيث $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ و $AD = BC$.

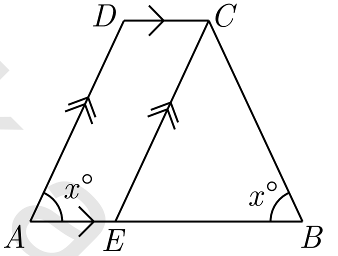


لنفرض أن E نقطة تقاطع القاعدة $\overline{AB}$ مع المستقيم المار بالنقطة C ويوازي $\overline{AD}$. عندئذ، $AECD$ متوازي أضلاع. من ذلك نجد أن $AD = EC$. إذن، $BC = EC$ ويكون $\triangle ECB$ متساوي الساقين. إذن، $\widehat{CEB} = \widehat{CBE}$. وبما أن $\overline{AD} \parallel \overline{EC}$ فإن $\widehat{CEB} = \widehat{DAB}$. ومن ذلك نجد أن $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$. إضافة إلى ذلك $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$، وبهذا فإن $\widehat{DAB}$ و $\widehat{ADC}$ متكاملتان ومن ثم فإن $\widehat{CBA}$

و $\widehat{DCB}$ متكاملتان. إذن، $\widehat{ADC} = \widehat{BCD}$. □

مبرهنة (١٧): إذا تطابقت زاويتا إحدى قاعدتي شبه منحرف فإن شبه المنحرف متساوي الساقين.

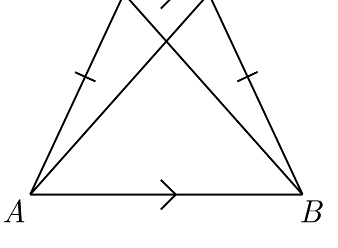
البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$ و $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ والنقطة E كما في المبرهنة (١٦).



بما أن $\overline{EC} \parallel \overline{AD}$ فإن $\widehat{CEB} = x$. وبهذا فالمثلث $\triangle CEB$ متساوي الساقين فيه $EC = BC$. ولكن $EC = AD$. من ذلك نجد أن $AD = BC$ ويكون $ABCD$ متساوي الساقين. □

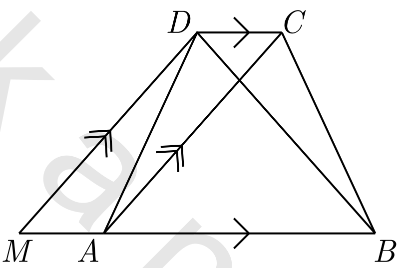
مبرهنة (١٨): قطرا شبه المنحرف المتساوي الساقين متطابقان.

البرهان: نفرض أن $AD = BC$ في شبه المنحرف $ABCD$.



استناداً إلى المبرهنة (١٦) لدينا $\widehat{DAB} = \widehat{CBA}$ ومن ثم فإن $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$.
من ذلك نجد أن $AC = BD$. □

مبرهنة (١٩): إذا تطابق قطرا شبه المنحرف فإنه متساوي الساقين.
البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ و $AC = BD$.
لتكن M نقطة تقاطع امتداد $\overline{AB}$ والمستقيم المرسوم من D موازياً للقطر $\overline{AC}$ كما هو مبين في الشكل.

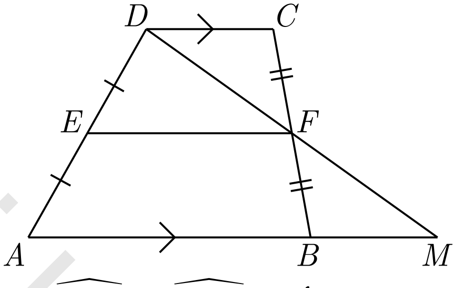


بما أن $MACD$ متوازي أضلاع فإن $MD = AC$ ومن ثم فإن $MD = DB$ ويكون $\triangle MDB$ متساوي الساقين. ومن ذلك فإن $\widehat{DMB} = \widehat{DBM}$. ولكن $\widehat{DMB} = \widehat{CAB}$ إذن $\widehat{DBA} = \widehat{CAB}$. الآن، $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ لأن $AB = AB$ و $DB = AC$ و $\widehat{DBA} = \widehat{CAB}$. إذن، $DA = CB$ ويكون شبه المنحرف $ABCD$ متساوي الساقين. □

تسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ساقي شبه المنحرف بالمستقيم الوسطي (midline).

مبرهنة (٢٠): المستقيم الوسطي في شبه المنحرف يوازي القاعدتين وطوله يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف حيث $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و E و F منتصفا $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$ على التوالي. لنفرض أن M نقطة تقاطع DF مع امتداد AB كما هو مبين في الشكل.

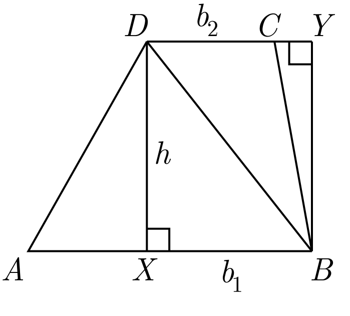


الآن، $\triangle DCF \equiv \triangle MBF$ لأن $\widehat{DCF} = \widehat{MBF}$ و $CF = FB$ و $\widehat{DFC} = \widehat{MFB}$. إذن، $DF = FM$ و $DC = BM$. عندئذ، $\overline{EF}$ واصل بين منتصفي ضلعي المثلث $\triangle DAM$ ومن ثم فهو يوازي $\overline{AB}$. أيضاً،

$$EF = \frac{AM}{2} = \frac{AB + BM}{2} = \frac{AB + DC}{2}. \qquad \square$$

مبرهنة (٢١) [مساحة شبه المنحرف]: مساحة شبه المنحرف تساوي حاصل ضرب نصف مجموع طولي قاعدتيه في طول ارتفاعه.

البرهان: نفرض أن $ABCD$ شبه منحرف حيث $AB = b_1$ و $CD = b_2$ وارتفاعه h. ليكن $\overline{BY}$ العمود النازل من B على امتداد $\overline{DC}$ كما هو مبين في الشكل.

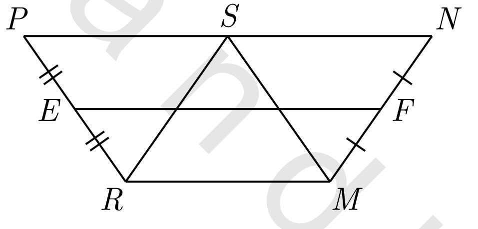


الآن،

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [ABD] + [DBC] \\ &= \frac{1}{2}b_1h + \frac{1}{2}b_2h \\ &= \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)\end{aligned}$$

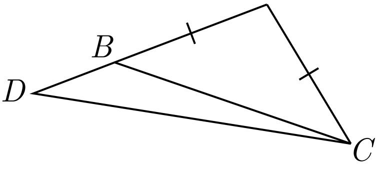
لأن المثلثين $\triangle ABD$ و $\triangle DBC$ لهما طول الارتفاع نفسه وهو h. $\square$

مثال (١٤): في الشكل المرفق، $MNPR$ شبه منحرف فيه $\overline{MR} \parallel \overline{NP}$ و $MN = RP$، $MR = 6$. $\overline{MS} \parallel \overline{PR}$، $\overline{RS} \parallel \overline{MN}$. احسب طول المستقيم الوسطي EF.

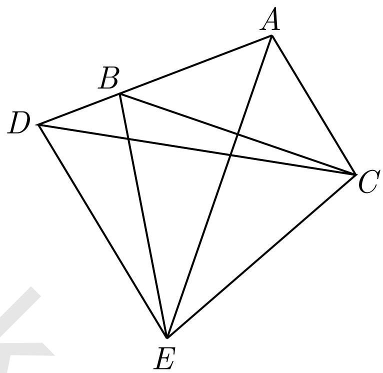


الحل: لاحظ أن كلاً من $PSMR$ و $SNMR$ متوازي أضلاع. إذن، $PS = SN = 6$. وبهذا فإن $EF = \frac{RM + PN}{2} = \frac{6 + 12}{2} = 9$. $\diamond$

مثال (١٥): في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الساقين حيث $AB = AC$ و $\widehat{A} = 100^\circ$، $AD = BC$. احسب قياس $\widehat{ADC}$.

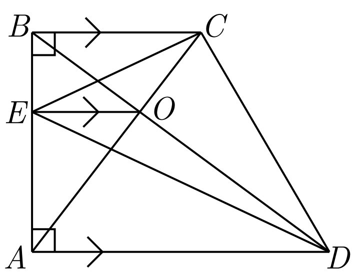


الحل: ارسم $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$ بحيث يكون $ADEC$ شبه منحرف متساوي الساقين كما هو مبين في الشكل.



بما أن $AD = BC$ وأن $AD = EC$ فإن $\triangle BCE$ متساوي الساقين. ولكن $\widehat{BCE} = 100 - 40 = 60°$. إذن، $\triangle BCE$ متساوي الأضلاع و $EC = EB$. إذن، $\triangle ABE \equiv \triangle ACE$ ($\overline{EA}$ منصف $\widehat{BEC}$). من ذلك نجد أن $\widehat{AEC} = 30°$. وبهذا فإن $\widehat{ADC} = 30°$. ◇

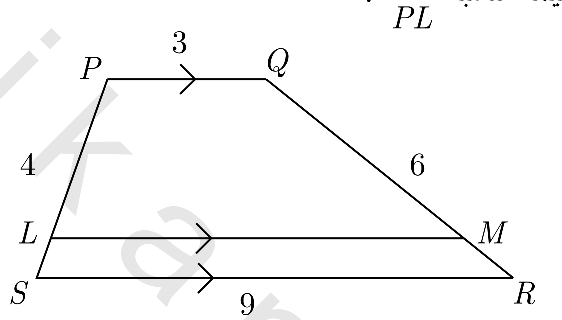
مثال (١٦): $ABCD$ شبه منحرف قائم حيث $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$، O نقطة تقاطع القطرين، $\overline{EO} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$. أثبت أن $\overline{EO}$ ينصف $\widehat{CED}$.



الحل: بما أن $\triangle AOD \sim \triangle COB$ فإن $\dfrac{AO}{OC} = \dfrac{AD}{BC}$. وبما أن $EO \parallel BC$ فإن $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AO}{OC}$. إذن، $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{AD}{BC}$. وبما أن $\widehat{DAE} = \widehat{CBE}$ فإن $\triangle DEA \sim \triangle CEB$. من ذلك نرى أن $\widehat{DEA} = \widehat{CEB}$ وأن متممتيهما أيضاً

متطابقتان. إذن، $\widehat{DEO} = \widehat{CEO}$. وبهذا يكون $\overline{EO}$ منصفاً للزاوية $\widehat{CED}$. ◇

مثال (١٧) [Aust.MC 2000]: $PQRS$ شبه منحرف طولا ضلعيه المتوازيين هما 3 سم و 9 سم وطولا ساقيه 4 سم و 6 سم كما هو مبين. $\overline{PQ} \parallel \overline{SR} \parallel \overline{LM}$. محيط شبه المنحرف $LMRS$ يساوي محيط شبه المنحرف $LMQP$. ما قيمة النسبة $\dfrac{LS}{PL}$ ؟



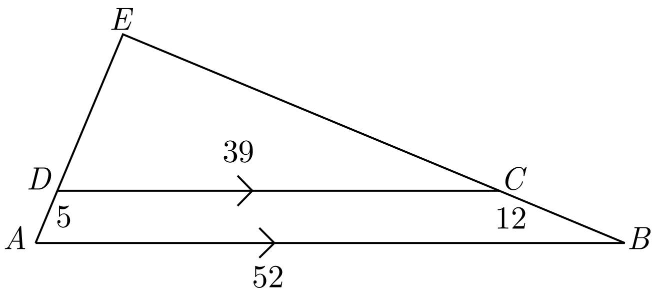
الحل: لنفرض أن $LS = 2x$. الآن، $\dfrac{MR}{QR} = \dfrac{LS}{PS}$. أي أن $\dfrac{MR}{6} = \dfrac{2x}{4}$. ومن ذلك نجد أن $MR = 3x$. بما أن محيطي $LMRS$ و $LMQP$ متساويان فإن

$$6 - 3x + 3 + 4 - 2x + LM = 2x + 9 + 3x + LM \,.$$

أي أن $x = 0.4$. إذن، $\dfrac{LS}{PL} = \dfrac{0.8}{4 - 0.8} = \dfrac{0.8}{3.2} = \dfrac{1}{4}$. ◇

مثال (١٨) [AMC10A 2002]: $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ ، فيه $AB = 52$ ، $BC = 12$ ، $CD = 39$ ، $DA = 5$. احسب مساحة $ABCD$.

الحل: افرض أن E نقطة تلاقي امتدادي $\overline{AD}$ و $\overline{BC}$



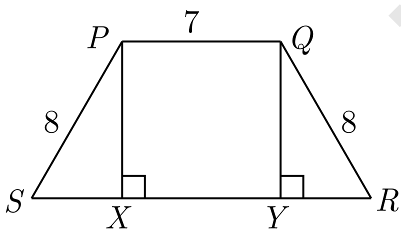
بما أن $AB \parallel CD$ فإن $\triangle AEB \sim \triangle DEC$. من ذلك نجد أن $\frac{3}{4} = \frac{39}{52} = \frac{CE}{CE+12}$. إذن، $CE = 36$. أيضاً، $\frac{3}{4} = \frac{DE}{DE+5}$. وبهذا فإن $DE = 15$. الآن، أطوال أضلاع المثلث $\triangle CDE$ هي $15, 36, 39$. وبما أن $15^2 + 36^2 = 39^2$ فإن $\triangle CDE$ قائم الزاوية عند $\widehat{E}$. إذن،

$$\begin{aligned}[ABCD] &= [ABE] - [CDE] \\ &= \frac{1}{2} \times 48 \times 20 - \frac{1}{2} \times 36 \times 15 = 210\end{aligned}$$

$\diamond$

مثال (١٩) [Euclid 2012]: $PQRS$ شبه منحرف قاعدتاه $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$. إذا كان $PQ = 7$ ، $QR = PS = 8$، $SR = 15$ فما طول القطر $\overline{PR}$ ؟

الحل: ارسم عمودين من P و Q إلى القاعدة $\overline{SR}$ كما هو مبين في الشكل.



الآن، $PQYX$ مستطيل، وبهذا فإن $XY = PQ = 7$ و $PX = QY$. من الواضح أن $\triangle QYR \equiv \triangle PXS$. من ذلك نجد أن $SX = YR$. الآن،

$$SX + XY + YR = SR$$
$$2SX + 7 = 15$$
$$SX = 4$$

استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

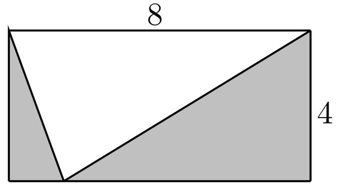
$$.\left(PX\right)^2 = \left(PS\right)^2 - \left(SX\right)^2 = 64 - 16 = 48$$

بما أن $\overline{PR}$ هو وتر المثلث القائم الزاوية $\triangle PXR$ فإن

$$PR = \sqrt{(PX)^2 + (XR)^2} = \sqrt{48 + 121} = 13 \; .$$ ◇

مسائل محلولة

(١) [Gauss 2012] طول المستطيل المرفق يساوي 8 وعرضه يساوي 4. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

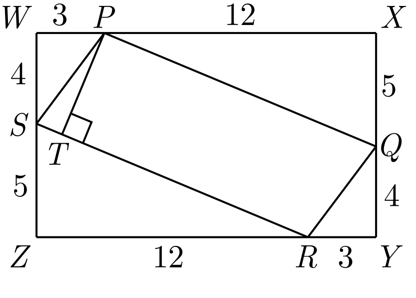


(أ) 16 (ب) 24 (ج) 30 (د) 32

الحل: الإجابة هي (أ): المنطقة غير المظللة هي مثلث مساحته تساوي $\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$، مساحة المستطيل هي $8 \times 4 = 32$. إذن، مساحة المنطقة المظللة هي $32 - 16 = 16$.

(٢) [Gauss 2012] رسمنا متوازي أضلاع $PQRS$ داخل المستطيل $WXYZ$ كما هو مبين في الشكل المرفق. إذا كان $\overline{PT} \perp \overline{SR}$ فما طول ST ؟

(أ) $\frac{12}{13}$ (ب) $\frac{13}{12}$ (ج) $\frac{16}{13}$ (د) $\frac{13}{5}$



الحل: الإجابة هي (ج): استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لكل من المثلثين $\triangle PWS$ و

$\triangle SZR$ نجد أن

$$PS = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$SR = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$$

مساحة المثلث $\triangle PWS$ هي $[PWS] = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

مساحة المثلث $\triangle RYQ$ هي $[RYQ] = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

مساحة المثلث $\triangle SZR$ هي $[SZR] = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$

مساحة المثلث $\triangle QXP$ هي $[QXP] = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30$

من ذلك نجد أن مساحة متوازي الأضلاع $SPQR$ هي

$$[SPQR] = 15 \times 9 - \left(6 + 6 + 30 + 30\right) = 63$$

ولكن

$$[SPQR] = PT \times SR$$
$$63 = PT \times 13$$

إذن، $PT = \frac{63}{13}$. وبهذا نجد استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle PST$ أن

$$ST = \sqrt{5^2 - \left(\frac{63}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{169}} = \frac{16}{13}.$$

(٣) [Aust.MC 1984] أي من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون عدد أقطار مضلع محدب ؟

(أ) 5 (ب) 9 (ج) 27 (د) 45

الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن عدد أضلاع المضلع هو n. كل رأس من رؤوس

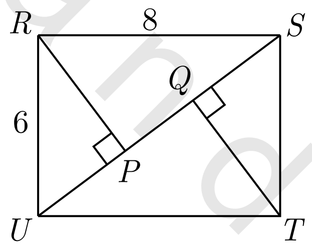
المضلع يقع عليه $n-3$ قطراً (القطع المستقيمة من الرأس إلى جميع الرؤوس الأخرى ما عدا الرأسين المجاورين هي أقطار في المضلع). إذن، عدد أقطار المضلع يساوي $\frac{n(n-3)}{2}$ وبتجريب الأعداد نجد أن

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
عدد الأقطار	2	5	9	14	20	27	35	44	54

إذن، العدد 45 لا يمكن أن يكون عدد أقطار لمضلع محدب.

(٤) [Aust.MC 1980] في المستطيل $RSTU$ المرفق، $RS=8$، $RU=6$، كل من $\overline{RP}$ و $\overline{QT}$ عمودي على $\overline{SU}$، $UP=QS$. PQ يساوي:

(أ) 1.5 (ب) 2.8 (ج) 3.6 (د) 6.4



الحل: الإجابة هي (ب): نفرض أن $QS=UP=x$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $US=10$ إذن، $PQ=10-2x$. الآن، $\triangle UPR \sim \triangle URS$. من ذلك نجد أن $\frac{UR}{US}=\frac{UP}{UR}$. أي أن $\frac{6}{10}=\frac{x}{6}$. وبهذا فإن $x=3.6$ ويكون $PQ=10-2\times 3.6=2.8$.

حل آخر: استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا $PR^2=UR^2-UP^2=36-x^2$ و $RS^2=RP^2+PS^2$. أي أن

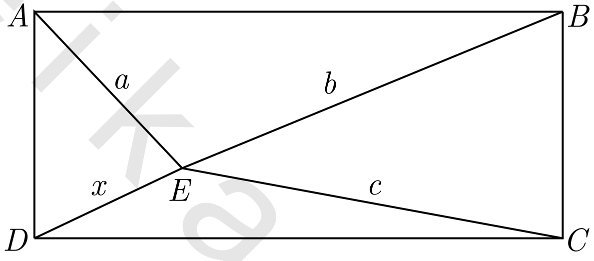
$$64=\left(36-x^2\right)+(10-x)^2=36-x^2+100-20x+x^2\,.$$

من ذلك نجد أن $x = 3.6$ ويكون $PQ = 10 - 2 \times 3.6 = 2.8$.

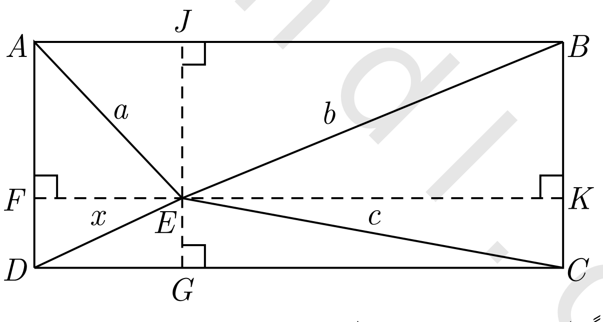
(٥) [Aust.MC 1979] في المستطيل $ABCD$ المرفق، E نقطة داخل المستطيل، $AE = a$ ، $BE = b$ ، $CE = c$ ، $DE = x$. عندئذ:

(أ) $x = a - b + c$ (ب) $x = b + c - a$

(ج) $x^2 = a^2 - b^2 + c^2$ (د) $x^2 = a^2 + b^2 - c^2$



الحل: الإجابة هي (ج): ارسم النقاط F ، G ، J ، K كما هو مبين.



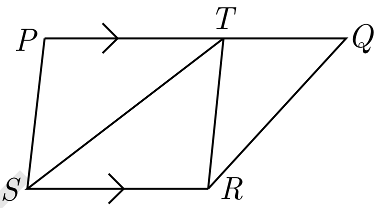
عندئذ، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$\begin{aligned} x^2 + b^2 &= (DG^2 + GE^2) + (EK^2 + KB^2) \\ &= FE^2 + GE^2 + GC^2 + AF^2 \\ &= (FE^2 + AF^2) + (GE^2 + GC^2) \\ &= a^2 + c^2 \end{aligned}$$

إذن، $x^2 = a^2 + c^2 - b^2$.

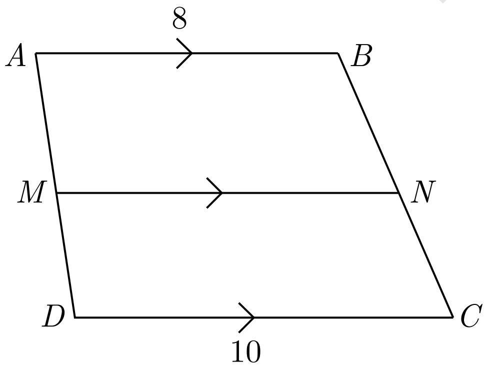
(٦) [Aust.MC 1981] في الشكل المرفق، $PQRS$ شبه منحرف فيه $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$، $PQ = 20$ سم، $SR = 12$ سم ومساحة المثلث $\triangle RST$ تساوي 60 سم^{٢}. ما مساحة شبه المنحرف $PQRS$ بالسنتمترات المربعة ؟

(أ) 160 (ب) 170 (ج) 180 (د) 320



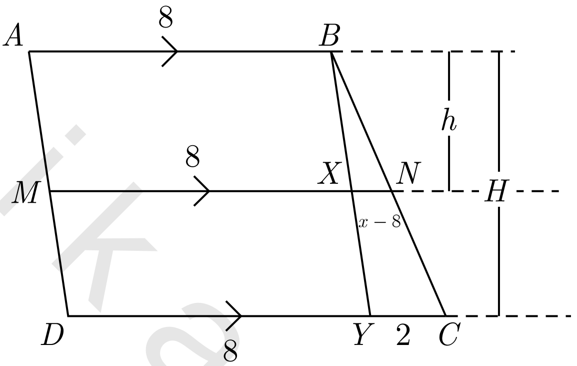
الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن h هو ارتفاع شبه المنحرف $PQRS$. عندئذ، h هو ارتفاع المثلث $\triangle RST$. من ذلك نجد أن $60 = h \times 12 \times \frac{1}{2}$. أي أن $h = 10$. إذن، $[PQRS] = \frac{1}{2}(20+12) \times 10 = 160$.

(٧) [Aust.MC 1979] في الشكل المرفق، $ABCD$ شبه منحرف، $\overline{DC} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{MN}$. $\overline{MN}$ يقسم مساحة شبه المنحرف $ABCD$ إلى نصفين متساويين. إذا كان $AB = 8$ و $DC = 10$ فما طول MN ؟



(أ) $\sqrt{80}$ (ب) 9 (ج) $\sqrt{82}$ (د) 10

الحل: الإجابة هي (ج): أنشئ $\overline{BY} \parallel \overline{AD}$ وافرض أن ارتفاع $\triangle BXN$ يساوي h وأن ارتفاع $\triangle BYC$ يساوي H وافرض أن $MN = x$ كما هو مبين في الشكل أدناه.



بما أن $\triangle BYC \sim \triangle BXN$ فإن $\frac{h}{H} = \frac{x-8}{2}$. أي أن $h = \frac{x-8}{2} \times H$. وبما أن $[ABCD] = 2[ABNM]$ فإن

$$\frac{2(x+8)}{2} \times h = \frac{(8+10)}{2} \times H$$

$$(x+8)\frac{(x-8)}{2} \times H = 9 \times H$$

$$x^2 - 64 = 18$$

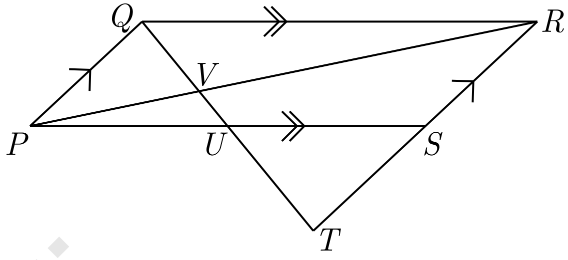
$$x^2 = 82$$

$$x = \sqrt{82}$$

(٨) [Aust.MC 1980] $PQRS$ متوازي أضلاع. V، U، T نقاط تقاطع $\overline{QT}$ مع $\overline{PR}$، $\overline{PS}$، $\overline{RS}$ على التوالي كما هو مبين في الشكل المرفق. إذا

كان $QU = 3$ و $QT = 6$ فإن QV يساوي ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 2.5 (د) 3



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $\triangle TQR \sim \triangle TUS$ فإن

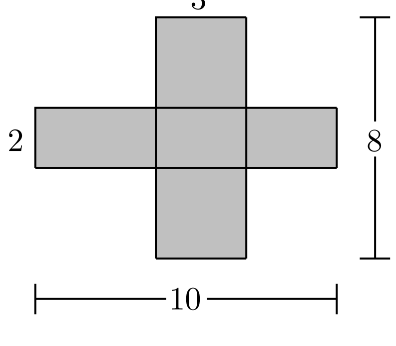
$$\frac{TS}{TR} = \frac{TU}{TQ} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

وبما أن $\triangle TRV \sim \triangle QPV$ فإن

$$\frac{QV}{TV} = \frac{QP}{TR} = \frac{TS}{TR} = \frac{1}{2}$$

إذن، $TS = \frac{1}{2}TR$. وبهذا فإن $QP = RS = TS$ ويكون $QV = \frac{1}{3}QT = 2$.

(٩) [AJHSME 1988] الشكل المظلل المرفق هو تقاطع مستطيلين متعامدين. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

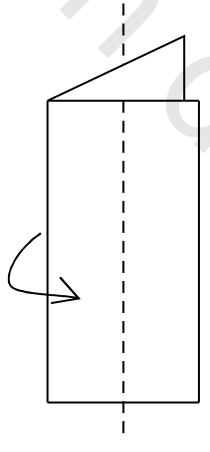


(أ) 23 (ب) 38 (ج) 44 (د) 46

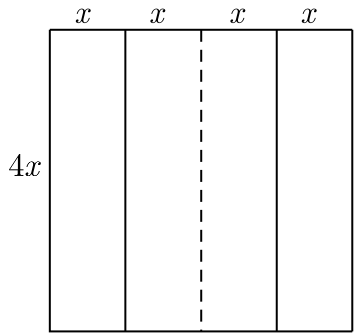
الحل: الإجابة هي (ب): المنطقة المظللة هي اتحاد مستطيلين مشتركين في مستطيل صغير. وبهذا فمساحة المنطقة هي $38 = 3 \times 2 - 8 \times 3 + 10 \times 2$.

(١٠) [AJHSME 1989] طوينا قطعة ورق مربعة الشكل من منتصفها عمودياً، بعد ذلك قطعنا الورقة المطوية إلى نصفين من الخط المنقط كما هو مبين في الشكل. ينشأ عن هذه العملية ثلاثة مستطيلات، أحدهما كبير واثنان صغيران. ما النسبة بين محيط أحد المستطيلين الصغيرين إلى محيط المستطيل الكبير ؟

(أ) $\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{6}$



الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن المستطيلات التي سنحصل عليها هي الثلاثة مستطيلات المبينة في الشكل أدناه.



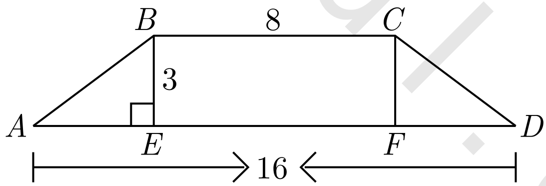
محيط أحد المستطيلين الصغيرين هو $2(x + 4x) = 10x$.

محيط المستطيل الكبير هو $2(2x + 4x) = 12x$.

إذن، النسبة بين المحيطين هي $\frac{10x}{12x} = \frac{5}{6}$.

(١١) [AMC8 1999] في شبه المنحرف $ABCD$ المرفق، $AB = CD$. محيط شبه المنحرف $ABCD$ يساوي:

(أ) 30 (ب) 32 (ج) 34 (د) 48



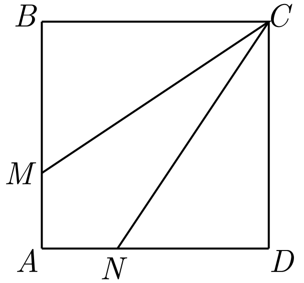
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $AE = FD = 4$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$AB = CD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

إذن، محيط شبه المنحرف $ABCD$ هو $34 = 5 + 5 + 8 + 16$.

(١٢) [AMC8 1999] طول ضلع المربع $ABCD$ المرفق يساوي 3، القطعتان

$\overline{CM}$ و $\overline{CN}$ تقسمان المربع إلى ثلاث مناطق متساوية المساحة. ما طول CM ؟

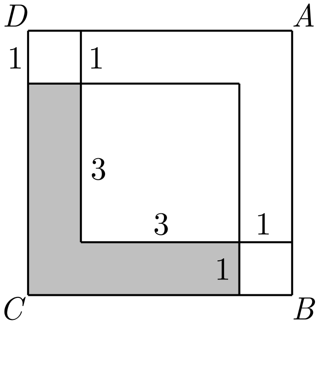


(أ) $\sqrt{12}$ (ب) $\sqrt{13}$ (ج) $\sqrt{14}$ (د) $\sqrt{15}$

الحل: الإجابة هي (ب): مساحة المربع تساوي $3 \times 3 = 9$. ولذا فإن مساحة كل من المناطق الثلاث تساوي $9 \div 3 = 3$. الآن، مساحة $\triangle CBM$ هي $\frac{1}{2} \times BC \times BM$. إذن، $\frac{1}{2} \times 3 \times BM = 3$. وبهذا فإن $BM = 2$. الآن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $CM = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

(١٣) [AMC8 2000] رسمنا داخل المربع $ABCD$ ثلاثة مربعات كما هو مبين في الشكل. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

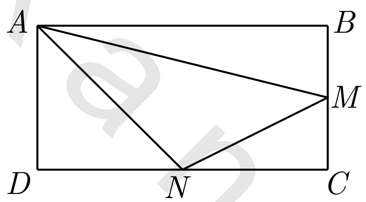
(أ) 7 (ب) 10 (ج) 14 (د) 15



الحل: الإجابة هي (أ): طول ضلع المربع $ABCD$ يساوي $5 = 1 + 3 + 1$. إذن، مساحته تساوي 25. مساحة الثلاثة مربعات الداخلية هي $11 = 9 + 1 + 1$. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $7 = \frac{1}{2} \times 14 = \frac{1}{2}(25 - 11)$.

(١٤) [AMC8 2000] مساحة المستطيل $ABCD$ المبين في الشكل المرفق تساوي 72. مساحة المثلث $\triangle AMN$ حيث M وَ N نقطتا منتصفا القطعتين $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ تساوي:

(أ) 21 (ب) 27 (ج) 30 (د) 36



الحل: الإجابة هي (ب): ليكن $AB = 2y$ ، $BC = 2x$. عندئذ $[ABM] = xy$ و $[MNC] = \frac{1}{2}xy$ و $[ADN] = xy$. فنحصل على

$$[AMN] = 4xy - xy - xy - \frac{1}{2}xy = \frac{3}{2}xy$$

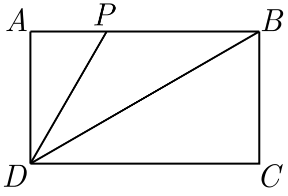
لكن

$$[ABCD] = 72 = (2x)(2y)$$

ومنه $xy = 18$ وبالتالي $[AMN] = \frac{3}{2} \cdot 18 = 27$.

(١٥) [AMC10 2000] في المستطيل $ABCD$ المرفق، $AD = 1$ ، P نقطة على $\overline{AB}$. $\overline{DB}$ و $\overline{DP}$ يثلثان الزاوية $\widehat{ADC}$. ما محيط المثلث $\triangle BDP$ ؟

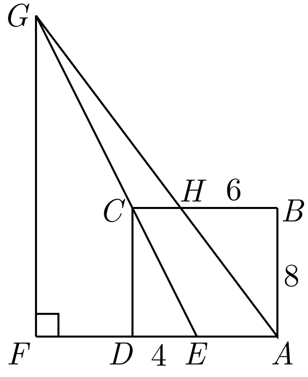
(أ) $2+\dfrac{4\sqrt{3}}{2}$ (ب) $2+2\sqrt{2}$ (ج) $\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$ (د) $2+\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\widehat{ADP}=\widehat{PDB}=\widehat{BDC}=30^\circ$ فإن $PD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ وإن $DB=2$. إذن، $DC=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. كما أن $AP=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. إذن، $PB=\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. وبهذا فإن محيط المثلث $\triangle BDP$ يساوي

$$2+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}=2+\frac{4\sqrt{3}}{2}\,.$$

(١٦) [AMC10A 2003] في المستطيل $ABCD$ المبين في الشكل، $AB=8$ ، $BC=9$ ، H نقطة على $\overline{BC}$ حيث $BH=6$ ، E نقطة على $\overline{AD}$ حيث $DE=4$ ، يتقاطع المستقيمان EC و AH في النقطة G، F نقطة على المستقيم AD حيث $\overline{GF}\perp\overline{AF}$. ما طول GF ؟



(أ) 30 (ب) 28 (ج) 24 (د) 20

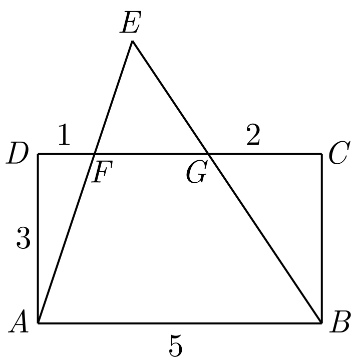
الحل: الإجابة هي (د): لدينا $\widehat{GHC} = \widehat{AHB}$ بالتقابل بالرأس. كما أن $\widehat{F} = \widehat{B} = 90°$ وأن $\widehat{BHA} = \widehat{HAD}$ لأنهما تبادليتان داخلياً. إذن، $\triangle GFA \sim \triangle ABH$. أيضاً $\triangle GCH \sim \triangle GEA$، كما أن $EA = 5$ وأن $CH = 3$. الآن،

$$\frac{GH}{GA} = \frac{CH}{EA} = \frac{3}{5}$$

ولذا فإن $\frac{HA}{GA} = \frac{2}{5}$. ولكن $HA = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. إذن، $GA = 10 \times \frac{5}{2} = 25$. ولكن $\frac{GF}{AB} = \frac{GA}{AH}$. أي أن $\frac{GF}{8} = \frac{25}{10}$. وبهذا فإن $GF = \frac{25 \times 8}{10} = 20$.

(١٧) [AMC10B 2003] في المستطيل $ABCD$ المرفق، $AB = 5$، $BC = 3$. F و G نقطتان على $\overline{CD}$ حيث $DF = 1$ و $GC = 2$. E نقطة تقاطع المستقيمين AF و BG. ما مساحة المثلث $\triangle AEB$ ؟

(أ) 10 (ب) $\frac{21}{2}$ (ج) 12 (د) $\frac{25}{2}$



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $AB \parallel FG$ فإن $\triangle EAB \sim \triangle EFG$. من ذلك نرى أن

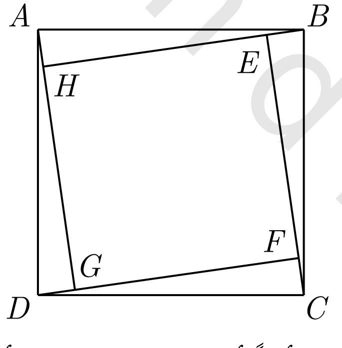
$$\frac{EF}{EA}=\frac{EG}{EB}=\frac{FG}{AB}=\frac{2}{5}$$

لنفرض أن h هو ارتفاع المثلث $\triangle EAB$. عندئذ، من التناسب نجد أن $\frac{h-3}{h}=\frac{2}{5}$. وبهذا فإن $h=5$. إذن،

$$[EAB]=\frac{1}{2}\times 5\times 5=\frac{25}{2}$$

(١٨) [AMC10A 2005] طول ضلع المربع $ABCD$ المبين في الشكل المرفق يساوي $\sqrt{50}$، $BE=1$. ما مساحة المربع الداخلي $EFGH$ ؟

(أ) 25 (ب) 32 (ج) 36 (د) 40



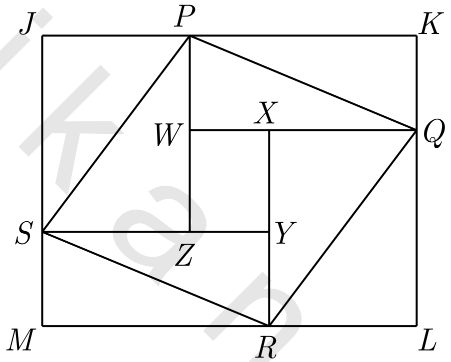
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أولاً أن المثلثات القائمة الأربعة متطابقة (لماذا ؟). بما أن $BE=1$ فإن $AH=1$. أيضاً، $HB=HE+BE=HE+1$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$\begin{aligned}1^2+(HE+1)^2&=50\\HE+1&=7\\HE&=6\end{aligned}$$

وبهذا فإن مساحة المربع $EFGH$ تساوي $6^2 = 36$.

(١٩) [Pascal 2010] رسمنا المعين $PQRS$ داخل المستطيل $JKLM$ كما هو مبين في الشكل. إذا كان $\overline{JK} \parallel \overline{QW} \parallel \overline{YS}$ ، $\overline{JM} \parallel \overline{PZ} \parallel \overline{XR}$ ، $JP = 39$ ، $JS = 52$ ، $KQ = 25$ فما محيط المستطيل $WXYZ$ ؟

(أ) 48 (ب) 58 (ج) 84 (د) 96



الحل: الإجابة هي (د): استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle SJP$ لدينا $SP = \sqrt{52^2 + 39^2} = 65$. وبما أن $PQRS$ معين فإن $SP = PQ = QR = SR = 65$. وباستخدام مبرهنة فيثاغورس مرة أخرى للمثلث $\triangle PKQ$ نجد أن $KP = \sqrt{65^2 - 25^2} = 60$. بما أن $\overline{KQ} \parallel \overline{PW}$ و $\overline{PK} \parallel \overline{WQ}$ فإن $PKQW$ مستطيل ويكون $PW = KQ = 25$. وبالمثل، $JPZS$ مستطيل ومن ثم $PZ = JS = 52$. إذن، $WZ = PZ - PW = 52 - 25 = 27$. أيضاً، $SYRM$ مستطيل. بما أن $\overline{JM} \parallel \overline{KL}$ و $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$ و $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ فإن $\widehat{MSR} = \widehat{KQP}$ وإن $\widehat{SRM} = \widehat{QPK}$. الآن، $\triangle SMR \equiv \triangle QKP$ (ASA). إذن،

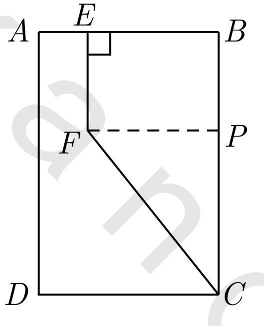
$MR = KP = 60$. وبهذا يكون

$$ZY = SY - SZ = MR - JP = 60 - 39 = 21\,.$$

إذن، محيط المستطيل $WXYZ$ يساوي $2(21 + 27) = 96$.

(٢٠) [Pascal 2007] قسمنا المستطيل $ABCD$ إلى منطقتين $AEFCD$ و $EBCF$ متساويتي المساحة كما هو مبين في الشكل المرفق. إذا كان $EB = 40$ ، $AD = 80$ ، $EF = 30$ فما طول AE ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 24



الحل: الإجابة هي (ب): ارسم $\overline{AB} \parallel \overline{FP}$ ويقطع $\overline{BC}$ في النقطة P . الآن، $EBPF$ مستطيل، ومن ثم فإن $EB = FP = 40$ و $EF = BP = 30$. كما أن $PC = 80 - 30 = 50$. الآن،

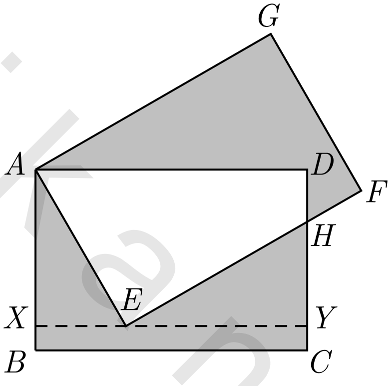
$$\begin{aligned}[EBCF] &= [EBPF] + [FPC]\\ &= 30 \times 40 + \frac{1}{2} \times 40 \times 50 = 2200\end{aligned}$$

ومن ذلك فإن مساحة المستطيل $ABCD$ هي $2 \times 2200 = 4400$. إذن، $AB = \frac{4400}{80} = 55$ ويكون $AE = AB - EB = 55 - 40 = 15$.

(٢١) [Cayley 2007] في الشكل المرفق، دورنا المستطيل $ABCD$ حول A لنحصل على المستطيل $AEFG$ حيث $\widehat{BAE} = 30^\circ$ ، $AB = 12$ ، $BC = 18$. مساحة المنطقة المظللة تساوي ؟

(أ) $432 - 132\sqrt{3}$ (ب) $532 - 132\sqrt{3}$

(ج) $536 - 132\sqrt{3}$ (د) $538 - 132\sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أولاً أن المنطقة غير المظللة $AEHD$ مشتركة بين المستطيلين، وبهذا فمساحة المنطقتين المظللتين متساوية لأن للمستطيلين المساحة نفسها. وبهذا فإن مساحة المنطقة المظللة تساوي $2[AEHCB]$. الآن، ارسم القطعة المستقيمة $\overline{XEY}$ موازية للقطعة $\overline{BC}$. بما أن $\triangle AEX$ هو مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ فإن $EX = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ وإن $AX = \sqrt{3}EX = 6\sqrt{3}$. إذن، $XB = AB - AX = 12 - 6\sqrt{3}$. أيضاً، في $\triangle EYH$ ،

$$\widehat{HEY} = 180^\circ - (\widehat{AEX} + \widehat{AEF}) = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$$ ،

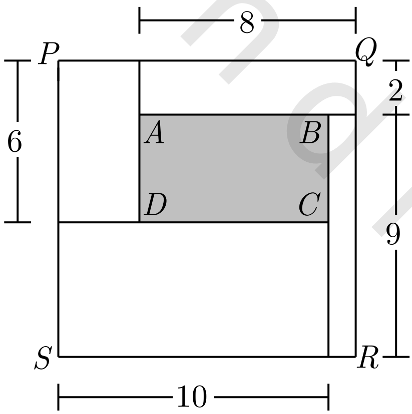
$EY = XY - XE = 18 - 6 = 12$. وبهذا فإن $HY = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ لأن

$\triangle EYH$ هو مثلث $90° - 60° - 30°$. ومن ذلك نجد أن مساحة المنطقة المظللة هي

$$\begin{aligned} 2[AEHCB] &= 2\Big[[\triangle AEX] + [XYCB] + [\triangle EHY]\Big] \\ &= 2\left[\frac{1}{2}\times 6\times 6\sqrt{3} + 18(12-6\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\times 12\times 4\sqrt{3}\right] \\ &= 2\Big[18\sqrt{3} + 216 - 108\sqrt{3} + 24\sqrt{3}\Big] \\ &= 432 - 132\sqrt{3} \end{aligned}$$

(٢٢) [Fermat 2011] قسمنا المربع $PQRS$ إلى خمسة مستطيلات كما هو مبين في الشكل. مساحة المستطيل المظلل هي:

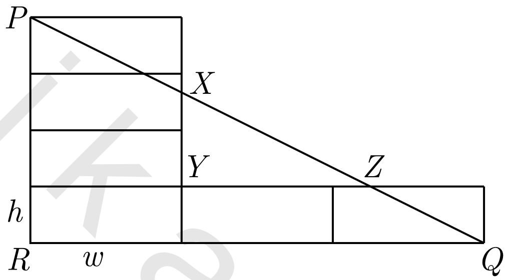
(أ) 16 (ب) 22 (ج) 28 (د) 49



الحل: الإجابة هي (ج): $QR = 2 + 9 = 11$. $AD = 6 - 2 = 4$. $DC = 8 - (11 - 10) = 7$. إذن، مساحة المستطيل $ABCD$ هي $4 \times 7 = 28$.

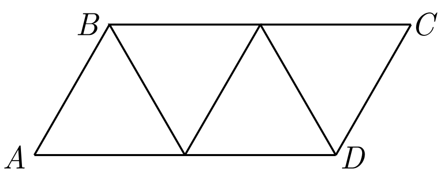
(٢٣) [Fermat 2011] طول كل من المستطيلات الستة المبينة في الشكل المرفق يساوي w وعرض كل منها يساوي h. إذا كان $YZ = 2\,XY$ فإن $\dfrac{h}{w}$ يساوي:

(أ) $\dfrac{1}{3}$ (ب) $\dfrac{3}{8}$ (ج) $\dfrac{1}{2}$ (د) $\dfrac{3}{4}$



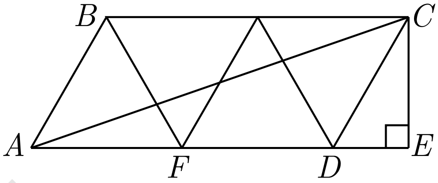
الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أن $\triangle XYZ \sim \triangle PRQ$ لأن $\widehat{PQR} = \widehat{XZY}$. من ذلك نجد أن $\dfrac{ZY}{QR} = \dfrac{XY}{PR} = \dfrac{XZ}{PQ}$. أي أن $\dfrac{ZY}{XY} = \dfrac{QR}{PR}$. ولكن، $ZY = 2\,XY$، $QR = 3w$، $PR = 4h$. إذن، $2 = \dfrac{2XY}{XY} = \dfrac{3w}{4h}$. وبهذا فإن $\dfrac{3}{8} = \dfrac{h}{w}$.

(٢٤) [Fermat 1999] قسمنا متوازي الأضلاع $ABCD$ إلى أربعة مثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1 كما هو مبين في الشكل. ما طول القطر AC ؟



(أ) $\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{5}$ (ج) $\sqrt{7}$ (د) $\sqrt{10}$

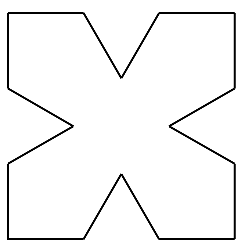
الحل: الإجابة هي (ج): من C أنشئ مستقيماً عمودياً على AD ويلاقي امتداد AD في النقطة E.



بما أن $\widehat{BAF}=60^\circ$ وأن $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$ فإن $\widehat{CDE}=60^\circ$. إذن، $\triangle CDE$ هو مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ فيه $CD=1$. من ذلك نجد أن $CE=\frac{\sqrt{3}}{2}$ وأن $DE=\frac{1}{2}$. إذن، $AE=\frac{5}{2}$ ونجد استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس أن

$$AC=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{7}.$$

(٢٥) [Euclid 2011] قطعنا قطعة من وسط كل من أضلاع مربع لإنشاء مثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1 كما هو مبين في الشكل. إذا كان طول ضلع المربع يساوي 3 فما محيط الشكل الناتج ؟

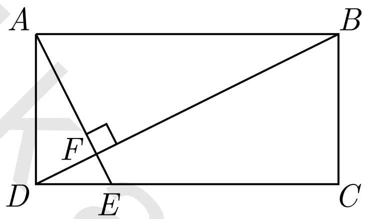


(أ) 12 (ب) 14 (ج) 16 (د) 18

الحل: الإجابة هي (ج): طول كل من القطع المبينة يساوي 1 وعددها 16. إذن، محيط الشكل يساوي 16.

(٢٦) [Euclid 2010] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل، $\overline{AE} \perp \overline{BD}$، $AF = 4$، $DF = 2$. ما مساحة الشكل الرباعي $BCEF$ ؟

(أ) 19 (ب) 22 (ج) 23 (د) 25



الحل: الإجابة هي (أ): استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $AD = \sqrt{(AF)^2 + (DF)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. لنفرض أن $\widehat{FAD} = x$. عندئذ، $\widehat{BAF} = 90^\circ - x$، $\widehat{ADF} = 90^\circ - x$، $\widehat{BDC} = 90^\circ - (90^\circ - x) = x$. إذن، $\triangle BFA \sim \triangle AFD \sim \triangle DFE$. من ذلك نجد أن $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{DA}{DF}$. أي أن $AB = \dfrac{4 \times 2\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}$. أيضاً، $\dfrac{FD}{FA} = \dfrac{FE}{FD}$ ويكون $FE = \dfrac{2 \times 2}{4} = 1$. إذن،

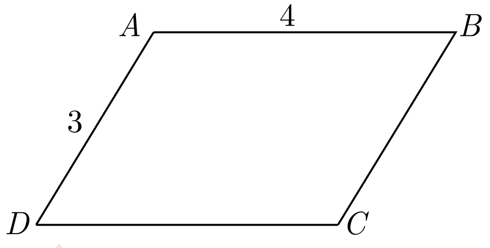
$$[BCEF] = [\triangle DCB] - [\triangle DFE]$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 19$$

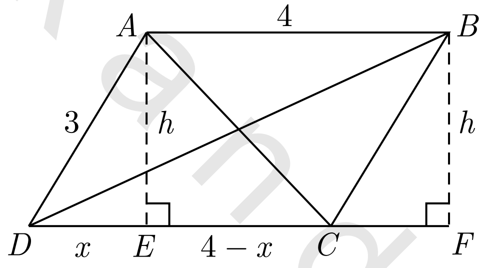
(٢٧) في الشكل المرفق $ABCD$ متوازي أضلاع فيه، $a = 3$، $b = 4$. ما قيمة

$(AC)^2 + (BD)^2$ ؟

(أ) 25 (ب) 30 (ج) 40 (د) 50



الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن h هو ارتفاع متوازي الأضلاع وأن $DE = x$ كما هو مبين في الشكل أدناه.



استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس في المثلث $\triangle AED$ نجد أن $h^2 + x^2 = 9$. بما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ نجد أن $\widehat{ADC} = \widehat{BCF}$. إذن، $\triangle BFC \equiv \triangle AED$. الآن، بتطبيق مبرهنة فيثاغورس للمثلثين $\triangle AEC$ و $\triangle BDF$ نجد أن

$$\begin{aligned}(AC)^2 &= h^2 + (4-x)^2\\ (BD)^2 &= h^2 + (4+x)^2\end{aligned}$$

إذن،

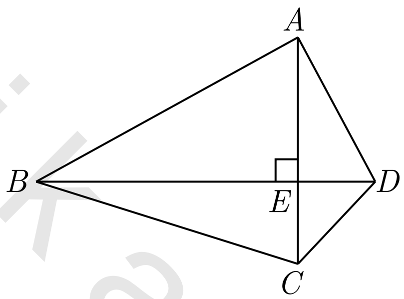
$$\begin{aligned}(AC)^2 + (BD)^2 &= h^2 + 16 - 8x + x^2 + h^2 + 16 + 8x + x^2\\ &= 2h^2 + 2x^2 + 32\end{aligned}$$

ولكن، $h^2 = 9 - x^2$. إذن،

$$(AC)^2 + (BD)^2 = 2(9 - x^2) + 2x^2 + 32 = 50\,.$$

(٢٨) في الشكل المرفق، $ABCD$ شكل رباعي قطراه متعامدان. إذا كان $AC = 4$، $BD = 6$ فما مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ ؟

(أ) 12 (ب) 24 (ج) 48 (د) 72

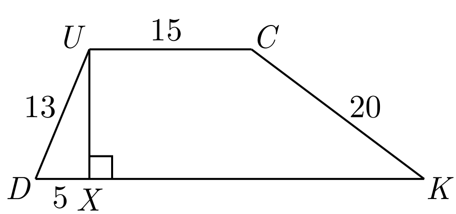


الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن

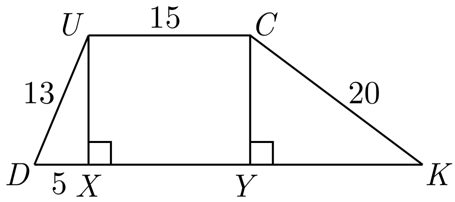
$$\begin{aligned}[ABCD] &= [\triangle ADC] + [\triangle ACB]\\ &= \frac{1}{2} \times ED \times AC + \frac{1}{2} BE \times AC\\ &= \frac{1}{2} \times AC \times [ED + EB] = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12\,.\end{aligned}$$

(٢٩) [Mathcounts 1992] ما مساحة شبه المنحرف المبين في الشكل المرفق ؟

(أ) 180 (ب) 210 (ج) 276 (د) 306



الحل: الإجابة هي (د): ارسم عموداً من C على DK ويلاقي DK في النقطة Y. عندئذ،



$$YK = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \quad \text{وَ} \quad UX = CY = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

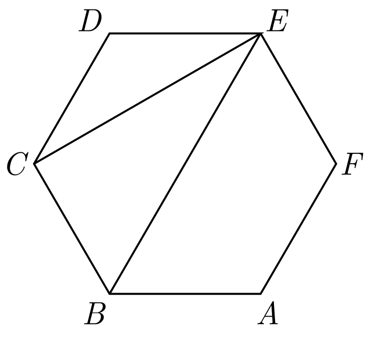
إذن،

$$\begin{aligned}[DUCK] &= [UDX] + [UCYX] + [CKY] \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 + 15 \times 12 + \frac{1}{2} \times 16 \times 12 = 306\end{aligned}$$

(٣٠) [Mathcounts 1986] إذا كان $ABCDEF$ سداسياً منتظماً طول ضلعه يساوي 6 فما مساحة المثلث $\triangle BCE$ ؟

(أ) $12\sqrt{3}$ (ب) $16\sqrt{3}$ (ج) $18\sqrt{3}$ (د) $20\sqrt{3}$

الحل: الإجابة هي (ج):



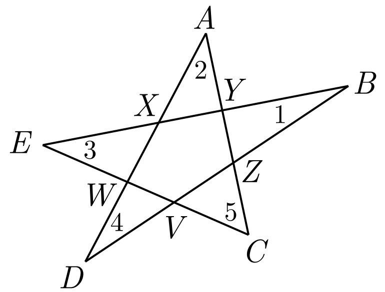
قياس كل من زوايا السداسي يساوي $120^\circ = \dfrac{4 \times 180}{6}$. بما أن $\triangle CDE$ متساوي الساقين فإن $\widehat{DCE} = \widehat{DEC} = 30^\circ$. إذن $\widehat{ECB} = 90^\circ$. وبما أن السداسي منتظم فإن $\overline{BE}$ ينصف $\widehat{B}$. ولذا فإن $\widehat{CBE} = 60^\circ$. ومن ذلك $\widehat{CEB} = 30^\circ$. إذن، $\triangle EBC$ هو مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. الآن، بما أن $BC = 6$ فإن $CE = 6\sqrt{3}$ ويكون $[EBC] = \dfrac{1}{2} \times 6 \times 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$.

(٣١) [MAΘ 1990] ثماني محدب يحوي زاويتين متطابقتين. قياس كل من زواياه الأخرى يساوي ثلاثة أضعاف قياس إحدى الزاويتين المتطابقتين. ما قياس كل من الزوايا الكبرى ؟

(أ) 54° (ب) 108° (ج) 162° (د) 100°

الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن x هو قياس كل من الزاويتين المتطابقتين. إذن، $3x$ هو قياس كل من الزوايا الست الأخرى. من ذلك نرى أن $20x = 2x + 18x = 180 \times (8-2)$. أي أن $20x = 1080$. ومن ذلك نجد أن $x = 54^\circ$ ويكون $3x = 3 \times 54 = 162^\circ$.

(٣٢) [MAΘ 1987] ما مجموع قياس الزوايا 1، 2، 3، 4، 4، 5 في شكل النجمة المرفق ؟



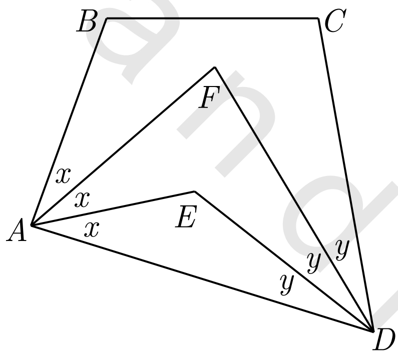
(أ) 180° (ب) 210° (ج) 270° (د) 360°

الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن المجموع هو x. لاحظ أن مجموع زوايا المثلثات الخمسة $\triangle AWC$، $\triangle EVB$، $\triangle DZA$، $\triangle CYE$، $\triangle BXD$ هو ضعف المجموع x مضافاً إليه مجموع زوايا الخماسي $VWXYZ$. إذن،

$$2x + 540^\circ = 900^\circ$$
$$x = 180^\circ$$

(٣٣) [Mathcounts 1991] في الشكل الرباعي $ABCD$ المرفق، $\widehat{ABC} = 110^\circ$ ، $\widehat{BCD} = 100^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{AFD}$ ؟

(أ) 60° (ب) 70° (ج) 75° (د) 80°



الحل: الإجابة هي (د): في $\triangle AFD$ لدينا

$$\widehat{AFD} + \widehat{FDA} + \widehat{FAD} = \widehat{AFD} + 2x + 2y = 180^\circ$$

إذن، $\widehat{AFD} = 180^\circ - 2(x+y)$. ولكن في الشكل الرباعي $ABCD$ لدينا $\widehat{B} + \widehat{C} + 3x + 3y = 360^\circ$. من ذلك نجد أن

$$x + y = \frac{360^\circ - 110^\circ - 100^\circ}{3} = 50^\circ$$

إذن، $\widehat{AFD} = 180^\circ - 2 \times 50^\circ = 80^\circ$.

(٣٤) [AHSME 1952] مساحة شبه منحرف تساوي 1400 متراً مربعاً وارتفاعه يساوي 50 متراً. إذا كان طول كل من قاعدتيه عدداً صحيحاً يقبل القسمة على 8 فما مجموع القيم الممكنة لأطوال القاعدة الكبرى ؟

(أ) 48 (ب) 56 (ج) 88 (د) 120

الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن طول القاعدة الكبرى هو $8a$ والصغرى $8b$. عندئذ،

$$\frac{1}{2} \times 50 \times (8a + 8b) = 1400$$
$$a + b = 7$$

وبما أن كلاً من a و b عدد صحيح موجب وأن $a > b$ فإن الحلول الممكنة هي ($a = 6$ و $b = 1$) أو ($a = 5$ و $b = 2$) أو ($a = 4$ و $b = 3$). إذن، مجموع قيم a هي $4 + 5 + 6 = 15$. وبهذا مجموع القيم الممكنة للقاعدة $8a$ هو $8 \times 15 = 120$.

(٣٥) [AHSME 1953] مساحة مثلث تساوي مساحة شبه منحرف. شبه المنحرف و المثلث لهما الارتفاع نفسه. طول قاعدة المثلث يساوي 18. ما متوسط طولي قاعدتي شبه المنحرف ؟

(أ) 9 (ب) 18 (ج) 27 (د) 36

الحل: الإجابة هي (أ): نفرض أن b_1 و b_2 طولا قاعدتي شبه المنحرف وأن h هو ارتفاع كل من المثلث وشبه المنحرف. إذن،

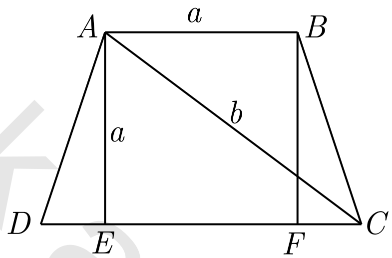
$$\frac{1}{2} \times h \times 18 = \frac{1}{2} \times h \times (b_1 + b_2)$$

من ذلك نجد أن $\frac{b_1 + b_2}{2} = 9$.

(٣٦) [AHSME 1953] إذا طابقت القاعدة الكبرى في شبه منحرف متساوي الساقين أحد القطرين وطابقت القاعدة الصغرى ارتفاع شبه المنحرف فإن النسبة بين القاعدة الصغرى إلى القاعدة الكبرى هي:

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{5}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

الحل: الإجابة هي (ب):



لنفرض $AB = AE = a$ وأن $DC = AC = b$. لاحظ أولاً أن $EF = a$.

وبما أن $\triangle BCF \equiv \triangle ADE$ فإن $DE = FC = \frac{b-a}{2}$. إذن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$b^2 = a^2 + \left[a + \frac{b-a}{2}\right]^2 = a^2 + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$4b^2 = 5a^2 + b^2 + 2ab$$

$$5a^2 + 2ab - 3b^2 = 0$$

$$(5a - 3b)(a + b) = 0$$

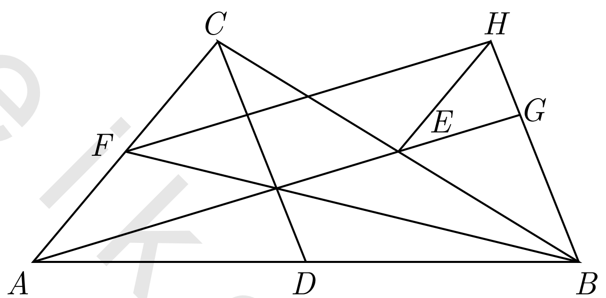
إذن، $5a - 3b = 0$. ويكون $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$.

(٣٧) [AHSME 1955] في الشكل المرفق، ABC مثلث، $\overline{AE}$، $\overline{BF}$، $\overline{CD}$ منصفات أضلاع المثلث، $\overline{FH} \parallel \overline{AE}$، $FH = AE$. أي من العبارات

التالية يمكن أن تكون خاطئة:

(أ) $AEHF$ متوازي أضلاع (ب) $HE = HG$

(ج) $BH = DC$ (د) $FG = \frac{3}{4}AB$



الحل: الإجابة هي (ب): العبارة (أ) صائبة لأن $\overline{FH} \parallel \overline{AE}$ وأن $FH = AE$.
العبارة (ج) صائبة لأنه عند تمديد $\overline{HE}$ موازياً للقطعة $\overline{AC}$ فإنه يلاقي $\overline{AB}$ في النقطة D. وبهذا فإن $\overline{DC}$ و $\overline{BH}$ ضلعان متقابلان في المثلثين المتطابقين $\triangle ACD$ و $\triangle HDB$. العبارة (د) صائبة لأن

$$FG = FE + EG = AD + \frac{1}{2}DB = \frac{3}{4}AB.$$

(٣٨) [AHSME 1957] كونا ثمانياً منتظماً بقطع مثلثات متطابقة قائمة ومتساوية الساقين من زوايا مربع. إذا كان طول ضلع المربع يساوي 1 فإن طول ساق كل من هذه المثلثات يساوي:

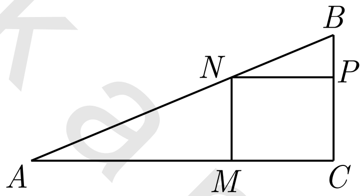
(أ) $\frac{2+\sqrt{2}}{3}$ (ب) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ (ج) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ (د) $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن طول ساق المثلث يساوي x. عندئذ، طول

ضلع الثماني يساوي $2x-1$. ولكن $2x-1$ هو طول وتر المثلث القائم. إذن، $\sqrt{2}x=\sqrt{x^2+x^2}=2x-1$. وبهذا فإن $x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

(٣٩) [AHSME 1957] في المثلث القائم $\triangle ABC$ المرفق، $BC=5$، $AC=12$، $AM=x$، $\overline{MN}\perp\overline{AC}$، $\overline{NP}\perp\overline{BC}$، N نقطة على $\overline{AB}$. إذا كان $y=MN+NP$ فإن محيط المستطيل $MNPC$ يساوي:

(أ) $5x+12$ (ب) $\dfrac{5x}{12}+\dfrac{12}{5}$ (ج) $\dfrac{144-7x}{6}$ (د) $\dfrac{5x}{12}+6$



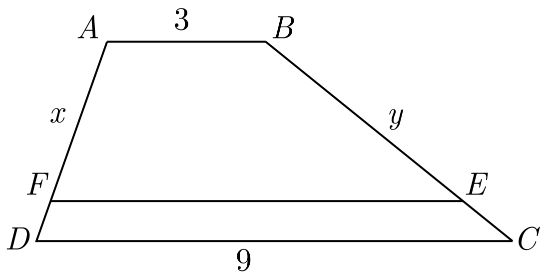
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\triangle ABC\sim\triangle ANM$. ولذا فإن $\dfrac{BC}{NM}=\dfrac{AC}{AM}$. أي أن $\dfrac{5}{NM}=\dfrac{12}{x}$. وبهذا فإن $NM=\dfrac{5x}{12}$. أيضاً، $NP=MC=12-x$. وبهذا يكون محيط المستطيل هو

$$2y=2(MN+NP)=2\left(12-x+\frac{5x}{12}\right)=\frac{144-7x}{6}$$

(٤٠) [AHDME 1957] طولا قاعدتي شبه منحرف 3 و 9 وطولا الساقين 4 و 6. رسمنا مستقيماً موازياً للقاعدتين ويقسم شبه المنحرف إلى شبهي منحرفين متساويي المحيط. هذا المستقيم يقسم الساقين بنسبة:

(أ) $\dfrac{4}{3}$ (ب) $\dfrac{3}{2}$ (ج) $\dfrac{4}{1}$ (د) $\dfrac{6}{1}$

الحل: الإجابة هي (ج):



بما أن محيط $ABEF$ يساوي محيط $EFDC$ فإن

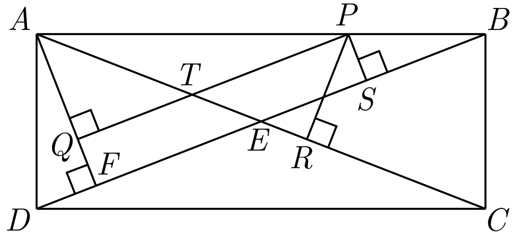
$$3 + x + y + EF = (4 - x) + 9 + (6 - y) + EF$$
$$x + y = 8$$

وبما أن $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{x}{y}$ فإن $\frac{2}{3}y + y = 8$. أي أن $y = \frac{24}{5}$. وبهذا فإن

$$\frac{y}{6-y} = \left(\frac{24}{5}\right) \Big/ \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{24}{6} = \frac{4}{1}.$$

(٤١) [AHSME 1958] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل، P نقطة على $\overline{AB}$، $\overline{PS} \perp \overline{BD}$، $\overline{PR} \perp \overline{AC}$، $\overline{AF} \perp \overline{BD}$، $\overline{PQ} \perp \overline{AF}$. طول $PR + PS$ يساوي:

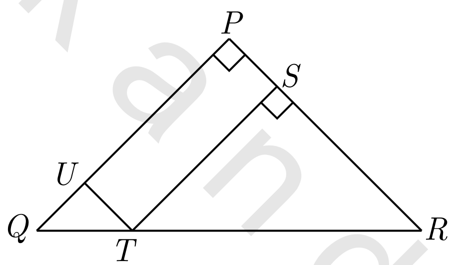
(أ) PQ (ب) AE (ج) EF (د) AF



الحل: الإجابة هي (د): لاحظ أن $\triangle ATQ \sim \triangle PTR$. ولذا فإن $\dfrac{PT}{AT} = \dfrac{PR}{AQ}$. وبما أن $\widehat{PAT} = \widehat{PBS} = \widehat{APT}$ فإن $PT = AT$. ولذا فإن $PR = AQ$، $PS = QF$. إذن، $PR + PS = AQ + QF = AF$.

(٤٢) [Aust.MC 1987] رسمنا المستطيل $PSTU$ داخل المثلث القائم والمتساوي الساقين $\triangle QPR$. إذا كان $PR = 12$ و $PS = x$ فإن مساحة المستطيل تساوي:

(أ) $12x - x^2$ (ب) $x^2 - 12x$ (ج) $72 - x^2$ (د) $12x - 2x^2$

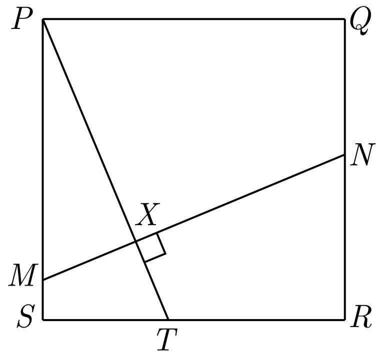


الحل: الإجابة هي (أ): $SR = 12 - x$. وبما أن $\widehat{STR} = \widehat{SRT} = 45°$ فإن $\triangle STR$ متساوي الساقين ويكون $ST = 12 - x$. إذن،

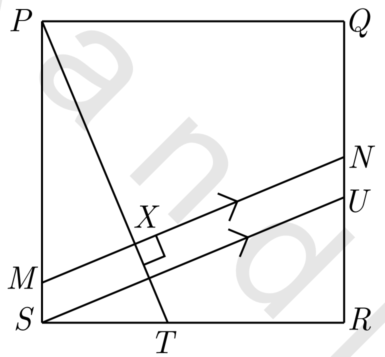
$$[PSTU] = x(12 - x) = 12x - x^2 .$$

(٤٣) [Aust.MC 1991] طول ضلع المربع $PQRS$ يساوي 12 سم. T نقطة على $\overline{RS}$ حيث ST يساوي 5 سم، $\overline{MN} \perp \overline{PT}$. إذا كان $MX = 4$ فإن XN يساوي:

(أ) 5 (ب) 7 (ج) 9 (د) 11



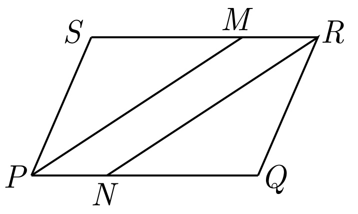
الحل: الإجابة هي (ج): ارسم $\overline{SU} \parallel \overline{MN}$. عندئذ، $SU = MN$ وَ $\triangle PST \equiv \triangle SRU$.



إذن، $SU = PT$. ولكن $PT = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. ومن ذلك يكون $MN = 13$ و $XN = 13 - 4 = 9$.

(٤٤) في الشكل المرفق، $PQRS$ متوازي أضلاع، $\overline{PM}$ منصف الزاوية $\widehat{P}$، $\overline{RN}$ منصف الزاوية $\widehat{R}$. إذا كان $SR = 6$ و $SM = 4$ فإن PN يساوي:

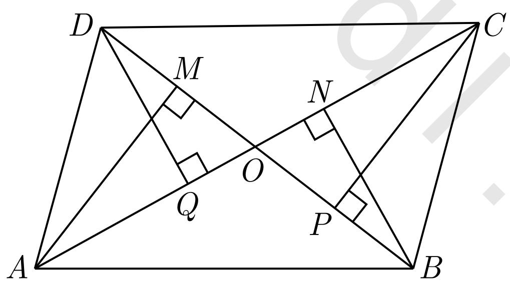
(أ) 1 (ب) 1.5 (ج) 2 (د) 2.5



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\widehat{R} = \widehat{P}$ فإن $\widehat{NRQ} = \widehat{MPS}$. أيضاً، $\widehat{S} = \widehat{Q}$ و $PS = QR$. إذن، $\triangle SPM \equiv \triangle QRN$. ومن ذلك نجد أن $SM = NQ = 4$. إذن، $PN = PQ - NQ = 6 - 4 = 2$.

(٤٥) في الشكل المرفق $ABCD$ شكل رباعي محدب، فيه المسافتان من A و C إلى القطر $\overline{BD}$ متساويتان والمسافتان من B و D إلى القطر $\overline{AC}$ متساويتان. إذا كان $DC = 5$ فإن AB يساوي:

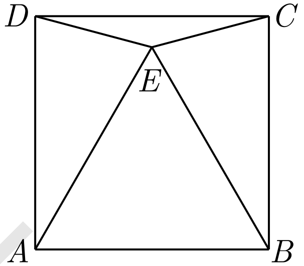
(أ) 3　　(ب) 4　　(ج) 5　　(د) المعلومات غير كافية



الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\triangle AOM \equiv \triangle COP$ لأن $\widehat{AOM} = \widehat{COP}$ و $AM = CP$، والمثلثان قائما الزاوية. إذن، $OA = OC$. وبالمثل، $OB = OD$. من ذلك يكون $ABCD$ متوازي أضلاع. إذن، $AB = DC = 5$.

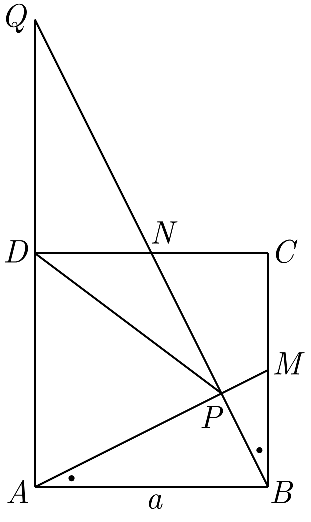
(٤٦) E نقطة داخل المربع $ABCD$ بحيث أن $\triangle ABE$ متساوي الأضلاع. إذا كان $DE = 3$ فإن CE يساوي:

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) المعلومات غير كافية



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $AD = AB = AE = EB = BC$ وأن $\widehat{DAE} = \widehat{CBE} = 30^\circ$ فإن $\triangle DAE \equiv \triangle CBE$ ويكون $CE = DE = 3$.

(٤٧) $ABCD$ مربع طول ضلعه a، M نقطة منتصف $\overline{BC}$، N نقطة منتصف $\overline{CD}$. إذا كانت P نقطة تقاطع $\overline{AM}$ و $\overline{BN}$ فإن DP يساوي:

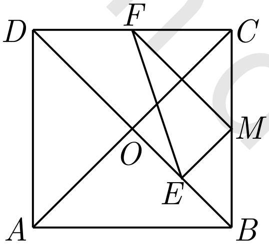


(أ) $\frac{a}{2}$ (ب) a (ج) $2a$ (د) a^2

الحل: الإجابة هي (ب): ارسم Q نقطة تقاطع امتدادي $\overline{AD}$ و $\overline{BN}$. الآن، $\triangle ABM \equiv \triangle BCN$. من ذلك نجد أن $\widehat{PAB} = \widehat{PBM}$. إذن، $\widehat{PAB} + \widehat{PBA} = 90^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{APB} = 90^\circ$. الآن، $\triangle QDN \equiv \triangle BCN$. ولذا فإن $QD = BC = a$. إذن، $\triangle QPA$ مثلث قائم الزاوية حيث $\overline{PD}$ منصف $\overline{AQ}$. وبهذا فإن $PD = \frac{AQ}{2} = a$.

(٤٨) O هي نقطة تقاطع قطري المربع $ABCD$، E نقطة منتصف $\overline{BO}$ و F نقطة منتصف $\overline{CD}$. إذا كان $AB = \sqrt{10}$ فإن EF يساوي:

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 2.5 (د) $\sqrt{10}$

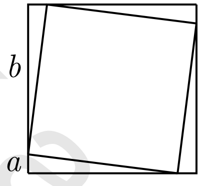


الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن M نقطة منتصف $\overline{BC}$. الآن، $\overline{MF}$ القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعي المثلث $\triangle BCD$. إذن $\overline{MF} \parallel \overline{BD}$ و $MF = \frac{BD}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2}$. وبالمثل، EM القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعي المثلث $\triangle BOC$. إذن، $\overline{EM} \parallel \overline{OC}$ و $EM = \frac{\sqrt{20}}{4}$. الآن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle EMF$ نجد أن

$$EF = \sqrt{FM^2 + EM^2} = \sqrt{\frac{20}{4} + \frac{20}{16}} = \sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{10}{4} = 2.5\,.$$

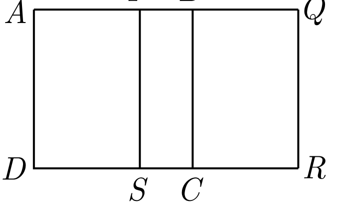
(٤٩) [AMC8 2012] رسمنا مربعاً مساحته 4 داخل مربع مساحته 5 كما هو مبين في الشكل المرفق. كل رأس من رؤوس المربع الصغير يقسم ضلع المربع الكبير إلى قطعتين طول القطعة الصغرى a وطول القطعة الكبرى b. ما قيمة ab ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 1



الحل: الإجابة هي (ج): طول ضلع المربع الكبير يساوي $\sqrt{5}$ وطول ضلع المربع الصغير يساوي 2. إذن، $a + b = \sqrt{5}$ و $a^2 + b^2 = 4$. من ذلك نجد أن $a^2 + 2ab + b^2 = 5$ و $a^2 + b^2 = 4$. أي أن $2ab + 4 = 5$. وبهذا فإن $ab = \frac{1}{2}$.

(٥٠) [AMC8 2011] في الشكل المرفق، كونا المستطيل $AQRD$ الذي بعداه 15 و 25 من تقاطع المربعين المتطابقين $ABCD$ و $PQRS$. ما نسبة مساحة المستطيل $PBCS$ إلى مساحة المستطيل $AQRD$ ؟



(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$

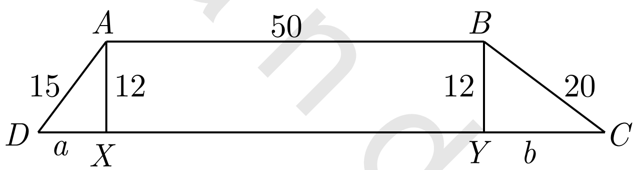
الحل: الإجابة هي (أ): نفرض أن $AP = x$ وأن $PB = y$. عندئذ، $x + y = 15$ و $2x + y = 25$. من ذلك نجد أن $x = 10$ و $y = 5$. الآن

$$\frac{[PBCS]}{[AQRD]} = \frac{5 \times 15}{15 \times 25} = \frac{1}{5}.$$

(٥١) [AMC8 2011] $ABCD$ شبه منحرف فيه، $AD = 15$، $AB = 50$، $BC = 20$ وارتفاعه 12. ما مساحته ؟

(أ) 600 (ب) 650 (ج) 700 (د) 750

الحل: الإجابة هي (د):



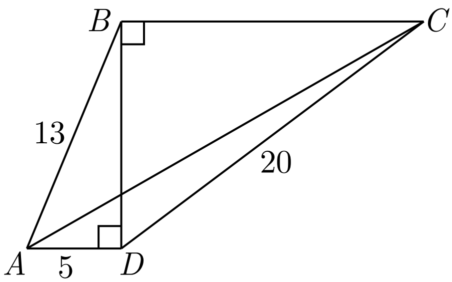
$$a = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$$
$$b = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$$

من ذلك نجد أن $DC = 9 + 50 + 16$. وبهذا فمساحة شبه المنحرف هي

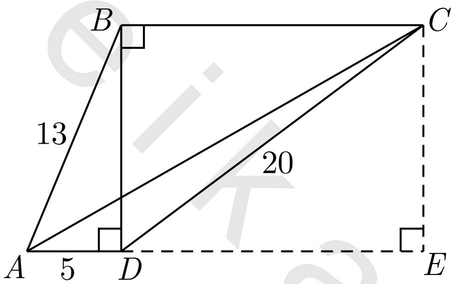
$$\frac{1}{2} \times (AB + DC) \times 12 = \frac{1}{2} \times 125 \times 12 = 750.$$

(٥٢) [Cayley 2005] في الشكل المرفق، $AB = 13$، $DC = 20$، $AD = 5$. طول AC أقرب إلى:

(أ) 20 (ب) 22 (ج) 23 (د) 24



الحل: الإجابة هي (د): ارسم عموداً من C يلاقي امتداد AD في النقطة E. من المثلث القائم $\triangle ADB$ نجد أن



$$BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12 = CE$$

ومن المثلث القائم $\triangle DBC$ نجد أن

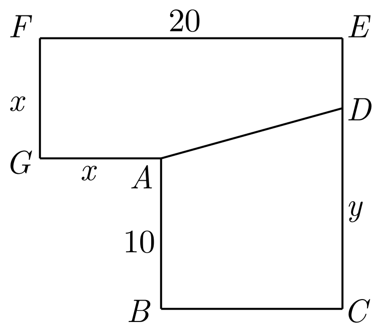
$$BC = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16 = DE$$

وأخيراً من المثلث القائم $\triangle AEC$ نجد أن

$$AC = \sqrt{21^2 + 12^2} = \sqrt{585} \approx 24.4\,.$$

(٥٣) [Cayley 2004] في الشكل المرفق، $ABCDEFG$ غرفة فيها $\widehat{E}$ قائمة وكل من ركنيها عند C و F مربع، $EF = 20$ ، $AB = 10$ ، $AG = GF$ ، مساحتها 280. قسمنا الغرفة بحائط AD إلى غرفتين متساويتي المساحة. ما طول DC ؟

(أ) 12 (ب) $\frac{40}{3}$ (ج) 15 (د) $\frac{50}{3}$



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن $AG = GF = x$ وأن $DC = y$. عندئذ، الغرفة هي مستطيل بعداه $FE = 20$ و $AB + FG = 10 + x$ مطروحاً منه مستطيل بعداه $AG = x$ و $AB = 10$. وبما أن مساحة الغرفة تساوي 280 فإن:

$$\begin{aligned} 20(10+x) - 10x &= 280 \\ 10x + 200 &= 280 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

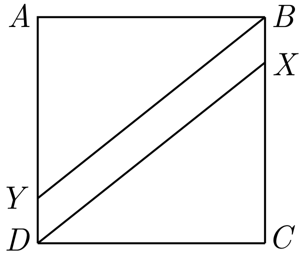
الآن، $ABCD$ شبه منحرف قاعدتيه 10 و y ومساحته تساوي 140 (نصف مساحة الغرفة) وارتفاعه $BC = FE - x = 12$. إذن،

$$\frac{1}{2} \times 12 \times (10 + y) = 140$$

ومن ذلك نجد أن $y = \frac{40}{3}$.

(٥٤) [Cayley 2003] في الشكل المرفق $ABCD$ مربع طول ضلعه 10. إذا كان $AY = CX = 8$ فما مساحة الشكل الرباعي $BXDY$ ؟

(أ) 16 (ب) 20 (ج) 24 (د) 40

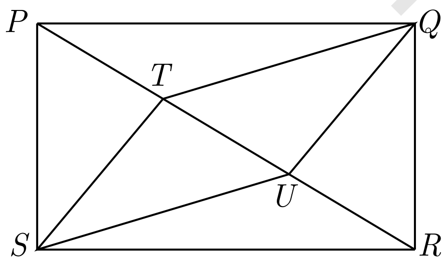


الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أن

$$\begin{aligned}[BXDY] &= [ABCD] - [DCX] - [BAY] \\ &= (10)^2 - \frac{1}{2} \times 10 \times 8 - \frac{1}{2} \times 10 \times 8 \\ &= 100 - 40 - 40 = 20\end{aligned}$$

(٥٥) [Fermat 2010] في الشكل المرفق، $PQRS$ مستطيل فيه $PQ = 5$ ، $QR = 3$. قسمنا القطر $\overline{PR}$ إلى ثلاث قطع متطابقة، $PT = TU = UR$. مساحة الشكل الرباعي $STQU$ تساوي:

(أ) $\frac{5}{2}$ (ب) 5 (ج) $\frac{17}{3}$ (د) $\sqrt{34}$



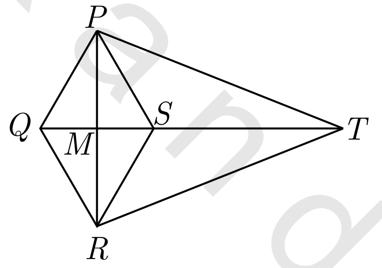
الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أولاً أن

$$[PQR] = [PSR] = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}.$$

لاحظ أيضاً أن $[PTQ] = [TUQ] = [URQ]$ لأن $PT = TU = UR$ وارتفاع كل منها هو المسافة من Q إلى القطر $\overline{PR}$. إذن، $[TUQ] = \frac{1}{3} \times \frac{15}{2} = \frac{5}{2}$. وبالمثل، $[TUS] = \frac{5}{2}$. وبهذا فإن $[STQU] = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$.

(٥٦) [Fermat 2010] في الشكل المرفق، $PQRS$ معين، $PS = SQ = 6$، $PT = RT = 14$. ST يساوي:

(أ) $7\sqrt{3} - 3$ (ب) $4\sqrt{10} - 3$ (ج) 10 (د) 11



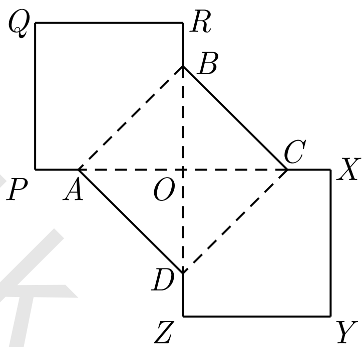
الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $PQRS$ معين فإن M نقطة منتصف القطرين المتعامدين PR و QS. من ذلك نجد أن $QM = MS = \frac{1}{2}QS = 3$. الآن، باستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle PMS$ نجد أن $PM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$. وباستخدام مبرهنة فيثاغورس مرة أخرى للمثلث $\triangle PMT$ نجد أن $MT = \sqrt{14^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{169} = 13$. إذن،

$$ST = MT - MS = 13 - 3 = 10.$$

(٥٧) [Fermat 2007] في الشكل المرفق، لدينا ثلاثة مربعات طول ضلع كل منها

3 ، O مركز المربع $ABCD$. محيط الشكل $QRBCXYZDAPQ$ أقرب إلى:

(أ) 21 (ب) 23 (ج) 24 (د) 30



الحل: الإجابة هي (أ): محيط الشكل المطلوب هو

$$QR + RB + BC + CX + XY + ZY + ZD + DA + AP + PQ$$
$$= 18 + RB + CX + ZD + AP$$

بما أن O مركز المربع $ABCD$ فإن $OA = OB = OC = OD$. وبما أن $OP = OR = OX = OZ$ فإن $AP = RB = CX = ZD$. وبهذا فإن محيط الشكل المطلوب يساوي $18 + 4AP$. الآن، $\triangle AOB$ مثلث متساوي الساقين قائم. أي أنه مثلث $90° - 45° - 45°$. إذن، $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

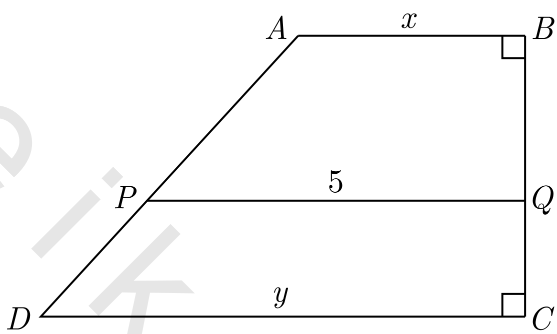
ومن ثم $AP = 3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. وبهذا يكون المحيط المطلوب هو

$$18 + 4\left(3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 30 - 6\sqrt{2} \approx 21.515\,.$$

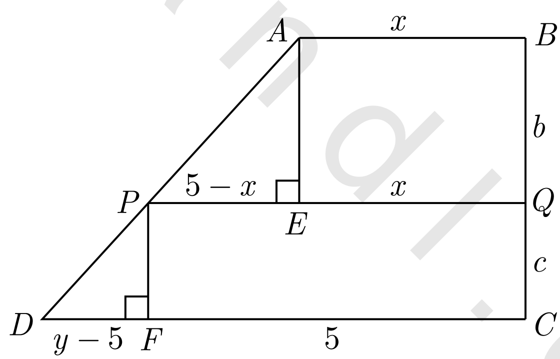
(٥٨) [Euclid 2009] $ABCD$ شبه منحرف قائم. $\overline{DC} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ و

$\overline{PQ}$ يقسم شبه المنحرف إلى شبهي منحرفين متساويي المساحة. إذا كان $PQ = 5$ ، $AB = x$ ، $DC = y$ فإن $x^2 + y^2$ يساوي:

(أ) 25 (ب) 35 (ج) 45 (د) 50



الحل: الإجابة هي (د):



ارسم العمود $\overline{AE}$ على $\overline{PQ}$ والعمود $\overline{PF}$ على $\overline{DC}$. الآن، كل من $ABQE$ و $PQCF$ مستطيل. من ذلك يكون $PE = 5 - x$ و $DF = y - 5$. لنفرض أن $BQ = b$ و $QC = c$. الآن،

$$[APQB] = \frac{1}{2}(x+5) \times b$$

$$[PQCD] = \frac{1}{2}(5+y)\times c$$

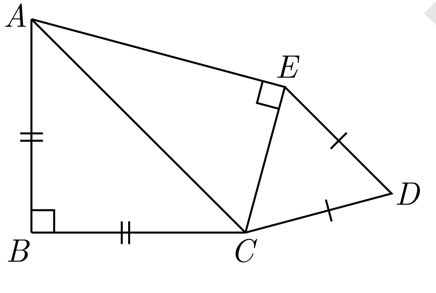
وبما أن المساحتين متساويتان نجد أن $\frac{1}{2}(x+5)\times b = \frac{1}{2}(5+y)\times c$. أي أن $\frac{x+5}{5+y} = \frac{c}{b}$. بما أن $\triangle AEP \sim \triangle PFD$ فإن $\frac{AE}{PE} = \frac{PF}{DF}$. أي أن $\frac{c}{y-5} = \frac{b}{5-x}$، أي $\frac{c}{b} = \frac{y-5}{5-x}$. إذن،

$$\begin{aligned}\frac{x+5}{5+y} &= \frac{y-5}{5-x}\\ (x+5)(5-x) &= (y-5)(5+y)\\ 25-x^2 &= y^2-25\\ x^2+y^2 &= 50.\end{aligned}$$

(٥٩) [Euclid 2007] في الشكل المرفق، $AB = BC = 2\sqrt{2}$، $CD = DE$، $\widehat{CDE} = 60^\circ$، $\widehat{EAB} = 75^\circ$. محيط الشكل $ABCDEA$ يساوي:

(أ) $4+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ (ب) $5+4\sqrt{2}+\sqrt{3}$

(ج) $4+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ (د) $5+4\sqrt{2}+\sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\triangle ABC$ متساوي الساقين فإن $\widehat{BAC} = 45^\circ$.

إذن، $4 = \left(2\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = AC = \sqrt{2}AB$. الآن،

$$\widehat{CAE} = \widehat{EAB} - \widehat{BAC} = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ .$$

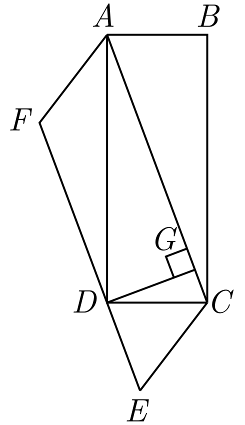
إذن، $\triangle ACE$ هو مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. من ذلك نجد أن، $EC = \frac{1}{2}AC = 2$ وأن $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = 2\sqrt{3}$. الآن، $\triangle CDE$ فيه $CD = ED$ و $\widehat{EDC} = 60^\circ$ ، ولذا فهو متساوي الأضلاع ويكون، $ED = CD = EC = 2$. بالتالي محيط الشكل المطلوب هو

$$\begin{aligned} &AB + BC + CD + DE + EA \\ &= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(٦٠) [MAΘ 2012] $ABCD$ مستطيل مساحته 96 . $ACEF$ متوازي أضلاع حيث $\overline{EF}$ يمر بالنقطة D . ما مساحة $ACEF$ ؟

(أ) 48 (ب) 72 (ج) 96 (د) 108

الحل: الإجابة هي (ج):



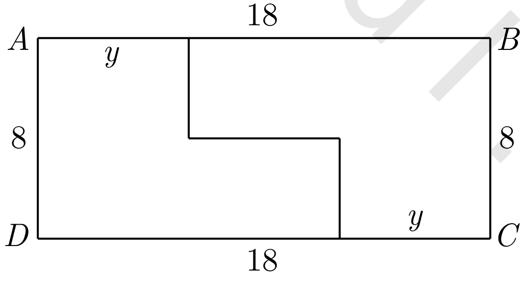
عيّن نقطة G على $\overline{AC}$ بحيث يكون $\overline{DG}$ ارتفاع المثلث $\triangle ADC$. بما أن $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ فإن $\overline{EF} \perp \overline{DG}$. إذن، $\overline{DG}$ هو ارتفاع متوازي الأضلاع $ACEF$. الآن،

$$[ABCD] = 2[ADC] = 2 \times \frac{1}{2} \times DG \times AC$$
$$= DG \times AC = [ACEF]$$

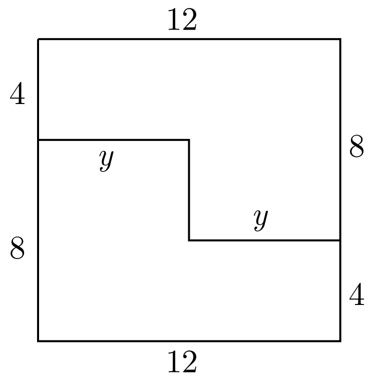
وبهذا فإن $[ACEF] = 96$.

(٦١) [AMC10A, AMC12A 2006] المستطيل $ABCD$ فيه $AB = 18$، $BC = 8$. قسمنا المستطيل $ABCD$ إلى سداسيين متطابقين كما هو مبين في الشكل بحيث يمكن تغيير موقع السداسيين دون أن يتقاطعا لإنشاء مربع. ما قيمة y ؟

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 8 (د) 9



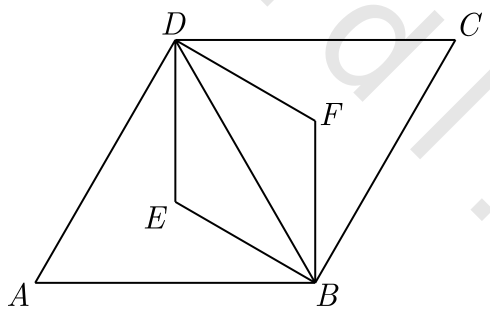
الحل: الإجابة هي (أ): بما أن السداسيين سيكونان مربعاً دون أن يتقاطعا فإن المساحة لن تتغير. مساحة المستطيل تساوي $144 = 18 \times 8$. وبهذا فإن مساحة المربع هي 144 ويكون طول ضلعه يساوي 12. الطريقة الوحيدة لإنشاء هذا المربع هي



وبهذا فإن y يساوي نصف طول ضلع المربع أي أن $y = \frac{1}{2} \times 12 = 6$.

(٦٢) [AMC10B 2006] المعين $ABCD$ يشبه المعين $BFDE$. مساحة المعين $ABCD$ تساوي 24، $\widehat{BAD} = 60^\circ$. ما مساحة المعين $BFDE$ ؟

(أ) 6 (ب) $4\sqrt{3}$ (ج) 8 (د) $6\sqrt{3}$

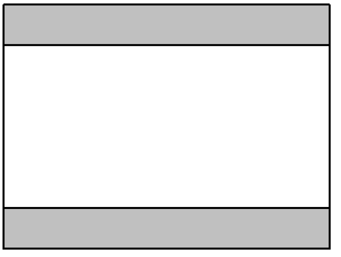


الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\widehat{DAB} = \widehat{DCB} = 60^\circ$. ولذا فإن $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 120^\circ$. لاحظ أيضاً أن $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ وكل منهما مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه يساوي طول ضلع المعين $ABCD$ وليكن s . إذن، $BD = s$. طول AC يساوي ضعف ارتفاع المثلث المتساوي الأضلاع الذي

طول ضلعه s. إذن، $AC = 2 \times \frac{s\sqrt{3}}{2} = s\sqrt{3}$. نسبة القطر الأكبر للمعين $BFDE$ إلى القطر الأكبر للمعين $ABCD$ هي $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{s}{s\sqrt{3}}$. إذن، النسبة بين المساحتين هي $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$. وبهذا فإن مساحة المعين $BFDE$ تساوي $8 = \frac{24}{3}$.

(٦٣) [AMC10A, AMC12A 2008] نسبة عرض الصورة التلفزيونية إلى ارتفاعها في التلفزيونات القديمة هي 4 إلى 3. أما نسبة عرض الصورة التلفزيونية إلى ارتفاعها في معظم الأفلام ليست 4 إلى 3، ولهذا عند عرض فيلم على شاشة تلفزيون تظهر شريحتان معتمتان لهما الارتفاع نفسه أعلى وأسفل الشاشة، كما هو موضح في الشكل المرفق. لنفرض أن نسبة عرض الصورة التلفزيونية إلى ارتفاعها لأحد الأفلام هي 2 إلى 1 وقطر شاشة التلفزيون القديم المعروضة عليه هو 27 بوصة. كم بوصة ارتفاع كل من الشريحتين المعتمتين ؟

(أ) 2.25 (ب) 2.5 (ج) 2.7 (د) 3

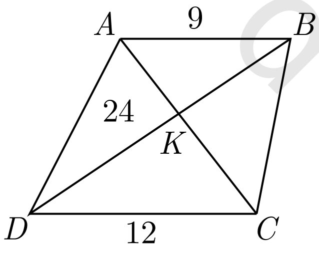


الحل: الإجابة هي (ج): نفرض أن عرض الشاشة هو $4x$ وارتفاعها هو $3x$ وأن عرض صورة الفيلم هو $2y$ وارتفاعها هو y. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن قطر الشاشة هو $5x = \sqrt{9x^2+16x^2} = 27$. إذن، $x = \frac{27}{5}$. بما أن عرض الشاشة يساوي عرض الصورة فإن $2y = 4x$. أي أن $y = 2x$. إذن، ارتفاع كل من الشريحتين هو

$$\frac{3x-y}{2} = \frac{3x-2x}{2} = \frac{x}{2} = \frac{27}{10} = 2.7\,.$$

(٦٤) [AMC10A 2008] قاعدتا شبه المنحرف $ABCD$ هما $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ والنقطة K هي نقطة تقاطع القطرين. إذا كان $AB = 9$ ، $DC = 12$ ، مساحة $\triangle AKD$ هي 24 فما مساحة شبه المنحرف $ABCD$ ؟

(أ) 92 (ب) 94 (ج) 96 (د) 98



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ فإن $\triangle CKD \sim \triangle ABK$. إذن

$$\frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KD} = \frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}\,.$$

لاحظ أنه إذا وجد مثلثان يشتركان في الارتفاع فإن النسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين قاعدتيهما. الآن، ارتفاعا المثلثين $\triangle AKB$ و $\triangle AKD$ من A إلى $\overline{BD}$

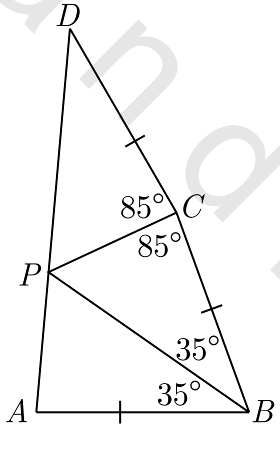
متساويان. إذن، $\frac{[AKB]}{[AKD]} = \frac{KB}{KD} = \frac{3}{4}$. إذن، $[AKB] = \frac{3}{4} \times 24 = 18$.

وبالمثل، $[DKC] = \frac{4}{3} \times 24 = 32$ و $[BKC] = 24$ إذن، $[ABCD] = 24 + 32 + 24 + 18 = 98$.

(٦٥) [AMC10B 2008] $ABCD$ شكل رباعي فيه $AB = BC = CD$ و $\widehat{ABC} = 70^\circ$ و $\widehat{BCD} = 170^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{BAD}$ ؟

(أ) 80° (ب) 85° (ج) 90° (د) 95°

الحل: الإجابة هي (ب): ارسم منصف كل من الزاويتين $\widehat{ABC}$ و $\widehat{BCD}$ ليتلاقيا في P كما هو مبين في الشكل أدناه.



سنبرهن الآن أن $P \in \overline{AD}$. لاحظ أن $\triangle ABP \equiv \triangle CBP$ بضلعين والزاوية المحصورة. أيضاً، $\triangle CBP \equiv \triangle CDP$. الآن،

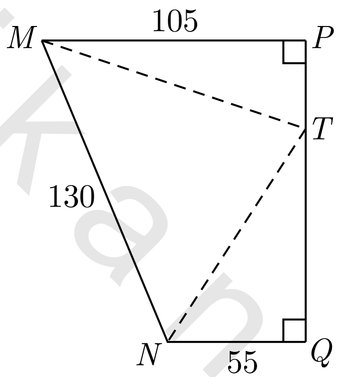
$\widehat{CPB} = 180^\circ - (85^\circ + 35^\circ) = 60^\circ$. $\widehat{PAB} = \widehat{PCB} = 85^\circ$.

$\widehat{APB} = 60^\circ$، $\widehat{CDP} = 35^\circ$، $\widehat{CPD} = 60^\circ$. إذن، $\widehat{APD} = 180^\circ$ ومن ثم

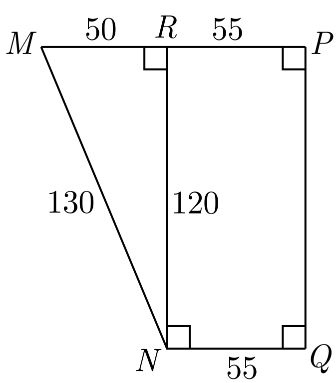
$P \in \overline{AD}$. وبهذا فإن $\widehat{BAD} = \widehat{PAB} = 85°$.

(٦٦) [Cayley 1999] يمر خط الغاز الرئيس خلال القطعة المستقيمة $\overline{PQ}$. من نقطة T على $\overline{PQ}$ يتفرع خطان، أحدهما لتزويد البيت M والثاني لتزويد البيت N بالغاز. ما أصغر مجموع لطولي الخطين $TM + TN$ ؟

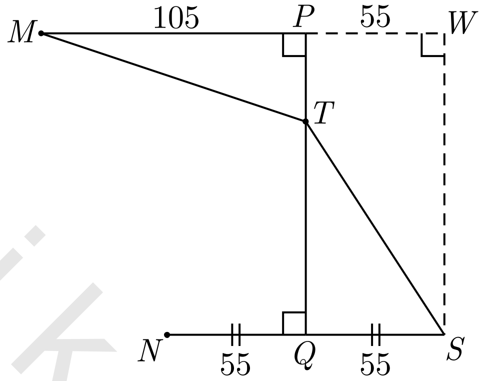
(أ) 200 (ب) 202 (ج) 210 (د) 214



الحل: الإجابة هي (أ): نعين أولاً النقطة R على $\overline{PM}$ بحيث يكون $RPQN$ مستطيلاً. عندئذ، $MR = 105 - 55 = 50$. وبهذا فإن $RN = \sqrt{130^2 - 50^2} = 120$.



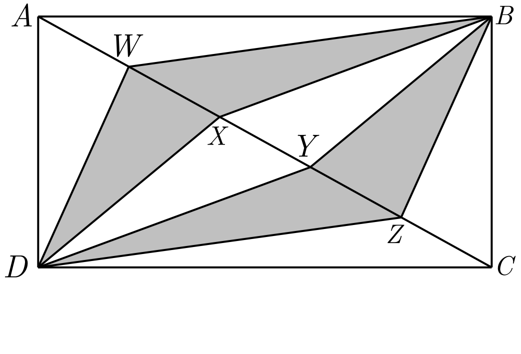
الآن، نفرض أن S هي صورة انعكاس N على $\overline{PQ}$. بما أن $\triangle TNQ \equiv \triangle TSQ$ فإن $TN = TS$. ولذا فإن $TM + TN = TM + TS$.



الآن، من الواضح أن $TM + TS$ يكون أصغرياً عندما تكون النقاط M، T، S على استقامة واحدة. وفي هذه الحالة فإن $TM + TS = MS$. وبإنشاء المثلث $\triangle MSW$ نجد أن $MS = \sqrt{160^2 + 120^2} = 200$.

(٦٧) [Cayley 1998] طول المستطيل $ABCD$ يساوي 9 وعرضه يساوي 5. تقسم النقاط W، X، Y، Z القطر $\overline{AC}$ إلى خمس قطع متساوية الأطوال. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{36}{5}$ (ب) 18 (ج) 21 (د) 36



الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أولاً أن مساحة $\triangle ABC$ هي $[ABC] = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 = \frac{45}{2}$. الآن، جميع المثلثات $\triangle ABW$، $\triangle WBX$، $\triangle XBY$، $\triangle YBZ$، $\triangle ZBC$ لها القواعد والارتفاعات نفسها. مساحة كل من هذه المثلثات يساوي $\frac{1}{5} \times \frac{45}{2} = \frac{9}{2}$. بالمثل مساحة كل من المثلثات $\triangle ADW$، $\triangle WDX$، $\triangle XDY$، $\triangle YDZ$، $\triangle ZDC$ تساوي $\frac{9}{2}$. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $4 \times \frac{9}{2} = 18$.

مسائل غير محلولة

(١) [AMC10B 2007] $ABCDE$ خماسي محدب متساوي الأضلاع فيه $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$. ما قياس الزاوية $\widehat{E}$ ؟

أ) $90°$ ب) $108°$ ج) $120°$ د) $150°$

(٢) [AMC10B, AMC12B 2007] $ABCD$ شكل رباعي فيه $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 3\widehat{C} = 4\widehat{D}$. قياس $\widehat{A}$ أقرب إلى

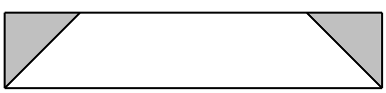
أ) $125°$ ب) $144°$ ج) $153°$ د) $173°$

(٣) [AMC10A 2008] S_1 مربع مساحته 16. نصفنا كل ضلع من أضلاعه لإنشاء مربع أصغر S_2 رؤوسه نقاط منتصفات أضلاع S_1. أنشأنا المربع S_3 من S_2 بالطريقة نفسها. ما مساحة المربع S_3 ؟

أ) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4

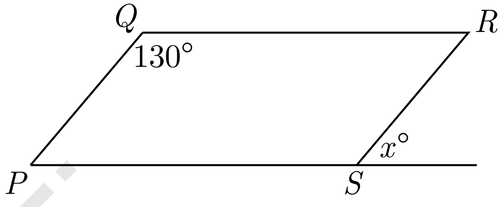
(٤) [AMC10B, AMC12B 2009] حديقة مستطيلة قطعنا منها مثلثين متطابقين متساويي الساقين لزراعتهما بالورد كما هو مبين في الشكل المرفق. الجزء المتبقي من الحديقة هو شبه منحرف طول ضلعيه المتوازيين 15 و 25. نسبة مساحة المنطقة المزروعة بالورد إلى مساحة شبه المنحرف هي:

أ) $\frac{1}{5}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{2}$



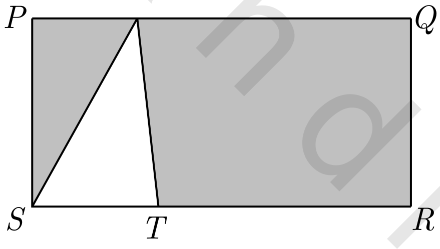
(٥) [Aust.MC 1992] $PQRS$ متوازي أضلاع فيه $\widehat{Q} = 130°$. ما قياس الزاوية $\widehat{x}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (ج) $50°$ (د) $130°$



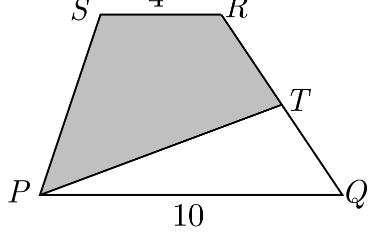
(٦) [Aust.MC 1993] في المستطيل $PQRS$ المبين في الشكل المرفق، $PQ = 2QR$، $ST = 6$، $TR = 12$. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) 54 (ب) 81 (ج) 135 (د) 150



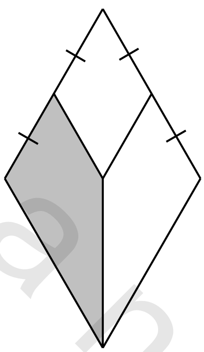
(٧) [Aust.MC 1994] $PQRS$ شبه منحرف، $SR = 4$، $PQ = 10$، ارتفاعه يساوي 6، T منتصف $\overline{RQ}$. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) 26 (ب) 27 (ج) 34 (د) 42



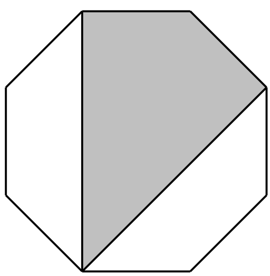
(٨) [Aust.MC 1996] يتكون شعار إحدى شركات النشر من معين مرسوم داخله الحرف Y كما هو مبين في الشكل حيث نقطة التقاء خطوط الحرف Y هي مركز المعين. نسبة مساحة المنطقة المظللة من الشعار إلى مساحة الشعار الكلية تساوي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{5}{12}$



(٩) [Aust.MC 1993] الشكل المرفق ثماني منتظم طول ضلعه 4. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

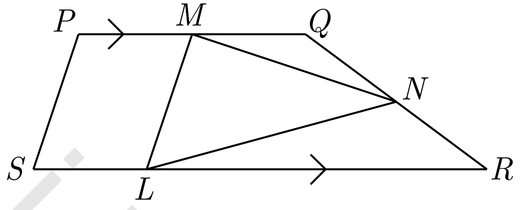
(أ) 16 (ب) $8\left(1+\sqrt{2}\right)$ (ج) 24 (د) $16\left(1+\sqrt{2}\right)$



(١٠) [Aust.MC 1998] $PQRS$ شبه منحرف فيه $\overline{SR} \parallel \overline{PQ}$، $SR = 2PQ$،

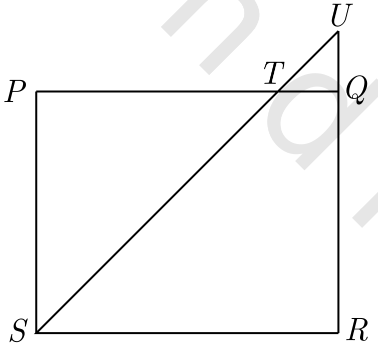
$PM = MQ$ ، $QN = NR$ ، $LR = 3LS$. إذا كان $PQ = 1$ فإن نسبة مساحة $\triangle LMN$ إلى مساحة شبه المنحرف $PQRS$ هي:

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$



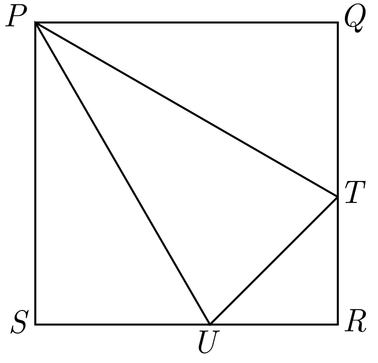
(١١) [Aust.MC 1992] مساحة المستطيل $PQRS$ تساوي 80 ومساحة المثلث $\triangle SRU$ تساوي 50 . ما مساحة المثلث $\triangle TUQ$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 8



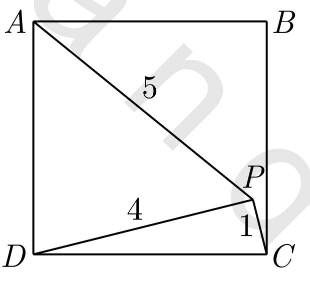
(١٢) [Aust.MC 1992] في الشكل المرفق، $PQRS$ مربع، $\triangle PTU$ متساوي الساقين فيه $PT = PU$ ، $\overline{PT}$ و $\overline{PU}$ يثلثان الزاوية $\widehat{P}$. إذا كانت مساحة المثلث $\triangle PTU$ تساوي 1 فإن مساحة المربع $PQRS$ تساوي:

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5



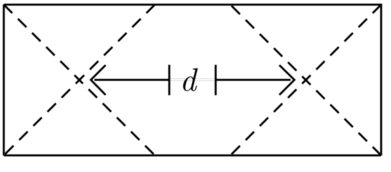
(١٣) [Aust.MC 1994] لتكن P نقطة داخل المربع $ABCD$ حيث $AP = 5$ ، $PC = 1$ ، $DP = 4$. ما مساحة المربع $ABCD$ ؟

(أ) 9 (ب) 15 (ج) 17 (د) 19



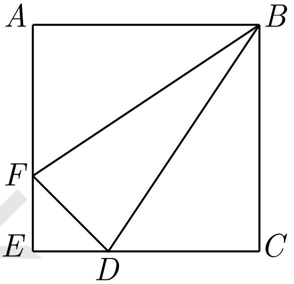
(١٤) [Aust.MC 1996] القطع المستقيمة المنقطة منصفات لزوايا مستطيل طوله m وعرضه n. المسافة d تساوي:

(أ) $m - 0.5n$ (ب) $m - 2n$ (ج) $m - n$ (د) $m - \sqrt{2}n$



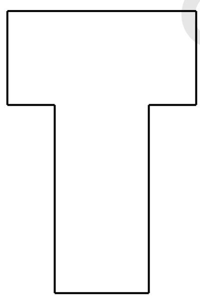
(١٥) [AMC8 2008] في المربع $ABCE$ ، $AF = 2FE$ ، $CD = 2DE$.
نسبة مساحة المثلث $\triangle BFD$ إلى مساحة المربع $ABCE$ هي:

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{2}{9}$ (ج) $\frac{5}{18}$ (د) $\frac{1}{3}$



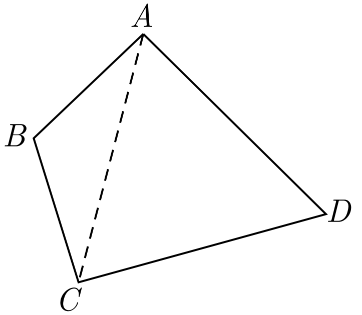
(١٦) [AMC8 2006] كونا الحرف T المبين في الشكل المرفق بوضع مستطيلين من النوع 2×4 بجانب بعضهما البعض. ما محيط الحرف T ؟

(أ) 16 (ب) 20 (ج) 22 (د) 24



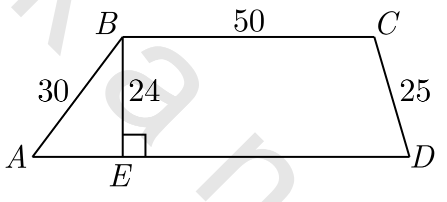
(١٧) [AMC8 2005] في الشكل الرباعي $ABCD$ ، $AB = BC = 10$ ، $CD = DA = 17$ ، $\widehat{ADC} = 60^\circ$. ما طول القطر AC ؟

(أ) 17 (ب) 17.5 (ج) 18 (د) 18.5



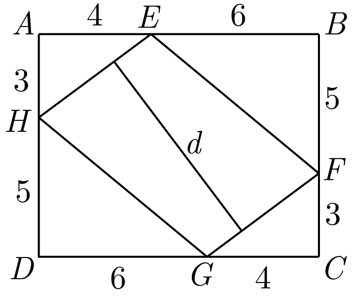
(١٨) [AMC8 2005] ما محيط شبه المنحرف $ABCD$ المبين في الشكل المرفق ؟

(أ) 180 (ب) 188 (ج) 196 (د) 200



(١٩) [AMC8 2004] في الشكل المرفق $ABCD$ مستطيل، $EFGH$ متوازي أضلاع، d عمودي على كل من $\overline{HE}$ و $\overline{FG}$. ما طول d ؟

(أ) 7.1 (ب) 7.6 (ج) 7.8 (د) 8.1

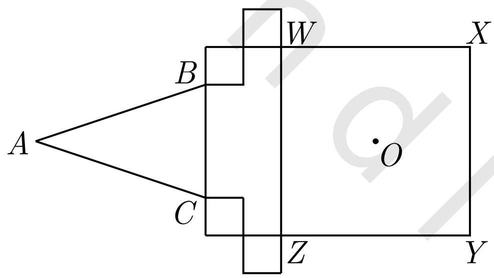


(٢٠) [AMC8 2003] مساحة شبه المنحرف $ABCD$ تساوي 164، ارتفاعه 8، $AB = 10$ ، $CD = 20$. ما طول BC ؟

أ) 10 ب) 12 ج) 13 د) 14

(٢١) [AMC8 2003] في الشكل المرفق، مساحة المربع $WXYZ$ تساوي 25. طول ضلع كل من المربعات الأربعة الصغيرة يساوي 1 وأضلاعها إما موازية لأضلاع المربع الكبير أو تنطبق عليها. في $\triangle ABC$، $AB = BC$ وعند ثنيه على الضلع $\overline{BC}$ تنطبق النقطة A على مركز المربع $WXYZ$ في النقطة O. ما مساحة $\triangle ABC$ ؟

أ) $\frac{15}{4}$ ب) $\frac{21}{4}$ ج) $\frac{27}{4}$ د) $\frac{21}{2}$



(٢٢) [AHSME 1966] طول مستطيل $ABCD$ يساوي 5 وعرضه يساوي 3. قسمنا القطر $\overline{AC}$ إلى ثلاث قطع متساوية $AE = EF = FC$. مساحة المثلث $\triangle BEF$ تساوي:

أ) $\frac{3}{2}$ ب) $\frac{5}{3}$ ج) $\frac{5}{2}$ د) $\frac{\sqrt{34}}{3}$

(٢٣) [AHSME 1967] $ABCD$ شكل رباعي قطراه $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ يتقاطعان في النقطة O. إذا كان $BO = 4$، $OD = 6$، $AO = 8$، $OC = 3$، $AB = 6$ فإن AD يساوي:

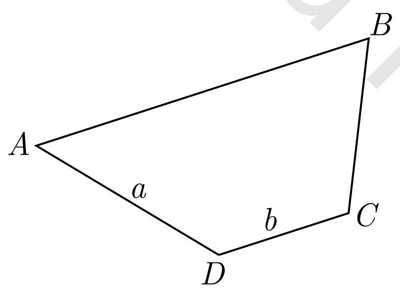
(أ) 9 (ب) $6\sqrt{3}$ (ج) $8\sqrt{2}$ (د) $\sqrt{166}$

(٢٤) [AHSME 1968] مضلع محدب عدد أضلاعه n وقياس زواياه الداخلية متتابعة حسابية فرقها المشترك يساوي 5. إذا كان قياس الزاوية الداخلية الكبرى يساوي $160°$ فإن n يساوي:

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 12 (د) 16

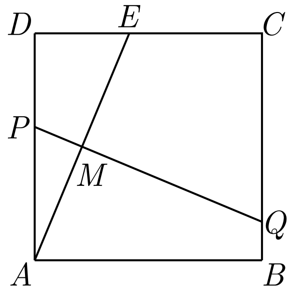
(٢٥) [AHSME 1970] في الشكل المرفق، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$، $\widehat{D} = 2\widehat{B}$، $AD = a$، $DC = b$. طول AB يساوي:

(أ) $\frac{1}{2}a + 2b$ (ب) $2a - b$ (ج) $4b - \frac{1}{2}a$ (د) $a + b$



(٢٦) [AHSME 1972] طول ضلع المربع $ABCD$ يساوي 12، E نقطة على $\overline{DC}$ حيث $DE = 5$، $\overline{PQ}$ منصف عمودي للقطعة $\overline{AE}$ ويلاقي $\overline{AE}$ في النقطة M. $\frac{PM}{MQ}$ يساوي:

(أ) $\frac{5}{12}$ (ب) $\frac{5}{13}$ (ج) $\frac{5}{19}$ (د) $\frac{5}{21}$

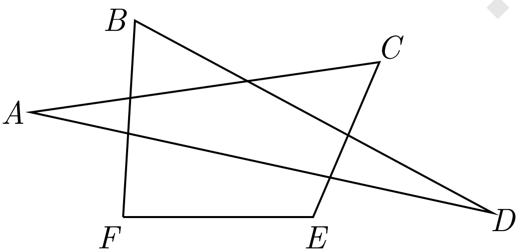


(٢٧) [AHSME 1972] $ABCD$ شبه منحرف قاعدتاه $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ حيث $AB = 2DC$. E نقطة تقاطع القطرين. إذا كان $AC = 11$ فإن EC يساوي:

(أ) $3\frac{2}{3}$ (ب) $3\frac{3}{4}$ (ج) 4 (د) $4\frac{1}{4}$

(٢٨) [AHSME 1972] مجموع قياس الزوايا $\widehat{A}$ ، $\widehat{B}$ ، $\widehat{C}$ ، $\widehat{D}$ ، $\widehat{E}$ ، $\widehat{F}$ في الشكل المرفق يساوي $90n$. ما قيمة n ؟

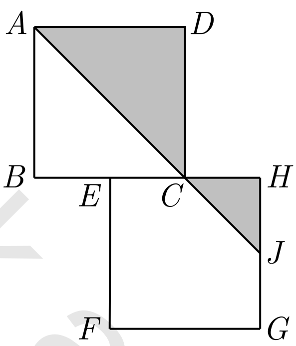
(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5



(٢٩) [Gauss 2011] مساحة المربع $ABCD$ تساوي مساحة المربع $EFGH$. الرؤوس B ، E ، C ، H على استقامة واحدة. مددنا القطر $\overline{AC}$ إلى

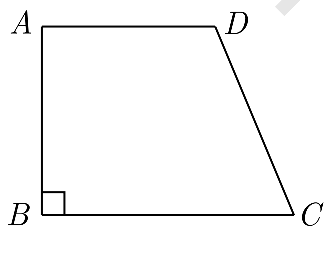
نقطة منتصف $\overline{HG}$ وهي J. نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى المساحة الكلية هي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{5}{16}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{3}{8}$



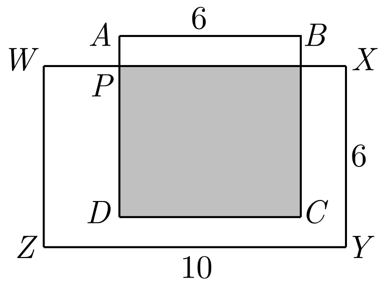
(٣٠) [Gauss 2011] ارتفاع شبه المنحرف القائم $ABCD$ يساوي 12، $AB = 16$، مساحته تساوي 162. ما محيطه ؟

(أ) 50 (ب) 51 (ج) 52 (د) 56



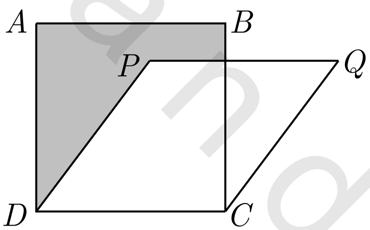
(٣١) [Gauss 2007] في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع طول ضلعه 6، $WXYZ$ مستطيل، $ZY = 10$، $XY = 6$. $\overline{AD} \perp \overline{WX}$. إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي نصف مساحة $WXYZ$ فما طول AP ؟

(أ) 1 (ب) 1.5 (ج) 2 (د) 2.5

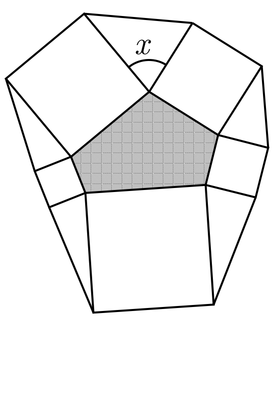


(٣٢) [Gauss 2003] مساحة المربع $ABCD$ المبين في الشكل تساوي 25. إذا كان $PQCD$ معيناً مساحته 20 فما مساحة المنطقة المظللة:

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12



(٣٣) [Gauss 1998] أحطنا خماسياً متساوي الزوايا بمثلثات ومربعات كما هو مبين في الشكل. ما قياس الزاوية x ؟



(أ) 60° (ب) 72° (ج) 75° (د) 90°

(٣٤) [MAΘ 1990] ما مساحة معين طول ضلعه يساوي 13 وطول أحد قطريه يساوي 24 ؟

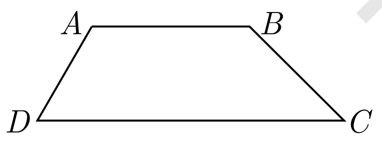
(أ) 120 (ب) 180 (ج) 210 (د) 240

(٣٥) [MAΘ 1987] قطر مزرعة مستطيلة الشكل يساوي 37. طول المزرعة ينقص بمقدار 1 عن ثلاثة أمثال عرضها. ما طول السلك الشائك الذي نحتاجه لإحاطة المزرعة ؟

(أ) 47 (ب) 63 (ج) 82 (د) 94

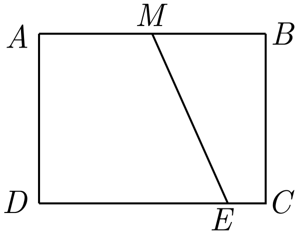
(٣٦) [AHSME 1984] في الشكل المرفق، $ABCD$ شبه منحرف، $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $AB = 5$ ، $BC = 3\sqrt{2}$ ، $\widehat{BCD} = 45^\circ$ ، $\widehat{CDA} = 60^\circ$. ما طول DC ؟

(أ) 8 (ب) $8 + \sqrt{3}$ (ج) 9 (د) $9 + \sqrt{3}$



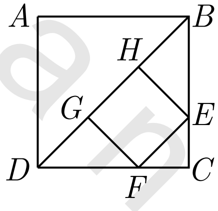
(٣٧) [Mathcounts 1984] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل فيه $AM = MB = 12$ ، $BC = 18$ ، $DE = x$. ما قيمة x التي تجعل مساحة المنطقة $AMED$ تساوي ضعف مساحة المنطقة $MBCE$ ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25



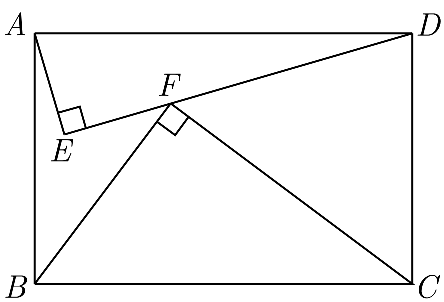
(٣٨) [Mandelbrot #1] في الشكل المرفق كل من $ABCD$ و $EFGH$ مربع حيث $AB = 1$. مساحة $EFGH$ تساوي:

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $\frac{2}{9}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{4}{9}$



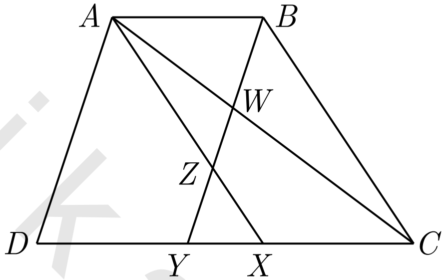
(٣٩) [Pascal 2005] في الشكل المرفق، أنشأنا المثلثين القائمين $\triangle AED$ ، $\triangle BFC$ داخل المستطيل $ABCD$ حيث F نقطة واقعة على $\overline{DE}$. إذا كان $AE = 21$ ، $ED = 72$ ، $BF = 45$ فما طول AB ؟

(أ) 48 (ب) 50 (ج) 52 (د) 54



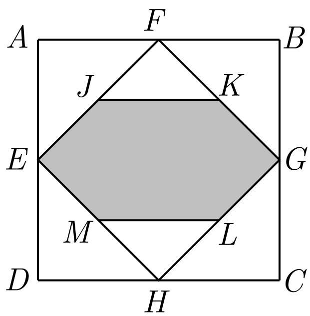
(٤٠) [Pascal 2004] في الشكل المرفق $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ، $AB = 2$ ، $CD = 5$. $\overline{BC} \parallel \overline{AX}$ ، $\overline{AD} \parallel \overline{BY}$. نسبة مساحة $\triangle AZW$ إلى مساحة شبه المنحرف $ABCD$ هي:

(أ) $\frac{7}{105}$ (ب) $\frac{8}{105}$ (ج) $\frac{9}{105}$ (د) $\frac{10}{105}$

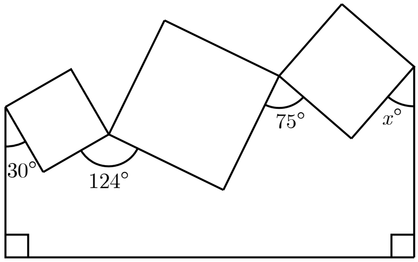


(٤١) [Pascal 2000] مساحة المربع $ABCD$ تساوي 64 . رؤوس المربع $EFGH$ هي منتصفات أضلاع المربع $ABCD$. J ، K ، L ، M هي منتصفات أضلاع المربع $EFGH$. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) 16 (ب) 20 (ج) 24 (د) 32



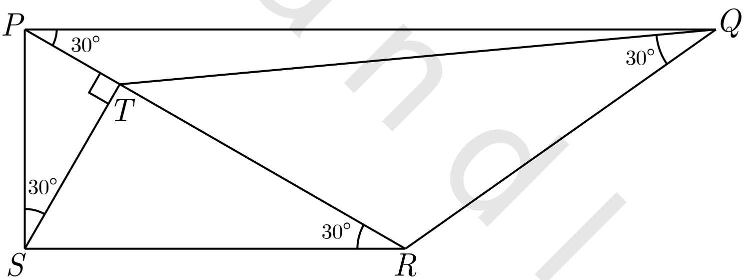
(٤٢) [Aust.MC 2000] ثبتنا المربعات الثلاثة المبينة في الشكل المرفق بعمودين رأسيين. ما قياس الزاوية x ؟



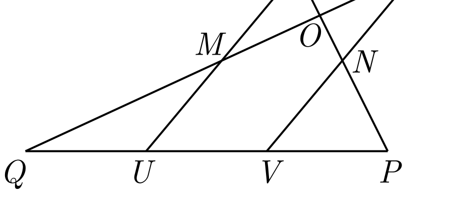
(أ) $39°$ (ب) $41°$ (ج) $43°$ (د) $46°$

(٤٣) [Aust.MC 2000] $PQRS$ شكل رباعي فيه $\widehat{QPS} = \widehat{PSR} = 90°$. T نقطة على القطر $\overline{PR}$، $\overline{ST} \perp \overline{PR}$، $PS = 1$. ما طول PQ ؟

(أ) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ (ب) $2\sqrt{3} - 1$ (ج) $\sqrt{3} + 1$ (د) $2\sqrt{3} + 1$



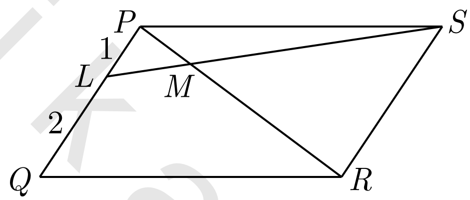
(٤٤) [Aust.MC 2002] في الشكل المرفق، $UVWX$ متوازي أضلاع مساحته 24. M منتصف $\overline{UX}$ و N منتصف $\overline{VW}$. مساحة $\triangle QPO$ تساوي:



(أ) 21 (ب) 24 (ج) 27 (د) 36

(٤٥) [Aust.MC 2005] $PQRS$ متوازي أضلاع، L نقطة على $\overline{PQ}$ حيث $PL = 1$ و $LQ = 2$. M نقطة تقاطع $\overline{PR}$ و $\overline{LS}$. نسبة طول PM إلى طول MR هي:

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{5}$



(٤٦) [MAΘ 1992] $ABCD\cdots$ مضلع منتظم فيه $\widehat{ACD} = 120°$. ما عدد أضلاعه ؟

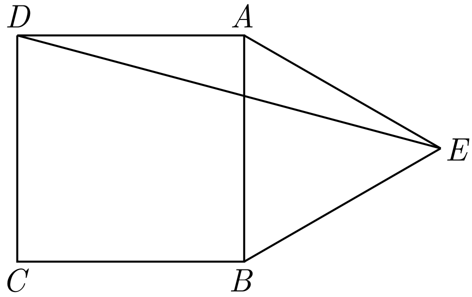
(أ) 5 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9

(٤٧) [AHSME 1973] مجموع زوايا مضلع محدب ما عدا زاوية واحدة يساوي $2190°$. عدد أضلاع المضلع يساوي:

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 12 (د) 15

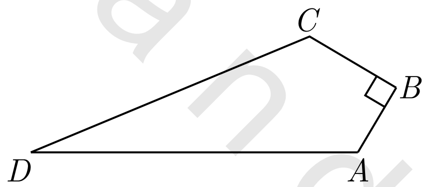
(٤٨) [AHSME 1979] في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع، $\triangle ABE$ متساوي الأضلاع. قياس $\widehat{AED}$ يساوي:

(أ) $15°$ (ب) $20°$ (ج) $22°$ (د) $25°$



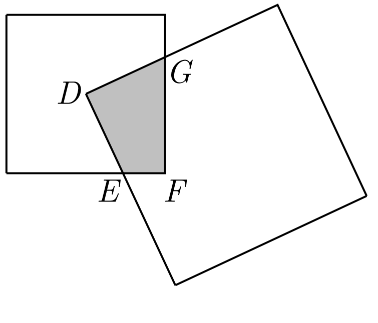
(٤٩) [AHSME 1980] في الشكل الرباعي المحدب المرفق، $AB = 3$ ، $BC = 4$ ، $CD = 12$ ، $AD = 13$ ، $\widehat{CBA} = 90^\circ$. ما مساحة الشكل الرباعي $ABCD$ ؟

أ) 24 ب) 30 ج) 36 د) 42



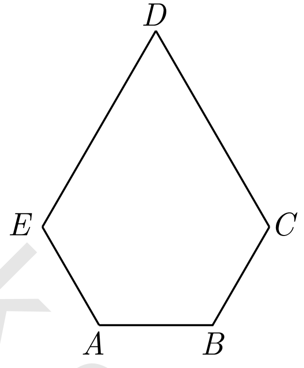
(٥٠) [MAΘ 1987] يتقاطع مربع طول ضلعه 4 مع مربع طول ضلعه 3 كما هو مبين في الشكل حيث D مركز المربع الصغير. ما مساحة المنطقة المظللة $DGFE$ ؟

أ) 2 ب) 2.25 ج) 2.5 د) 2.75



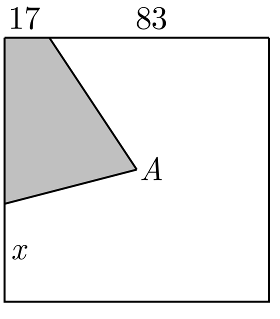
(٥١) [AHSME 1993] $ABCDE$ خماسي محدب فيه $\widehat{A} = \widehat{B} = 120°$، $AE = AB = BC = 2$، $CD = DE = 4$. ما مساحة $ABCDE$ ؟

(أ) 7 (ب) $7\sqrt{3}$ (ج) 8 (د) $8\sqrt{3}$



(٥٢) [Mathcounts 1992] في الشكل المرفق، A مركز مربع طول ضلعه يساوي 100. ما قيمة x إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي $\frac{1}{5}$ مساحة المربع ؟

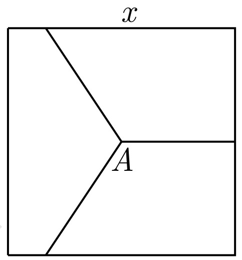
(أ) 32 (ب) 35 (ج) 37 (د) 40



(٥٣) [AHSME 1998] طول ضلع المربع المرفق يساوي 1. قسمنا المربع إلى ثلاث

مناطق مساحاتها متساوية كما هو مبين في الشكل حيث A مركز المربع. ما قيمة x ؟

(أ) $\frac{3}{5}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{5}{6}$

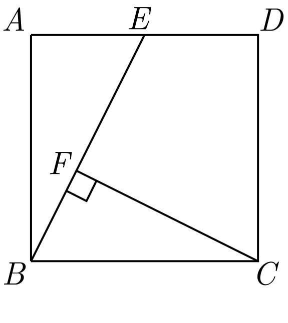


(٥٤) [AHSME 1998] الشكل الرباعي $ABCD$ فيه، $\widehat{A} = 120^\circ$، $\widehat{B} = \widehat{D} = 90^\circ$، $AB = 13$، $AD = 46$. ما طول AC ؟

(أ) 60 (ب) 62 (ج) 64 (د) 65

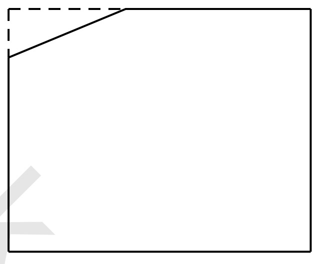
(٥٥) [AHSME 1997] $ABCD$ مربع طول ضلعه 2، E نقطة منتصف $\overline{AD}$، F نقطة على $\overline{BE}$، $\overline{BE} \perp \overline{CF}$. مساحة الشكل الرباعي $CDEF$ تساوي:

(أ) 2 (ب) $\frac{11}{5}$ (ج) $\sqrt{5}$ (د) $\frac{9}{4}$



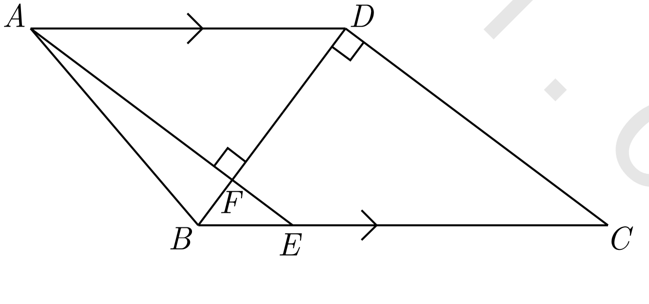
(٥٦) [AHSME 1995] كونا خماسياً بقطع مثلث من زاوية مستطيل كما هو مبين في الشكل. أطوال أضلاع الخماسي هي 13، 19، 20، 25، 31 (ليس بالضرورة بهذا الترتيب). مساحة الخماسي تساوي:

(أ) 459 (ب) 600 (ج) 720 (د) 745



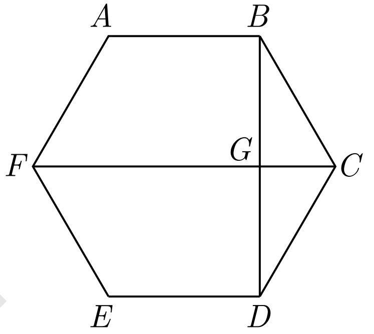
(٥٧) [Cayley 2002] في شبه المنحرف $ABCD$ المبين في الشكل $\overline{DC} \perp \overline{BD}$، $\overline{AF} \perp \overline{BD}$. $AB = 41$، $AD = 50$، $BF = 9$. ما مساحة الرباعي $FECD$ ؟

(أ) 900 (ب) 960 (ج) 1300 (د) 1560



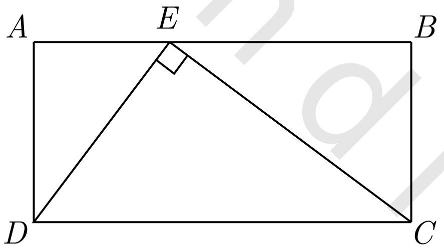
(٥٨) [Cayley 2000] في السداسي المنتظم $ABCDEF$، G نقطة تقاطع القطرين $\overline{FC}$ و $\overline{BD}$ ما قيمة $\dfrac{[FEDG]}{[BCG]}$ ؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7



(٥٩) [Fermat 2004] في الشكل المرفق، $ABCD$ مستطيل، E نقطة على $\overline{AB}$، $\widehat{CED} = 90^\circ$، $DE = 3$، $EC = 4$. ما طول AD ؟

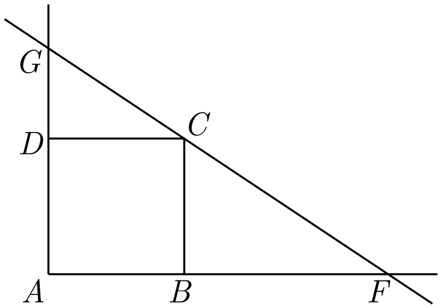
(أ) 1.8 (ب) 2.2 (ج) 2.4 (د) 2.8



(٦٠) [Euclid 2007] في الشكل المرفق، القطعة المستقيمة $\overline{FCG}$ تمر برأس المربع $ABCD$ حيث F نقطة على امتداد $\overline{AB}$ و G نقطة على امتداد $\overline{AD}$.

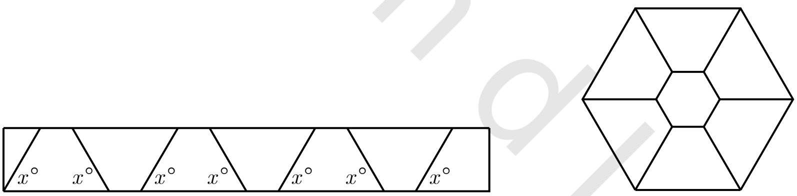
$\frac{1}{AG} + \frac{1}{AF}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{AB}$ (ب) $\frac{1}{2AB}$ (ج) $\frac{1}{GD}$ (د) $\frac{1}{2GD}$



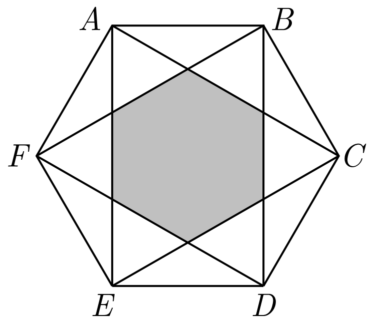
(٦١) [Euclid 2000] قطعنا ست قطع متطابقة من لوح خشبي كما هو مبين في الشكل. قياس كل من زوايا القطع يساوي $x°$. أنشأنا من هذه القطع إطاراً سداسياً كما هو مبين. ما قياس الزاوية $\hat{x}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $40°$ (ج) $50°$ (د) $60°$



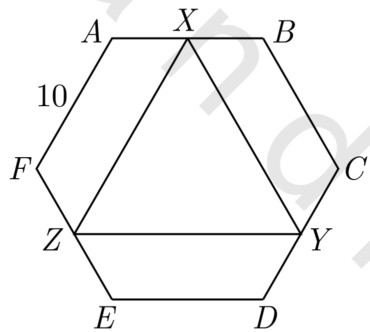
(٦٢) [Euclid 2003] في الشكل المرفق $ABCDEF$، سداسي منتظم مساحته 36. الشكل المظلل هو سداسي ناتج عن تقاطع المثلثين المتساويي الأضلاع $\triangle ACE$ و $\triangle BDF$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 14



(٦٣) [Euclid 2002] في الشكل المرفق، $ABCDEF$ سداسي منتظم طول ضلعه 10. إذا كانت X ، Y، Z نقاط منتصفات $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$، $\overline{EF}$ على التوالي فما طول XZ ؟

(أ) 12 (ب) 13 (ج) 14 (د) 15

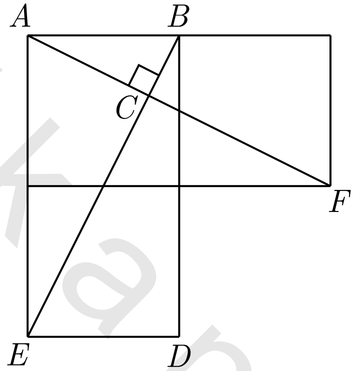


(٦٤) [AMC10B 2012] في المستطيل $ABCD$ ، $AB = 6$ ، $AD = 30$ ، G منتصف $\overline{AD}$. مددنا $\overline{AB}$ بمقدار وحدتين إلى النقطة E . F نقطة تقاطع $\overline{ED}$ و $\overline{BC}$. ما مساحة $BFDG$ ؟

(أ) $\frac{133}{2}$ (ب) 67 (ج) $\frac{135}{2}$ (د) 68

(٦٥) [AMC10A 2012] في الثلاثة مربعات المتطابقة والتي طول ضلع كل منها يساوي 1، C نقطة تقاطع القطرين $\overline{AF}$ و $\overline{BE}$ كما هو مبين في الشكل. ما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) $\frac{2}{9}$ (د) $\frac{1}{3}$



إجابات المسائل غير المحلولة

(١) د	(٢) د	(٣) د	(٤) ب	(٥) ج
(٦) ج	(٧) ب	(٨) ج	(٩) د	(١٠) ب
(١١) أ	(١٢) ب	(١٣) ج	(١٤) ج	(١٥) ج
(١٦) ب	(١٧) أ	(١٨) أ	(١٩) ب	(٢٠) أ
(٢١) ج	(٢٢) ج	(٢٣) د	(٢٤) أ	(٢٥) د
(٢٦) ج	(٢٧) أ	(٢٨) ج	(٢٩) ب	(٣٠) ج
(٣١) أ	(٣٢) ج	(٣٣) ب	(٣٤) أ	(٣٥) د
(٣٦) ب	(٣٧) ج	(٣٨) ب	(٣٩) ب	(٤٠) ب
(٤١) ج	(٤٢) ب	(٤٣) أ	(٤٤) ج	(٤٥) ب
(٤٦) د	(٤٧) د	(٤٨) أ	(٤٩) ج	(٥٠) ب
(٥١) ب	(٥٢) ج	(٥٣) د	(٥٤) ب	(٥٥) ب
(٥٦) د	(٥٧) ب	(٥٨) ب	(٥٩) ج	(٦٠) أ
(٦١) د	(٦٢) ج	(٦٣) د	(٦٤) ج	(٦٥) ب

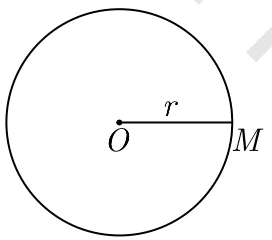
الفصل الرابع

الدوائر
Circles

لتكن O نقطة في المستوى وليكن $r > 0$ عدداً حقيقياً. الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r هي مجموعة جميع النقاط M التي تبعد مسافة r عن النقطة O . أي أن

$$C(O,r) = \{M : OM = r\}$$

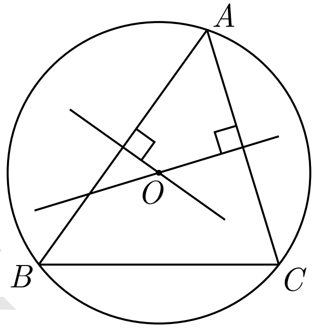
إذا كانت $M \in C(O,r)$ فإن القطعة المستقيمة $\overline{OM}$ تسمى أيضاً نصف قطر. وبهذا فإن نصف قطر الدائرة يعني العدد r أو القطعة المستقيمة $\overline{OM}$.



نقول إن دائرتين متطابقتان إذا وفقط إذا كان نصفا قطريهما متساويين.

مبرهنة (١): لكل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة توجد دائرة وحيدة تمر بالنقاط الثلاثة.

البرهان: نفرض أن A ، B ، C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. عندئذ، المنصفان العموديان للقطعتين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ غير متوازيين (لأن A ، B ، C ليست على استقامة واحدة). ولذا فهما يتقاطعان في النقطة O.



وبهذا فإن $OA = OB = OC$ وتكون O مركز دائرة تمر بالنقاط A ، B ، C.
إضافة إلى ذلك، أي دائرة تمر بالنقاط الثلاث يكون مركزها O ونصف قطرها $\overline{OA}$.
أي أنها الدائرة نفسها. $\square$

إذا كانت $C(O,r)$ دائرة فإن مجموعة النقاط P في المستوى حيث $OP < r$ تسمى نقاط الدائرة الداخلية (interior of the circle)

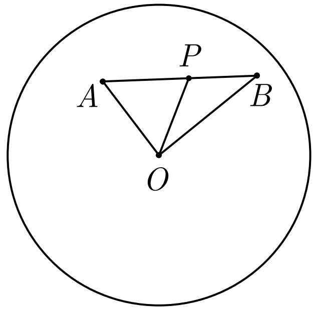
$$\operatorname{Int} C(O,r) = \{P : OP < r\}.$$

كما تسمى مجموعة النقاط Q في المستوى حيث $OQ > r$، نقاط الدائرة الخارجية (exterior of the circle)

$$\operatorname{Ext} C(O,r) = \{Q : OQ > r\}$$

مبرهنة (٢): مجموعة النقاط الداخلية للدائرة هي مجموعة محدبة.

البرهان: لنفرض أن $A, B \in \operatorname{Int} C(O,r)$. عندئذ، $OA < r$ و $OB < r$.
لتكن $P \in \overline{AB}$. عندئذ، إحدى الزاويتين $\widehat{APO}$ أو $\widehat{BPO}$ ليست منفرجة.



لنفرض أن $\widehat{APO}$ ليست منفرجة. عندئذ، في المثلث $\triangle BPO$ لدينا $OP < OB < r$. إذن، $P \in \operatorname{Int} C(O,r)$. $\square$

ملحوظة: تسمى المجموعة $C(O,r) \cup \operatorname{Int} C(O,r) = \{M : OM \leq r\}$ قرصاً (disk) مركزه O ونصف قطره r.

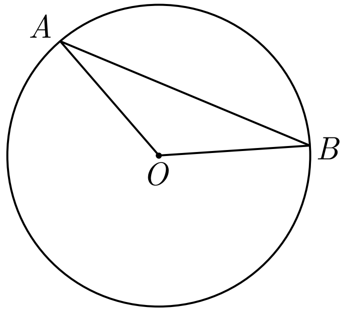
الأوتار والأقواس والزوايا المركزية

[Chords, Arcs, and Central Angles]

تسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتين على الدائرة وتراً (chord). إذا مر الوتر في مركز الدائرة فإنه يسمى قطراً (diameter) وتسمى نقطتا طرفي القطر نقطتين متقابلتين قطرياً.

مبرهنة (٣): طول أي وتر ليس قطراً في الدائرة $C(O,r)$ أصغر من $2r$.

البرهان: لنفرض أن $\overline{AB}$ وتراً حيث $O \notin \overline{AB}$.

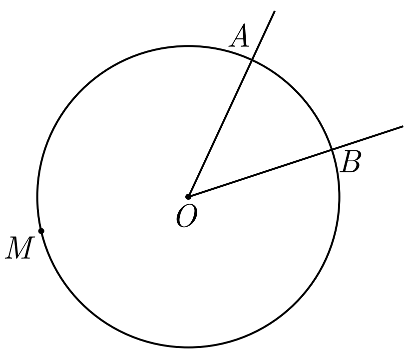


عندئذ، من متباينة المثلث نجد أن $AB < OA + OB = 2r$. □

ملحوظة: لاحظ أن طول قطر الدائرة $C(O,r)$ يساوي $2r$ وأنه أكبر من أو يساوي طول أي وتر آخر من أوتار الدائرة.

الزاوية المركزية [Central Angle]

الزاوية المركزية في دائرة $C(O,r)$ هي الزاوية التي رأسها مركز الدائرة، وبالتالي كل زاوية رأسها مركز الدائرة تسمى زاوية مركزية فيها.



أقواس الدائرة [Arcs of a Circle]

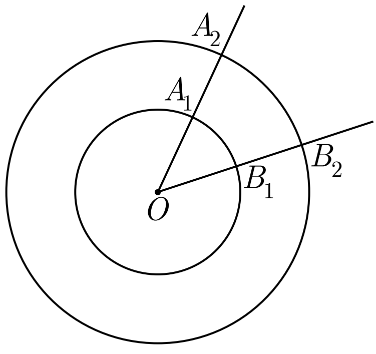
إذا كانت A و B نقطتين مختلفتين على دائرة $C(O,r)$ فإنهما يقسمان الدائرة إلى قوسين، قوس أصغر $\widehat{AB}$ وهو مجموعة النقاط الناتجة عن تقاطع الدائرة مع نقاط الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ الداخلية، بينما القوس الأكبر $\widehat{AMB}$ هو متمم القوس الأصغر. النقطتان A و B هما طرفا كل من القوس $\widehat{AB}$ والوتر $\overline{AB}$، ونعبر عادة عن ذلك بالقول إن القوس $\widehat{AB}$ يقابل (أي يواجه) الوتر $\overline{AB}$.

إذا كانت A و B نقطتي نهاية قطر فإن كلاً من القوسين المقابلين لهما يسمى نصف دائرة (semicircle). لاحظ أن أي قطر يحدد نصفين للدائرة.

قياس القوس [Measure of The Arc]

لنفرض أن A و B نقطتان على الدائرة $C(O,r)$. إذا كانت A و B نقطتي نهاية قطر فإن قياس القوس $\widehat{AB}$ (نصف الدائرة) يساوي $180°$. أما إذا لم يكن $\overline{AB}$ قطراً فإن قياس القوس الصغير $\widehat{AB}$ بالدرجات يساوي قياس الزاوية المركزية $\widehat{AOB}$ المقابلة له وقياس القوس الكبير $\widehat{AMB}$ يساوي $360° - \widehat{AOB}$.
أما الدائرة فيمكن اعتبارها قوساً كبيراً $\widehat{AB}$ حيث $A = B$ ومن ثم فإن قياسها يساوي $360°$.

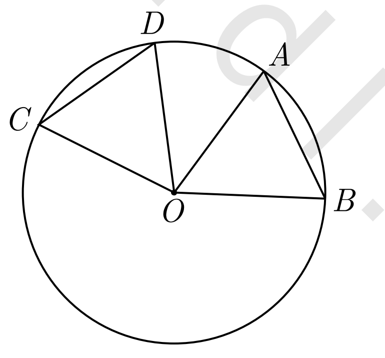
ملحوظة: لاحظ أنه إذا اشتركت دائرتان في المركز O وكانت $\widehat{AOB}$ الزاوية المركزية لهما فإن القوسين $\widehat{A_1B_1}$ و $\widehat{A_2B_2}$ لهما القياس نفسه ولكنهما يختلفان في الطول.



يتطابق قوسان من دائرة واحدة إذا كان لهما القياس نفسه.

مبرهنة (٤): ليكن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وترين في الدائرة $C(O,r)$. عندئذ، $AB = CD$ إذا وفقط إذا كان $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.

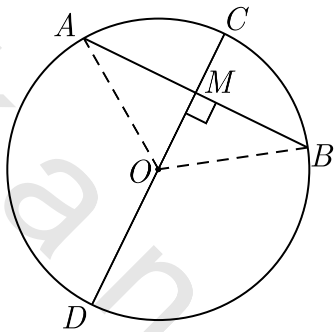
البرهان: لنفرض أولاً أن $AB = CD$. عندئذ، $\triangle COD \equiv \triangle AOB$. ومن ذلك نجد أن $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$، إذن، $\widehat{AB} = \widehat{CD}$.



ولبرهان العكس، إذا كان $\widehat{AB} = \widehat{CD}$ فإن $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ ويكون $\triangle AOB \equiv \triangle COD$. إذن، $AB = CD$. □

مبرهنة (٥): لتكن A و B نقطتين مختلفتين على دائرة مركزها O. عندئذ، المستقيم العمودي على الوتر $\overline{AB}$ والذي يمر بالمركز O ينصف كلاً من الوتر $\overline{AB}$ والقوس $\widehat{AB}$ (الصغير والكبير).

البرهان: إذا كانت النقطتان طرفي قطر فالعبارة واضحة. لنفرض إذن أن الوتر $\overline{AB}$ ليس قطراً، ولنفرض أن OM عمودي على الوتر $\overline{AB}$ ويقطع الدائرة في النقطتين C و D.

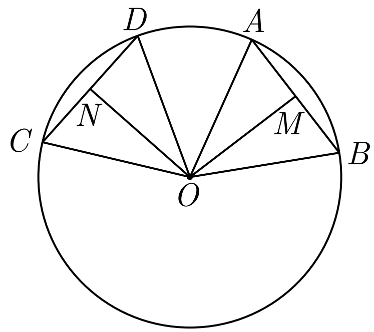


بما أن $OA = OB$ فإن المثلثين القائمين $\triangle AOM$ و $\triangle BOM$ متطابقان، ومن ذلك نجد أن $AM = MB$ ، أيضاً، $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ و $\widehat{AOD} = \widehat{BOD}$.

إذن، $\widehat{AC} = \widehat{CB}$ و $\widehat{AD} = \widehat{DB}$. □

مبرهنة (٦): يتساوى وتران في دائرة إذا وفقط إذا وقعا على مسافة واحدة من مركز الدائرة.

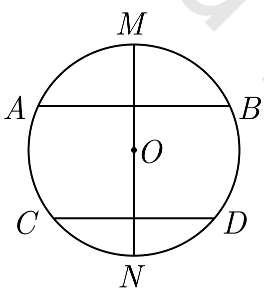
البرهان: لنفرض أن $AB = CD$. عندئذ، $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ ومن ثم فارتفاعاهما OM و ON متساويان.



ولبرهان العكس، نفرض أن $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ وأن $\overline{ON} \perp \overline{CD}$. عندئذ، $AM = MB$ و $DN = CN$. وبما أن $OM = ON$ فإن $\triangle OMA \equiv \triangle OND$. من ذلك نجد أن $AM = DN$ ويكون $AB = CD$. □

مبرهنة (٧): لنفرض أن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وتران متوازيان في الدائرة $C(O,r)$ وأن النقطتين A و C تقعان في نصف المستوى نفسه بالنسبة للقطر العمودي عليهما. عندئذ، القوس الصغير $\widehat{AC}$ يطابق القوس الصغير $\widehat{BD}$.

البرهان:

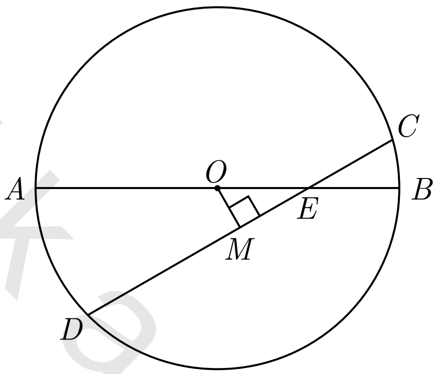


بما أن $\overline{MN} \perp \overline{AB}$ و $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ فإن $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ وأن $\widehat{CN} = \widehat{ND}$.

ولكن $\widehat{MBN} = \widehat{MAN}$ (نصفا دائرة). إذن، $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. □

مثال (١): $\overline{AB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$. النقطة E هي نقطة تقاطع الوتر $\overline{CD}$ مع القطر $\overline{AB}$، $\widehat{CEB} = 30°$، $AE = 6$، $EB = 2$. احسب المسافة من O إلى CD.

الحل:

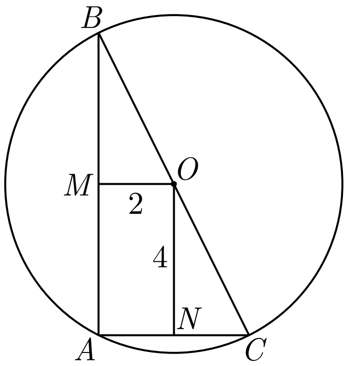


$AB = AE + EB = 6 + 2 = 8$. إذن، $OB = 4$. ولذا فإن $OE = 4 - 2 = 2$. الآن، المثلث $\triangle EOM$ هو مثلث $30° - 60° - 90°$ فيه $OM = \frac{1}{2}OE = 1$. ◇

مثال (٢): لتكن A، B، C ثلاث نقاط مختلفة على الدائرة $C(O,r)$. إذا كان $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ والمسافتان من O إلى $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ هما 2 و 4 على التوالي فاحسب AB و AC.

الحل:

من مبرهنة (٥) العمود $\overline{OM}$ ينصف $\overline{AB}$ ولأن $\widehat{CAB}$ قائمة فهو يوازي $\overline{AC}$ وعليه نرى من مبرهنتي نقطتي التنصيف نعلم أن O منتصف $\overline{BC}$ وأن $AC = 2OM = 4$. بالمثل $AB = 2ON = 8$.



◇

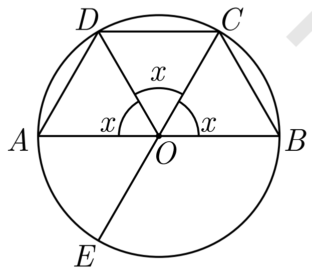
مثال (٣): ليكن $\overline{AOB}$ قطراً في الدائرة $C(O,r)$. ولتكن C و D نقطتين على الدائرة $C(O,r)$ حيث $\overline{OC}$ ينصف $\widehat{DOB}$ و $\overline{OD}$ ينصف $\widehat{COA}$.

(أ) إذا كان $DC = 2$ فاحسب طول قطر الدائرة $C(O,r)$.

(ب) إذا كان $\overline{EOC}$ قطراً فأثبت أن $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$.

(ج) أثبت أن المسافة من A إلى $\overline{CO}$ تساوي المسافة من B إلى $\overline{CO}$.

الحل:



لاحظ أن $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA} = x^\circ = 60^\circ$.

(أ) $\triangle COD$ متساوي الساقين فيه $x = 60^\circ$. وبهذا فهو متساوي الأضلاع.

إذن، $OC = DC = 2$. ومن ثم $AB = 4$.

(ب) في الشكل الرباعي $ADCO$ لدينا $\widehat{ADC} = \widehat{COA} = 2x$. إذن، $\overline{AD} \parallel \overline{OC}$.

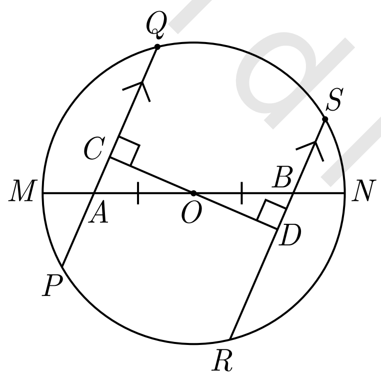
(ج) بما أن كلاً من $\triangle AOD$ و $\triangle COB$ متساوي الأضلاع وطول الضلع يساوي نصف القطر فإنهما متطابقان، ولذا لهما الارتفاع نفسه. وبهذا فالمسافتان من A و B إلى $\overline{CO}$ متساويتان. ◇

مثال (٤): في الدائرة $C(O,r)$ المبينة في الشكل المرفق، $\overline{MON}$ قطر، $OA = OB$ ، $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ ، $\overline{OC} \perp \overline{PQ}$ ، $\overline{OD} \perp \overline{RS}$. أثبت أن:

(أ) $PQ = RS$.

(ب) P و S متماثلتان حول O، Q و R متماثلتان حول O .

(ج) الشكل الرباعي $PQSR$ مستطيل.



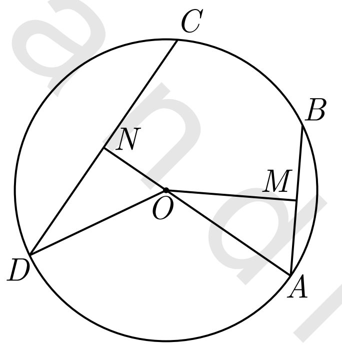
الحل

(أ) بما أن $AO = OB$ وأن $\widehat{COA} = \widehat{BOD}$ وأن $\widehat{CAO} = \widehat{DBO}$ فإن $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$. وبهذا فإن $OC = OD$. أي أن $PQ = RS$.

(ب) بما أن $OP = OS$ وأن $OC = OD$ فإن $\triangle OCP \equiv \triangle ODS$. ومن ذلك نجد أن $\widehat{COP} = \widehat{SOD}$. ولكن C، O، D على استقامة واحدة (لأن $PQ \parallel RS$). إذن، P، O، S على استقامة واحدة. وبالمثل، Q، O، R على استقامة واحدة.

(ج) بما أن $PQ = RS$ وهما متوازيان فإن $PQSR$ متوازي أضلاع قطراه $\overline{PS}$ و $\overline{QR}$ متساويان (لأنهما قطرا دائرة). إذن $PQSR$ مستطيل. ◇

مثال (٥): في الدائرة $C(O,r)$ المبينة في الشكل، $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180^\circ$، $\overline{AB} \perp \overline{OM}$، $\overline{CD} \perp \overline{ON}$. أثبت أن $\triangle OMA \equiv \triangle DNO$.



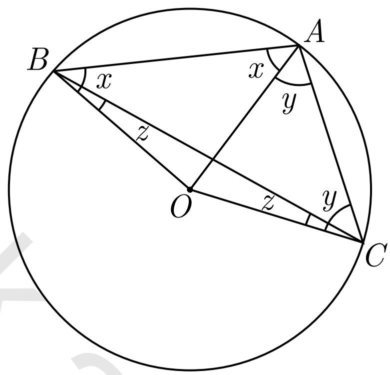
الحل: بما أن $\overline{AB} \perp \overline{OM}$ فإن $AM = MB$. وبالمثل، $DN = NC$. إذن، $\overline{OM}$ ينصف $\widehat{AOB}$ و $\overline{ON}$ ينصف $\widehat{COD}$. من ذلك نجد أن

$$\widehat{AOM} + \widehat{DON} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{COD}}{2} = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = 90^\circ$$

ولكن في المثلث $\triangle DON$ لدينا $\widehat{DON} + \widehat{NDO} = 90^\circ$. إذن، $\widehat{AOM} = \widehat{NDO}$. وبهذا فالمثلثان القائمان $\triangle AOM$ و $\triangle NDO$ متطابقان. ◇

مثال (٦): رسمنا المثلث $\triangle ABC$ داخل الدائرة $C(O,r)$ حيث $\widehat{B} = 35^\circ$ ، $\widehat{C} = 43^\circ$. احسب قياس كل من $\widehat{BAO}$ و $\widehat{CAO}$.

الحل:



كل من المثلثات $\triangle OAB$ ، $\triangle OBC$ ، $\triangle OAC$ متساوي الساقين، كذلك،

$$x + y = \widehat{BAC} = 180^\circ - (43^\circ + 35^\circ) = 102^\circ.$$

ولكن $\widehat{ACB} = y - z = 43^\circ$ و $\widehat{ABC} = x - z = 35^\circ$. إذن، $z = 12^\circ$

ويكون $\widehat{BAO} = x = 47^\circ$ و $\widehat{CAO} = y = 55^\circ$. ◇

القواطع والمماسات [Secants And Tangents]

مبرهنة (٨): لتكن $C(O,r)$ دائرة وليكن h مستقيماً.

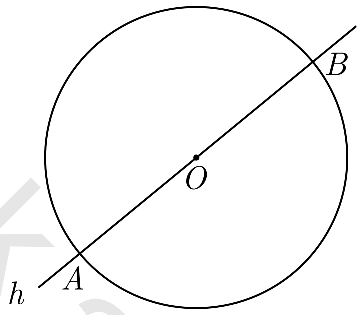
(أ) إذا كان $\mathrm{dist}(O,h) < r$ فإن المستقيم h يقطع الدائرة $C(O,r)$ بنقطتين حيث $\mathrm{dist}(O,h)$ ترمز للمسافة بين O والمستقيم h.

(ب) إذا كان $\mathrm{dist}(O,h) = r$ فإن المستقيم h يقطع الدائرة $C(O,r)$ في نقطة واحدة فقط.

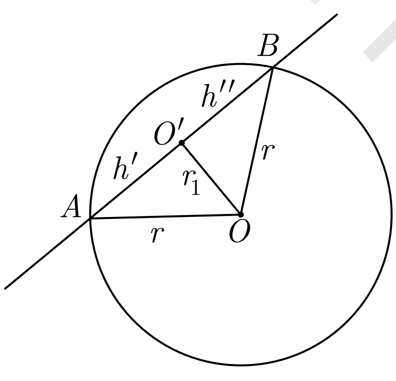
(ج) إذا كان $\mathrm{dist}(O,h) > r$ فإن المستقيم h والدائرة $C(O,r)$ لا يتقاطعان.

البرهان:

(أ) إذا كان $\text{dist}(O,h) = 0$ فإن O تقع على h. ومن ثم توجد نقطة واحدة فقط A ونقطة واحدة فقط B على كل من نصفي المستقيم اللذين تحددهما O حيث $OA = OB = r$.



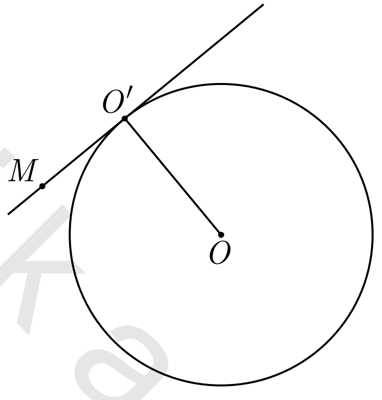
لنفرض إذن، أن $0 < \text{dist}(O,h) = r_1 < r$. لنفرض أن OO' عمودي على h. ليكن h' و h'' نصفي المستقيم h بدءاً من O'. عندئذ، توجد نقطة وحيدة $A \in h'$ ونقطة وحيدة $B \in h''$ (انظر الشكل المرفق) حيث $O'A = O'B = \sqrt{r^2 - r_1^2}$.



إذن، $A, B \in C(O,r)$. ولأي نقطة $M \in h$ مختلفة عن A و B يكون $O'M < \sqrt{r^2 - r_1^2}$ أو $O'M > \sqrt{r^2 - r_1^2}$. أي أن $OM < r$ أو

$OM > r$. وبهذا فإما أن M خارج الدائرة أو أنها داخل الدائرة.

(ب) لنفرض أن $\text{dist}(O,h) = r$ وأن OO' عمودي على h. عندئذ، $OO' = r$ ومن ثم فإن $O' \in C(O,r)$. وإذا كانت $M \neq O'$ فإن



$OM > OO' = r$. ومن ذلك فإن M تقع خارج الدائرة $C(O,r)$.

(ج) لنفرض أن $\text{dist}(O,h) > r$. عندئذ، لكل M على المستقيم h يكون $OM \geq \text{dist}(O,h) > r$. وبهذا فإن M تقع خارج الدائرة $C(O,r)$. □

تعريف: نقول إن المستقيم h مماس للدائرة $C(O,r)$ إذا وجدت نقطة تقاطع وحيدة بين h و $C(O,r)$ وتسمى نقطة التقاطع الوحيدة، نقطة التماس. وإذا قطع المستقيم h الدائرة $C(O,r)$ في نقطتين فيسمى المستقيم h في هذه الحالة قاطعاً للدائرة. وإذا لم يقطع المستقيم h الدائرة $C(O,r)$ فإنه يسمى مستقيماً خارجاً عن الدائرة.

ملحوظة: استناداً إلى المبرهنة (٨) نلاحظ أن h مماس للدائرة $C(O,r)$ إذا وفقط إذا كان $\text{dist}(O,h) = r$. كما أن المماس المار بالنقطة O' عمودي على نصف القطر $\overline{OO'}$.

مبرهنة (٩): لنفرض أن A نقطة خارج الدائرة $C(O,r)$ وأن AT و AT' مماسان للدائرة عند النقطتين T و T'. عندئذ،

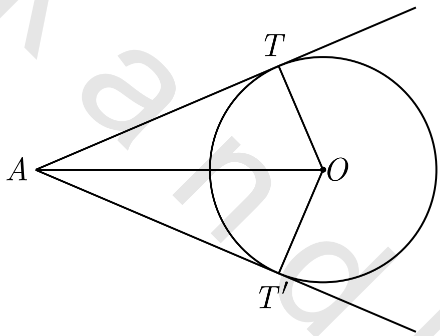
(أ) $AT = AT'$.

(ب) $\overrightarrow{AO}$ ينصف $\widehat{TAT'}$.

(ج) $\overrightarrow{OA}$ ينصف $\widehat{TOT'}$.

(د) $\overleftrightarrow{OA}$ منصف عمودي للقطعة $\overline{TT'}$.

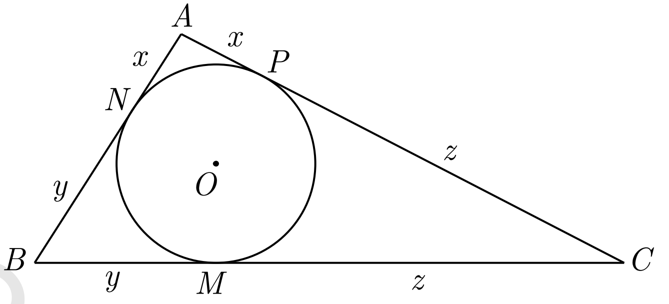
البرهان:



بما أن $\triangle AT'O \equiv \triangle ATO$ فإننا نحصل على صواب العبارات الثلاثة مباشرة من هذا التطابق. أما (د) فهو نتيجة لتطابق $\triangle AO'T$ وَ $\triangle AO'T'$ حيث O' نقطة تقاطع $\overline{AO}$ و $\overline{TT'}$. $\square$

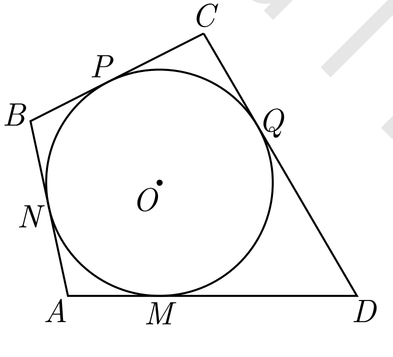
مثال (٧): أضلاع $\triangle ABC$ مماسات للدائرة عند النقاط N ، M ، P. إذا كان محيط المثلث يساوي 30 و $BC = 13$ فاحسب AN.

الحل:



لاحظ أن $AN = AP = x$ ، $BN = BM = y$ ، $CM = CP = z$. عندئذ، محيط المثلث $\triangle ABC$ هو $2(x + y + z) = 30$. أي أن $x + y + z = 15$ ولكن $BC = y + z = 13$. إذن، $AN = x = 2$. ◇

مثال (٨): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ ، $\overline{DA}$ مماسات للدائرة $C(O, r)$ عند النقاط، N ، P ، Q ، M على التوالي. أثبت أن $AB + CD = BC + DA$.

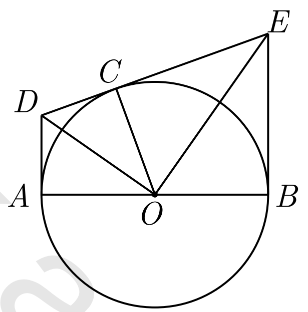


الحل: لاحظ أن

$$\begin{aligned} AB + CD &= AN + NB + CQ + QD \\ &= AM + BP + PC + MD \end{aligned}$$

$$= (AM + MD) + (BP + PC)$$
$$= AD + BC \qquad \diamond$$

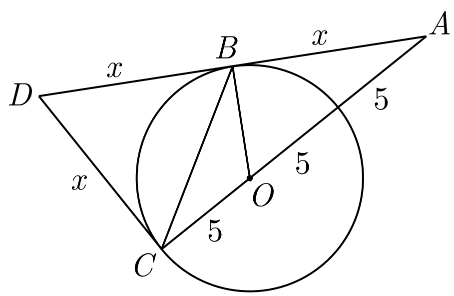
مثال (٩): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$. $\overline{DA}$، $\overline{DE}$، $\overline{BE}$ مماسات للدائرة عند نقاط التماس A، C، B على التوالي. جد قياس $\widehat{DOE}$.



الحل: بما أن $\overline{OD}$ ينصف $\widehat{AOC}$ وأن $\overline{OE}$ ينصف $\widehat{COB}$ فإن

$$\widehat{DOE} = \widehat{DOC} + \widehat{COE} = \frac{\widehat{AOC}}{2} + \frac{\widehat{COB}}{2} = 90^\circ. \qquad \diamond$$

مثال (١٠): في الشكل المرفق، C دائرة مركزها O ونصف قطرها 5، $OA = 10$، AD و CD مماسان للدائرة عند B و C. احسب BC.



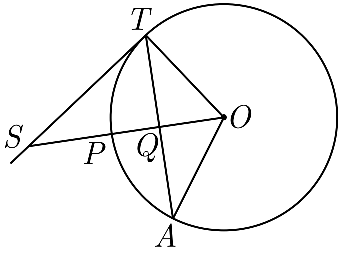
الحل: بما أن $\overline{AB}$ مماس للدائرة فإن $\widehat{OBA} = 90^\circ$. وبما أن $5 = OB = \frac{10}{2} = \frac{1}{2}OA$ فإن $\widehat{BAO} = 30^\circ$. وبما أن $\overline{CD}$ مماس للدائرة فإن $\widehat{DCA} = 90^\circ$. إذن، $\widehat{ADC} = 60^\circ$. الآن، $\triangle DCB$ متساوي الأضلاع لأن $BD = DC$ وأن $\widehat{BDC} = 60^\circ$. إذن، $BC = CD = DB = x$. أيضاً، $\triangle ADC$ مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ وعليه $BC = x = \frac{15}{\sqrt{3}}$. ◇

خواص زوايا الدوائر [Angle Properties of Circles]

نقول إن الزاوية مرسومة داخل دائرة، إذا وقع رأسها على الدائرة وكان ضلعاها وترين في الدائرة.

مبرهنة (١٠): قياس الزاوية التي يقع رأسها على الدائرة وأحد ضلعيها مماس للدائرة حيث الرأس هو نقطة التماس والضلع الآخر وتر في الدائرة يساوي نصف قياس القوس المحصور بالضلعين.

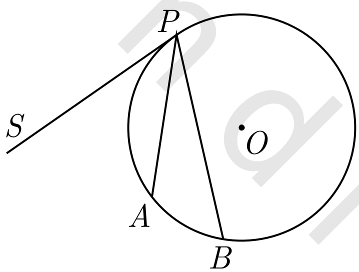
البرهان:



لنفرض أن $\overline{TA}$ وتر في الدائرة $C(O,r)$ وأن $\overline{TS}$ مماس عند النقطة T. ارسم $\overline{OQ}$ عمودياً على $\overline{TA}$ ويقطع الدائرة عند النقطة P. الآن، $\triangle AOT$ متساوي الساقين. ولذا ارتفاعه $\overline{OQ}$ ينصف $\widehat{AOT}$. إذن، $\widehat{TOQ} = \frac{1}{2}\widehat{TOA} = \frac{1}{2}\widehat{TPA}$. ولكن $\widehat{TOQ} + \widehat{OTQ} = 90^\circ$ و $\widehat{ATS} + \widehat{OTQ} = 90^\circ$. من ذلك نجد أن $\widehat{ATS} = \widehat{TOQ}$. وبهذا فإن $\widehat{ATS} = \widehat{TOQ} = \frac{1}{2}\widehat{TPA}$. □

مبرهنة (١١): قياس الزاوية المرسومة داخل دائرة (أي رأسها على الدائرة وضلعاها وتران) يساوي نصف قياس القوس الأصغر المقابل للضلعين.

البرهان: لنفرض أن $\widehat{APB}$ مرسومة داخل الدائرة $C(O,r)$. ارسم المماس $\overline{PS}$.

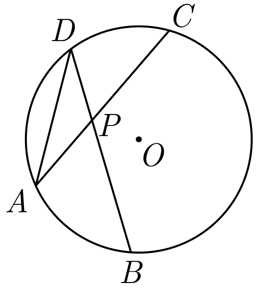


عندئذ،

$$\widehat{APB} = \widehat{SPB} - \widehat{SPA} = \frac{1}{2}\widehat{PB} - \frac{1}{2}\widehat{PA} = \frac{1}{2}\widehat{AB}. \qquad \square$$

مبرهنة (١٢): قياس الزاوية التي يقع رأسها داخل دائرة يساوي نصف مجموع قياسي القوسين الصغيرين المقابلين لضلعيها.

البرهان:



لنفرض أن $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ وتران في الدائرة $C(O,r)$ يتقاطعان في النقطة P.

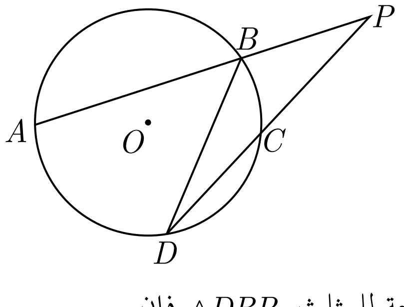
بما أن $\widehat{APB}$ زاوية خارجة للمثلث $\triangle APD$ فإن

$$\widehat{APB} = \widehat{PAD} + \widehat{PDA} = \frac{1}{2}\widehat{DC} + \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{DC} + \widehat{AB}\right). \quad \square$$

مبرهنة (١٣): قياس الزاوية التي رأسها خارج دائرة وضلعاها إما وتران أو مماسان أو وتر ومماس للدائرة يساوي نصف الفرق بين قياسي القوسين الصغيرين المقابلين لضلعيها.

البرهان:

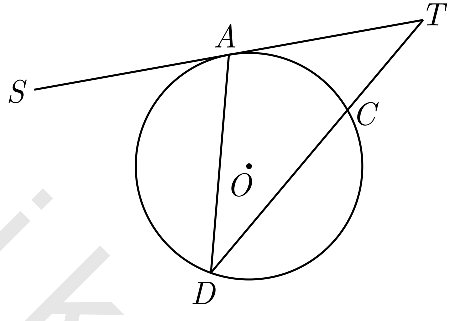
(أ) لنفرض أن $\widehat{APD}$ زاوية ضلعاها وتران في الدائرة $C(O,r)$.



بما أن $\widehat{ABD}$ خارجة للمثلث $\triangle DBP$ فإن

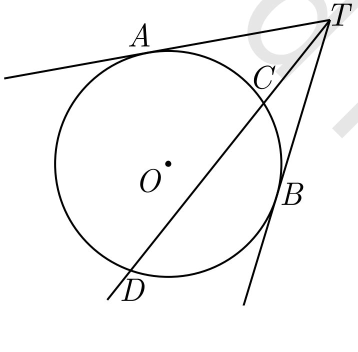
$$\widehat{APD} = \widehat{ABD} - \widehat{BDP} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AD} - \widehat{BC}\right).$$

(ب) نفرض أن $\widehat{ATD}$ زاوية ضلعاها هما المماس $\overline{AT}$ والوتر $\overline{CD}$. عندئذ،



$$\widehat{ATD} = \widehat{SAD} - \widehat{TDA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AD} - \widehat{AC}\right).$$

(ج) نفرض أن $\widehat{ATB}$ زاوية ضلعاها مماسان للدائرة $C(O,r)$. ارسم TCD مستقيماً يقطع الدائرة في النقطتين C و D. عندئذ،



$$\widehat{ATB} = \widehat{ATD} + \widehat{DTB} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AD} - \widehat{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\widehat{DB} - \widehat{CB}\right)$$

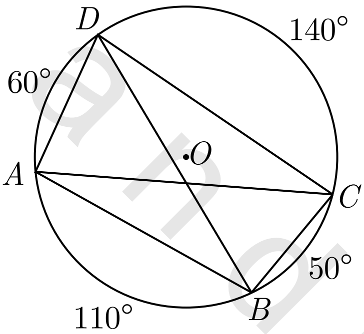
$$= \frac{1}{2}\left(\widehat{ADB} - \widehat{ACB}\right). \qquad \square$$

ملحوظة: من المبرهنة (١٣) نحصل على:

(أ) قياس أي زاوية مرسومة داخل نصف دائرة يساوي $90°$.

(ب) جميع الزوايا المرسومة داخل دائرة وتقابل القوس الصغير نفسه يجب أن تكون متطابقة.

مثال (١١): الدائرة $C(O,r)$ المبينة فيها، $\widehat{AB} = 110°$، $\widehat{BC} = 50°$، $\widehat{CD} = 140°$. احسب قياس زوايا الشكل الرباعي $ABCD$ وقياس الزوايا بين قطري وأضلاع الشكل الرباعي $ABCD$.



الحل:

$$\widehat{A} = \frac{1}{2}\widehat{BC} + \frac{1}{2}\widehat{DC} = 25° + 70° = 95°$$

$$\widehat{B} = \frac{1}{2}\widehat{AD} + \frac{1}{2}\widehat{DC} = 30° + 70° = 100°$$

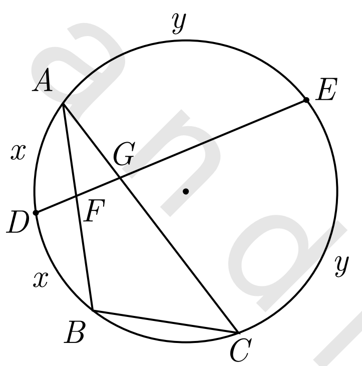
$$\widehat{C} = \frac{1}{2}\widehat{AD} + \frac{1}{2}\widehat{AB} = 30° + 55° = 85°$$

$$\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{BC} = 55° + 25° = 80°$$

$$\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = 70^\circ$$
$$\widehat{CAB} = \widehat{CDB} = 25^\circ$$
$$\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 30^\circ$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 55^\circ. \qquad \square$$

مثال (١٢): في الشكل المرفق، D و E منتصفا $\widehat{AB}$ و $\widehat{AC}$ على التوالي، F و G نقطتا تقاطع $\overline{DE}$ مع $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ على التوالي. أثبت أن $\triangle AFG$ متساوي الساقين.

الحل:

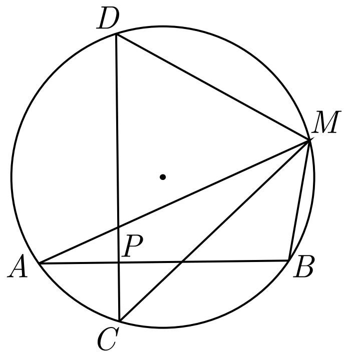


لنفرض أن $\widehat{AD} = \widehat{DB} = x$ وأن $\widehat{AE} = \widehat{EC} = y$. عندئذ،

$$\widehat{AFG} = \frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}\left(\widehat{AD} + \widehat{EC}\right) = \widehat{AGF}. \qquad \diamond$$

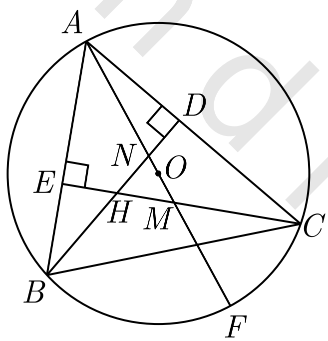
مثال (١٣): ليكن $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ وترين متعامدين في دائرة. لنفرض أن M نقطة واقعة على $\widehat{BD}$ أو $\widehat{AC}$. أثبت أن $\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = 90^\circ$.

الحل: نفرض أن P هي نقطة تقاطع الوترين. الآن،



$$\widehat{AMD} + \widehat{BMC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \widehat{APD} = 90^\circ. \quad \diamond$$

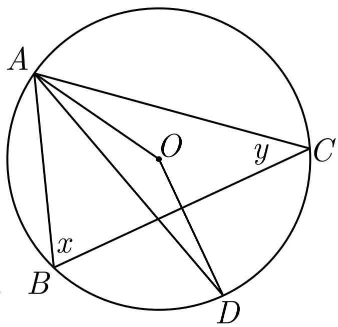
مثال (١٤): في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AC} \perp \overline{BD}$، $\overline{AB} \perp \overline{CE}$، $\overline{AF}$ قطر.
أثبت أن $\triangle HNM \sim \triangle ABC$.



الحل: صل $\overline{CF}$ ولاحظ أن $\widehat{ACF} = 90^\circ$. الآن،

$\widehat{AFC} = \widehat{FAC} - 90^\circ = \widehat{AND} = \widehat{HNM}$ وبما أن $\widehat{ABC}$ محيطية منشأة على القوس $\overset{\frown}{AC}$ فإن $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ وعليه $\widehat{ABC} = \widehat{HNM}$. كذلك $\widehat{NHM} = \widehat{EHB} = 90^\circ - \widehat{ABD} = \widehat{BAC}$. إذن، $\triangle HNM \sim \triangle ABC$. $\diamond$

مثال (١٥): في الشكل المرفق، $\widehat{BD} = \widehat{DC}$. $\widehat{ABC} = x$ و $\widehat{ACB} = y$.
حيث $x > y$. جد قياس $\widehat{ADO}$.

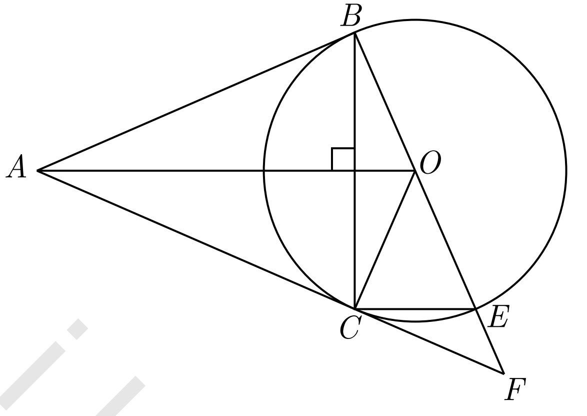


الحل: بما أن $\triangle OAD$ متساوي الساقين فإن

$$\begin{aligned}
\widehat{ADO} &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{AOD}\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABD} \\
&= 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AB} - \frac{1}{2}\widehat{BD} \\
&= 90^\circ - \widehat{ACB} - \frac{1}{4}\widehat{BC} \\
&= 90^\circ - \widehat{ACB} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} \\
&= 90^\circ - \widehat{ACB} - \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right)
\end{aligned}$$

إذن، $\widehat{ADO} = \frac{1}{2}(x - y)$. ◇

مثال (١٦): في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان للدائرة $C(O,r)$ ، $\overline{AO} \perp \overline{BC}$. أثبت أن $\widehat{BAO} = \widehat{ECF}$.



الحل:

$$\widehat{BAO} = 90^\circ - \widehat{BOA} = \widehat{OBC} = \widehat{EBC} = \frac{1}{2}\widehat{CE} = \widehat{ECF}. \quad \diamond$$

مساحة المضلعات المنتظمة [Areas of Regular Polygons]

لقد أثبتنا في بداية هذا الفصل أنه توجد دائرة وحيدة تمر بأي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. وسنبين في الجزء الثاني من هذا الكتاب أنه يمكن رسم دائرة تحيط أي مضلع منتظم تسمى الدائرة الخارجية للمضلع. أيضاً يمكن رسم دائرة داخل أي مضلع منتظم تسمى الدائرة الداخلية للمضلع. إضافة إلى ذلك فإن الدائرتين الخارجية والداخلية للمضلع المنتظم تشتركان في المركز.

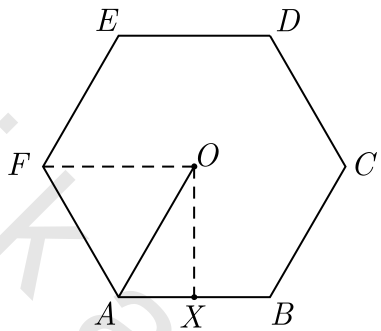
تعريف:

(١) مركز المضلع المنتظم هو المركز المشترك للدائرتين الخارجية والداخلية.

(٢) نصف قطر المضلع المنتظم هو المسافة بين مركز المضلع وأي رأس من رؤوسه.

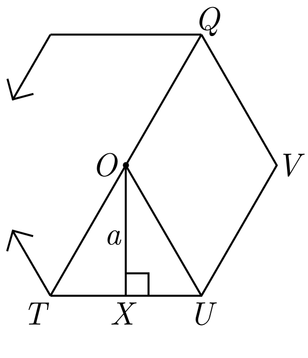
(٣) عامل (apothem) المضلع المنتظم هو المسافة بين المركز وأي ضلع من أضلاعه.

(٤) الزاوية المركزية للمضلع المنتظم هي الزاوية التي رأسها مركز المضلع وضلعاها نصفا قطرين مرسومان لرأسين متجاورين.



المركز (O)، العامل ($\overline{OX}$)، نصف القطر (OA)، زاوية مركزية ($\widehat{FOA}$).

مبرهنة (١٤): مساحة المضلع المنتظم تساوي نصف حاصل ضرب العامل والمحيط.

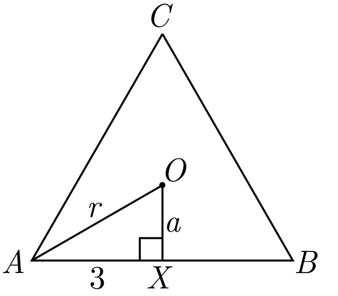


البرهان: لنفرض أن $TUVQ\cdots$ مضلع منتظم، عامله a، طول ضلعه s، محيطه p ومساحته A. برسم n من المثلثات المتطابقة، نجد أن مساحة كل منها تساوي $\frac{1}{2}as$. عندئذ،

$$A = n \times \frac{1}{2}as = \frac{1}{2}a(ns) = \frac{1}{2}ap. \qquad \square$$

مثال (١٧): جد نصف قطر وعامل المثلث المتساوي الأضلاع إذا كان طول ضلعه يساوي 6.

الحل:

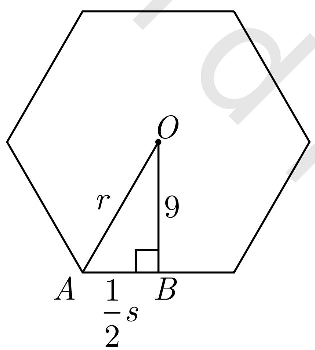


لاحظ أن المثلث $\triangle AOX$ هو مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. إذن،

$a = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ و $r = 2a = 2\sqrt{3}$. ◇

مثال (١٨): جد مساحة السداسي المنتظم إذا كان عامله يساوي 9.

الحل:

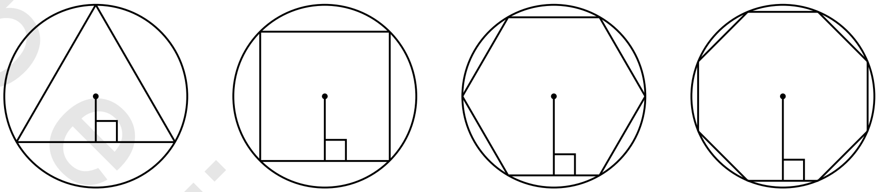


المثلث $\triangle AOB$ هو مثلث $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$. إذن، $\dfrac{1}{2}s = \dfrac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. أي أن $s = 6\sqrt{3}$. ومن ذلك نجد أن $p = 6 \times 6\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$. وبهذا فإن

$$A = \frac{1}{2}ap = \frac{1}{2} \times 9 \times 36\sqrt{3} = 162\sqrt{3}.$$ ◇

محيط الدائرة [Circumference of circle]

الأشكال الأربعة التالية تبين لنا أربعة مضلعات منتظمة مرسومة داخل دوائر متطابقة.



من هذه الأشكال نلاحظ أن الزيادة في عدد أضلاع المضلع تؤدي إلى الزيادة في كل من:

(أ) العامل، حيث يقترب أكثر فأكثر من نصف قطر الدائرة.

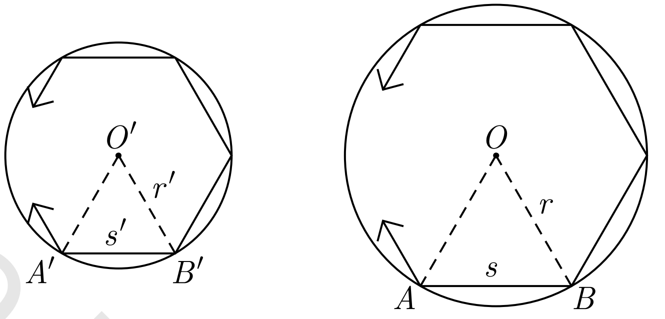
(ب) المحيط، حيث يقترب أكثر فأكثر من محيط الدائرة.

(ج) المساحة، حيث تقترب أكثر فأكثر من مساحة الدائرة.

بجعل عدد أضلاع المضلع يزداد زيادة كافية نستطيع القول إن محيط الدائرة (يرمز له بالرمز C) هو نهاية محيطات المضلعات المنتظمة المرسومة داخل الدائرة. كما أن مساحة الدائرة (يرمز لها بالرمز A) هي نهاية مساحات المضلعات المنتظمة المرسومة داخل الدائرة.

مبرهنة (١٥): النسبة بين محيط أي دائرة وقطرها عدد ثابت.

البرهان: لنفرض أن C محيط الدائرة التي مركزها O وقطرها d وأن C' هو محيط الدائرة التي مركزها O' وقطرها d'.



ارسم داخل الدائرة O مضلعاً منتظماً عدد أضلاعه n ومحيطه p_n وارسم داخل الدائرة O' مضلعاً منتظماً عدد أضلاعه n ومحيطه p'_n. عندئذ، النسبة بين محيطي المضلعين هي:

$$\frac{p_n}{p'_n} = \frac{ns}{ns'} = \frac{s}{s'}$$

وبما أن $\triangle A'O'B' \sim \triangle AOB$ فإن $\frac{r}{r'} = \frac{s}{s'}$. إذن، $\frac{p_n}{p'_n} = \frac{r}{r'} = \frac{d}{d'}$.

الآن، بجعل n يزداد زيادة كافية بحيث يقترب p_n من C و p'_n من C' نجد أن $\frac{C}{C'} = \frac{d}{d'}$. أي أن $\frac{C}{d} = \frac{C'}{d'}$. وبهذا فإن $\frac{C}{d}$ ثابت لأي دائرة. □

ملحوظات:

(١) من المعلوم أن هذا الثابت $\frac{C}{d}$ يساوي العدد غير الكسري π (يساوي تقريباً 3.14 أو $\frac{22}{7}$). من ذلك نحصل على القانون التالي لحساب محيط الدائرة:

$$C = \pi d = 2\pi r\,.$$

(٢) إذا كان قياس القوس $\widehat{AB}$ في دائرة $C(O,r)$ يساوي n° فإن هذا القياس يقابل $\frac{n}{360}$ من محيط الدائرة. ولذا فإن طول القوس $\widehat{AB}$ يساوي

$$\frac{n}{360} \times 2\pi r .$$

على سبيل المثال، إذا كان نصف قطر دائرة يساوي 4 وقياس القوس $\widehat{AB}$ يساوي 40° فإن طول القوس يساوي

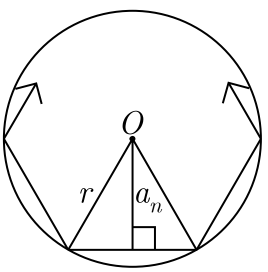
$$\frac{40}{360} \times 2\pi \times 4 = \frac{8\pi}{9} .$$

مساحة الدائرة [Area of a Circle]

لإيجاد مساحة الدائرة نستخدم قانون مساحة المضلع المنتظم.

مبرهنة (١٦): مساحة الدائرة $C(O,r)$ هي $A = \pi r^2$.

البرهان: لنفرض أن A_n مساحة المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة $C(O,r)$ والذي عدد أضلاعه n وعامله a_n ومحيطه p_n .

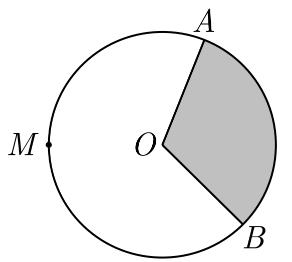


عندئذ، $A_n = \frac{1}{2} a_n p_n$. وبأخذ n كبيراً بما فيه الكفاية بحيث يقترب a_n قرباً كافياً من r، p_n من C، A_n من A نجد أن $A = \frac{1}{2} r C$. وبما أن $C = 2\pi r$ فإن $A = \frac{1}{2} r(2\pi r) = \pi r^2$. □

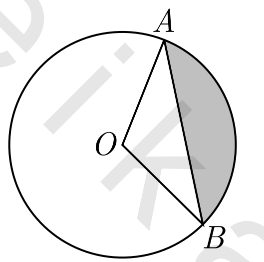
تعريف:

(١) القطاع (sector) في الدائرة $C(O,r)$ هو المنطقة المحدودة بنصفي قطر الدائرة وقوس.

(٢) المقطع (segment) في الدائرة $C(O,r)$ هو المنطقة المحدودة بقوس في الدائرة والوتر المقابل للقوس.



كل من المنطقتين المظللة وغير المظللة قطاع في الدائرة

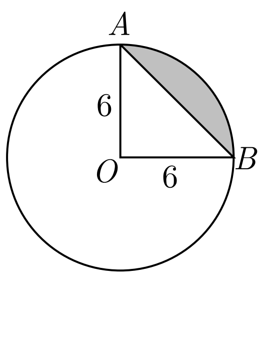


المنطقة المظللة مقطع في الدائرة

مساحة القطاع الذي قياس قوسه n درجة هو $\frac{n}{360} \times \pi r^2$.

أما مساحة المقطع فيمكن إيجادها بطرح مساحة المثلث $\triangle AOB$ من مساحة القطاع AOB.

مثال (١٩): جد مساحة المقطع المقابل لقوس في دائرة قياسه $90°$ ونصف قطر الدائرة 6.

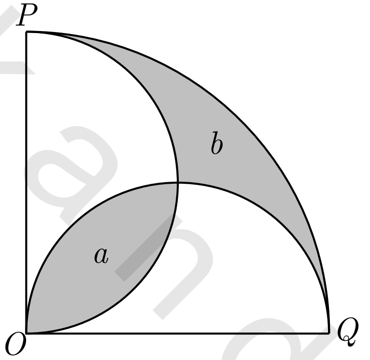


الحل: مساحة القطاع AOB تساوي $9\pi = \frac{90}{360} \times \pi \times 6^2$.

مساحة المثلث AOB تساوي $18 = 6 \times 6 \times \frac{1}{2}$.

مساحة المقطع تساوي $9\pi - 18$. ◇

مثال (٢٠) [Aust.MC 1980]: رسمنا في الشكل المرفق، ربع دائرة OPQ ونصفي دائرة قطراهما OP و OQ. إذا كانت a و b مساحتي المنطقتين المظللتين فجد $\frac{a}{b}$.



الحل: لنفرض أن $2r$ هو نصف قطر ربع الدائرة. عندئذ، r هو نصف قطر كل من نصفي الدائرة.

لاحظ أن مساحة ربع الدائرة تساوي مساحة نصفي الدائرتين المرسومتين على OP و OQ مضافاً إلى ذلك مساحة المنطقة b ومطروحاً من ذلك مساحة المنطقة a (حسبناها مرتين). ولذا فإن

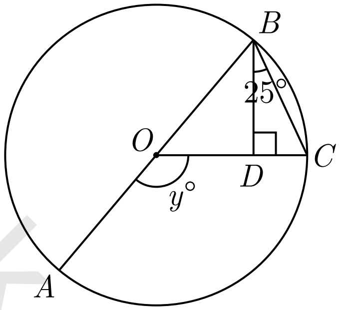
$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\pi(2r)^2 &= \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 + b - a\\ \pi r^2 &= \pi r^2 + b - a\end{aligned}$$

إذن، $b - a = 0$. ومن ثم $b = a$ ويكون $\frac{a}{b} = 1$. ◇

مسائل محلولة

(١) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AOB}$ قطر. ما قياس الزاوية y ؟

(أ) $110°$ (ب) $115°$ (ج) $120°$ (د) $130°$

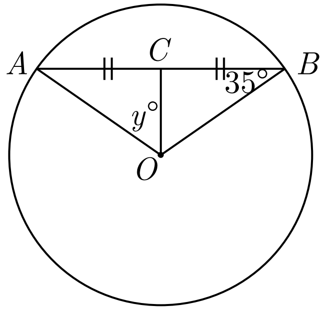


الحل: الإجابة هي (د): $\widehat{BCD} = 180° - (90° + 25°) = 65°$.

$\triangle OBC$ متساوي الساقين. إذن، $\widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \widehat{DCB} = 65°$. ولذا فإن $\widehat{OBD} = 65° - 25° = 40°$. وبهذا فإن $y = 40° + 90° = 130°$ (خارجة للمثلث $\triangle ODB$).

(٢) ما قياس الزاوية y في الدائرة $C(O,r)$ ؟

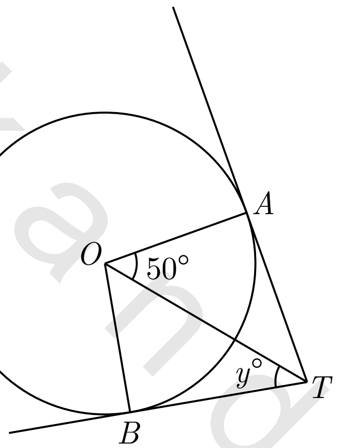
(أ) $35°$ (ب) $50°$ (ج) $55°$ (د) $60°$



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\overline{OC}$ ينصف الوتر $\overline{AB}$ فإن $\overline{OC} \perp \overline{AB}$ ويكون $\widehat{BCO} = 90°$. $\widehat{A} = \widehat{B} = 35°$ ($\triangle OAB$ متساوي الساقين). إذن، $y = 180° - (90° + 35°) = 55°$.

(٣) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{TA}$ و $\overline{TB}$ مماسان. ما قياس الزاوية y ؟

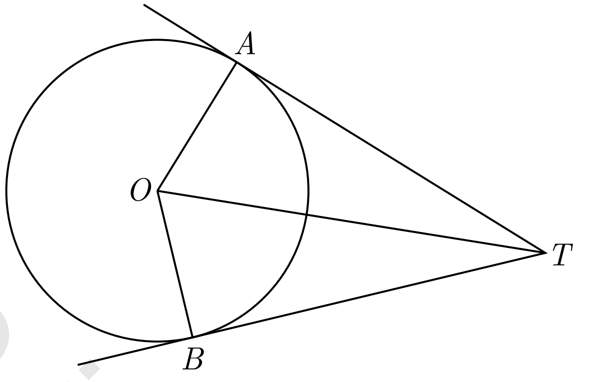
(أ) $40°$ (ب) $45°$ (ج) $50°$ (د) $55°$



الحل: الإجابة هي (أ): بما أن نصف القطر عمودي على المماس فإن $\widehat{OAT} = 90°$. ولذا فإن $\widehat{ATO} = 180° - 140° = 40°$. إذن، $y = \widehat{ATO} = 40°$.

(٤) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AT}$ و $\overline{BT}$ مماسان، $r = 5$، $AT = 12$. ما طول OT ؟

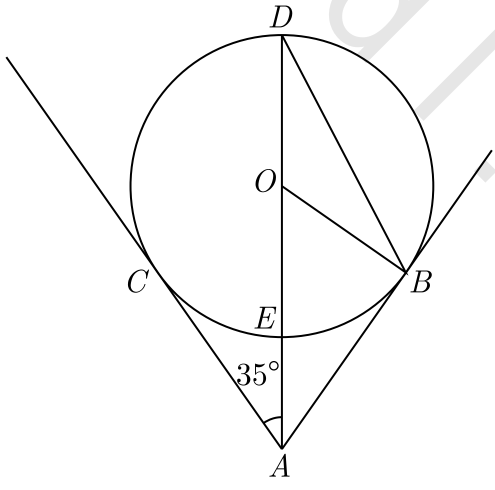
(أ) 5 (ب) 12 (ج) 13 (د) 15



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\triangle OAT$ قائم الزاوية عند $\widehat{A}$ فإن $OT = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

(٥) $\overline{EOD}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان للدائرة. ما قياس الزاوية $\widehat{D}$ ؟

(أ) 25° (ب) 27.5° (ج) 35° (د) 40°



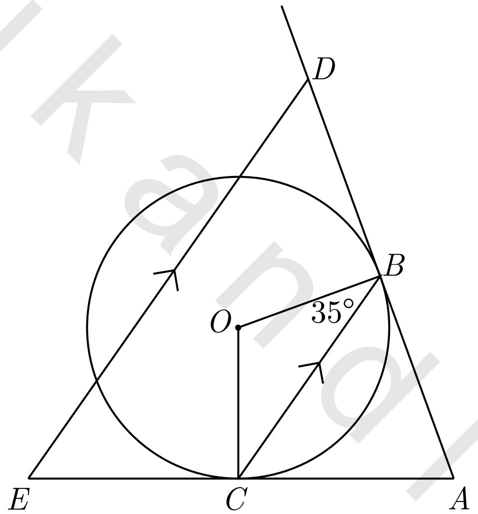
الحل: الإجابة هي (ب): $\overline{OB} \perp \overline{AB}$ و $\widehat{OAB} = 35^\circ$. إذن،

$\widehat{AOB} = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$. وبهذا فإن

$$\widehat{D} = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 27.5^\circ .$$

(٦) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{ABD}$ و $\overline{ACE}$ مماسان عند B و C على التوالي، $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$، $\widehat{CBO} = 35^\circ$. ما قياس الزاوية $\widehat{E}$ ؟

(أ) 55° (ب) 60° (ج) 65° (د) 70°

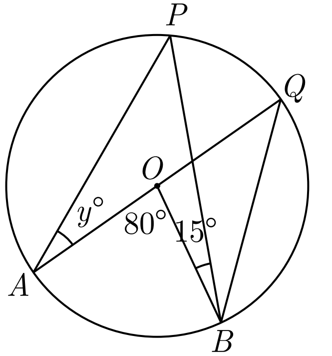


الحل: الإجابة هي (أ): $\widehat{OBA} = \widehat{OCA} = 90^\circ$. $\triangle OBC$ متساوي الساقين، ولذا فإن $\widehat{OCB} = \widehat{OBC} = 35^\circ$. إذن، $\widehat{CBA} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. أيضاً، $\triangle ABC$ متساوي الساقين، ولذا فإن $\widehat{BCA} = \widehat{CBA} = 55^\circ$. إذن، $\widehat{A} = 70^\circ$. وبما أن $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ فإن $\widehat{D} = \widehat{CBA} = 55^\circ$. وبهذا نجد أن

$$\widehat{E} = 180^\circ - (55^\circ + 70^\circ) = 55^\circ .$$

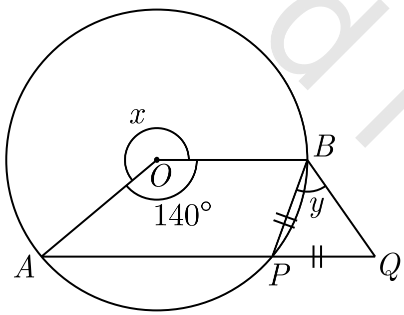
(٧) ما قياس الزاوية y في الدائرة $C(O,r)$ المبينة في الشكل المرفق ؟

(أ) 15° (ب) 25° (ج) 30° (د) 40°



الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{AQB} = \frac{1}{2} \times 80^\circ = 40^\circ$. إذن، $\widehat{OBQ} = 40^\circ$ (لأن $\triangle OQB$ متساوي الساقين). إذن، $\widehat{PBQ} = 25^\circ$. ولكن y و $\widehat{PBQ}$ يقابلان القوس $\widehat{PQ}$. إذن، $y = \widehat{PBQ} = 25^\circ$.

(٨) في الدائرة $C(O,r)$، P تقع على $\overline{AQ}$. ما قياس الزاوية y ؟



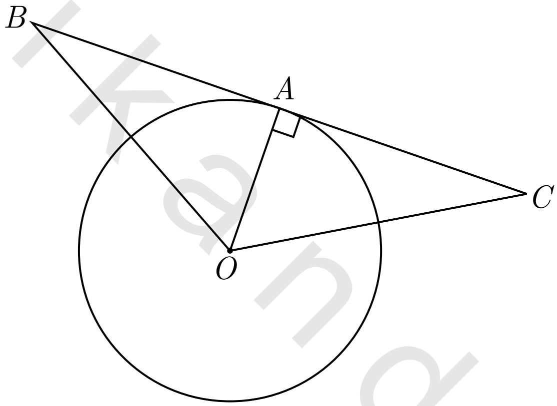
(أ) 35° (ب) 40° (ج) 45° (د) 55°

الحل: الإجابة هي (د): $x = 360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$. ولذا فإن $\widehat{BPA} = \frac{1}{2}x = 110^\circ$. وبما أن $\triangle PBQ$ متساوي الساقين فإن

$$y = \widehat{PQB} = \frac{1}{2}\widehat{BPA} = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ.$$

(٩) في الشكل المرفق، $\overleftrightarrow{BAC}$ مماس عند A للدائرة التي مركزها O. إذا كان نصف قطر الدائرة 2 وكان $\widehat{BOC} = 120^\circ$ وكان $BA = CA$ فإن OC يساوي:

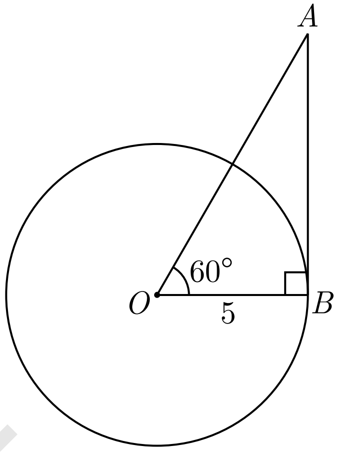
(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6



الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\overline{BC} \perp \overline{OA}$ و $BA = CA$ فإن $\overline{OA}$ متوسط وارتفاع في المثلث $\triangle OBC$. إذن، $OB = OC$. وبما أن $\overline{OA}$ منصف $\widehat{BOC}$ فإن $\widehat{AOC} = 60^\circ$. من ذلك نجد أن $\widehat{OCA} = 30^\circ$. إذن، $OC = 2OA = 2 \times 2 = 4$.

(١٠) قياس الزاوية بين نصف قطر الدائرة $\overline{OB}$ والقطعة المستقيمة $\overline{OA}$ يساوي 60°. $\overline{AB}$ مماس للدائرة عند B. إذا كان $OB = 5$ فما طول OA ؟

(أ) 5 (ب) 10 (ج) 15 (د) 20

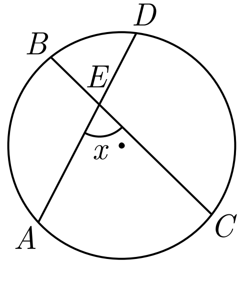


الحل: الإجابة هي (ب):

بما أن $\overline{AB}$ مماس للدائرة فإن $\widehat{B} = 90°$. إذن، $\widehat{A} = 30°$. وبهذا فإن $OA = 2OB = 2 \times 5 = 10$.

(١١) في الشكل المرفق، $\widehat{AB} = 94°$ و $\widehat{CD} = 120°$. ما قياس $\widehat{x}$ ؟

(أ) $70°$ (ب) $73°$ (ج) $80°$ (د) $85°$

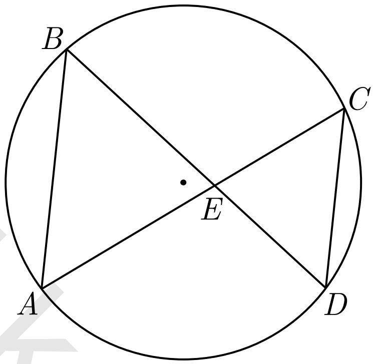


الحل: الإجابة هي (ب):

$$\widehat{AEB} = \widehat{DEC} = \frac{1}{2}\left(\widehat{AB} + \widehat{CD}\right) = \frac{1}{2}(94 + 120) = 107°$$

إذن، $\hat{x} = 180 - 107 = 73°$.

(١٢) في الدائرة المرفقة، $AB = 16$ ، $CE = 10$ ،



$CD = 12$. ما طول AE ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) $\frac{40}{3}$ (د) 14

الحل: الإجابة هي (ج): من الواضح أن $\triangle DCE \sim \triangle BAE$.

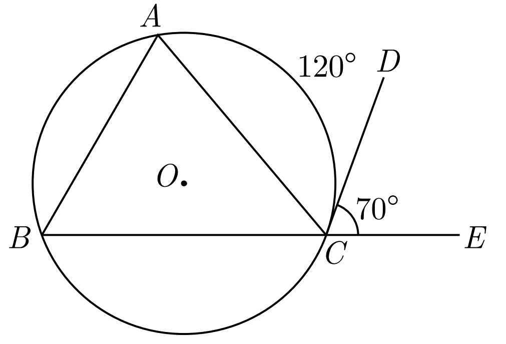
ومن ذلك نجد أن

$$\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}$$
$$\frac{16}{12} = \frac{AE}{10}$$

إذن، $AE = \frac{16 \times 10}{12} = \frac{40}{3}$.

(١٣) رسمنا $\triangle ABC$ داخل الدائرة $C(O,r)$ ، $\overline{DC}$ مماس للدائرة عند C ، $\overline{BCE}$ قطعة مستقيمة، $\widehat{AC} = 120°$. $\widehat{DCE} = 70°$. ما قياس $\widehat{BAC}$ ؟

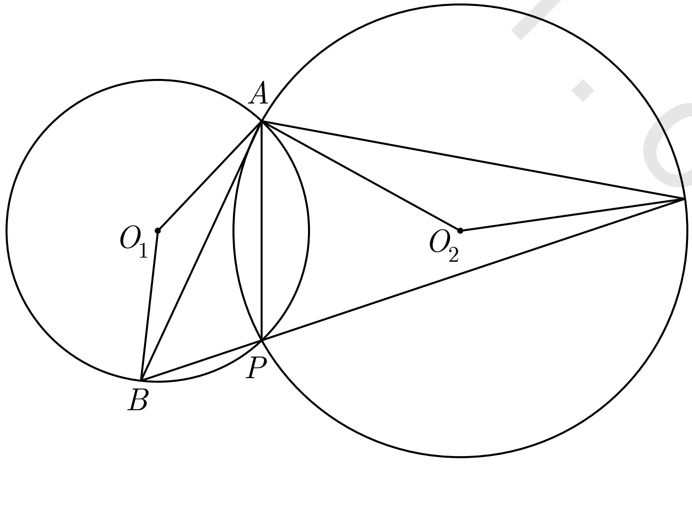
(أ) $50°$ (ب) $60°$ (ج) $70°$ (د) $75°$



الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}\widehat{AC} = \widehat{ACD}$. إذن، $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = 60°$. ولذا فإن $\widehat{ACB} = 180° - (60° + 70°) = 50°$.
وبهذا فإن $\widehat{BAC} = 70°$.

(١٤) تتقاطع الدائرتان $C(O_1, r_1)$ و $C(O_2, r_2)$ في النقطتين A و P . $\overline{BPC}$ قطعة مستقيمة. إذا كان $\widehat{O_1AB} = x$ فإن $\widehat{O_2CA}$ يساوي ؟

(أ) $\frac{x}{3}$ (ب) $\frac{x}{2}$ (ج) x (د) $\frac{3x}{2}$



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن $\widehat{O_2CA} = y$. الآن، $\widehat{O_1AB} = \widehat{O_1BA} = x$ و $\widehat{O_2AC} = \widehat{O_2CA} = y$. ولكن، $\widehat{AO_1B} = 180^\circ - 2x$. ولذا فإن $\widehat{APB} = 180^\circ - 2x$. وبهذا فإن قياس القوس الكبير $\widehat{AB}$ في الدائرة $C(O_1, r_1)$ يساوي $360^\circ - (180^\circ - 2x) = 180^\circ + 2x$. ولذا فإن

$\widehat{APB} = \frac{1}{2}(180^\circ + 2x) = 90^\circ + x$. ومن ذلك نجد أن

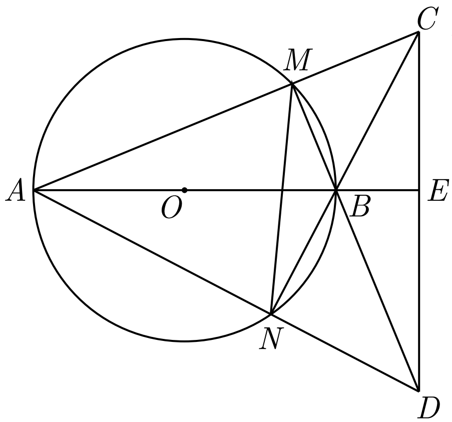
$$\widehat{APC} = 180^\circ - (90^\circ + x) = 90^\circ - x\,.$$

ومن ذلك نجد أن $\widehat{AC} = 2(90^\circ - x) = 180^\circ - 2x$. ومن ثم فإن $\widehat{AO_2C} = 180^\circ - 2x$. ولكن $\widehat{AO_2C} = 180^\circ - 2y$. إذن، $180^\circ - 2x = 180^\circ - 2y$ ويكون $\widehat{O_2CA} = y = x$.

(١٥) $\overline{AOB}$ قطر في الدائرة التي مركزها O ويلاقي امتداده $\overline{CD}$ في النقطة E .

قياس $\widehat{AEC}$ يساوي:

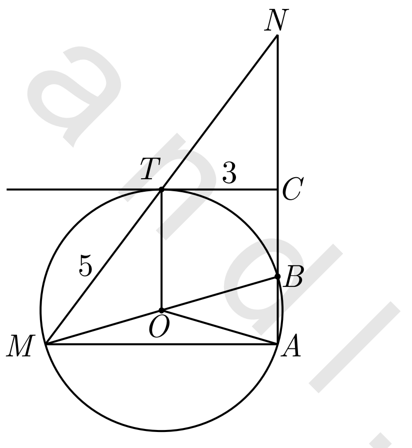
(أ) 80° (ب) 90° (ج) 95° (د) 100°



الحل: الإجابة هي (ب): $\widehat{ANB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ (كل منهما تقابل نصف دائرة). إذن، $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ و $\overline{CN} \perp \overline{AD}$. إذن، B هي نقطة التقاء أعمدة المثلث $\triangle ACD$. ولذا فإن $\overline{CD} \perp \overline{AE}$. وبهذا يكون $\widehat{AEC} = 90^\circ$.

(١٦) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{TC}$ مماس عند T، $\overline{MOB}$ قطر، $\overline{ABCN} \parallel \overline{OT}$، N نقطة تقاطع $\overline{MTN}$ و $\overline{ABCN}$، $MT = 5$، $TC = 3$. ما طول AM ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $\overline{MO}$ و $\overline{TO}$ نصفا قطر في الدائرة فإن $\overline{MO} = \overline{TO}$. وبهذا فإن $\widehat{TMO} = \widehat{MTO}$. وبما أن $\overline{TO} \parallel \overline{NB}$ فإن $\widehat{MTO} = \widehat{MNB}$. إذن، $\widehat{TMO} = \widehat{MNB}$ ويكون $\triangle MBN$ متساوي الساقين فيه $MB = BN$. بما أن $\overline{OT} \parallel \overline{NB}$ فإن $\triangle MOT \sim \triangle MBN$. من ذلك نجد أن $1 = \dfrac{MT}{TN} = \dfrac{MO}{OB}$. إذن، $MT = TN = 5$. سنبرهن الآن أن

$\triangle NTC \sim \triangle NMA$. لاحظ أولاً أن $\overline{AB} \perp \overline{MA}$ (لأن $\overline{BM}$ قطر). وبما أن $\overline{TC}$ مماس فإن $\overline{TC} \perp \overline{TO}$. ولكن $\overline{AC} \parallel \overline{TO}$. إذن $\overline{TC} \perp \overline{AB}$. وبهذا نجد أن $\overline{MA} \parallel \overline{TC}$ ويكون $\triangle NTC \sim \triangle NMA$. من ذلك نجد أن $\frac{TC}{MA} = \frac{NT}{NM} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. وبالتالي فإن $MA = 2TC = 2 \times 3 = 6$.

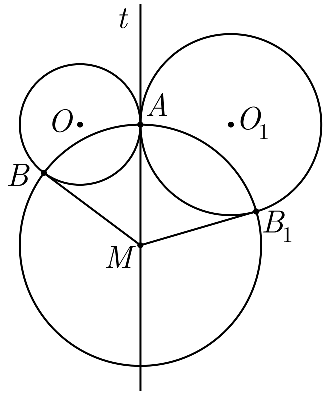
(١٧) في الشكل المرفق $C(O,r)$ و $C(O_1,r_1)$ دائرتان متماستان عند A و t هو المماس المشترك. M نقطة على t. الدائرة الثالثة $C(M,r_2)$ تقطع $C(O,r)$ عند A و B وتقطع $C(O_1,r_1)$ عند A و B_1. عندئذ،

(أ) $\overline{MB}$ مماس للدائرة $C(O,r)$ و $\overline{MB_1}$ مماس للدائرة $C(O_1,r_1)$.

(ب) $\overline{MB}$ مماس للدائرة $C(O,r)$ ولكن $\overline{MB_1}$ ليس مماساً للدائرة $C(O_1,r_1)$.

(ج) $\overline{MB}$ ليس مماساً للدائرة $C(O,r)$ ولكن $\overline{MB_1}$ مماس للدائرة $C(O_1,r_1)$.

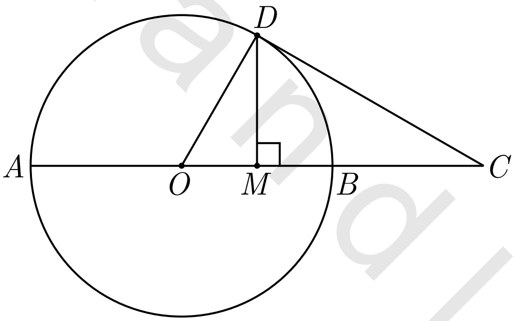
(د) $\overline{MB}$ ليس مماساً للدائرة $C(O,r)$ و $\overline{MB_1}$ ليس مماساً للدائرة $C(O_1,r_1)$.



الحل: الإجابة هي (أ): صل $\overline{OA}$، $\overline{OB}$، $\overline{OM}$. عندئذ، $\overline{MA} = \overline{MB} = r_2$، $\overline{OA} = \overline{OB} = r$. إذن، $\triangle MOA \equiv \triangle MOB$. من ذلك نجد $\widehat{OBM} = \widehat{OAM}$. ولكن $\overline{OA} \perp \overline{AM}$ (نصف قطر ومماس). إذن، $\overline{MB} \perp \overline{OB}$. وبهذا فإن $\overline{MB}$ مماس للدائرة $C(O,r)$. وبالمثل، $\overline{MB_1}$ مماس للدائرة $C(O,r_1)$.

(١٨) في الدائرة $C(O,r)$، A، O، M، B، C على استقامة واحدة، $AO = BC$. M منتصف $\overline{AC}$ و $\overline{AC} \perp \overline{DM}$. ما قياس $\widehat{ODC}$ ؟

(أ) 90° (ب) 95° (ج) 100° (د) 110°



الحل: الإجابة (أ): لاحظ أن $AO = OB = BC = r$ وأن $OM = MB = \frac{r}{2}$. الآن، في $\triangle ODM$ لدينا $DM^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$. وفي $\triangle DMC$ لدينا

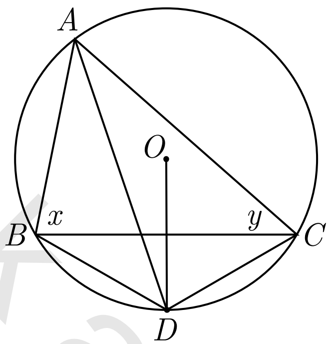
$DC^2 = \frac{3r^2}{4} + \frac{9r^2}{4} = 3r^2$. الآن، في $\triangle ODC$ لدينا

$$DC^2 + OD^2 = 3r^2 + r^2 = 4r^2 = OC^2.$$

إذن، $\triangle ODC$ قائم الزاوية عند $\widehat{D}$. وبهذا فإن $\widehat{ODC} = 90^\circ$.

(١٩) المثلث $\triangle ABC$ مرسوم داخل دائرة مركزها O. D منتصف القوس $\overset{\frown}{BC}$. $\widehat{ABC} = x$، $\widehat{ACB} = y$. ما قياس $\widehat{ADO}$ ؟

(أ) $x + y$ (ب) $x - y$ (ج) $\frac{1}{2}(x - y)$ (د) $\frac{1}{2}(x + y)$

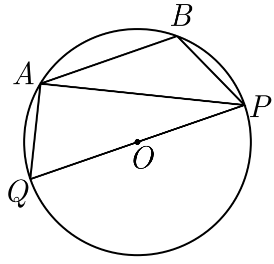


الحل: الإجابة هي (ج): بما أن D تنصف القوس $\overset{\frown}{BDC}$ فإن OD هو المنصف العمودي لـ $\overline{BC}$ ولذا ينصف $\widehat{BDC}$. كذلك $\widehat{BDA} = \widehat{ACB}$ إذ تقابلان نفس القوس $\overset{\frown}{AB}$. الآن،

$$
\begin{aligned}
\widehat{ADO} &= \widehat{BDO} - \widehat{BDA} = \frac{\widehat{BDC}}{2} - \widehat{BDA} \\
&= \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} - \widehat{BDA} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} - \widehat{BDA} \\
&= \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} - \widehat{BCA} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} - \widehat{ACB}\right) \\
&= \frac{1}{2}(x - y)
\end{aligned}
$$

(٢٠) P نقطة على الدائرة $C(O, r)$. $\overline{POQ} \parallel \overline{AB}$. $(PA)^2 + (PB)^2$ يساوي:

(أ) r^2 (ب) $2r^2$ (ج) $3r^2$ (د) $4r^2$

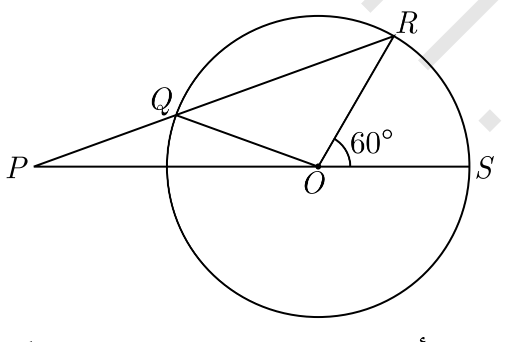


الحل: الإجابة هي (د): بما أن $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$ فإن $PB = AQ$. وبما أن $\widehat{QAP} = 90^\circ$ فإن

$$(PA)^2 + (PB)^2 = (PA)^2 + (AQ)^2 = (QP)^2 = 4r^2 .$$

(٢١) [Aust.MC 1980] في الشكل المرفق POS مستقيم يمر في مركز الدائرة $C(O, r)$. رسمنا المستقيم PQR حيث $PQ = r$. إذا كان $\widehat{ROS} = 60^\circ$ فما قياس $\widehat{OPQ}$ ؟

(أ) 10° (ب) 15° (ج) 20° (د) 25°

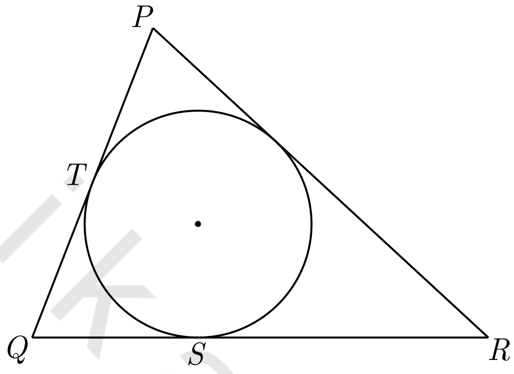


الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $PQ = OQ = OR = r$ فإن كلاً من $\triangle QOR$ و $\triangle QOP$ متساوي الساقين. الآن، إذا كانت $\widehat{P} = \widehat{QOP} = x^\circ$ فإن $\widehat{RQO} = \widehat{R} = 2x^\circ$. إذن، $x + 2x = 60^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{P} = x = 20^\circ$.

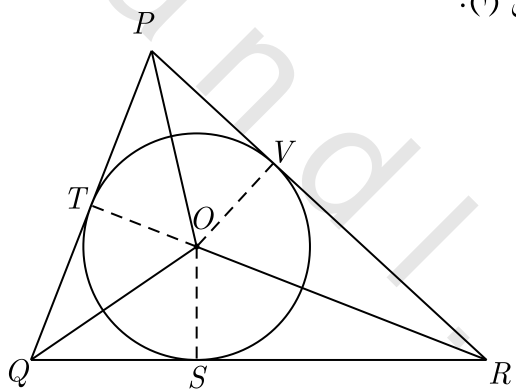
(٢٢) [Aust.MC 1981] في الشكل المرفق، رسمنا دائرة داخل المثلث $\triangle PQR$.

$SR = 7$، $QS = 4$، $TP = 4$. محيط $\triangle PQR$ يساوي:

(أ) 30 (ب) 11π (ج) 50 (د) 15π



الحل: الإجابة هي (أ):

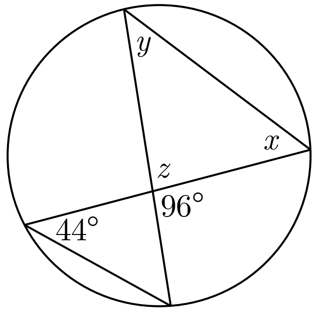


لاحظ أن $\triangle QOT \equiv \triangle QOS$ إذن، $QT = QS = 4$، $PV = PT = 4$، $VR = SR = 7$. وبهذا فإن محيط المثلث يساوي

$$4 + 4 + 4 + 7 + 7 + 4 = 30\,.$$

(٢٣) [Aust.MC 1983] رسمنا أوتاراً في الدائرة كما هو مبين في الشكل المرفق. قياس $\widehat{x}$ يساوي:

(أ) 40° (ب) 44° (ج) 48° (د) 52°

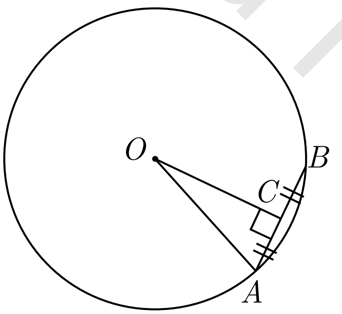


الحل: الإجابة هي (د): $y = 44^\circ$ لأنهما يقابلان القوس نفسه. $z = 180^\circ - 96^\circ = 84^\circ$. إذن، $x = 180^\circ - 44^\circ - 84^\circ = 52^\circ$.

(٢٤) [Aust.MC 1978] رسمنا وتراً طوله 10 في دائرة قطرها 26. المسافة من الوتر إلى مركز الدائرة تساوي:

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 24

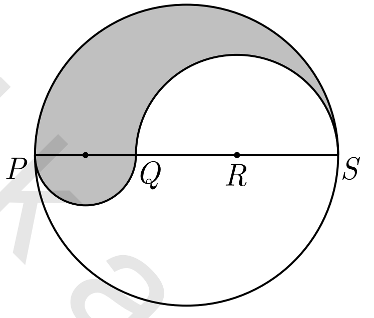
الحل: الإجابة هي (ب):



لنفرض أن C نقطة منتصف $\overline{AB}$ وأن $x = OC$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $x = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

(٢٥) [Aust.MC 1984] في الشكل المرفق، $\overline{PQRS}$ قطر في دائرة نصف قطرها r. $PQ = QR = RS$. رسمنا نصفي دائرتين على $\overline{PQ}$ و $\overline{QS}$ ونشأ عن ذلك المنطقة المظللة. ما محيط المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{3\pi r}{2}$ (ب) $\frac{4\pi r}{3}$ (ج) $\frac{5\pi r}{3}$ (د) $2\pi r$

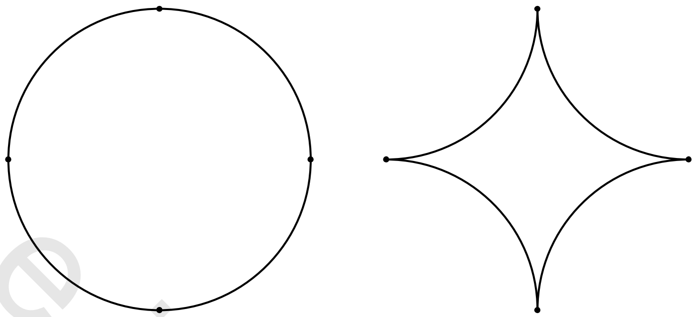


الحل: الإجابة هي (د): $PQ = QR = RS = \frac{2}{3}r$. محيط المنطقة المظللة

$$\frac{2\pi r}{2} + \frac{2\left(\frac{1}{3}\pi r\right)}{2} + \frac{2\left(\frac{2}{3}\pi r\right)}{2} = 2\pi r\,.$$

(٢٦) [AMC8 2012] قطعنا دائرة نصف قطرها 2 إلى أربعة أقواس متطابقة ثم وصلنا هذه الأقواس مع بعض لتكوين شكل النجمة المبين. ما النسبة بين مساحة شكل النجمة إلى مساحة الدائرة الأصلية ؟

(أ) $\frac{4-\pi}{\pi}$ (ب) $\frac{1}{\pi}$ (ج) $\frac{\pi-1}{\pi}$ (د) $\frac{3}{\pi}$

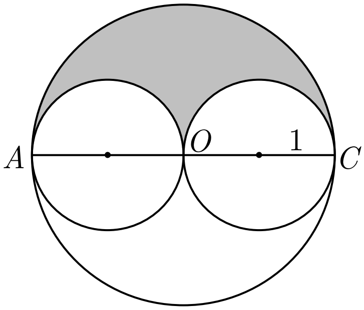


الحل: الإجابة هي (أ): ارسم مربعاً حول شكل النجمة. طول ضلع هذا المربع يساوي طول قطر الدائرة. أي 4. يكوّن هذا المربع أربعة أرباع دائرة حول شكل النجمة. أي أن مساحة هذه الأرباع الأربعة تساوي مساحة الدائرة التي نصف قطرها 2 وهذه المساحة هي 4π. مساحة المربع تساوي 16. إذن، مساحة شكل النجمة تساوي $16 - 4\pi$. وبهذا فالنسبة بين مساحة شكل النجمة ومساحة الدائرة هي

$$\frac{16-4\pi}{4\pi} = \frac{4-\pi}{\pi}.$$

(٢٧) [AJHSME 1986] $\overline{AC}$ قطر الدائرة الكبيرة. مركز كل من الدائرتين الصغيرتين يقع على $\overline{AC}$ وتتماسان عند مركز الدائرة الكبيرة O. نصف قطر كل من الدائرتين الصغيرتين يساوي 1. ما النسبة بين مساحة المنطقة المظللة ومساحة إحدى الدائرتين الصغيرتين ؟

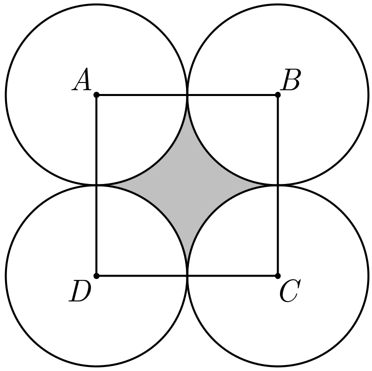
(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) $\frac{3}{2}$ (د) 2



الحل: الإجابة هي (ب): مساحة كل من الدائرتين الصغيرتين تساوي π. مساحة الدائرة الكبيرة تساوي 4π. مساحة نصف الدائرة أعلى $\overline{AC}$ تساوي 2π. الجزء غير المظلل من نصف الدائرة أعلى $\overline{AC}$ هو نصفا الدائرتين الصغيرتين. أي أن مساحته تساوي π. إذن، مساحة الجزء المظلل يساوي $2\pi - \pi = \pi$. وبهذا فإن النسبة هي $\frac{\pi}{\pi} = 1$.

(٢٨) [Pascal 2013] في الشكل المرفق، $ABCD$ مربع طول ضلعه 2، كل من A ، B ، C ، D مركز لدائرة نصف قطرها 1. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $4 - 4\pi$ (ب) $4 - \pi$ (ج) $16 - 4\pi$ (د) $16 - \pi^2$

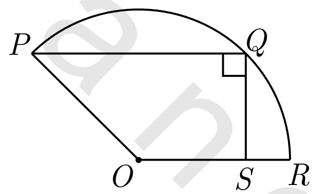


الحل: الإجابة هي (ب): مساحة المنطقة المظللة تساوي مساحة المربع $ABCD$

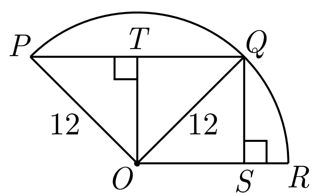
مطروحاً منها مساحة الشكل غير المظلل داخل المربع. مساحة المربع تساوي 4. بما أن $ABCD$ مربع زواياه قائمة ومن ثم فإن كلاً من المناطق غير المظللة داخل المربع هي ربع دائرة نصف قطرها 1. ولذا فمساحاتها مجتمعة تساوي مساحة دائرة نصف قطرها 1 وهذه تساوي π. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $4-\pi$.

(٢٩) [Cayley 2012] في الشكل المرفق، P، Q، R ثلاث نقاط على الدائرة $C(O,12)$. S نقطة على $\overline{OR}$، $SQ \perp PQ$، $\widehat{POR} = 135^\circ$. ما مساحة شبه المنحرف $OPQS$ ؟

(أ) 108 (ب) 112 (ج) 114 (د) 144



الحل: الإجابة هي (أ): ارسم $\overline{OQ}$ وارسم $\overline{OT}$ عمودياً على $\overline{PQ}$. $OP = OQ = 12$.



أيضاً، $\triangle OTP \equiv \triangle OTQ$. كما أن $TQSO$ مستطيل. إذن، $\widehat{TOP} = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$. بما أن مجموع زوايا $\triangle OTP$ يساوي 180° فإن $\widehat{OPT} = 180 - 90 - 45 = 45^\circ$. إذن، $\triangle OTP$ متساوي الساقين وقائم. وبما

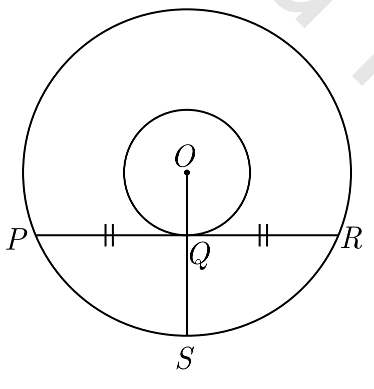
أن $\triangle OTP \equiv \triangle OTQ$ فإن $\triangle OTQ$ متساوي الساقين وقائم. بما أن $\widehat{TOP} = \widehat{TOQ} = 45^\circ$ فإن $\widehat{QOS} = 135^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. إذن، $\triangle OQS$ متساوي الساقين وقائم. إذن، $\triangle OQS \equiv \triangle OTQ$. وبهذا فإن مساحة شبه المنحرف تساوي مجموع مساحات ثلاثة مثلثات متطابقة. الآن، لنفرض أن $OT = TP = x$. إذن، $OP = \sqrt{2}x$. ومن ذلك فإن $x = \dfrac{OP}{\sqrt{2}} = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$.

إذن، مساحة شبه المنحرف تساوي

$$3\left(\frac{1}{2} \times OT \times TP\right) = \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2} \times \frac{144}{2} = 108\,.$$

(٣٠) [Fermat 2011] في الشكل المرفق، دائرتان تشتركان في المركز O، $\overline{PQR}$ وتر في الدائرة الكبيرة ومماس للدائرة الصغيرة عند Q، $PQ = QR$، $PR = 12$، $QS = 4$. ما طول نصف قطر الدائرة الكبيرة ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 6.5 (د) 7.2



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن r هو نصف قطر الدائرة الكبيرة. صل $\overline{OP}$. عندئذ، $OP = OS = r$. بما أن Q منتصف $\overline{PR}$ فإن $\overline{OS} \perp \overline{PR}$.

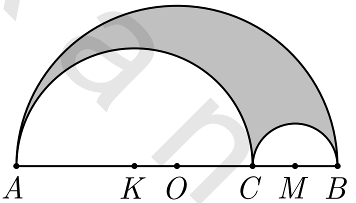
$PQ = 6$، $OQ = r - 4$. إذن،

$$\begin{aligned}(OQ)^2 + (PQ)^2 &= (OP)^2\\ (r-4)^2 + 6^2 &= r^2\\ r^2 - 8r + 16 + 36 &= r^2\end{aligned}$$

من ذلك نجد أن $r = \frac{52}{8} = 6.5$.

(٣١) [Fryer 2009] في الشكل المرفق، K، O، M مراكز أنصاف الدوائر المبينة. $OC = 32$، $CB = 36$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) 700π (ب) 800π (ج) 850π (د) 900π



الحل: الإجابة هي (د): كل من $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ نصف قطر في الدائرة التي مركزها O. ولهذا فإن

$$OA = OB = OC + CB = 36 + 32 = 68$$

ومن ثم فإن

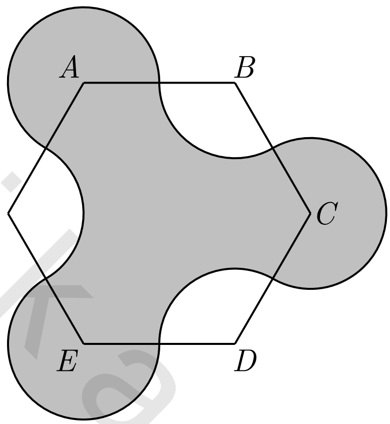
$$\begin{aligned}AC &= AO + OC = 68 + 32 = 100\\ AK &= \frac{1}{2}AC = 50\end{aligned}$$

الآن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\pi(OB)^2 - \frac{1}{2}\pi(AK)^2 - \frac{1}{2}\pi(MB)^2\\ &= \frac{1}{2}\pi[(68)^2 - (50)^2 - (18)^2] = 900\pi\end{aligned}$$

(٣٢) [Galois 2009] في الشكل المرفق، $ABCDEF$ سداسي منتظم طول ضلعه 2. كل من رؤوسه مركز دائرة نصف قطرها 1. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $6\sqrt{3}-2\pi$ (ب) $6\sqrt{3}-\pi$ (ج) $6\sqrt{3}+\pi$ (د) $6\sqrt{3}+2\pi$



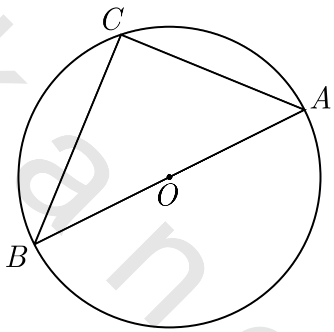
الحل: الإجابة هي (ج): لاحظ أن قياس كل من الزوايا الداخلية للسداسي المنتظم هو 120°. إذن، كل من المناطق غير المظللة داخل السداسي تقابل $\frac{1}{3}=\frac{120}{360}$ دائرة نصف قطرها 1. إذن، مجموع مساحات المناطق غير المظللة داخل السداسي تساوي $\pi = \pi\frac{1}{3}\times 3$. كما أن قياس كل من الزوايا الخارجية عند كل من رؤوس السداسي هو $240^\circ = 360^\circ - 120^\circ$. ولذا فكل من المناطق الثلاث المظللة خارج السداسي تمثل $\frac{2}{3}=\frac{240}{360}$ دائرة ومن ثم فمجموع مساحاتها يساوي $2\pi = \pi\frac{2}{3}\times 3$. مساحة السداسي تساوي مساحة 6 مثلثات متطابقة طول ضلع كل منها يساوي 2 وهي $6\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}\right)6$. إذن، مساحة المنطقة المظللة هي

$$6\sqrt{3}+2\pi-\pi=6\sqrt{3}+\pi\,.$$

(٣٣) [MAΘ 2012] رسمنا مثلثاً داخل دائرة $C(O,r)$ بحيث يكون أحد أضلاعه قطراً للدائرة. ما أكبر نسبة بين مساحة المثلث ومساحة الدائرة ؟

(أ) $\frac{4}{3\pi}$ (ب) $\frac{2}{3\pi}$ (ج) $\frac{1}{\pi}$ (د) $\frac{1}{2\pi}$

الحل: الإجابة هي (ج): بما أن رأسين من رؤوس المثلث هما طرفا قطر من أقطار الدائرة فإن الرأس الثالث يجب أن يقع على نصف دائرة (انظر الشكل المرفق).



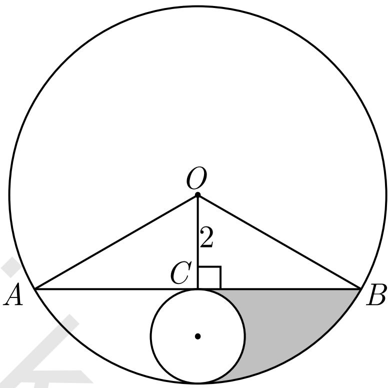
إذن، أكبر ارتفاع للمثلث $\triangle ABC$ هو نصف قطر الدائرة r. وبهذا تكون النسبة بين مساحة المثلث والدائرة هي

$$\frac{\frac{1}{2}\times r\times 2r}{\pi\times r^2}=\frac{1}{\pi}\,.$$

(٣٤) [MAΘ 2012] $\overline{AB}$ وتر في الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 4، $OC=2$ و $\overline{ACB}$ يمس الدائرة الصغرى عند C. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{13\pi}{6}-4\sqrt{3}$ (ب) $\frac{13\pi}{6}-2\sqrt{3}$

(ج) $\frac{13\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ (د) $\frac{13\pi}{3} - 2\sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $OC = 2$ و $OB = 4$ فإن $\widehat{COB} = 60°$.
ومن ثم فإن $\widehat{AOB} = 120°$. إذن، قياس القوس $\widehat{AB}$ يساوي $120°$ وتكون مساحة القطاع AOB هي $\frac{16\pi}{3} = \frac{120}{360} \times \pi \times 16$.

استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $CB = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

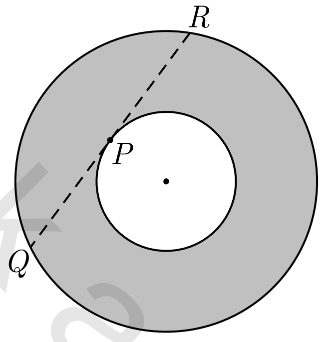
إذن، مساحة $\triangle AOB$ هي $4\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2$.

مساحة المقطع AB تساوي $\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$. بما أن OC يعامد AB و AB مماس للدائرة الصغرى فإن امتداد OC يمر بمركز الدائرة الصغرى وعلى هذا فإن نصف قطر الدائرة الصغرى يساوي 1 ومن ثم فمساحتها تساوي π. إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$\frac{1}{2}\left(\frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3} - \pi\right) = \frac{13\pi}{6} - 2\sqrt{3}.$$

(٣٥) [Aust.MC 1984] $\overline{QPR}$ مماس للدائرة الصغيرة عند P ويقطع الدائرة الكبيرة عند R و Q وطوله 14. الدائرتان تشتركان في المركز. مساحة المنطقة المظللة تساوي:

(أ) $\frac{49\pi}{4}$ (ب) 49 (ج) 49π (د) 196π

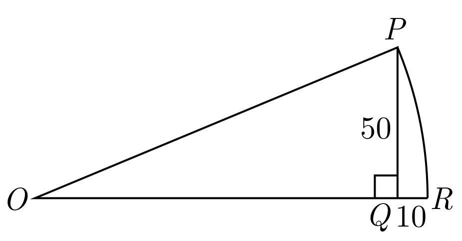


الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن r_1 و r_2 هما نصفا قطري الدائرتين الصغيرة والكبيرة على التوالي. بما أن $PQ = 7$ فنجد من مبرهنة فيثاغورس أن $r_1^2 + 7^2 = r_2^2$. أي أن $r_2^2 - r_1^2 = 49$. الآن، مساحة المنطقة المظللة هي

$$\pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) = 49\pi .$$

(٣٦) [Aust.MC 1980] في الشكل المرفق، R و P نقطتان على دائرة مركزها O. $PQ = 50$ ، $QR = 10$. ما طول نصف قطر الدائرة ؟

(أ) 120 (ب) 130 (ج) 240 (د) 250

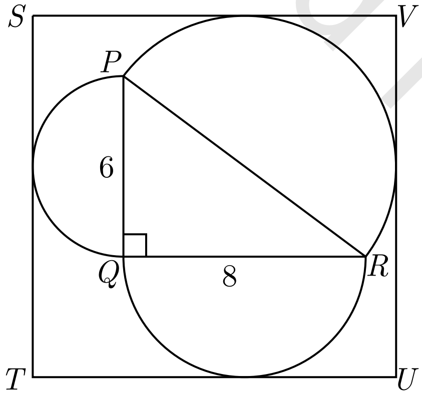


الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن نصف قطر الدائرة هو x. إذن، $OQ = x - 10$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس لدينا

$$\begin{aligned}(x-10)^2 + (50)^2 &= x^2\\ x^2 - 20x + 100 + 2500 &= x^2\\ 20x &= 2600\\ x &= \frac{2600}{20} = 130.\end{aligned}$$

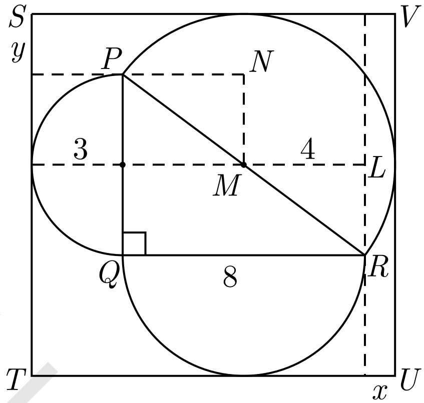
(٣٧) [Aust.MC 1983] في الشكل المرفق، $\triangle PQR$ قائم الزاوية عند Q. رسمنا أنصاف دوائر بحيث تكون أقطارها أضلاع المثلث. أضلاع المستطيل $STUV$ مماسات لأنصاف الدوائر كما هو مبين، $\overline{QR} \parallel \overline{SV} \parallel \overline{TU}$ و $\overline{PQ} \parallel \overline{ST} \parallel \overline{VU}$. إذا كان $PQ = 6$ و $QR = 8$ فما مساحة المستطيل $STUV$ ؟

(أ) 121 (ب) 132 (ج) 144 (د) 156



الحل: الإجابة هي (ج): في الشكل المرفق أبعاد كل من المثلثين القائمين $\triangle PNM$ و $\triangle MLR$ هي $3, 4, 5$. إذن، $5 = x + 4 = y + 3$ ومن ذلك يكون $y = 2$

و $x = 1$. الآن،

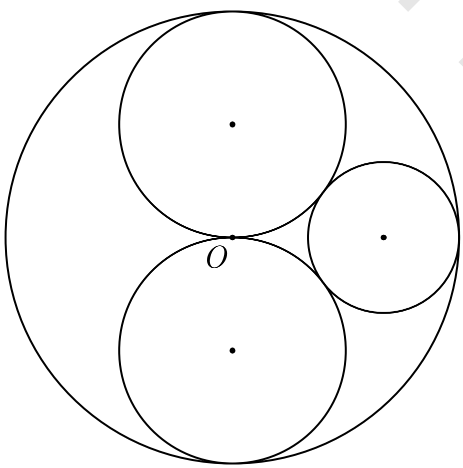


$$TU = 3 + 8 + x = 12$$
$$ST = y + 6 + 4 = 12$$

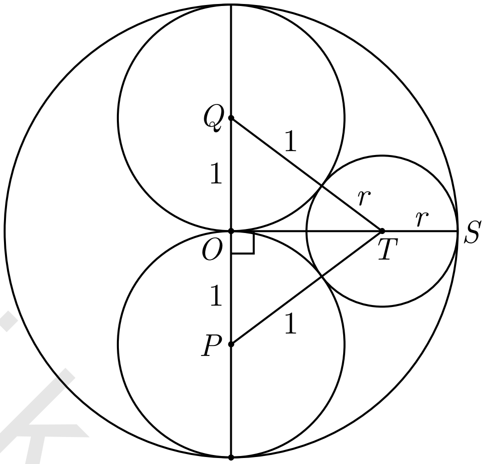
إذن، مساحة المستطيل $STUV$ تساوي 144.

(٣٨) [Aust.MC 1981] رسمنا داخل دائرة مركزها O ونصف قطرها 2 دوائر كما هو مبين في الشكل المرفق. نصف قطر أصغر الدوائر الثلاث يساوي:

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) 1



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن نصف قطر الصغرى هو r .

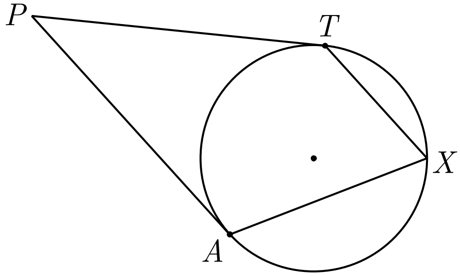


بما أن $OS = 2$ فإن $OT = 2 - r$. استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(2-r)^2 + 1^2 = (r+1)^2$$
$$4 - 4r + r^2 + 1 = r^2 + 2r + 1$$
$$r = \frac{2}{3}.$$

(٣٩) [MAΘ 1990] $\overline{PT}$ و $\overline{PA}$ مماسان للدائرة عند T و A ، $\widehat{P} = 42^\circ$.
ما قياس $\widehat{TXA}$ ؟

(أ) 69° (ب) 72° (ج) 75° (د) 80°

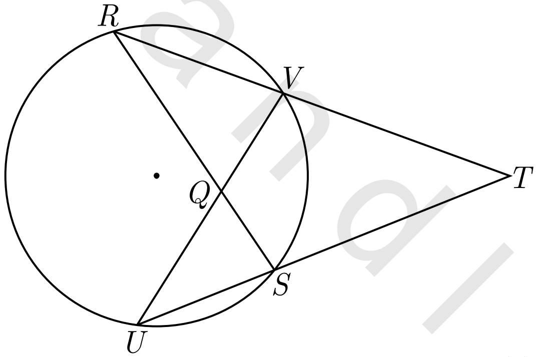


الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن $\overset{\frown}{TA} = x$. عندئذ، $\overset{\frown}{TXA} = 360° - x$. بما أن $\widehat{TPA} = \frac{\overset{\frown}{TXA} - \overset{\frown}{TA}}{2} = \frac{360 - 2x}{2}$ فإن $42 = 180 - x$ وبهذا فإن $x = 138$. إذن،

$$\widehat{TXA} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TA} = \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \times 138 = 69°.$$

(٤٠) [Mathcounts 1989] في الشكل المرفق، $\triangle RTS \equiv \triangle UTV$، $\widehat{R} = 36°$، $\widehat{T} = 42°$. ما قياس $\widehat{RQV}$ ؟

أ) $33°$ ب) $45°$ ج) $50°$ د) $66°$



الحل: الإجابة هي (د):

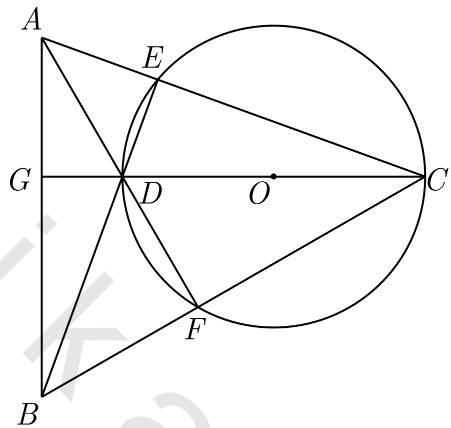
بما أن $\widehat{R} = 36°$ فإن $\overset{\frown}{SV} = 2 \times 36° = 72°$. الآن، $\widehat{T} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RU} - \overset{\frown}{SV}\right)$.
من ذلك نجد أن $42° = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RU} - 72°\right)$. وبهذا فإن $\overset{\frown}{RU} = 156°$. إذن،

$$\widehat{RQV} = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{RV} + \overset{\frown}{US}\right) = \frac{1}{2}(360° - 156° - 72°) = 66°.$$

(٤١) [MAΘ 1987] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، $\widehat{EAD} = 40°$ و

$\widehat{FC} = 120°$ و $\widehat{ED} = 40°$. ما قياس $\widehat{DAB}$ ؟

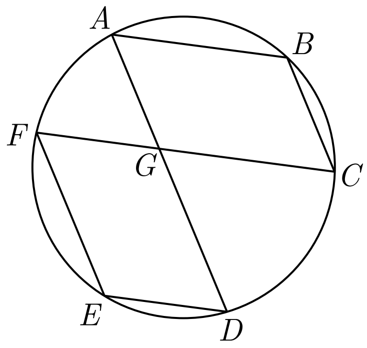
(أ) $30°$ (ب) $35°$ (ج) $40°$ (د) $42°$



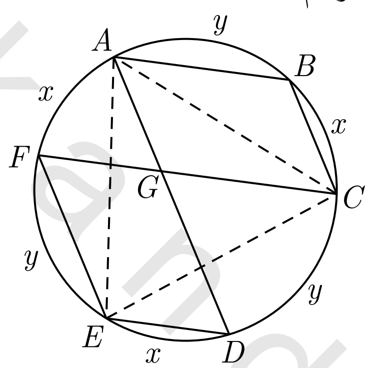
الحل: الإجابة هي (أ): بما أن كلاً من $\widehat{DEC}$ و $\widehat{DFC}$ زاوية مرسومة في نصف دائرة فإن قياس كل منهما يساوي $90°$. بما أن $\overline{AC} \perp \overline{BE}$ و $\overline{BC} \perp \overline{AF}$ (ارتفاعات في ΔABC) فإن $\overline{AB} \perp \overline{CG}$. أي أن $\widehat{DGA} = 90°$. الآن، $60° = \frac{1}{2}\widehat{FC} = \widehat{CDF}$. وبهذا فإن $\widehat{ADG} = 60°$. إذن، $30° = \widehat{DAB} = 90 - \widehat{ADG}$.

(٤٢) [MAΘ 1990] في الشكل المرفق، $ABCG$ و $FGDE$ متوازيا أضلاع حيث A ، B ، C ، D ، E ، F نقاط على الدائرة. $\widehat{AB} + \widehat{ED}$ يساوي:

(أ) $80°$ (ب) $100°$ (ج) $120°$ (د) $140°$



الحل: الإجابة هي (ج): ارسم $\overline{AC}$ ، $\overline{CE}$، $\overline{AE}$.

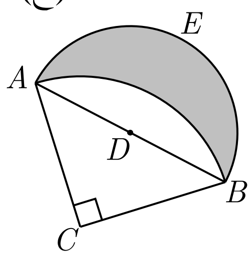


بما أن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ فإن $\widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. وبما أن $\widehat{CAD} = \frac{\widehat{CD}}{2}$ و $\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$ فإن $\widehat{AB} = \widehat{CD}$. وبالمثل نجد أن $\widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{EF} = y$ و $\widehat{AF} = \widehat{BC} = \widehat{DE} = x$. وبما أن $3x + 3y = 360^\circ$ نجد أن

$$x + y = \widehat{AB} + \widehat{DE} = 120^\circ .$$

(٤٣) [MAΘ 1990] في الشكل المرفق، $\triangle ABC$ متساوي الساقين وقائم عند $\widehat{C}$. D منتصف $\overline{AB}$ ومركز نصف الدائرة $\widehat{AEB}$. C مركز ربع الدائرة التي وترها $\overline{AB}$ ، $AB = 2\sqrt{2}$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) π (د) 2π



الحل: الإجابة هي (ب): بما أن $AB = 2\sqrt{2}$ وتر في المثلث $\triangle ABC$ القائم الزاوية والمتساوي الساقين فإن $AC = CB = 2$. وبهذا فإن

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

مساحة ربع الدائرة هي مساحة ربع دائرة نصف قطرها $BC = 2$. أي $\frac{1}{4}\pi \times 2^2 = \pi$. مساحة نصف الدائرة التي قطرها $AB = 2\sqrt{2}$ هي

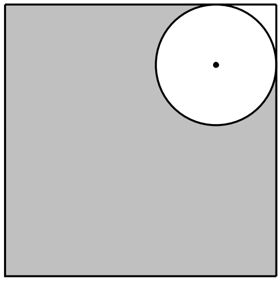
$$\frac{1}{2} \times \pi \times \left(\sqrt{2}\right)^2 = \pi$$

الآن، مساحة المنطقة المظللة تساوي

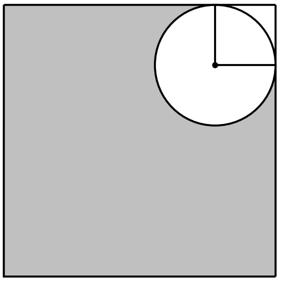
$$2 + \pi - \pi = 2 .$$

(٤٤) [Mathcounts 1992] طول ضلع المربع المبين في الشكل المرفق يساوي 9 ونصف قطر الدائرة يساوي 2. ما مساحة الشكل المظلل ؟

(أ) $77 - 5\pi$ (ب) $77 - 3\pi$ (ج) $77 + 3\pi$ (د) $77 + 5\pi$



الحل: الإجابة هي (ب):

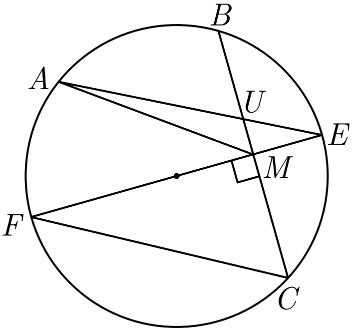


ارسم نصف قطر الدائرة كما هو مبين. الجزء غير المظلل هو مربع طول ضلعه 2 وثلاثة أرباع دائرة نصف قطرها 2. إذن، مساحة الجزء المظلل هي

$$9^2 - \left(\frac{3}{4} \times 2^2 \times \pi + 2^2\right) = 77 - 3\pi\,.$$

(٤٥) [AHSME 1963] في الشكل المرفق، الوتر $\overline{EF}$ منصف عمودي للوتر $\overline{BC}$ ويقطعه في النقطة M. U نقطة تقاطع $\overline{BM}$ و $\overline{EA}$. عندئذ، مهما كانت النقطة U بين B و M فإن $\triangle EUM$ يشبه المثلث:

(أ) $\triangle EFA$ (ب) $\triangle EFC$ (ج) $\triangle ABM$ (د) $\triangle ABU$



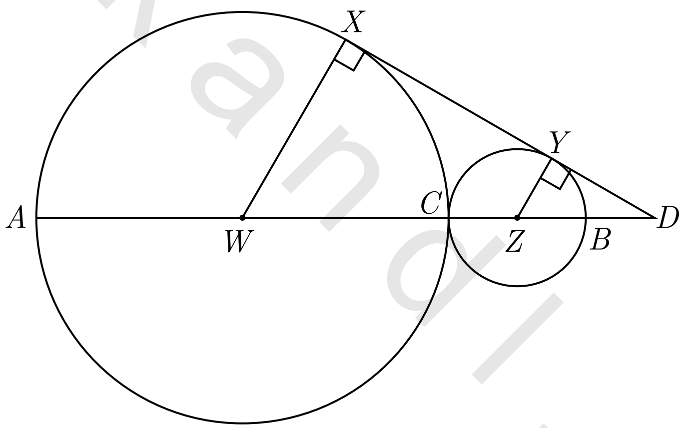
الحل: الإجابة هي (أ): بما أن $\widehat{EMU} = \widehat{EAF} = 90^\circ$ و $\widehat{AEF} = \widehat{UEM}$.

إذن، $\triangle EFA \sim \triangle EUM$.

(٤٦) [AHSME 1954] $\overline{ACB}$ قطعة مستقيمة بحيث $AC = 3CB$. رسمنا دائرتين متماستين قطراهما $\overline{AC}$ و $\overline{CB}$ ورسمنا مماساً مشتركاً للدائرتين بحيث يلاقي امتداد $\overline{AB}$ عند النقطة D . إذا كان نصف قطر الدائرة الصغيرة r فإن BD يساوي:

(أ) $\frac{r}{2}$ (ب) r (ج) $\frac{3r}{2}$ (د) $2r$

الحل: الإجابة هي (ب):

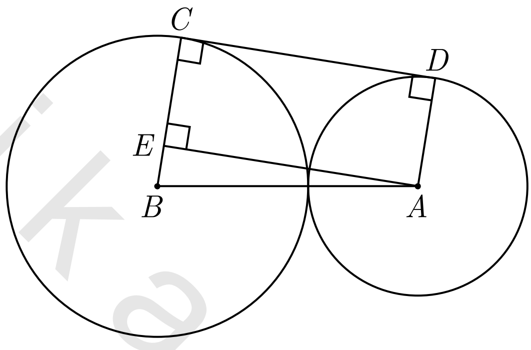


لنفرض أن Z و W مركزا الدائرتين. لدينا $\overline{ZY} \perp \overline{XY}$ و $\overline{WX} \perp \overline{XY}$.
وبما أن $\widehat{WXY} = \widehat{ZYD}$ و $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ فإن $\triangle WXD \sim \triangle ZYD$.
وبما أن $ZY = r$ فإن $WX = 3r$. وبما أن $\frac{DW}{WX} = \frac{DZ}{ZY}$ فإن $\frac{DB + 5r}{3r} = \frac{DB + r}{r}$. ومن ذلك نجد أن $DB = r$.

(٤٧) [MAΘ 1990] ما طول المماس المشترك لدائرتين متماستين نصفا قطريهما هما 8 و 11 ؟

(أ) $\sqrt{22}$ (ب) $2\sqrt{22}$ (ج) $3\sqrt{22}$ (د) $4\sqrt{22}$

الحل: الإجابة هي (د):

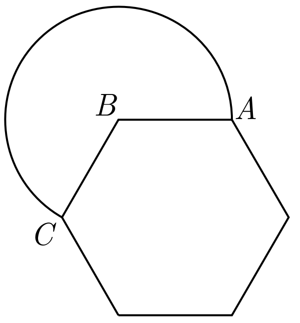


بما أن $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ و $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ فإننا برسم $\overline{AE} \parallel \overline{CD}$ نرى أن $ADCE$ مستطيل. الآن، $EC = AD = 8$. ولذا فإن $EB = BC - 8 = 3$. وبهذا فإن $CD = EA = \sqrt{19^2 - 3^2} = 4\sqrt{22}$.

(٤٨) [MAΘ 1992] ربطنا ماعزاً بحبل مثبت عند إحدى زوايا مبنى على شكل سداسي منتظم طول ضلعه 2. إذا كان طول الحبل يساوي 2 فما مساحة المنطقة التي تستطيع أن تتحرك فيها الماعز ؟

(أ) $\frac{16}{3}\pi$ (ب) 5π (ج) $\frac{8}{3}\pi$ (د) 2π

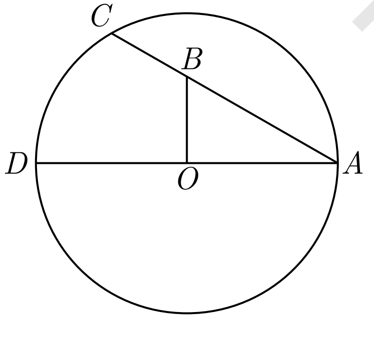
الحل: الإجابة هي (ج):



المنطقة التي تستطيع الماعز التحرك فيها هي المنطقة المحدودة بقوس الدائرة التي مركزها B والضلعين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$. بما أن قياس زاوية السداسي المنتظم هو 120°. فإن مساحة الجزء من الدائرة التي مركزها B الذي يقع داخل السداسي هي ثلث مساحة الدائرة. إذن، المساحة المطلوبة هي $\frac{2}{3}$ مساحة الدائرة. أي أن $\frac{2}{3}\times\pi\times 2^2 = \frac{8}{3}\pi$.

(٤٩) [AHSME 1985] في الدائرة $C(O,r)$ المبينة، $\overline{AD}$ قطر، $\overline{ABC}$ وتر، $BO = 5$، $\widehat{ABO} = \widehat{CD} = 60^\circ$. ما طول BC ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

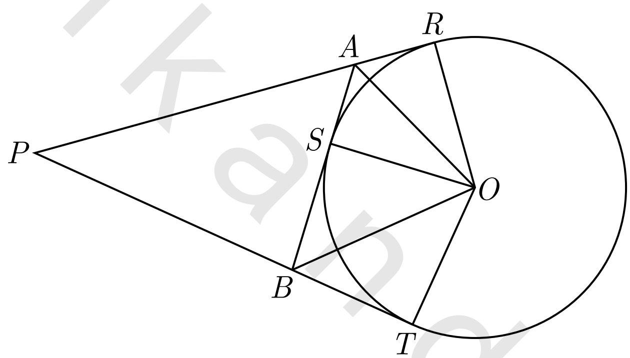


الحل: الإجابة هي (د): ارسم القطعة $\overline{OC}$. بما أن $\widehat{COD} = \widehat{CD} = 60^\circ$ فإن $\widehat{CAD} = \frac{1}{2}\times 60^\circ = 30^\circ$. وبما أن $\widehat{ACO} + \widehat{CAO} = \widehat{COD}$ فإن

$\widehat{ACO} = 30^\circ$. وبما أن $\widehat{CBO} + \widehat{ABO} = 180^\circ$ فإن $\widehat{CBO} = 120^\circ$. إذن، $\widehat{BOC} = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$. وبهذا فإن المثلث $\triangle OBC$ متساوي الساقين ويكون $BC = OB = 5$.

(٥٠) [AHSME 1956] أنشأنا المثلث $\triangle PAB$ من المماسات $\overline{PR}$ ، $\overline{PT}$ ، $\overline{AB}$ للدائرة التي مركزها O . إذا كان $\widehat{APB} = 40^\circ$ فما قياس $\widehat{AOB}$ ؟

(أ) 70° (ب) 72° (ج) 73° (د) 75°

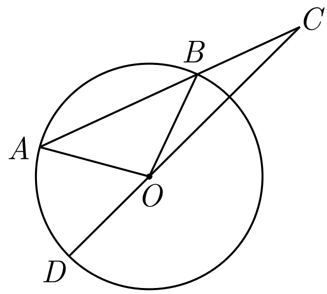


الحل: الإجابة هي (أ): في الرباعي $OTPR$ كل من $\widehat{OTP}$ و $\widehat{ORP}$ قائمة وبما أن مجموع زوايا الرباعي يساوي 360° فإن $\widehat{ROT} = 140^\circ$. من مبرهنة (٩) نعلم أن $\widehat{SOA} = \widehat{ROA}$ وأن $\widehat{SOB} = \widehat{BOT}$. إذن،

$$\widehat{AOB} = \widehat{SOA} + \widehat{BOS} = \frac{1}{2}\widehat{ROT} = 70^\circ .$$

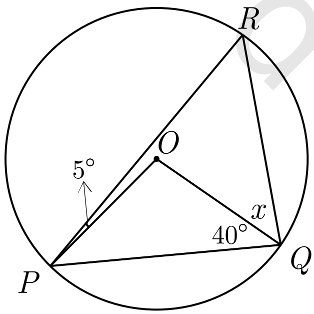
(٥١) [AHSME 1955] في الدائرة المرفقة $C(O,r)$ ، مددنا الوتر $\overline{AB}$ إلى C بحيث يكون $BC = r$. $\overline{COD}$ مستقيم، $\widehat{ACO} = 20^\circ$. ما قياس $\widehat{AOD}$ ؟

(أ) 40° (ب) 50° (ج) 55° (د) 60°



الحل: الإجابة هي (د): بما أن $OB = BC = r$ وأن $\widehat{C} = 20^\circ$ فإن $\widehat{BOC} = 20^\circ$. ولذا فإن $\widehat{ABO} = 40^\circ$. وبما أن $OB = OA$ فإن $\widehat{OAB} = 40^\circ$. إذن، $\widehat{AOD} = \widehat{OAB} + \widehat{C} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$.

(٥٢) [Aust.MC 1988] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، إذا كان $\widehat{OPR} = 5^\circ$ و $\widehat{OQP} = 40^\circ$ فما قيمة x ؟

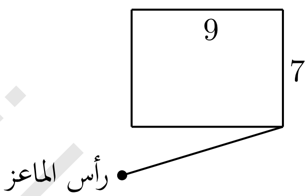


(أ) 30° (ب) 35° (ج) 40° (د) 45°

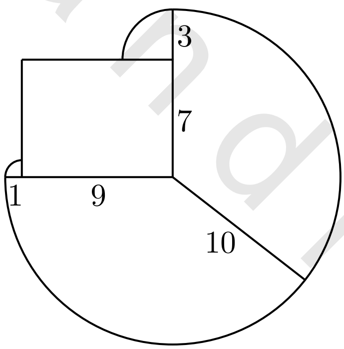
الحل: الإجابة هي (د): ارسم نصف القطر $\overline{OR}$ عندئذ، كل من $\triangle OPQ$، $\triangle OQR$، $\triangle ORP$ متساوي الساقين. بما أن مجموع زوايا المثلث $\triangle PQR$ يساوي 180° فإن $2(40 + 5 + x) = 180^\circ$. ومن ذلك نجد أن $x = 45^\circ$.

(٥٣) [Aust.MC 1989] ربطنا ماعزاً بحبل مثبت عند أحد أركان كوخ مستطيل طوله 9 وعرضه 7 وطول الحبل 10. الكوخ محاط بأرض عشبية. ما مساحة الأرض العشبية التي بإمكان الماعز الوصول إليها ؟

(أ) $\frac{155}{2}\pi$ (ب) $\frac{229}{2}\pi$ (ج) 155π (د) 229π



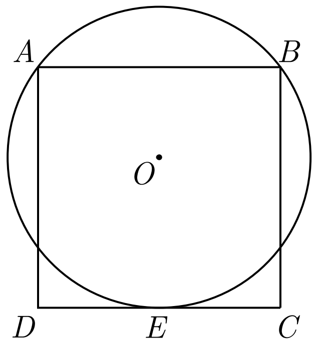
الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن مساحة المنطقة التي يستطيع الماعز الوصول إليها هي:



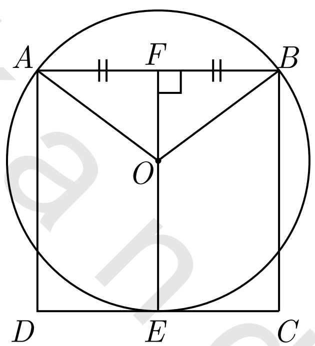
$$\frac{3}{4}\pi\times 10^2+\frac{1}{4}\pi\times 1^2+\frac{1}{4}\pi\times 3^2=\frac{155}{2}\pi.$$

(٥٤) [Aust.MC 1989] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة. $ABCD$ مربع حيث $\overline{CED}$ مماس للدائرة. النسبة بين مساحة المربع ومساحة الدائرة هي:

(أ) $\frac{64}{25\pi}$ (ب) $\frac{8}{5\pi}$ (ج) $\frac{5}{3\pi}$ (د) $\frac{25}{9\pi}$



الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن F نقطة منتصف $\overline{AB}$. ولنفرض



أن x هو طول ضلع المربع وأن r هو نصف قطر الدائرة. الآن، $OF = EF - OE = x - r$. وباستخدام مبرهنة فيثاغورس للمثلث $\triangle OFB$ نجد أن

$$r^2 = \frac{x^2}{4} + (x-r)^2$$

$$r^2 = \frac{5}{4}x^2 - 2xr + r^2$$

$$\frac{5}{4}x^2 - 2xr = 0$$

$$x\left(x - \frac{8}{5}r\right) = 0$$

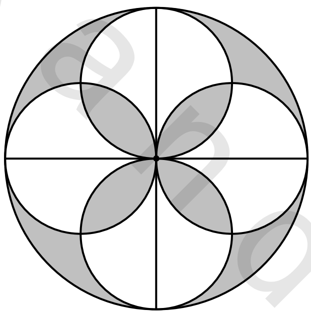
$$x = \frac{8}{5}r.$$

من ذلك نجد أن،

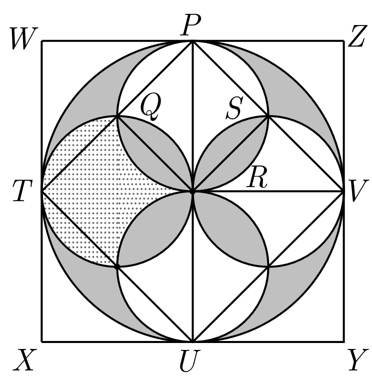
$$\frac{[ABCD]}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{x^2}{\pi r^2} = \frac{\left(\frac{8}{5}\right)^2 r^2}{\pi r^2} = \frac{64}{25\pi}.$$

(٥٥) [Aust.MC 1987] نصف قطر الدائرة الكبيرة في الشكل المرفق هو r. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $(\pi - 4)r^2$ (ب) $(\pi - 3)r^2$ (ج) $(\pi - 2)r^2$ (د) $(\pi - 1)r^2$



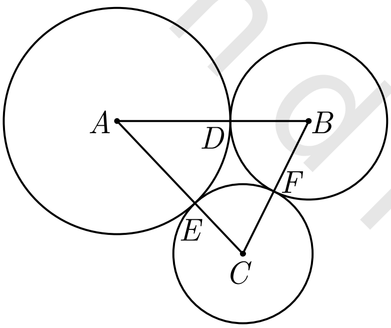
الحل: الإجابة هي (ج): أنشئ المربعات $PQRS$ ، $PTUV$ ، $WXYZ$ كما هو مبين.



لنفرض أن A مساحة الدائرة الكبيرة وأن B مساحة المنطقة المنقطة وأن C مساحة المنطقة المظللة عندئذ،

$$\begin{aligned} C &= A - 4B \\ &= A - 4[PQRS] \\ &= A - [PTUV] \\ &= A - \frac{1}{2}[WXYZ] \\ &= \pi r^2 - \frac{1}{2}(2r)^2 = (\pi - 2)r^2 \end{aligned}$$

(٥٦) [Aust.MC 1989] في الشكل المرفق، رؤوس المثلث $\triangle ABC$ هي مراكز الدوائر الثلاث وأطوال أضلاعه هي 8، 9، 13. نصف قطر الدائرة الكبيرة يساوي:

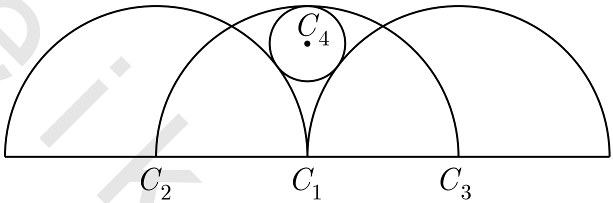


(أ) 6 (ب) 6.5 (ج) 7 (د) 7.5

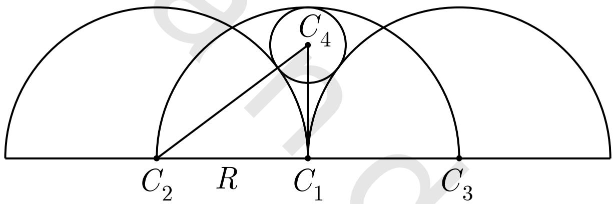
الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن x، y، z هي أنصاف أقطار الدوائر حيث z هو نصف قطر الدائرة الكبيرة. عندئذ، $x + y = 8$، $x + z = 9$، $y + z = 13$. بحل هذه المعادلات نجد أن $z = 7$.

(٥٧) [Aust.MC 1987] في الشكل المرفق C_1، C_2، C_3 مراكز ثلاثة أنصاف دوائر متطابقة، و C_4 مركز الدائرة الصغيرة. إذا كان R نصف قطر كل من أنصاف الدوائر المتطابقة و r نصف قطر الدائرة الصغيرة فإن $\frac{r}{R}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{5}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$



الحل: الإجابة هي (ج):



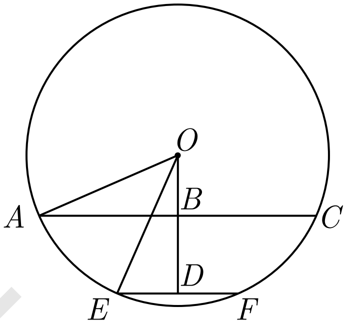
$\triangle C_1C_2C_4$ قائم الزاوية أطوال أضلاعه هي $R-r$، R، $R+r$. إذن،

$$\begin{aligned} (R-r)^2+R^2 &= (R+r)^2 \\ R^2-2rR+r^2+R^2 &= R^2+2rR+r^2 \\ R^2 &= 4Rr \\ \frac{r}{R} &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

(٥٨) [Aust.MC 1985] رسمنا وتراً في دائرة نصف قطرها 10 ويبعد 6 عن مركزها. بعد ذلك رسمنا وتراً آخر طوله نصف طول الوتر الأول. ما المسافة بين الوتر الثاني ومركز الدائرة ؟

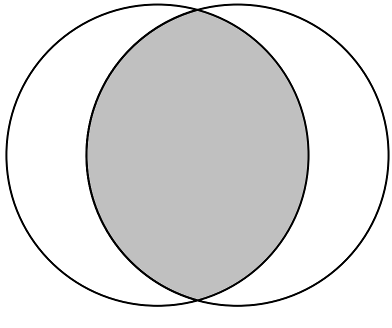
(أ) 8 (ب) 9 (ج) 3π (د) $\sqrt{84}$

الحل: الإجابة هي (د):



لنفرض أن طول الوتر $AC = 2x$. إذن، $EF = x$. الآن، $\triangle AOB$ قائم الزاوية. ولذا فإن $AB = x$، $ED = \frac{x}{2}$. في المثلث AOB نجد أن، $x^2 + 6^2 = 10^2$. ولذا فإن $x = 8$ و $\frac{x}{2} = 4$. الآن، في $\triangle EOD$ نجد أن $OD = \sqrt{10^2 - 4^2} = \sqrt{84}$.

(٥٩) [Pascal 2012] الشكل المرفق يبين تقاطع دائرتين متطابقتين. مساحة المنطقة المظللة تساوي مجموع مساحتي المنطقتين غير المظللتين. إذا كانت مساحة المنطقة المظللة تساوي 216π فما محيط كل من الدائرتين ؟

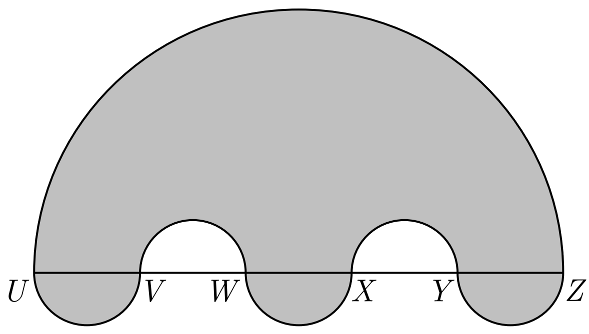


(أ) 18π (ب) 27π (ج) 36π (د) 108π

الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن نصف قطر كل من الدائرتين يساوي r. بما أن مساحة الدائرتين متساوية وأن المنطقة المظللة مشتركة بين الدائرتين فإن المنطقتين غير المظللتين متساويتان في المساحة ومجموع مساحتيهما يساوي مساحة المنطقة المظللة وهذا يساوي 216π. إذن، مساحة كل من المنطقتين غير المظللتين يساوي $\frac{1}{2} \times 216\pi = 108\pi$. مساحة أي من الدائرتين تساوي مجموع مساحة المنطقة المظللة ومساحة إحدى المنطقتين غير المظللتين. أي $324\pi = 108\pi + 216\pi$. إذن، $\pi r^2 = 324\pi$. ومن ذلك فإن $r = 18$. وبهذا يكون محيط الدائرة هو $2\pi r = 36\pi$.

(٦٠) [Pascal 2010] في الشكل المرفق، U، V، W، X، Y، Z على استقامة واحدة حيث $UV = VW = WX = XY = YZ = 5$. أنشأ أنصاف الدوائر التي أقطارها $\overline{UZ}$، $\overline{UV}$، $\overline{VW}$، $\overline{WX}$، $\overline{XY}$، $\overline{YZ}$ كما هو مبين. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{325}{4}\pi$ (ب) $\frac{375}{4}\pi$ (ج) $\frac{325}{2}\pi$ (د) $\frac{625}{4}\pi$

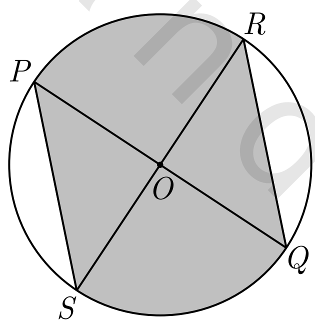


الحل: الإجابة هي (أ): مساحة نصف الدائرة التي قطرها d يساوي $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}d\right)^2 = \frac{1}{8}\pi d^2$. إذن، مساحة كل من أنصاف الدوائر الصغيرة (وعددها خمسة) تساوي $\frac{1}{8}\pi(5^2) = \frac{25}{8}\pi$. مساحة المنطقة المظللة تساوي مساحة نصف الدائرة الكبيرة مضافاً إليها مساحة إحدى أنصاف الدوائر الصغيرة. أي أن

$$\frac{1}{8}\pi(25^2) + \frac{25}{8}\pi = \frac{650}{8}\pi = \frac{325}{4}\pi\,.$$

(٦١) [Pascal 2009] في الشكل المرفق، $\overline{PQ}$ و $\overline{RS}$ قطران متعامدان في دائرة نصف قطرها 4. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $8+4\pi$ (ب) $8+8\pi$ (ج) $16+4\pi$ (د) $16+8\pi$



الحل: الإجابة هي (د): مساحة المنطقة المظللة تساوي

$$[\triangle POS] + [\triangle ROQ] + [\widehat{POR}] + [\widehat{SOQ}].$$

كل من المثلثين قائم طول كل من ساقيه يساوي نصف قطر الدائرة وهو 4. إذن،

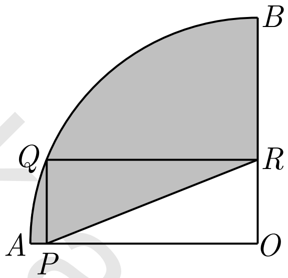
$$[\triangle POS] + [\triangle ROQ] = \frac{1}{2}\times 4\times 4 + \frac{1}{2}\times 4\times 4 = 16\,.$$

مساحة كل من القطاعين يساوي مساحة ربع دائرة لأن $360 \times \frac{1}{4} = 90$. إذن،

$$[\widehat{POR}] + [\widehat{SOQ}] = \frac{1}{4}\pi \times 4^2 + \frac{1}{4}\pi \times 4^2 = 8\pi\,.$$

إذن، مساحة المنطقة المظللة تساوي $16 + 8\pi$.

(٦٢) [Cayley 2005] في الشكل المرفق، $\widehat{AOB}$ ربع دائرة نصف قطرها 10. $PQRO$ مستطيل محيطه 26. محيط المنطقة المظللة يساوي:



(أ) $7 + 5\pi$ (ب) $13 + 5\pi$ (ج) $17 + 5\pi$ (د) $17 + 25\pi$

الحل: الإجابة هي (ج): محيط الشكل المظلل يساوي $\widehat{AQB} + AP + PR + RB$. بما أن $\widehat{AOB}$ ربع دائرة نصف قطرها 10 فإن $\widehat{AQB} = \frac{1}{4}(2\pi \times 10) = 5\pi$. بما أن $PQRO$ مستطيل فإن $PR = QO = 10$. الآن،

$$\begin{aligned} AP + RB &= (AO - PO) + (BO - RO) \\ &= (AO + BO) - (PO + RO) \end{aligned}$$

ولكن $PO + RO = \frac{1}{2}(\text{محيط المستطيل}) = 13$. إذن،

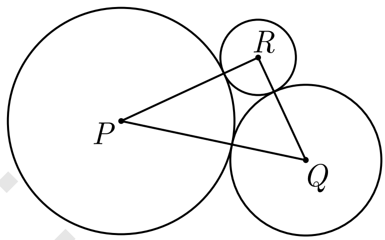
$$AP + RB = 10 + 10 - 13 = 7\,.$$

وبهذا فإن محيط المنطقة المظللة يساوي

$$10 + 7 + 5\pi = 17 + 5\pi\,.$$

(٦٣) [Fermat 2008] في الشكل المرفق، ثلاث دوائر مراكزها P، Q، R وأنصاف أقطارها 3، 2، 1 على التوالي. ما مساحة $\triangle PQR$ ؟

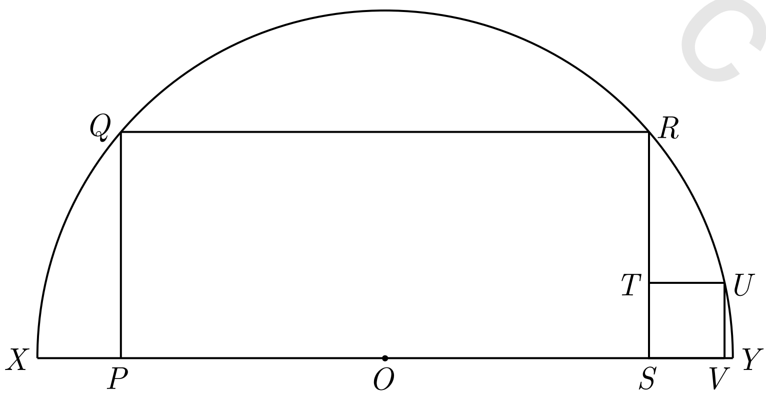
(أ) 4 (ب) 6 (ج) 10 (د) 12



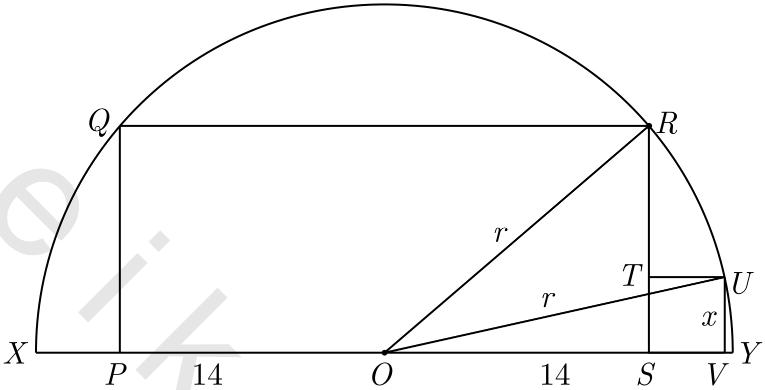
الحل: الإجابة هي (ب): لاحظ أن $PQ = 3 + 2 = 5$، $PR = 3 + 1 = 4$، $QR = 2 + 1 = 3$. إذن، أطوال أضلاع المثلث هي 3، 4، 5. وبما أن $3^2 + 4^2 = 5^2$ فإن المثلث قائم الزاوية. إذن، $\left[\triangle PQR\right] = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

(٦٤) [Fermat 2005] في الشكل المرفق، نصف دائرة قطرها $\overline{XY}$، $PQRS$ مستطيل، $PQ = 12$، $QR = 28$. $STUV$ مربع. مساحة $STUV$ تساوي:

(أ) 4 (ب) 9 (ج) 16 (د) 25



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن O هو مركز الدائرة و r نصف قطرها و x طول ضلع المربع. المطلوب هو إيجاد x^2.



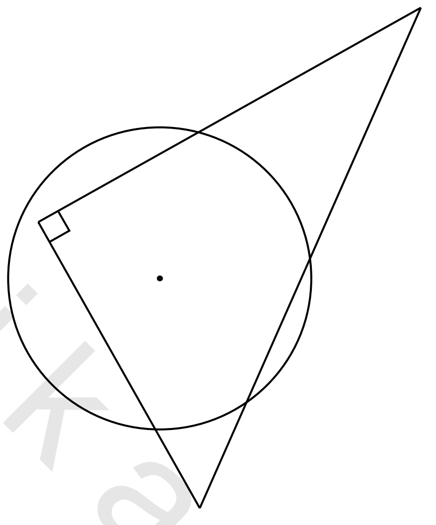
لاحظ أن $PO = OS = 14$. في المثلث $\triangle ORS$ لدينا $340 = 14^2 + 12^2 = r^2$. وفي $\triangle OVU$ لدينا

$$r^2 = (14 + x)^2 + x^2$$
$$340 = 196 + 28x + x^2 + x^2$$
$$x^2 + 14x - 72 = 0$$
$$(x + 18)(x - 4) = 0$$

إذن، $x = 4$. ومن ثم فإن $x^2 = 16$.

(٦٥) [Fermat 2004] لدينا مثلث أطوال أضلاعه هي 6، 8، 10 على التوالي. رسمنا دائرة بحيث تكون مساحة المنطقة داخل الدائرة وخارج المثلث تساوي مساحة المنطقة داخل المثلث وخارج الدائرة. نصف قطر الدائرة يساوي:

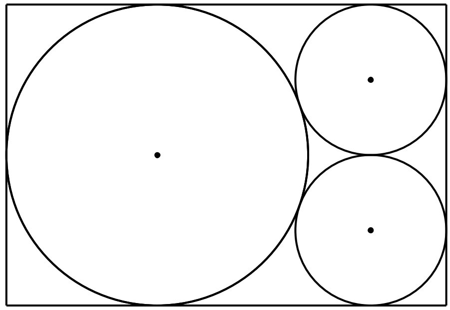
(أ) $\sqrt{\frac{24}{\pi}}$ (ب) $\sqrt{\frac{26}{\pi}}$ (ج) $\sqrt{\frac{28}{\pi}}$ (د) $\sqrt{\frac{30}{\pi}}$



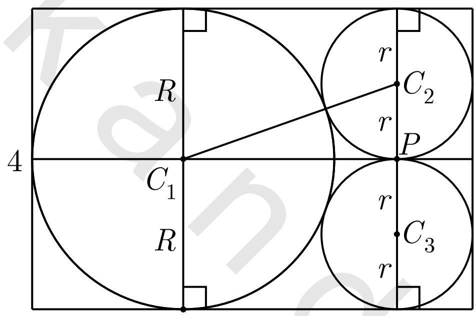
الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن A هي مساحة المنطقة داخل المثلث وخارج الدائرة وأن B هي مساحة المنطقة خارج المثلث وداخل الدائرة. عندئذ، بالفرض B هي مساحة المنطقة خارج الدائرة وداخل المثلث. ولذا فإن $A + B$ تساوي مساحة الدائرة وتساوي أيضاً مساحة المثلث. إذن، مساحة الدائرة تساوي مساحة المثلث. ولكن $6^2 + 8^2 = 10^2$. وبهذا فالمثلث قائم الزاوية مساحته تساوي $\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$. إذن، $\pi r^2 = 24$ ويكون $r = \sqrt{\frac{24}{\pi}}$.

(٦٦) [Fermat 2001] في الشكل المرفق ثلاث دوائر متماسة، الدائرتان الصغيرتان متطابقتان. الدوائر محاطة بمستطيل عرضه 4. ما طول المستطيل ؟

(أ) $2 + \sqrt{8}$ (ب) $3 + \sqrt{8}$ (ج) $2 + \sqrt{10}$ (د) $3 + \sqrt{10}$



الحل: الإجابة هي (ب): نفرض أن R هو نصف قطر الدائرة الكبيرة و r هو نصف قطر كل من الدائرتين الصغيرتين.



الآن $2R = 4$ و $4r = 4$. إذن، $R = 2$ و $r = 1$. طول المستطيل هو

$$R + C_1P + r = 3 + C_1P.$$

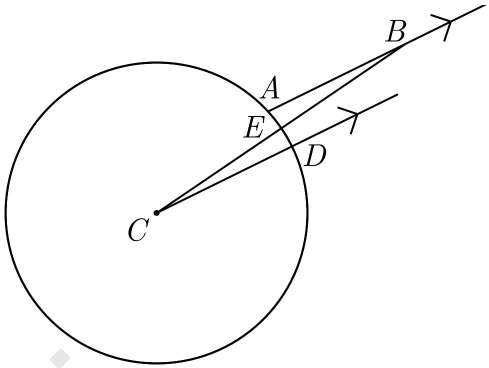
الآن، $C_1C_2 = R + r = 3$. ومن مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$C_1P = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$$

إذن، طول المستطيل يساوي $3 + \sqrt{8}$.

(٦٧) [MAΘ 2011] في الشكل المرفق، C مركز الدائرة، طول $\widehat{ED}$ يساوي 6 كيلو مترات، $\widehat{ABE} = 8°$، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. ما محيط الدائرة ؟

(أ) 160 (ب) 260 (ج) 270 (د) 370

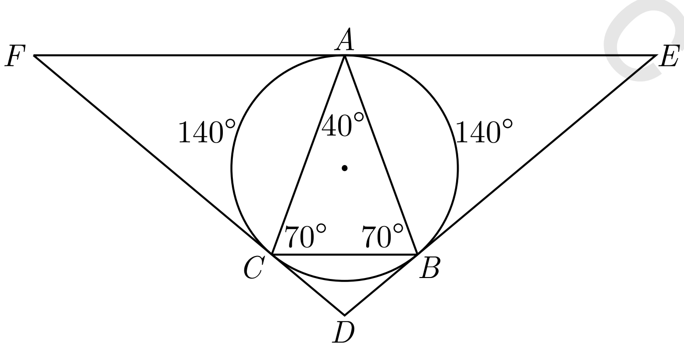


الحل: الإجابة هي (ج): بما أن $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ فإن $\widehat{ABE} = \widehat{ECD}$. إذن، $\frac{1}{45} = \frac{8}{360} = \widehat{DE}$ من محيط الدائرة. إذن، محيط الدائرة يساوي $6 \times 45 = 270$.

(٦٨) [MAΘ 2011] رسمنا المثلث $\triangle ABC$ المتساوي الساقين داخل دائرة حيث $\widehat{B} = \widehat{C} = 70^\circ$. ما قياس الزاوية الكبرى للمثلث المنشأ بالمماسات للدائرة عند النقاط A، B، C ؟

(أ) 35° (ب) 40° (ج) 70° (د) 100°

الحل: الإجابة هي (د):

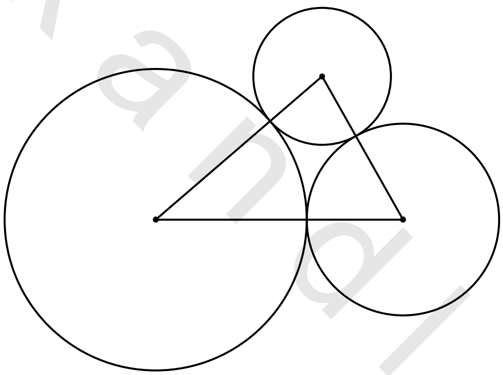


$\widehat{BC} = 2\widehat{A} = 80^\circ$. عندئذ، $\widehat{AB} = \widehat{AC} = 140^\circ$. وبهذا فإن
$\widehat{F} = \widehat{E} = \frac{1}{2}(220^\circ - 140^\circ) = 40^\circ$. إذن، $\widehat{D} = 100^\circ$.

(٦٩) [MAΘ 2011] ثلاث دوائر متماسة خارجياً. النسب بين مساحاتها هي $25 : 49 : 121$، محيط الدائرة الصغرى يساوي 10π. ما محيط المثلث الذي رؤوسه مراكز الدوائر ؟

(أ) 46 (ب) 48 (ج) 49 (د) 50

الحل: الإجابة هي (أ):

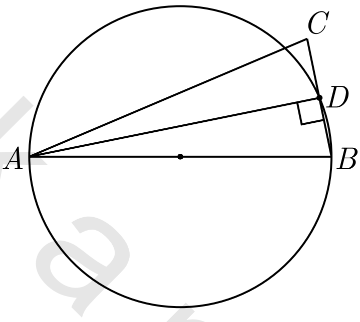


النسبة بين أنصاف أقطار الدوائر هي
$\sqrt{25} : \sqrt{49} : \sqrt{121}$. أي $5 : 7 : 11$. وبما أن محيط الدائرة الصغرى هو 10π فإن نصف قطرها يساوي 5. إذن، أنصاف أقطار الدوائر هي 5، 7، 11 على التوالي. ومن ذلك نجد أن أطوال أضلاع المثلث هي 12، 16، 18 ويكون محيطه يساوي 46.

(٧٠) [MAΘ 2011] $\triangle ABC$ متساوي الساقين حيث الساق $\overline{AB}$ هو قطر دائرة. D نقطة تقاطع $\overline{BC}$ مع الدائرة. إذا كان نصف قطر الدائرة $r = 5$ و $BC = 4$ فإن AD يساوي:

(أ) 2 (ب) 4 (ج) $4\sqrt{6}$ (د) $7\sqrt{2}$

الحل: الإجابة هي (ج):

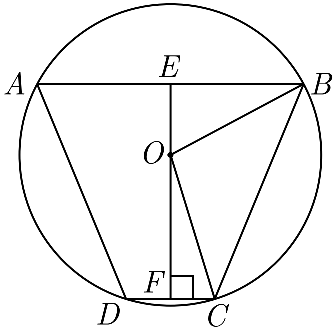


$AB = 2r = 10$. وبما أن $BD = \frac{1}{2}BC = 2$ وأن $\triangle ADB$ قائم فإن $AD = \sqrt{10^2 - 2^2} = 4\sqrt{6}$.

(٧١) [MAΘ 2011] رسمنا شبه منحرف متساوي الساقين داخل دائرة نصف قطرها 17. المسافة بين القاعدة الكبرى ومركز الدائرة يساوي 8، طول القاعدة الصغرى يساوي 10 والقاعدتان على جهتين مختلفتين من الدائرة وتوازيان قطر الدائرة. ما مساحة شبه المنحرف ؟

(أ) $140 + 40\sqrt{66}$ (ب) $160 + 40\sqrt{66}$

(ج) $180 + 40\sqrt{66}$ (د) $200 + 40\sqrt{66}$



الحل: الإجابة هي (ب):

$$FC = \frac{1}{2} DC = 5$$

$$OF = \sqrt{17^2 - 5^2} = 2\sqrt{66}$$

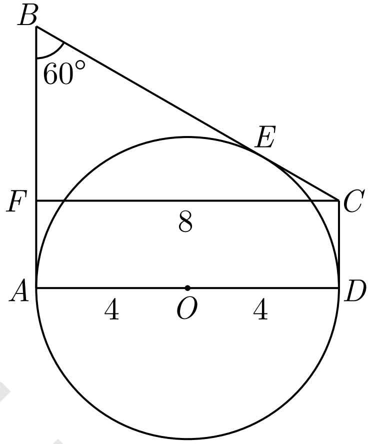
إذن، ارتفاع شبه المنحرف يساوي $8 + 2\sqrt{66}$. $EB = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$.

إذن، $AB = 30$. وبهذا فإن

$$[ABCD] = \frac{1}{2}(10+30)\left(8 + 2\sqrt{66}\right) = 160 + 40\sqrt{66} .$$

(٧٢) [MAΘ 2011] في الشكل المرفق، $\overline{AOD}$ قطر في الدائرة طوله 8، $\overline{AB}$، $\overline{DC}$، $\overline{BEC}$ مماسات للدائرة عند النقاط A، D، E على التوالي، $\widehat{B} = 60^\circ$. ما مساحة شبه المنحرف $ABCD$ ؟

(أ) $\frac{64\sqrt{3}}{3}$ (ب) $22\sqrt{3}$ (ج) $\frac{67\sqrt{3}}{3}$ (د) $24\sqrt{3}$



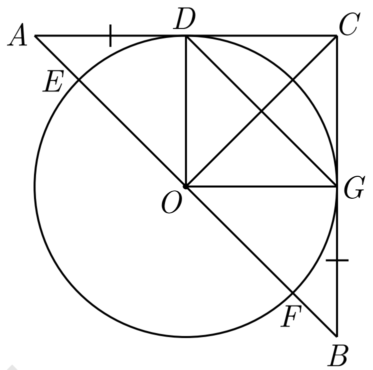
الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن $DC = x$. عندئذ، $CE = x$ و $AF = x$.

$\triangle CBF$ مثلث $30° - 60° - 90°$. ولذا فإن $FB = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ ، $BC = \dfrac{16}{\sqrt{3}}$. وبما أن $AB = BE$ فإن $\dfrac{16}{\sqrt{3}} - x = \dfrac{8}{\sqrt{3}} + x$. وبهذا فإن $x = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. إذن،

$$[ABCD] = \frac{1}{2}\left(\frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \times 8 = \frac{64\sqrt{3}}{3}.$$

(٧٣) [MAΘ 2011] في الشكل المرفق، $\overline{CA}$ ، $\overline{CB}$ مماسان للدائرة التي مركزها O عند D و G على التوالي، $\widehat{FG} = 45°$ ، $\widehat{DG} = 90°$ ، $DG = 8$ ، $AD = BG$. ما محيط الشكل المحاط بالقطعتين $\overline{AD}$ و $\overline{AE}$ والقوس $\widehat{ED}$ ؟

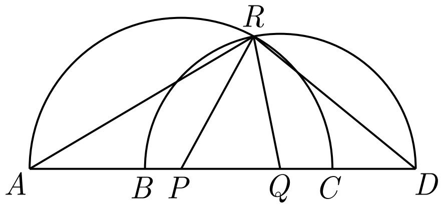
(أ) $4 + \pi\sqrt{2}$ (ب) $5 + \pi\sqrt{2}$ (ج) $6 + \pi\sqrt{2}$ (د) $8 + \pi\sqrt{2}$



الحل: الإجابة هي (د): ارسم $\overline{OD}$، $\overline{OC}$، $\overline{OG}$. بما أن $AD = BG$ فإن $\widehat{DE} = \widehat{FG} = 45°$. بما أن $\widehat{DOG} = \widehat{DG} = 90°$ فإن $ODCG$ مربع طول قطره $DG = 8$. إذن، طول ضلعه يساوي $4\sqrt{2}$. وبهذا فإن نصف قطر الدائرة يساوي $4\sqrt{2}$. كما أن $\widehat{EAD} = 45°$ ومن ثم $AD = 4\sqrt{2}$. الآن، من تشابه المثلثات نجد أن $AB = 16$. ومن ذلك $AE = 8 - 4\sqrt{2}$. وبما أن $\widehat{ED} = 45°$ فإن طوله يساوي $\left(4\sqrt{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\sqrt{2}$. إذن، محيط الشكل المطلوب هو $4\sqrt{2} + 8 - 4\sqrt{2} + \pi\sqrt{2} = 8 + \pi\sqrt{2}$.

(٧٤) [Euclid 2010] في الشكل المرفق، النقاط B، P، Q، C واقعة على القطعة المستقيمة $\overline{AD}$. P مركز نصف الدائرة التي قطرها $\overline{AC}$ و Q مركز نصف الدائرة التي قطرها $\overline{BD}$. R نقطة تقاطع نصفي الدائرتين، $\widehat{PRQ} = 40°$. ما قياس $\widehat{ARD}$ ؟

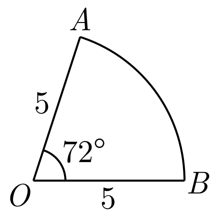
(أ) $95°$ (ب) $100°$ (ج) $105°$ (د) $110°$



الحل: الإجابة هي (د): لنفرض أن $\widehat{PAR} = x^\circ$ وأن $\widehat{QDR} = y^\circ$. بما أن كلاً من $\overline{PR}$ و $\overline{PA}$ نصف قطر في الدائرة الكبيرة فإن $\triangle PAR$ متساوي الساقين. ولذا فإن $\widehat{PRA} = \widehat{PAR} = x^\circ$. وبما أن كلاً من $\overline{QD}$ و $\overline{QR}$ نصف قطر في الدائرة الصغيرة فإن $\triangle QRD$ متساوي الساقين. ومن ذلك $\widehat{QDR} = \widehat{QRD} = y^\circ$. الآن، مجموع زوايا المثلث $\triangle ARD$ يساوي 180°. ولذا نجد أن $x + (x + 40 + y) + y = 180^\circ$. أي أن $x + y = 70^\circ$. وبهذا فإن $\widehat{ARD} = x^\circ + 40^\circ + y^\circ = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ$.

(٧٥) [Euclid 2007] في الشكل المرفق قطاع من دائرة مركزها O ونصف قطرها 5. ما محيط القطاع ؟

(أ) $5 + \pi$ (ب) $5 + 2\pi$ (ج) $10 + \pi$ (د) $10 + 2\pi$



الحل: الإجابة هي (د): محيط القطاع هو

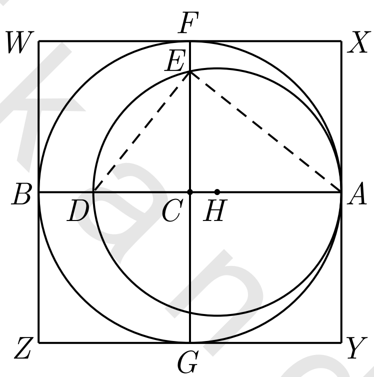
$$OA + OB + \widehat{AB} = 5 + 5 + \widehat{AB} = 10 + \widehat{AB}.$$

بما أن $\frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5}$ فإن $\widehat{AB}$ يساوي $\frac{1}{5}$ محيط دائرة نصف قطرها 5. أي

$2\pi = 5 \times 2\pi \times \frac{1}{5}$. إذن، محيط القطاع يساوي $10 + 2\pi$.

(٧٦) [Euclid 2006] في الشكل المرفق $XYZW$ مربع يحيط بدائرتين حيث C مركز الدائرة الكبيرة و H مركز الدائرة الصغيرة، $FE = 5$ ، $BD = 9$. ما طول ضلع المربع $XYZW$ ؟

(أ) 25 (ب) 50 (ج) 60 (د) 100



الحل الأول

الإجابة هي (ب): لنفرض أن نصف قطر الدائرة الكبيرة $AC = x$. عندئذ، $CD = x - 9$ و $CE = x - 5$. الآن، $\triangle ECD \sim \triangle ACE$ لأن $\widehat{AED} = 90^\circ$ (تقابل نصف دائرة). وإذا كان $\widehat{CDE} = \alpha$ فإن $\widehat{DEC} = 90 - \alpha$ و $\widehat{CEA} = \alpha$. أيضاً $\widehat{EAC} = 90 - \alpha$. ولهذا فالمثلثان متشابهان ونحصل على

$$\frac{CD}{EC} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{x-9}{x-5} = \frac{x-5}{x}$$

$$x^2 - 9x = x^2 - 10x + 25$$

$$x = 25$$

ولذا فإن طول ضلع المربع يساوي قطر الدائرة الكبيرة. أي $2x = 50$.

الحل الثاني

باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$\begin{aligned}(AD)^2 &= (AE)^2 + (ED)^2\\ (AE)^2 &= (AC)^2 + (CE)^2\\ (ED)^2 &= (CE)^2 + (CD)^2\end{aligned}$$

إذن،

$$\begin{aligned}(AD)^2 &= (AC)^2 + (CE)^2 + (CE)^2 + (CD)^2\\ (2x-9)^2 &= x^2 + 2(x-5)^2 + (x-9)^2\end{aligned}$$

ومن ذلك، نحصل على $x = 25$. ومن ثم فإن $2x = 50$.

(٧٧) [AMC10A, AMC12A 2002] طول قوس قياسه بالدرجات يساوي 45° في دائرة A يساوي طول قوس قياسه بالدرجات يساوي 30° في دائرة B. ما النسبة بين مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة B ؟

(أ) $\frac{4}{9}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\frac{3}{2}$

الحل: الإجابة هي (أ): لنفرض أن r هو نصف قطر الدائرة A و s هو نصف قطر الدائرة B.

طول قوس الدائرة A هو $\frac{\pi r}{4} = \frac{45}{360} \times 2\pi r$.

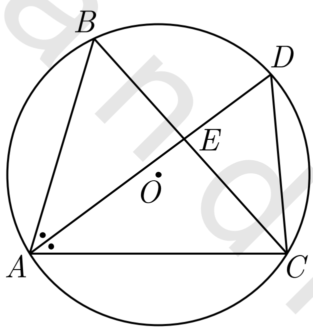
طول قوس الدائرة B هو $\frac{\pi s}{6} = \frac{30}{360} \times 2\pi s$.

وبما أن الطولين متساويان فإن $\frac{\pi s}{6}=\frac{\pi r}{4}$. أي أن $\frac{2}{3}=\frac{r}{s}$. وبهذا فالنسبة بين مساحة A إلى مساحة B هي $\frac{4}{9}=\frac{2^2}{3^2}$.

(٧٨) [AMC10B 2004] رسمنا $\triangle ABC$ داخل دائرة $C(O,r)$. D نقطة على الدائرة حيث $\overline{AD}$ ينصف $\widehat{BAC}$. إذا كان $AB=7$ ، $AC=8$ ، $BC=9$ فما قيمة $\frac{AD}{CD}$ ؟

(أ) $\frac{9}{8}$ (ب) $\frac{5}{3}$ (ج) $\frac{17}{7}$ (د) $\frac{5}{2}$

الحل: الإجابة هي (ب):



$\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$ (يقابلان القوس $\widehat{AC}$). وبما أن $\widehat{EAB}=\widehat{CAD}$ فإن $\triangle ABE\sim\triangle ADC$. من ذلك نجد أن $\frac{AB}{BE}=\frac{AD}{CD}$. ولكن من مبرهنة منصف الزاوية في المثلث $\triangle ABC$ نجد أن $\frac{AB}{AC}=\frac{BE}{EC}$. إذن،

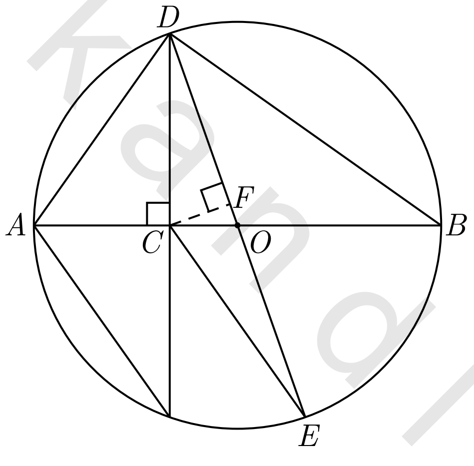
$$BE=\frac{AB}{AC}\times EC=\frac{AB}{AC}(BC-BE)$$

وأيضاً $BE=\frac{AB\times BC}{AB+AC}$. من ذلك نجد أن

$$\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BE} = \frac{AB + AC}{BC} = \frac{7+8}{9} = \frac{5}{3}.$$

(٧٩) [AMC10A 2005] $\overline{AB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$، C نقطة على $\overline{AB}$ حيث $2AC = BC$. D و E نقطتان على الدائرة حيث $\overline{DC} \perp \overline{AB}$ و $\overline{DE}$ قطر. ما قيمة $\dfrac{[\triangle DCE]}{[\triangle ABD]}$ ؟

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{2}$

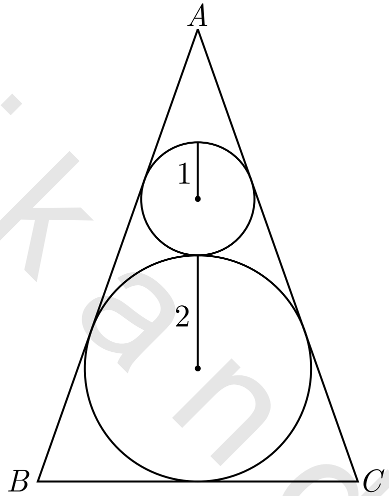


الحل: الإجابة هي (ج): أحد أضلاع كل من $\triangle DCE$ و $\triangle ABD$ هو قطر في الدائرة. ولذا النسبة بين مساحتيهما هي النسبة بين ارتفاعيهما. أي أن $\dfrac{[\triangle DCE]}{[\triangle ABD]} = \dfrac{CF}{DC}$. بما أن $\triangle DCO \sim \triangle CFO$ فإن

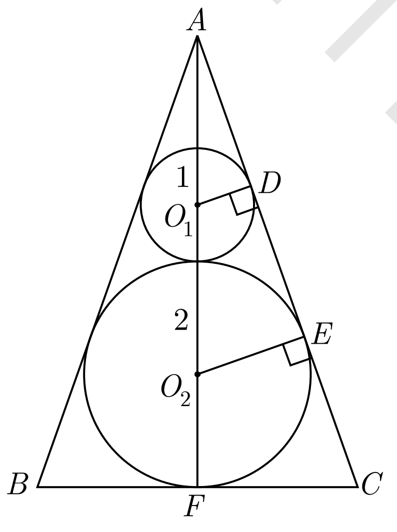
$$\frac{CF}{DC} = \frac{CO}{DO} = \frac{AO - AC}{DO} = \frac{\frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB}{\frac{1}{2}AB} = \frac{1}{3}.$$

(٨٠) [AMC10A 2006] دائرة نصف قطرها 1 تمس دائرة نصف قطرها 2. أضلاع $\triangle ABC$ مماسات للدائرتين كما هو مبين. $AB = AC$. ما مساحة المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $\frac{35}{2}$ (ب) $15\sqrt{2}$ (ج) $\frac{64}{3}$ (د) $16\sqrt{2}$



الحل: الإجابة هي (د):



لاحظ أن $\triangle AFC \sim \triangle AEO_2 \sim \triangle ADO_1$. من ذلك نجد أن $\dfrac{AO_1}{AO_2} = \dfrac{DO_1}{EO_2}$.

أي أن $\dfrac{1}{2} = \dfrac{AO_1}{AO_1 + 3}$. ولذا فإن $AO_1 = 3$. واستناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن $AD = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$. أيضاً، $\dfrac{DO_1}{CF} = \dfrac{AD}{AF}$. أي أن $\dfrac{1}{CF} = \dfrac{2\sqrt{2}}{8}$.

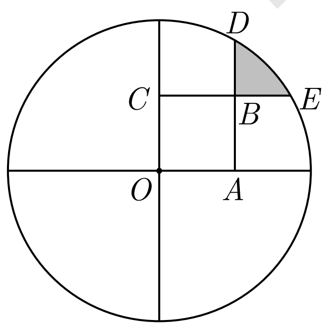
ولذا فإن $CF = 2\sqrt{2}$. وبهذا فإن

$$\begin{aligned}\left[\triangle ABC\right] &= \frac{1}{2}(AF)(BC) = \frac{1}{2}(AF)(2CF) = (AF)(CF)\\ &= 8 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2}\end{aligned}$$

(٨١) [AMC10B 2006] في الشكل المرفق، $C(O,2)$ دائرة، $OABC$ مربع طول ضلعه 1. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\dfrac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$ (ب) $\dfrac{\pi}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)$

(ج) $\pi(2 - \sqrt{3})$ (د) $\dfrac{\pi}{3} - 1 + \sqrt{3}$



الحل: الإجابة هي (أ): لاحظ أن مساحة المنطقة المظللة هي

(مساحة القطاع DOE) $- [\triangle DOE] + [\triangle DBE]$.

الآن، استناداً إلى مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$(DA)^2 = (CE)^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

إذن، $DA = CE = \sqrt{3}$. من الواضح أن كلاً من $\triangle DOA$ و $\triangle EOC$ هو مثلث $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ حيث $\widehat{EOC} = \widehat{DOA} = 60^\circ$. وبما أن $OABC$ مربع فإن $\widehat{COA} = 90^\circ$. إذن،

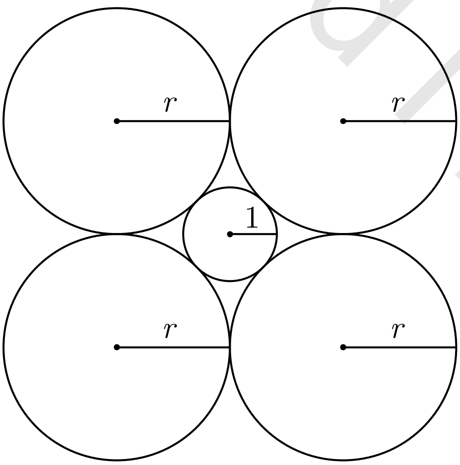
$\widehat{EOA} = \widehat{COA} - \widehat{DOA} = 30^\circ$ و $\widehat{DOE} = \widehat{DOA} - \widehat{EOA} = 30^\circ$.

وبما أن $AB = CB = 1$ فإن $DB = EB = \sqrt{3} - 1$. إذن، مساحة المنطقة المظللة هي

$$\frac{30}{360} \times \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times \left(\sqrt{3} - 1\right)^2 = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\,.$$

(٨٢) [AMC10B 2007] دائرة نصف قطرها 1 محاطة بأربع دوائر نصف قطر كل منها r . ما قيمة r ؟

(أ) $\sqrt{2}$ (ب) $1 + \sqrt{2}$ (ج) $\sqrt{6}$ (د) $2 + \sqrt{2}$



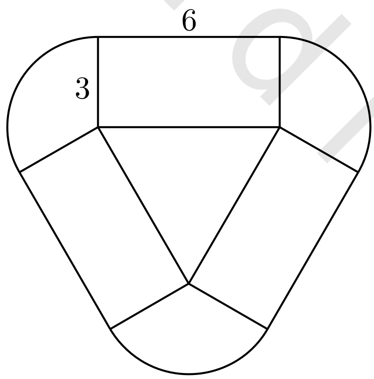
الحل: الإجابة هي (ب): يمكن إيجاد طول القطعة المستقيمة بين مركز الدائرة

الصغرى ومركز إحدى الدوائر المحيطة بطريقتين: من ناحية هذه القطعة تساوي $1+r$ ومن ناحية أخرى فهو نصف قطر مربع طول ضلعه $2r$. أي $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+4r^2}=\sqrt{2}r$. إذن، $\sqrt{2}\,r=1+r$. أي أن $r=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=1+\sqrt{2}$.

(٨٣) [AMC10A 2008] مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه 6. ما مساحة المنطقة المكونة من جميع النقاط خارج المثلث وتبعد ثلاث وحدات من نقطة على المثلث ؟

(أ) $36+24\sqrt{3}$ (ب) $54+9\pi$ (ج) $56+9\pi$ (د) $60+9\pi$

الحل: الإجابة هي (ب): المنطقة مكونة من ثلاثة مستطيلات من النوع 6×3 وثلاثة أقواس قياس كل منها 120° تقابل دوائر نصف قطر كل منها 3.

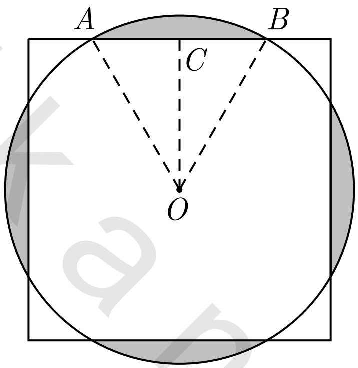


إذن المساحة هي

$$3\left[3\times 6+\frac{120^\circ}{360^\circ}\times 3^2\pi\right]=54+9\pi\,.$$

(٨٤) [AMC10B 2010] مركز مربع طول ضلعه 1 هو مركز دائرة نصف قطرها $\frac{\sqrt{3}}{3}$ كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مساحة المناطق داخل الدائرة وخارج المربع ؟

(أ) $\frac{\pi}{3}-1$ (ب) $\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (ج) $\frac{\pi}{18}$ (د) $\frac{2\pi}{9}$



الحل: الإجابة هي (ب): طول قطر المربع يساوي $\sqrt{2}$. مساحة المناطق المظللة المطلوبة هي 4 أمثال مساحة القطاع $\widehat{OAB}$ مطروحاً منها 4 أمثال مساحة المثلث $\triangle OAB$. لاحظ أن $AC = CB$ وأن $OC = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$ (نصف طول ضلع المربع) وأن $OB = \frac{\sqrt{3}}{3}$. من مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$CB = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

بما أن $AB = AO = BO$ فإن $\triangle ABO$ متساوي الأضلاع.

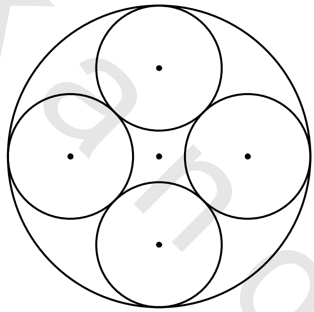
مساحة القطاع $\widehat{OAB}$ تساوي $\frac{\pi}{18} = \left(\frac{60}{360}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi$.

مساحة المثلث $\triangle OAB$ تساوي $\frac{\sqrt{3}}{12}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$.

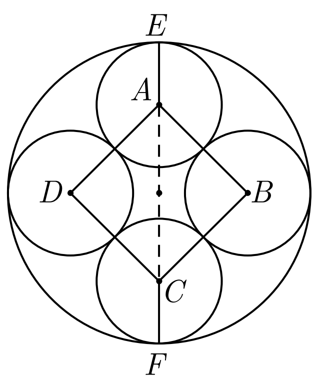
إذن مساحة المناطق المظللة هي $\frac{2\pi}{9}-\frac{\sqrt{3}}{3}=4\left(\frac{\pi}{18}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)$.

(٨٥) [AMC10A 2009] الشكل المرفق مكون من أربع دوائر متطابقة محاطة بدائرة كبيرة كما هو مبين. ما النسبة بين مجموع مساحات الأربع دوائر الصغيرة ومساحة الدائرة الكبيرة ؟

(أ) $3-2\sqrt{2}$ (ب) $2-\sqrt{2}$ (ج) $4\left(3-2\sqrt{2}\right)$ (د) $2\sqrt{2}-2$



الحل: .الإجابة هي (ج): ارسم بعض أنصاف أقطار الدوائر الصغيرة كما هو مبين وافرض أن r هو نصف قطر كل من الدوائر الصغيرة وأن R هو نصف قطر الدائرة الكبيرة.



من تماثل الشكل، $ABCD$ مربع طول ضلعه $2r$. ولذا فإن طول قطره يساوي $2\sqrt{2}r$. إذن، $2R = r + 2\sqrt{2}r + r = 2r + 2\sqrt{2}r$. ولذا فإن $R = r(1+\sqrt{2})$. مساحة الدائرة الكبيرة تساوي

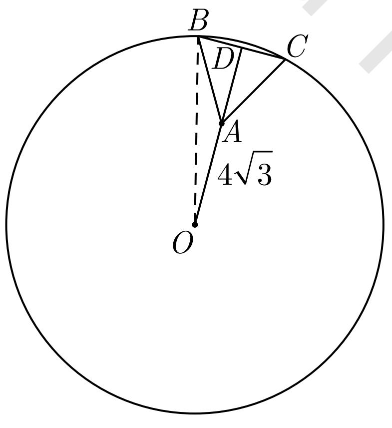
$$A = \pi R^2 = \pi r^2(1+\sqrt{2})^2 = \pi r^2(3+2\sqrt{2})$$

مجموع مساحات الدوائر الصغيرة تساوي $B = 4\pi r^2$. إذن،

$$\begin{aligned}\frac{B}{A} &= \frac{4\pi r^2}{\pi r^2(3+2\sqrt{2})}\\ &= \frac{4}{3+2\sqrt{2}} = \frac{4}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = 4(3-2\sqrt{2}).\end{aligned}$$

(٨٦) [AMC10B 2010] في الشكل المرفق دائرة مركزها O ومساحتها 156π. $\triangle ABC$ مثلث متساوي الأضلاع حيث $\overline{BC}$ وتر في الدائرة، $\overline{OA} = 4\sqrt{3}$. ما طول ضلع المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) 6 (ج) $4\sqrt{3}$ (د) 12



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن x هو طول ضلع المثلث وأن r هو نصف

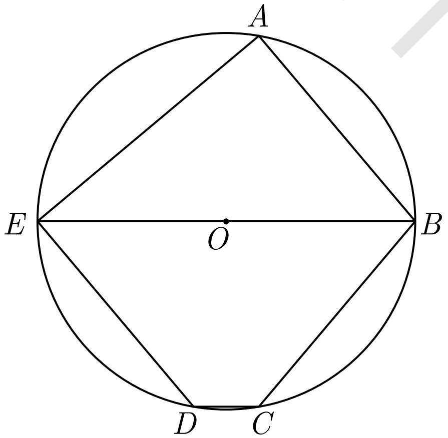
قطر الدائرة. بما أن $\pi r^2 = 156\pi$ فإن $r = \sqrt{156}$. لاحظ أيضاً أن $OD \perp BC$ ومن ثم فإن $BD = DC = \dfrac{x}{2}$. إذن، $AD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$. الآن باستخدام مبرهنة فيثاغورس نجد أن

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{156}\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + 4\sqrt{3}\right)^2\\ 156 &= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^2 + 12x + 48\\ x^2 + 12x - 108 &= 0\\ (x-6)(x+18) &= 0\end{aligned}$$

إذن، $x = 6$.

(٨٧) [AMC10B 2011] في الدائرة التي مركزها O، $\overline{DC} \parallel \overline{EB}$، $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$. $\dfrac{\widehat{AEB}}{\widehat{ABE}} = \dfrac{4}{5}$. ما قياس $\widehat{BCD}$ ؟

(أ) 120° (ب) 125° (ج) 130° (د) 135°



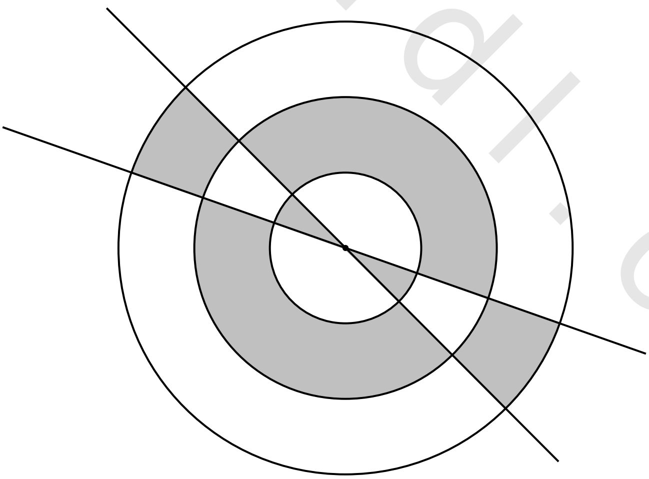
الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن $\widehat{AEB} = 4x$ وأن $\widehat{ABE} = 5x$. الآن

$\widehat{EAB} = 90^\circ$ (تقابل نصف دائرة). إذن، $4x + 5x + 90^\circ = 180^\circ$. وبهذا فإن $x = 10$ ويكون $\widehat{ABE} = 50^\circ$ و $\widehat{AEB} = 40^\circ$. بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ فإن $\widehat{ABE} = \widehat{BED} = 50^\circ$ ، ولكن $\widehat{BED} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ إذ أن $BEDC$ رباعي دائري. إذن،

$$\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{BED} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

(٨٨) [AMC10A 2004] مستقيمان مختلفان يمران بالمركز المشترك لثلاث دوائر أنصاف أقطارها 1، 2، 3 على التوالي. مساحة المناطق المظللة تساوي $\frac{8}{13}$ من مساحة المناطق غير المظللة. ما قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين بالراديان (π راديان $= 180^\circ$) ؟

(أ) $\frac{\pi}{8}$ (ب) $\frac{\pi}{7}$ (ج) $\frac{\pi}{6}$ (د) $\frac{\pi}{5}$



الحل: الإجابة هي (ب): لنفرض أن S هي مساحة المناطق المظللة وأن U هي مساحة المناطق غير المظللة وأن θ هي الزاوية الحادة بين المستقيمين. مساحة الدائرة

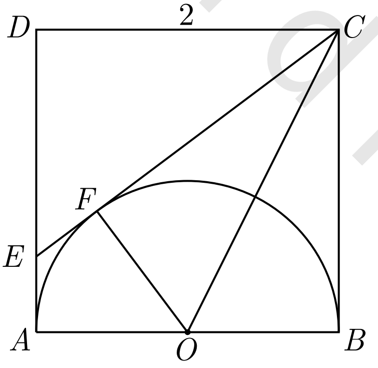
الكبيرة تساوي 9π. إذن، $S+U=9\pi$. وبما أن $S=\frac{8}{13}U$ فإن $\frac{21}{13}U=9\pi$. أي أن $U=\frac{39}{7}\pi$ وأن $S=\frac{8}{13}\times\frac{39}{7}\pi=\frac{24}{7}\pi$. الآن، مساحة المناطق المظللة تساوي:

$$\frac{2\theta}{2\pi}\times\pi+\frac{2(\pi-\theta)}{2\pi}\times(4\pi-\pi)+\frac{2\theta}{2\pi}(9\pi-4\pi)=3\theta+3\pi.$$

إذن، $\frac{24}{7}\pi=3\theta+3\pi$. وبهذا فإن $\theta=\frac{\pi}{7}$.

(٨٩) [AMC10A, AMC12A 2004] رسمنا نصف دائرة قطرها $\overline{AB}$ داخل المربع $ABCD$ الذي طول ضلعه 2، $\overline{CE}$ مماس لنصف الدائرة يقطع $\overline{AD}$ عند E. ما طول CE ؟

(أ) $\sqrt{5}$ (ب) $\sqrt{6}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) $5-\sqrt{5}$



الحل: الإجابة هي (ج): لنفرض أن $AE=x$. الآن $FC=BC=2$، $AE=EF=x$. باستخدام مبرهنة فيثاغورس في المثلث $\triangle CDE$ نجد أن

$$(2-x)^2+2^2=(2+x)^2$$

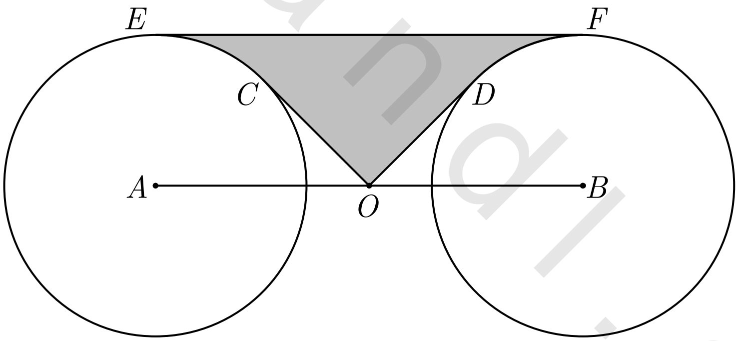
من ذلك نجد أن $x = \frac{1}{2}$. وبهذا فإن

$$CE = FC + x = \frac{5}{2}.$$

(٩٠) [AMC10A 2007] دائرتان مركزاهما A و B ونصف قطر كل منهما 2. O نقطة منتصف $\overline{AB}$، $OA = 2\sqrt{2}$، $\overline{OC}$ مماس للدائرة التي مركزها A و $\overline{OD}$ مماس للدائرة التي مركزها B، $\overline{EF}$ مماس مشترك للدائرتين. ما مساحة المنطقة المظللة $ECODF$ ؟

(أ) $8\sqrt{2} - 2 - \frac{\pi}{2}$ (ب) $4\sqrt{2} + \frac{\pi}{8}$

(ج) $4\sqrt{2}$ (د) $8\sqrt{2} - 4 - \pi$



الحل: الإجابة هي (د): مساحة المنطقة المطلوبة هي

$$[ABFE] - \left(\widehat{AEC} + [\triangle ACO] + [\triangle BDO] + \widehat{BED}\right).$$

من الواضح أن $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$. إذن، $ABFE$ مستطيل مساحته

$$2 \times (AO + OB) = 2 \times 2(2\sqrt{2}) = 8\sqrt{2}\,.$$

بما أن $\overline{OC}$ مماس للدائرة A فإن $\triangle ACO$ مثلث قائم. وبما أن $AO = 2\sqrt{2}$ و

$AC = 2$ فإن $\triangle ACO$ مثلث $90^\circ - 45^\circ - 45^\circ$. إذن،

$$[\triangle ACO] = \frac{1}{2} 2 \times 2 = 2$$

ومن الواضح أن $[\triangle BDO] = [\triangle ACO] = 2$.

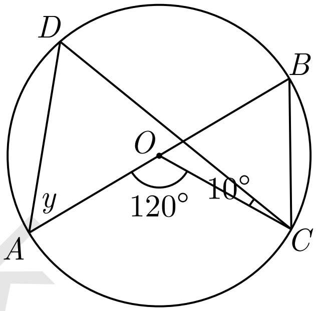
مساحة القطاع $\widehat{AEC}$ تساوي مساحة القطاع $\widehat{BFD}$ وتساوي $\frac{1}{8}$ مساحة أي من دائرتيهما. أي أن مساحة كل منهما تساوي $\frac{\pi}{2} = 4 \times \pi \times \frac{1}{8}$. إذن، مساحة المنطقة المظللة المطلوبة هي

$$8\sqrt{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 2 + 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 8\sqrt{2} - 4 - \pi\,.$$

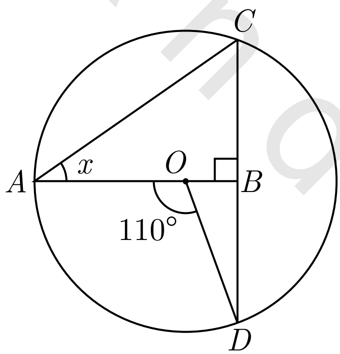
مسائل غير محلولة

(١) في الشكل المرفق O مركز الدائرة، $\overline{AOB}$ قطر. ما قياس $\hat{y}$ ؟

(أ) 50° (ب) 55° (ج) 60° (د) 65°



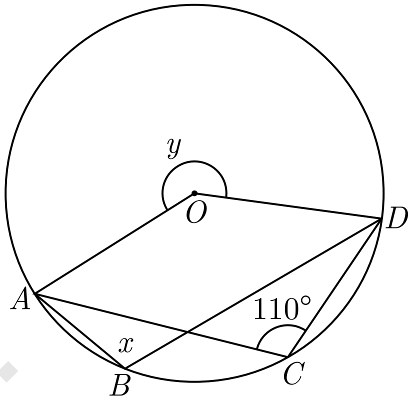
(٢) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، $\overline{AOB}$ قطر. ما قياس $\hat{x}$ ؟



(أ) 20° (ب) 25° (ج) 30° (د) 35°

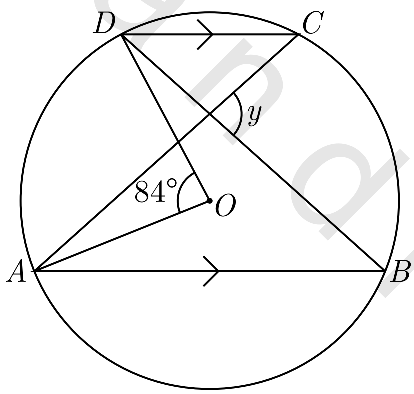
(٣) إذا كان O هو مركز الدائرة فما قياس $x - y$ ؟

(أ) 80° (ب) 100° (ج) 110° (د) 120°



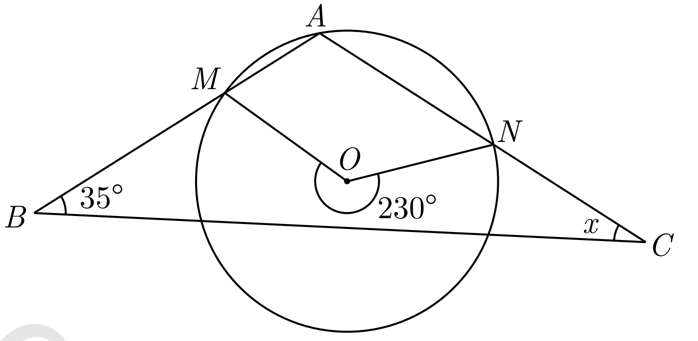
(٤) O مركز الدائرة، $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. ما قياس الزاوية $\hat{y}$ ؟

(أ) $80°$ (ب) $84°$ (ج) $96°$ (د) $106°$

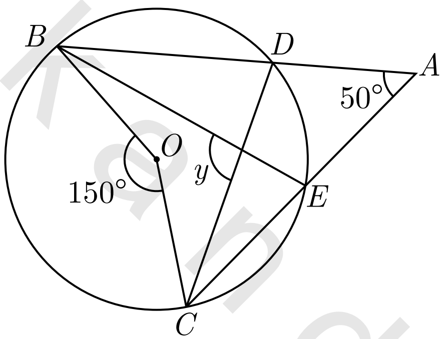


(٥) O مركز الدائرة، N ، M نقطتا تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{AB}$ مع الدائرة. ما قياس $\hat{x}$ ؟

(أ) $20°$ (ب) $25°$ (ج) $30°$ (د) $35°$

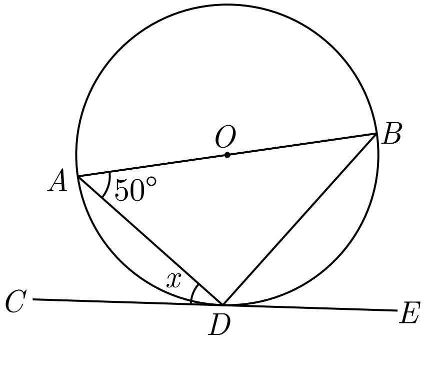


(٦) ما قياس $\hat{y}$ في الشكل المرفق حيث O هو مركز الدائرة ؟



(أ) 50° (ب) 75° (ج) 90° (د) 100°

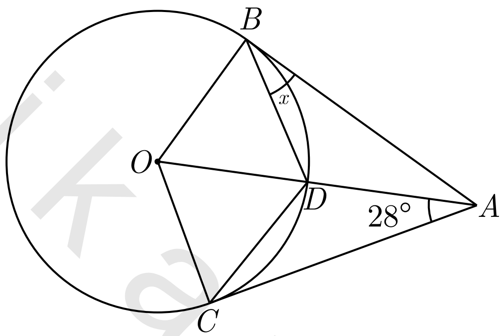
(٧) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، $\overline{CDE}$ مماس للدائرة عند D. ما قياس $\hat{x}$ ؟



(أ) 30° (ب) 40° (ج) 50° (د) 60°

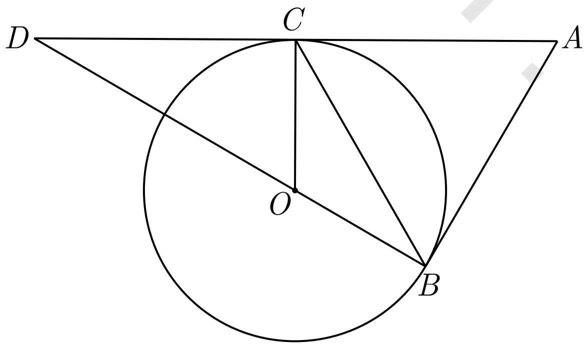
(٨) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان عند B و C على التوالي.
قياس $\widehat{x}$ يساوي:

(أ) 20° (ب) 24° (ج) 28° (د) 31°



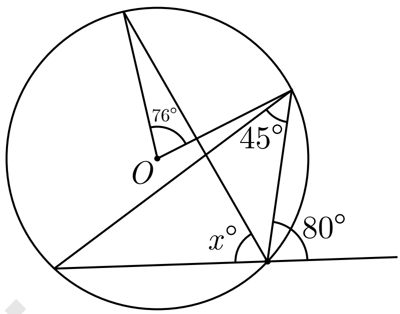
(٩) في الدائرة $C(O,4)$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان عند B و C على التوالي،
$AC = BC$. ما طول AD ؟

(أ) $4\sqrt{3}$ (ب) $6\sqrt{3}$ (ج) $8\sqrt{3}$ (د) $10\sqrt{3}$



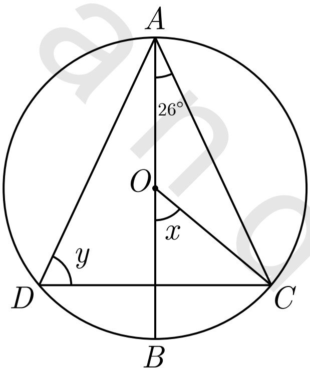
(١٠) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، ما قياس $\widehat{x}$ ؟

(أ) 35° (ب) 45° (ج) 60° (د) 62°

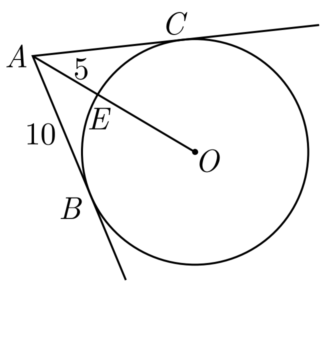


(١١) في الدائرة $C(O,r)$، $\overline{AOB}$ قطر ينصف الوتر $\overline{DC}$. ما قيمة $x+y$ ؟

(أ) 90° (ب) 100° (ج) 110° (د) 115°



(١٢) $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ مماسان للدائرة التي مركزها O عند B و C على التوالي، $AE=5$ ، $AB=10$. ما طول قطر الدائرة ؟

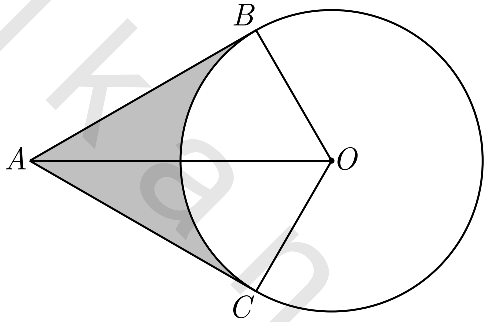


(أ) 15 (ب) 16 (ج) 18 (د) 20

(١٣) في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ مماسان للدائرة $C(O,5)$ عند B و C على التوالي، $\widehat{BAO} = 30°$. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

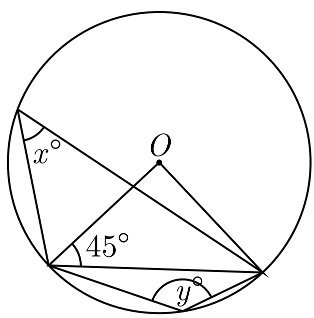
(أ) $\frac{23}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$ (ب) $\frac{25}{3}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$

(ج) $\frac{23}{3}\left(3\sqrt{3}+\pi\right)$ (د) $\frac{25}{3}\left(3\sqrt{3}+\pi\right)$



(١٤) في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، ما قيمة $y - x$ ؟

(أ) $70°$ (ب) $80°$ (ج) $90°$ (د) $135°$



(١٥) $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ مماسات للدائرة التي مركزها O عند M ، N ، P على

التوالي. إذا كان $AM = x$ ، $BP = y$ ، $CN = z$ فما محيط المثلث $\triangle ABC$ ؟

(أ) $\frac{x+y+z}{3}$ (ب) $\frac{x+y+z}{2}$

(ج) $x+y+z$ (د) $2(x+y+z)$

(١٦) $\overline{OB}$ نصف قطر في الدائرة $C(O,3)$. $\overline{AB}$ مماس للدائرة عند B ، $OA = 6$. ما قياس $\widehat{AOB}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (ج) $60°$ (د) $90°$

(١٧) $\overline{CA}$ و $\overline{CB}$ مماسان للدائرة التي مركزها O عند A و B على التوالي، الموازي للقطعة $\overline{AC}$ المرسوم من B يلاقي امتداد $\overline{CO}$ في النقطة D. إذا كان $AC = 4$ فما طول AD ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 8 (د) 12

(١٨) لتكن C نقطة على دائرة قطرها $\overline{AB}$. لنفرض أن نصف المستقيم $\overrightarrow{AC}$ يقطع الدائرة $C(A, AB)$ عند D ويقطع المماس المنشأ من B عند E. إذا كان $\widehat{ABC} = \widehat{CBD} = \widehat{DBE}$ فما قياس $\widehat{BAC}$ ؟

(أ) $30°$ (ب) $45°$ (ج) $60°$ (د) $90°$

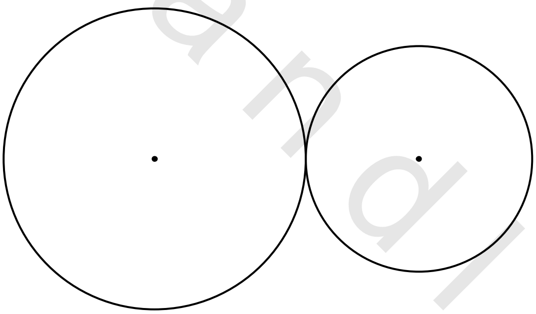
(١٩) $\overline{POA}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$. M نقطة على $\overrightarrow{POM}$ حيث $\overline{OM} = 2r$. $\overline{MNQ}$ مماس للدائرة عند N ويلاقي المماس المرسوم من P عند Q. ما طول QM ؟

(أ) $\sqrt{3}r$ (ب) $2\sqrt{3}r$ (ج) $3\sqrt{3}r$ (د) $4\sqrt{3}r$

(٢٠) M، N، P ثلاث نقاط مختلفة على الدائرة $C(O,r)$. $MN = NP = 6$ و $\widehat{MNP} = 120^\circ$. Q نقطة تقاطع $\overline{ON}$ مع $\overline{MP}$. ما طول QO ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٢١) [MAΘ 2005] قرصان دائريان متماسان كما هو مبين في الشكل، نصف قطر القرص الكبير 40 سم ونصف قطر القرص الصغير 30 سم. إذا دار القرص الصغير 4 دورات فما عدد الدورات التي دارها القرص الكبير ؟



(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) 3 (د) 4

(٢٢) $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ قطران متعامدان في الدائرة $C(O,r)$. M نقطة على القوس الصغير $\widehat{AB}$. E نقطة تقاطع $\overrightarrow{AM}$ مع $\overrightarrow{CB}$ و F نقطة تقاطع $\overline{AB}$ مع $\overline{CB}$. ما قياس $\widehat{EFB}$ ؟

(أ) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 70°

(٢٣) $\triangle ABC$ مرسوم داخل دائرة حيث $\widehat{A} = 70^\circ$ ، $\widehat{B} = 50^\circ$. منصفات زوايا المثلث تقطع الدائرة في النقاط A' ، B' ، C' وأعمدة المثلث تقطع الدائرة في النقاط A'' ، B'' ، C'' . ما قياس $\widehat{C''A''}$ ؟

(أ) 80° (ب) 120° (ج) 140° (د) 160°

(٢٤) $\overline{AB}$ مماس للدائرة $C(O,6)$ عند النقطة B . إذا كان $\widehat{OAB} = 45^\circ$ فما طول AB ؟

(أ) 3 (ب) $3\sqrt{2}$ (ج) 6 (د) $6\sqrt{2}$

(٢٥) لنفرض أن رؤوس المثلث $\triangle ABC$ تقع على الدائرة $C(O,r)$. $\overline{COQ}$ ، $\overline{BOP}$ ارتفاعان يلاقيان $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ في النقطتين Q و P على التوالي. إذا كان $BQ = 3$ و $PC = 4$ فما قيمة $AQ + AP$ ؟

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 8 (د) 12

(٢٦) $\overline{AOB}$ قطر في الدائرة $C(O,r)$ ، $\overline{MPN}$ وتر عمودي على $\overline{AOB}$ ويلاقيه في النقطة P . إذا كان $\widehat{OMP} = 20^\circ$ فما قياس $\widehat{MON}$ ؟

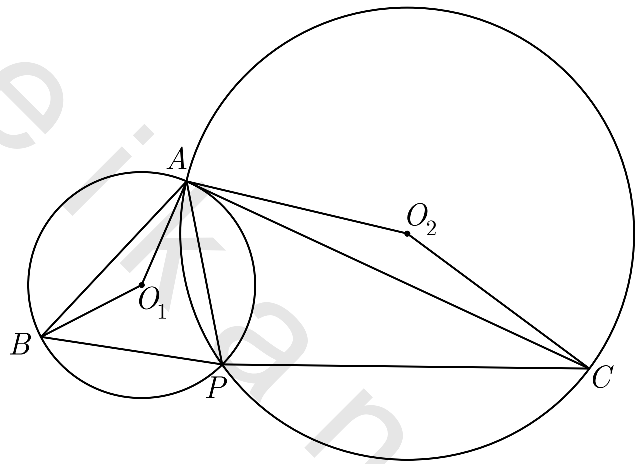
(أ) 70° (ب) 90° (ج) 120° (د) 140°

(٢٧) $\overline{MN}$ مماس للدائرة $C(O,3)$ عند M . $\overline{AB}$ وتر في الدائرة يوازي $\overline{MN}$. P نقطة تلاقي $\overline{AB}$ مع امتداد $\overrightarrow{MO}$. إذا كان $AM = 5$ فما طول OP ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) $\frac{7}{6}$ (د) $\frac{3}{2}$

(٢٨) في الشكل المرفق، تتقاطع الدائرتان $C(O_1,3)$ و $C(O_2,6)$ في النقطتين A و P ، $\overline{AP}$ منصف للزاوية $\widehat{BAC}$. $\dfrac{BP}{PC}$ يساوي:

(أ) $\dfrac{1}{3}$ (ب) $\dfrac{1}{2}$ (ج) $\dfrac{2}{3}$ (د) $\dfrac{5}{6}$



(٢٩) $C(O,r)$ و $C(O',r')$ دائرتان متماستان عند النقطة A . رسمنا مستقيماً يمر بالنقطة A ويقطع $C(O,r)$ في النقطة B و $C(O',r')$ في النقطة B' . عندئذ،

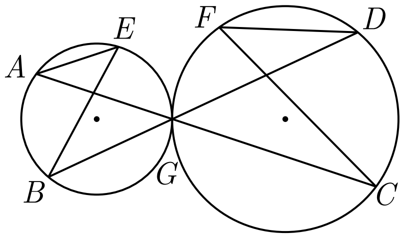
(أ) $\overline{OB} \parallel \overline{O'B'}$ (ب) $\overline{OB} \perp \overline{O'B'}$

(ج) $\widehat{OBA} \neq \widehat{B'AO'}$ (د) $\widehat{OBA} \neq \widehat{O'B'A}$

(٣٠) في الشكل المرفق:

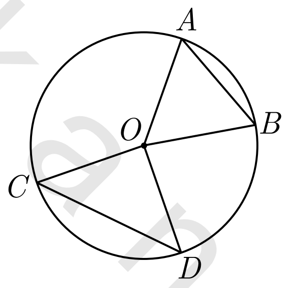
(أ) $\widehat{E} = \widehat{D}$ (ب) $\widehat{E} = \widehat{F}$

(ج) $\widehat{E} \neq \widehat{DGC}$ (د) $\widehat{F} \neq \widehat{AGB}$



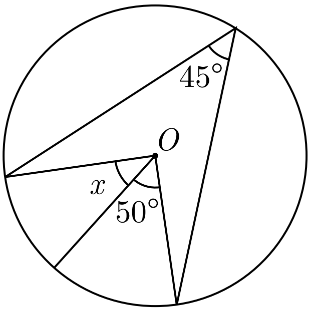
(٣١) في الدائرة $C(O,4)$، $\widehat{AB} = 60^\circ$، $\widehat{CD} = 90^\circ$. ما قيمة $CD + AB$ ؟

(أ) $4\sqrt{2} - 4$ (ب) $4\sqrt{2}$ (ج) $4\sqrt{2} + 4$ (د) 8



(٣٢) [Aust.MC 1993] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة. قيمة x تساوي:

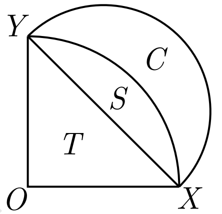
(أ) 20° (ب) 25° (ج) 35° (د) 40°



(٣٣) [Aust.MC 1996] $\overline{OX}$ و $\overline{OY}$ نصفا قطري ربع دائرة، رسمنا نصف دائرة

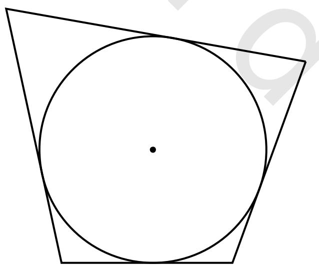
قطرها $\overline{XY}$ كما هو مبين. إذا كانت T ، S ، C ترمز للمثلث، القطاع، الهلال على التوالي فإن مساحة T إلى مساحة C تساوي:

(أ) $\frac{3}{\pi}$ (ب) 1 (ج) $\frac{13}{4\pi}$ (د) $\frac{15}{4\pi}$



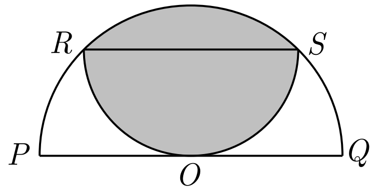
(٣٤) [Aust.MC 1996] في الشكل المرفق، النسبة بين محيط الشكل الرباعي إلى محيط الدائرة تساوي 4 إلى 3. النسبة بين مساحة الشكل الرباعي إلى مساحة الدائرة تساوي:

(أ) 4 إلى π (ب) $3\sqrt{2}$ إلى π (ج) 16 إلى 9 (د) 4 إلى 3



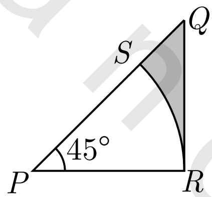
(٣٥) [Aust.MC 1993] في الشكل المرفق، كل من $\widehat{PRSQ}$ و $\widehat{ROS}$ نصف دائرة، $\overline{PQ} \parallel \overline{RS}$ ، نصف قطر الدائرة الكبيرة 1. ما مساحة المنطقة المظللة:

(أ) $\frac{\pi-1}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{4}$ (ج) 1 (د) $\frac{\pi}{2}-1$

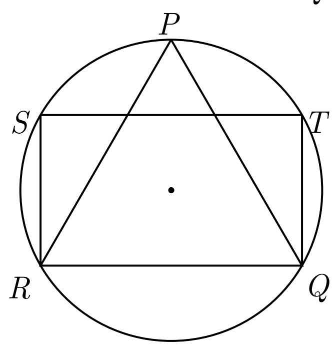


(٣٦) [Aust.MC 1998] المثلث $\triangle PQR$ قائم الزاوية عند $\widehat{R}$. $\widehat{QPR} = 45^\circ$. $\widehat{RS}$ قوس لدائرة مركزها P ونصف قطرها $\overline{PR}$ ويقطع $\overline{PQ}$ عند النقطة S . إذا كانت A هي مساحة المنطقة غير المظللة و B مساحة المنطقة المظللة فإن $\frac{A}{B}$ تساوي:

(أ) 1 (ب) $\frac{\pi}{8}$ (ج) $\frac{2\pi}{4-\pi}$ (د) $\frac{\pi}{4-\pi}$



(٣٧) [Aust.MC 1996] رؤوس $\triangle PRQ$ المتساوي الأضلاع تقع على محيط دائرة نصف قطرها 1. S و T نقطتان على الدائرة حيث $QRST$ مستطيل. ما مساحة المستطيل $QRST$ ؟



(أ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) 2

(٣٨) [Aust.MC 1997] نافذة على شكل مربع طول ضلعه 60 محاط من الأعلى بقوس دائرة نصف قطرها 50. قوس الدائرة أصغر من نصف دائرة. ما أقصى ارتفاع للنافذة ؟

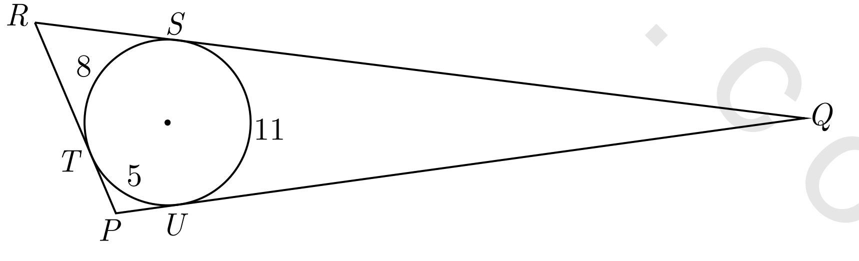
(أ) 70 (ب) 80 (ج) 85 (د) 90

(٣٩) [Aust.MC 1995] $\triangle PQR$ القائم الزاوية عند Q والمتساوي الساقين $PQ = QR = 6$ يحيط بدائرة مركزها O. ما طول نصف قطر الدائرة ؟

(أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $3\sqrt{2}$ (ج) $6 - 3\sqrt{2}$ (د) 3

(٤٠) [Aust.MC 1994] أضلاع $\triangle PQR$ مماسات للدائرة $C(O,r)$ عند النقاط S، T، U. إذا كان $\widehat{US} : \widehat{ST} : \widehat{TU}$ هي $11 : 8 : 5$ فما النسبة $\widehat{UQS} : \widehat{SRT} : \widehat{TPU}$ ؟

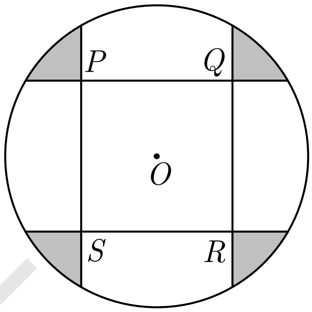
(أ) $7 : 4 : 1$ (ب) $8 : 5 : 2$ (ج) $7 : 3 : 2$ (د) $9 : 5 : 1$



(٤١) [Aust.MC 1994] للدائرة $C(O,1)$ والمربع $PQRS$ المركز نفسه. طول ضلع المربع 1. مددنا أضلاع المربع لتلاقي الدائرة كما هو مبين. ما مساحة

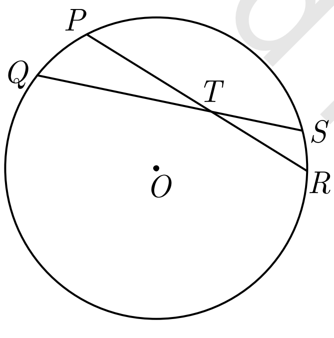
المناطق المظللة ؟

(أ) $\frac{\pi}{8}$ (ب) $\frac{\pi}{3}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$ (د) π



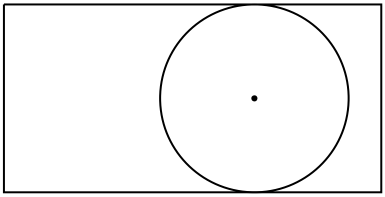
(٤٢) [Aust.MC 1995] $\overline{PR}$ و $\overline{QS}$ وتران في الدائرة $C(O,5)$ يتقاطعان في النقطة T . إذا كان $\widehat{PTQ}=20^\circ$ فما طول $\widehat{PQ}+\widehat{RS}$ ؟

(أ) $\frac{5\pi}{9}$ (ب) $\frac{4\pi}{5}$ (ج) $\frac{8\pi}{9}$ (د) $\frac{10\pi}{9}$



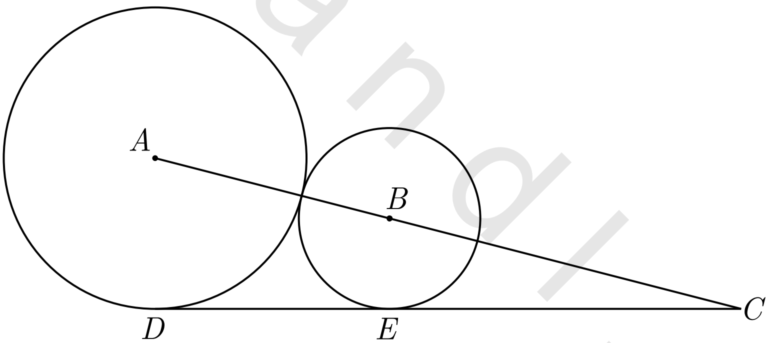
(٤٣) [AMC10B 2012] رسمنا دائرة نصف قطرها 5 داخل مستطيل كما هو مبين في الشكل. النسبة بين طول المستطيل إلى عرضه هي $2:1$. ما مساحة المستطيل ؟

(أ) 100 (ب) 125 (ج) 150 (د) 200

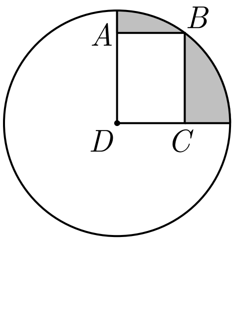


(٤٤) [AMC10A 2012] $C(A,5)$ و $C(B,3)$ دائرتان متماستان، $\overline{DE}$ مماس مشترك لهما عند D و E ويلاقي امتداد $\overrightarrow{AB}$ في النقطة C. ما طول BC ؟

(أ) 4.8 (ب) 10.2 (ج) 12 (د) 14.4



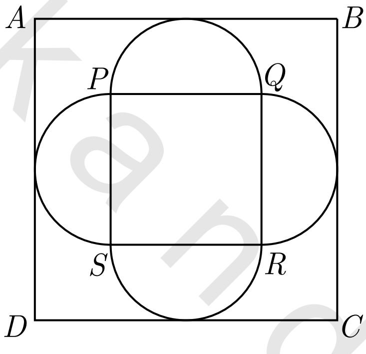
(٤٥) [AJHSME 1987] $ABCD$ مستطيل، D مركز الدائرة، B نقطة على الدائرة، $AD = 4$ ، $CD = 3$. ما مساحة المنطقتين المظللتين ؟



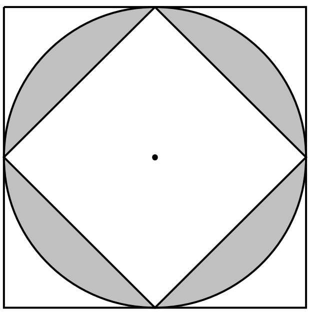
(أ) $\frac{25\pi}{4} - 12$ (ب) $\frac{23\pi}{4} - 12$ (ج) $\frac{25\pi}{4}$ (د) $\frac{27\pi}{4}$

(٤٦) [AJHSME 1994] رسمنا أربعة أنصاف دوائر أقطارها أضلاع المربع $PQRS$ الذي طول ضلعه 4 كما هو مبين. ثم رسمنا المربع $ABCD$ بحيث تكون أضلاعه مماسات لأنصاف الدوائر كما هو مبين. ما مساحة المربع $ABCD$ ؟

(أ) 32 (ب) 36 (ج) 48 (د) 64



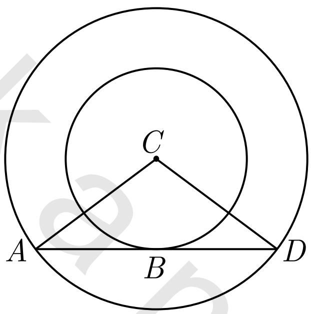
(٤٧) [AMC8 2011] في الشكل المرفق، نصف قطر الدائرة يساوي 1. كل من الشكلين الرباعيين مربع. A مساحة المناطق المظللة داخل الدائرة و B مساحة المناطق بين المربعين. ما قيمة $\frac{A}{B}$ ؟



(أ) $\pi - 2$ (ب) $\frac{\pi - 3}{2}$ (ج) $\frac{\pi - 2}{2}$ (د) π

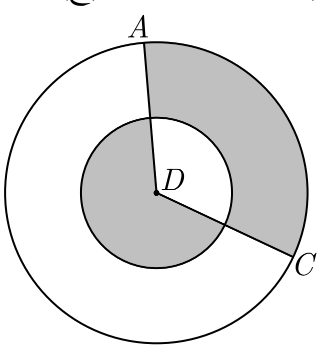
(٤٨) [AMC8 2010] في الشكل المرفق، C مركز مشترك للدائرتين، الوتر $\overline{AD}$ مماس للدائرة الصغرى عند B، $AC = 10$، $AD = 16$. ما مساحة المنطقة الواقعة بين الدائرتين ؟

(أ) 49π (ب) 64π (ج) 81π (د) 100π



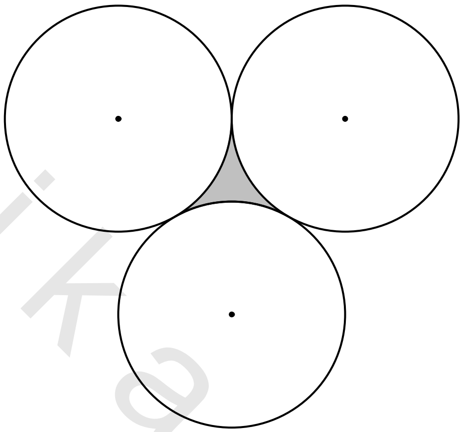
(٤٩) [Pascal 2007] $C(D,1)$ و $C(D,2)$ لهما المركز نفسه D. مساحة المنطقتين المظللتين تساوي $\frac{5}{12}$ من مساحة الدائرة الكبيرة. ما القياس المناسب للزاوية $\widehat{ADC}$ ؟

(أ) $90°$ (ب) $108°$ (ج) $120°$ (د) $135°$



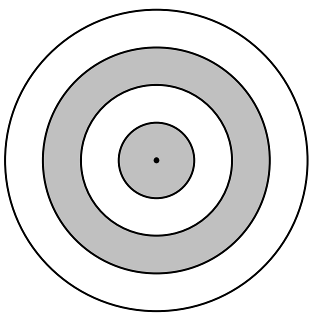
(٥٠) [Pascal 2006] الدوائر الثلاث المبينة في الشكل المرفق متطابقة. محيط كل منها يساوي 36. ما محيط المنطقة المظللة ؟

(أ) 6 (ب) 18 (ج) 24 (د) 36



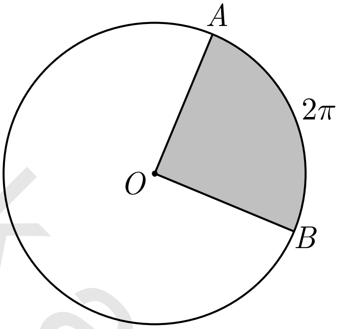
(٥١) [Cayley 2003] في الشكل المرفق، لدينا أربع دوائر لها المركز نفسه أنصاف أقطارها 1، 2، 3، 4. إذا كانت A مساحة الدائرة الكبيرة و B مساحة المنطقتين المظللتين فإن $\frac{B}{A}$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{7}{16}$ (ج) $\frac{3}{8}$ (د) $\frac{5}{8}$



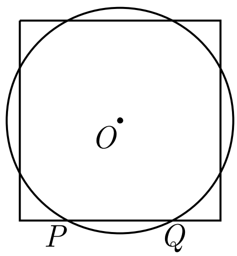
(٥٢) [Cayley 2002] في الشكل المرفق، O مركز الدائرة، زاوية القطاع المظلل $\overset{\frown}{AOB}$ تساوي 90° وطول القوس $\overset{\frown}{AB}$ يساوي 2π وحدة. ما مساحة القطاع المظلل $\overset{\frown}{AOB}$ ؟

(أ) 4π (ب) 6π (ج) 8π (د) 16π



(٥٣) [Fermat 2009] في الشكل المرفق، الدائرة والمربع لهما المركز نفسه O والمساحة نفسها. نصف قطر الدائرة 1 وتقطع أحد أضلاع المربع بالنقطتين P و Q. ما طول PQ ؟

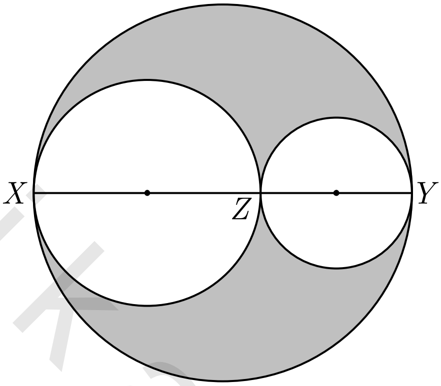
(أ) $\sqrt{4-\pi}$ (ب) 1 (ج) $2-\sqrt{\pi}$ (د) $\sqrt{2}$



(٥٤) [Fermat 2008] في الشكل المرفق، z تقع على $\overline{XY}$، أقطار الدوائر الثلاث هي $\overline{XZ}$، $\overline{ZY}$، $\overline{XY}$. $XZ = 12$، $ZY = 8$. A مساحة المناطق

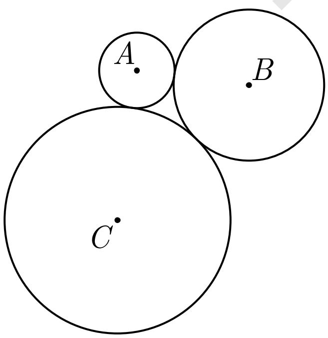
المظللة، B مساحة المناطق غير المظللة. $\dfrac{A}{B}$ يساوي:

(أ) $\dfrac{1}{2}$ (ب) $\dfrac{2}{3}$ (ج) $\dfrac{12}{13}$ (د) 1



(٥٥) [Fermat 2000] A ، B ، C مراكز ثلاث دوائر متماسة كما هو مبين في الشكل، أنصاف أقطارها 2 ، 4 ، 6 على التوالي. في المثلث $\triangle ABC$:

(أ) $\widehat{A}$ حادة (ب) $\widehat{B} = 90^\circ$ (ج) $\widehat{A} = 90^\circ$ (د) جميع زواياه حادة



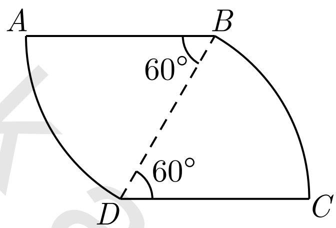
(٥٦) [Fryer 2005] ثلاث دوائر لها المركز نفسه. نصفا قطري الدائرتين الكبيرتين هما 13 و 12. مساحة الحلقة بين الدائرتين الكبيرتين تساوي مساحة الدائرة

الصغيرة. ما طول نصف قطر الدائرة الصغيرة ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 9

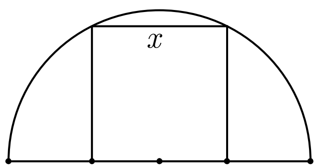
(٥٧) [Galois 2007] وصلنا قطاعين من دائرة نصف قطرها 12 كما هو مبين في الشكل المرفق. ما مساحة الشكل $ABCD$ ؟

(أ) 12π (ب) 24π (ج) 36π (د) 48π



(٥٨) [MAΘ 2009] $ABCD$ مربع مرسوم داخل نصف دائرة كما هو مبين. إذا كان طول ضلع المربع يساوي x وقطر الدائرة يساوي D فما قيمة $\frac{x}{D}$ ؟

(أ) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (ب) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ج) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (د) $\sqrt{5}$

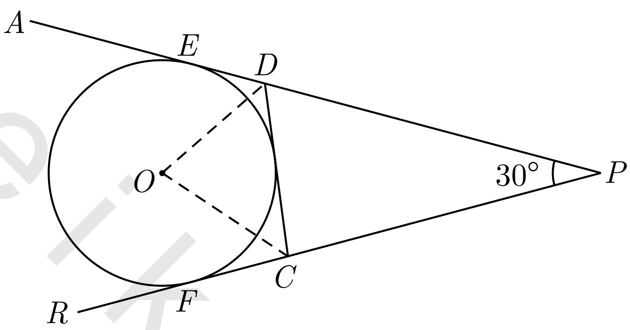


(٥٩) [MAΘ 2009] محيط قطاع دائري يساوي 28 سم ومساحته تساوي 49 سم^{٢}. ما طول هذا القطاع بالسنتمتر ؟

(أ) 7 (ب) 14 (ج) 22 (د) 26

(٦٠) [MAΘ 2008] أضلاع $\triangle PCD$ مماسات للدائرة التي مركزها O. إذا كان $\widehat{P} = 30^\circ$ فما قياس $\widehat{DOC}$ ؟

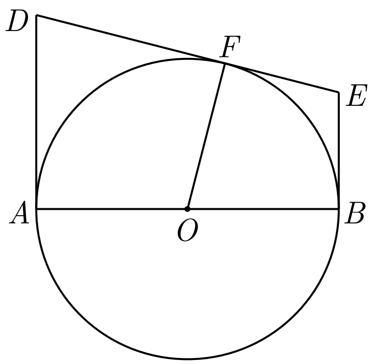
(أ) 60° (ب) 65° (ج) 70° (د) 75°



(٦١) [MAΘ 2008] دائرتان $C(O_1, 20)$ و $C(O_2, 15)$ تتقاطعان في نقطتين. ما الفرق بين مساحتي المنطقتين غير المشتركتين بين الدائرتين ؟

(أ) 25π (ب) 175π (ج) 450π (د) 625π

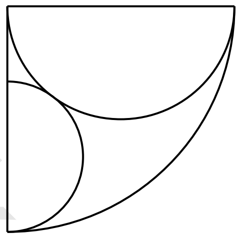
(٦٢) [MAΘ 2008] في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ قطر في الدائرة التي مركزها O، $\overline{AD}$، $\overline{DE}$، $\overline{BE}$ مماسات للدائرة. $FD \times FE$ يساوي:



(أ) $(DA)^2$ (ب) $(EB)^2$ (ج) $(DO)^2$ (د) $(FO)^2$

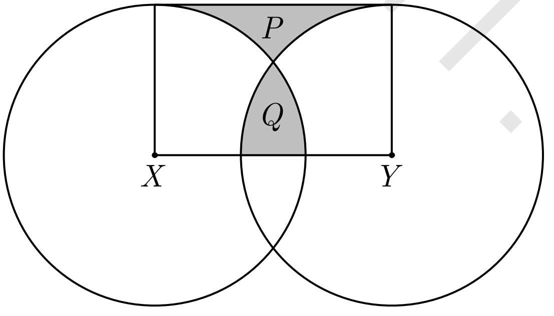
(٦٣) [Aust.MC 1999] قطر نصف الدائرة الكبيرة يساوي نصف قطر ربع الدائرة في الشكل المرفق وكل منهما يساوي 2. ما نصف قطر نصف الدائرة الصغيرة ؟

(أ) $\frac{2}{\pi}$ (ب) $\frac{7}{10}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{\pi}{5}$



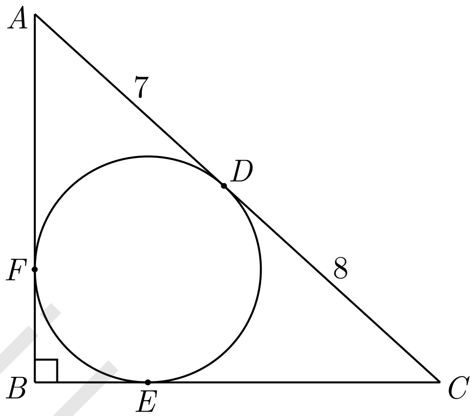
(٦٤) [Aust.MC 1999] في الشكل المرفق، دائرتان متطابقتان مركزاهما X و Y ونصف قطر كل منهما 1. مساحة المنطقة المظللة P تساوي مساحة المنطقة المظللة Q. ما طول XY ؟

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) 1.4 (ج) 1.5 (د) $\frac{\pi}{2}$

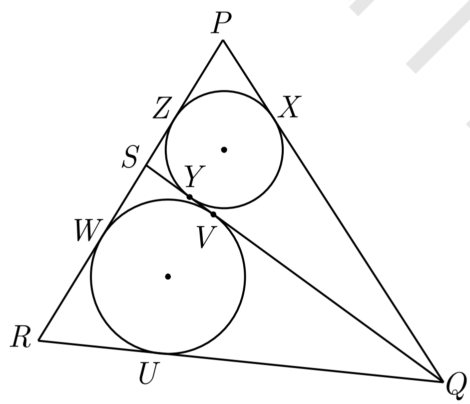


(٦٥) [Aust.MC 2001] $\triangle ABC$ قائم الزاوية عند B وأضلاعه مماسات للدائرة عند D ، E ، F على التوالي. $AD = 7$ ، $DC = 8$. ما مساحة $\triangle ABC$ ؟

(أ) 28 (ب) 49 (ج) 56 (د) 60



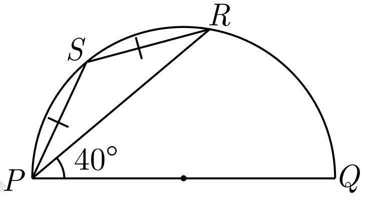
(٦٦) [Aust.MC 2003] المثلث $\triangle PQR$ متساوي الساقين فيه $PQ = QR$. S نقطة على $\overline{PR}$ حيث $PS = 15$ ، $SR = 21$. $\overline{PQ}$ و $\overline{QS}$ و $\overline{SP}$ مماسات للدائرة الصغيرة عند X و Y و Z على التوالي. $\overline{RQ}$ و $\overline{QS}$ و $\overline{SR}$ مماسات للدائرة الكبيرة عند U و V و W على التوالي. ما طول YV ؟



(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

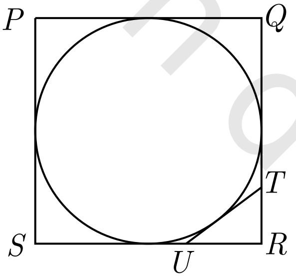
(٦٧) [Aust.MC 2001] في الشكل المرفق، $\overline{PQ}$ قطر نصف الدائرة، $PS = SR$ ، $\widehat{QPR} = 40^\circ$. ما قياس $\widehat{SRP}$ ؟

(أ) 25° (ب) 30° (ج) 35° (د) 40°



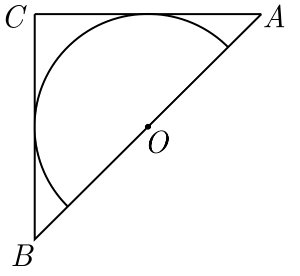
(٦٨) [Aust.MC 2004] أضلاع المربع $PQRS$ مماسات للدائرة وأيضاً $\overline{UT}$ مماس للدائرة، $RU = \frac{1}{4}RS$. RT يساوي:

(أ) $\frac{2}{9}RQ$ (ب) $\frac{3}{10}RQ$ (ج) $\frac{1}{3}RQ$ (د) $\frac{2}{5}RQ$



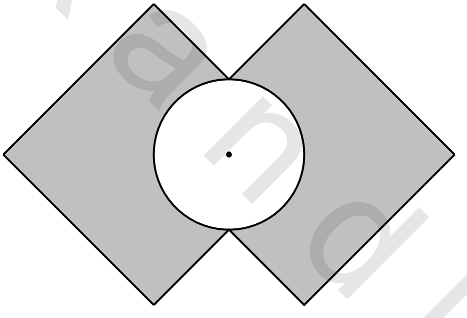
(٦٩) [AMC8 2005] المثلث $\triangle ABC$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين فيه، $AC = BC$ ، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ مماسان لنصف الدائرة التي مركزها O ومساحتها 2π. ما مساحة $\triangle ABC$ ؟

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 3π (د) 4π



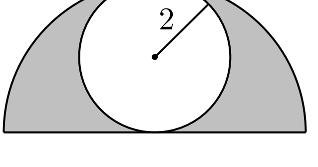
(٧٠) [AMC8 2004] الشكل المرفق يبين مربعين طول ضلع كل منهما 4 ويتقاطعان في زاويتين قائمتين عند منتصفي ضلعيهما. قطر الدائرة هو القطعة بين نقطتي التقاطع. ما مساحة المنطقة المظللة في الشكل ؟

(أ) $16 - 4\pi$ (ب) $16 - 2\pi$ (ج) $28 - 4\pi$ (د) $28 - 2\pi$



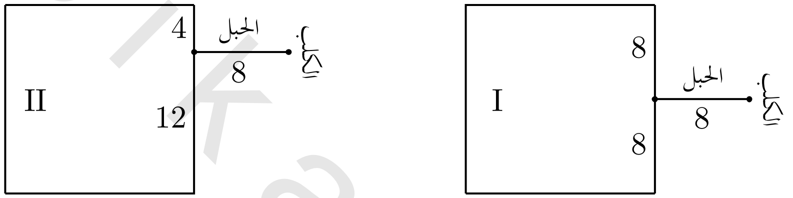
(٧١) [AMC10A 2009] في الشكل المرفق، نصف قطر الدائرة الصغيرة يساوي 2. الكسر الذي يمثل نسبة مساحة الجزء المظلل إلى مساحة نصف الدائرة الكبيرة هو

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{\pi}{6}$ (ج) $\frac{2}{\pi}$ (د) $\frac{2}{3}$



(٧٢) [AMC10A 2006] أراد وائل أن يربط كلبه بحبل مثبت عند أحد أضلاع مربع طول ضلعه 16. اقترح عليه صديقه أحمد أن يختار نقطة منتصف أحد الأضلاع ليثبت الحبل كما هو مبين في الشكل I ولكنه اعتقد أنه بتثبيت الحبل كما هو مبين في الشكل II فإنه سيحصل على مساحة أكبر يتحرك فيها الكلب. أي الاقتراحين أفضل وما هي المساحة الأكبر ؟

(أ) I، 32π (ب) I، 38π (ج) II، 36π (د) II، 40π

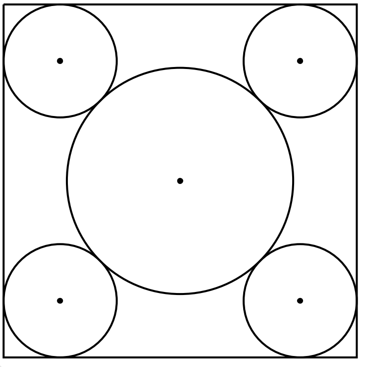


(٧٣) [AMC10A, AMC12A 2008] A و B نقطتان على دائرة مركزها O، $\widehat{AOB} = 60^\circ$. دائرة أخرى تمس الدائرة الأولى داخلياً و $\overline{OA}$ و $\overline{OB}$ مماسان لها. ما النسبة بين مساحة الدائرة الصغيرة إلى الدائرة الكبيرة ؟

(أ) $\frac{1}{16}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{1}{8}$ (د) $\frac{1}{6}$

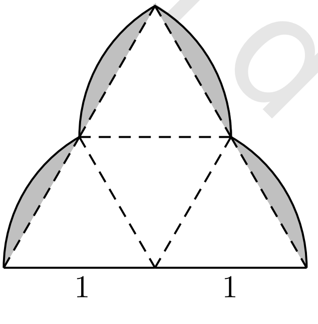
(٧٤) [AMC10A 2007] في الشكل المرفق، أربع دوائر متطابقة نصف قطر كل منها 1 وكل منها تمس ضلعين من أضلاع المربع وتمس دائرة نصف قطرها 2 كما هو مبين في الشكل. ما مساحة المربع ؟

(أ) $22 + 12\sqrt{2}$ (ب) $16 + 16\sqrt{3}$ (ج) 48 (د) $36 + 16\sqrt{2}$



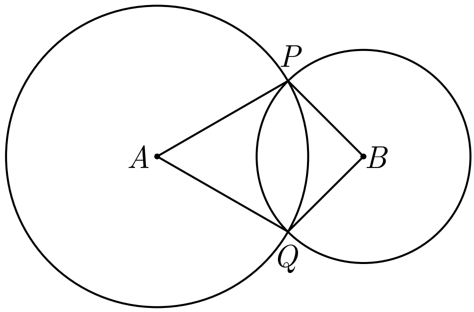
(٧٥) [AMC10A 2005] أنشأنا الشكل المرفق برسم قطاعات دائرية حول أضلاع مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة طول ضلع كل منها 1. ما مساحة الجزء المظلل ؟

(أ) $\frac{1}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ب) $\frac{2}{3}\pi$ (ج) π (د) $\frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$



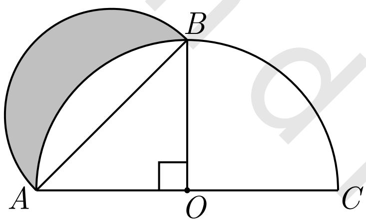
(٧٦) [Pascal 2003] في الشكل المرفق، دائرتان $C(A,R)$ و $C(B,r)$ تتقاطعان في النقطتين P و Q حيث $\widehat{PAQ} = 60^\circ$ و $\widehat{PBQ} = 90^\circ$. ما النسبة بين مساحة $C(A,R)$ إلى مساحة $C(B,r)$

(أ) $\frac{4}{3}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{2}{1}$ (د) $\frac{3}{1}$



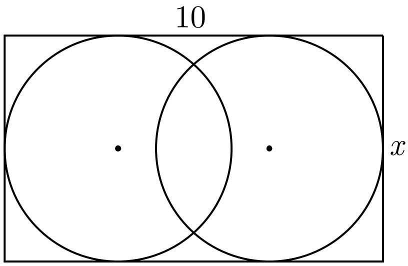
(٧٧) [Pascal 2002] في الشكل المرفق، $\overline{AOC}$ قطر نصف الدائرة الأولى التي مركزها O ونصف قطرها 1 و $\overline{AB}$ قطر نصف الدائرة الثانية. ما مساحة المنطقة المظللة ؟

(أ) $\frac{\pi}{4}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{2}$



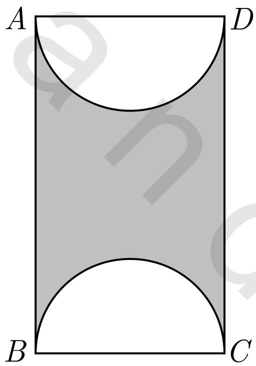
(٧٨) [Pascal 2001] دائرتان متطابقتان محاطتان بمستطيل طوله 10 وعرضه x كما هو مبين في الشكل. إذا كانت المسافة بين مركزيهما تساوي $\frac{2x}{3}$ فإن x تساوي:

(أ) $\frac{15}{4}$ (ب) 5 (ج) 6 (د) $\frac{15}{2}$



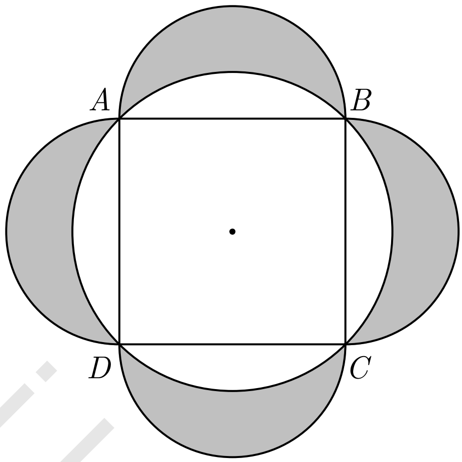
(٧٩) [Pascal 2000] $ABCD$ مستطيل فيه $AD = 10$. مساحة المنطقة المظللة تساوي 100. أصغر مسافة بين نصفي الدائرة تساوي:

(أ) $2.5\pi - 5$ (ب) 2.5π (ج) $2.5\pi + 5$ (د) 5π



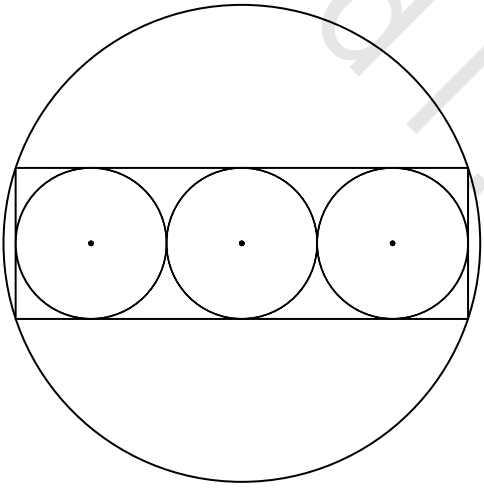
(٨٠) [Cayley 2001] طول ضلع المربع $ABCD$ المرسوم داخل الدائرة يساوي 2. أضلاع المربع هي أقطار لأنصاف دوائر كما هو مبين. ما مساحة المناطق المظللة ؟

(أ) $2\pi - 4$ (ب) $2\pi - 2$ (ج) π (د) 4



(٨١) [Cayley 1999] رسمنا ثلاث دوائر متماسة نصف قطر كل منها 10 بحيث تقع مراكزها على استقامة واحدة داخل مستطيل ثم أحطنا المستطيل بدائرة أخرى كما هو مبين في الشكل. مساحة الدائرة الكبيرة تساوي:

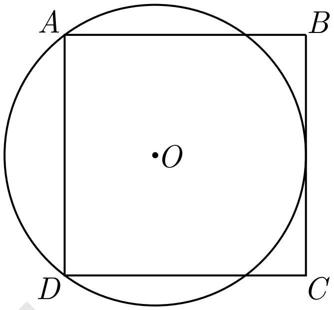
(أ) 1000π (ب) 1300π (ج) 1600π (د) 1700π



(٨٢) [Cayley 1998] طول ضلع المربع $ABCD$ يساوي 8. $\overline{BC}$ مماس لدائرة

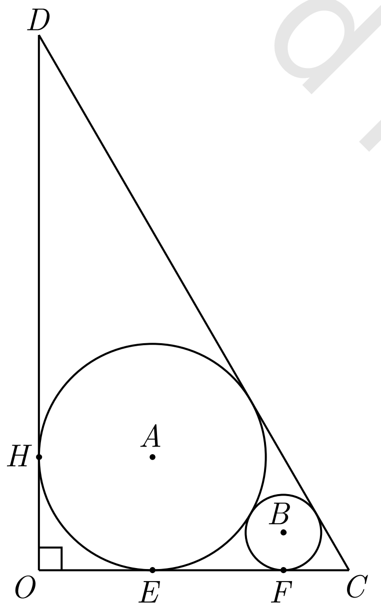
مركزها O وتمر بالنقطتين A و D. ما طول نصف قطر الدائرة ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6



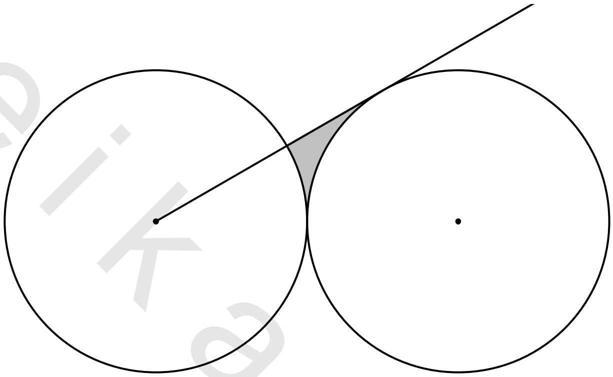
(٨٣) [Fermat 2001] الدائرتان $C(A,3)$ و $C(B,1)$ متماستان كما هو مبين. $\overline{OC}$ يمس الدائرتين عند E و F و $\overline{OD}$ يمس الدائرة $C(A,3)$ عند H وعمودي على $\overline{OC}$، $\overline{CD}$ مماس للدائرتين كما هو مبين. ما طول OD ؟

(أ) $8\sqrt{3}$ (ب) $3+6\sqrt{3}$ (ج) $6+3\sqrt{3}$ (د) $9+3\sqrt{3}$



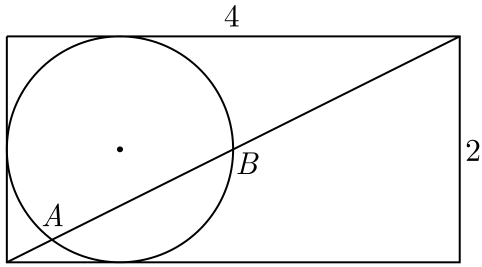
(٨٤) [Fermat 2000] دائرتان متماستان نصف قطر كل منها 10. رسمنا مماساً من مركز إحداهما إلى الدائرة الثانية. ما مساحة المنطقة المظللة مقربة إلى أقرب عدد صحيح ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8



(٨٥) [Fermat 2000] دائرة تمس ثلاثة من أضلاع مستطيل طوله 4 وعرضه 2 كما هو مبين. يقطع قطر المستطيل الدائرة في النقطتين A و B. ما طول الوتر AB ؟

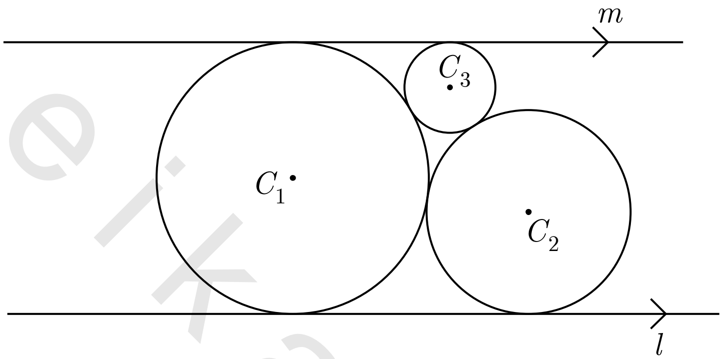
(أ) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ب) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (ج) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ (د) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$



(٨٦) [Fermat 1999] $C(C_1, r)$ و $C(C_2, 9)$ و $C(C_3, 4)$ ثلاث دوائر متماسة

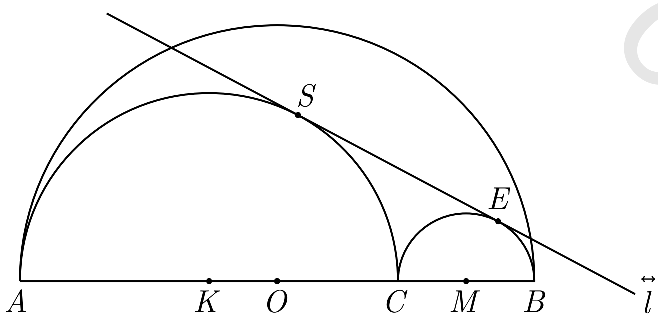
كما هو مبين، $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ حيث $\overleftrightarrow{m}$ مماس للدائرتين $C(C_1, r)$ و $C(C_3, 4)$ و $\overleftrightarrow{l}$ مماس للدائرتين $C(C_1, r)$ و $C(C_2, 9)$. ما طول r ؟

(أ) 10 (ب) 11 (ج) 12 (د) 13



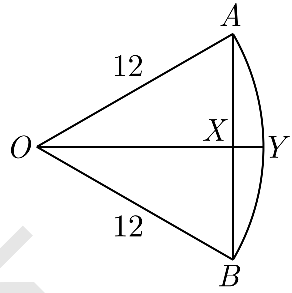
(٨٧) [Fryer 2009] في الشكل المرفق، O، K، M مراكز ثلاثة أنصاف دوائر. $OC = 32$، $CB = 36$. $\overleftrightarrow{l}$ مماس للدائرتين الصغيرتين عند S و E حيث $\overline{KS}$ و $\overline{ME}$ عموديان على $\overleftrightarrow{l}$. ما مساحة الشكل الرباعي $KSEM$ ؟

(أ) 600 (ب) 960 (ج) 1080 (د) 2040



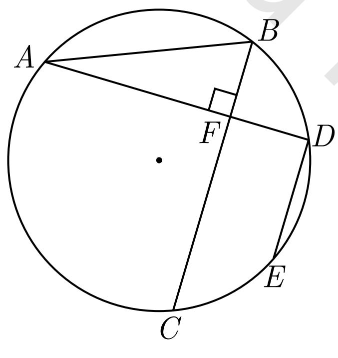
(٨٨) [Galois 2007] في الشكل المرفق، AOB قطاع الدائرة $C(O,12)$، $\widehat{AOB} = 60^\circ$. $\overline{OY}$ عمودي على $\overline{AB}$ ويقطعه عند X. ما طول XY ؟

(أ) $8 - 6\sqrt{3}$ (ب) $9 - 6\sqrt{3}$ (ج) $10 - 6\sqrt{3}$ (د) $12 - 6\sqrt{3}$



(٨٩) [Euclid 2006] في الشكل المرفق، $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ وتران في الدائرة، D نقطة على الدائرة حيث $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ و E نقطة على الدائرة حيث $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. ما قياس $\widehat{EAC} + \widehat{ABC}$ ؟

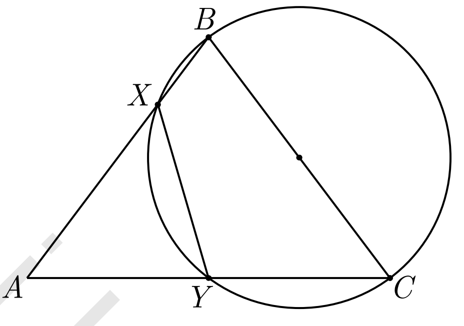
(أ) 80° (ب) 90° (ج) 95° (د) 100°



(٩٠) [Euclid 2001] $\triangle ABC$ متساوي الساقين فيه $AB = BC = 25$ و $AC = 30$. $\overline{BC}$ قطر في دائرة يقطع $\overline{AB}$ عند X ويقطع $\overline{AC}$ عند

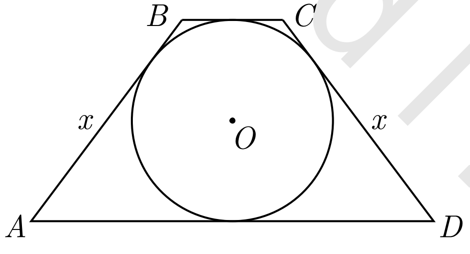
Y. ما طول XY ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25



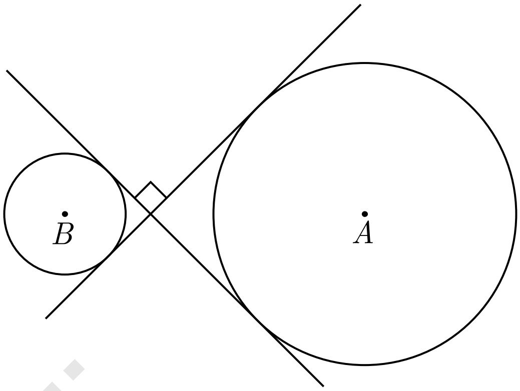
(٩١) [Euclid 2000] $ABCD$ شبه منحرف متساوي الساقين فيه $AB = CD = x$. مساحة $ABCD$ تساوي 80. $C(O,4)$ دائرة تمس الأضلاع الأربعة لشبه المنحرف. ما قيمة x ؟

(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10



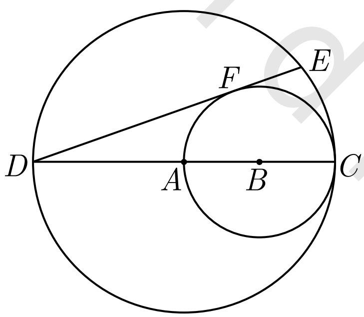
(٩٢) [Euclid 1999] المماسان للدائرتين $C(A,5)$ و $C(B,2)$ يتقاطعان بزاوية قياسها $90°$ كما هو مبين. ما طول AB ؟

(أ) 5 (ب) $5\sqrt{2}$ (ج) 7 (د) $7\sqrt{2}$



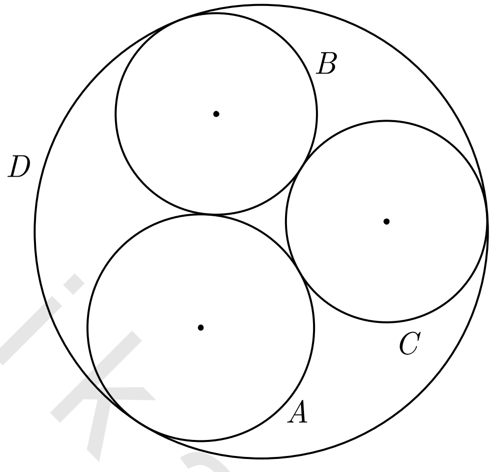
(٩٣) [Euclid 1998] في الشكل المرفق، $\overline{DC}$ قطر في الدائرة الكبيرة التي مركزها A و $\overline{AC}$ قطر في الدائرة الصغيرة التي مركزها B. $\overline{DE}$ مماس للدائرة الصغيرة عند F، $DC = 12$. ما طول DE ؟

(أ) $6\sqrt{2}$ (ب) $7\sqrt{2}$ (ج) $8\sqrt{2}$ (د) $9\sqrt{2}$

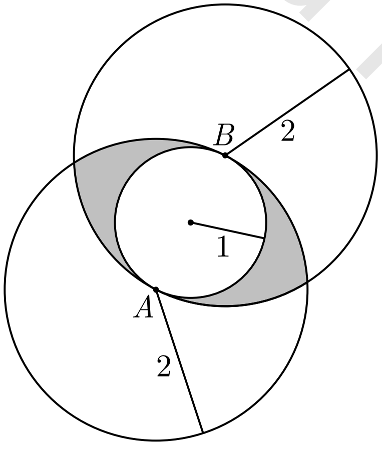


(٩٤) [AMC10A 2004] A، B، C ثلاث دوائر متماسة خارجياً وتمس الدائرة D داخلياً كما هو مبين في الشكل. الدائرتان B و C متطابقتان. الدائرة A نصف قطرها يساوي 1 وتمر بمركز الدائرة D. ما طول نصف قطر الدائرة B ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{7}{9}$ (د) $\frac{8}{9}$



(٩٥) [AMC10B 2004] دائرة نصف قطرها 1 تمس داخلياً دائرتين نصف قطر كل منهما 2 عند A و B حيث $\overline{AB}$ هو قطر الدائرة الصغيرة كما هو مبين. ما مساحة المنطقة المظللة ؟



(أ) $\frac{5}{3}\pi - 3\sqrt{2}$ (ب) $\frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

(ج) $\frac{8}{3}\pi - 3\sqrt{2}$ (د) $\frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) أ	(٢) د	(٣) ج	(٤) ب	(٥) ج
(٦) د	(٧) ب	(٨) د	(٩) ج	(١٠) د
(١١) د	(١٢) أ	(١٣) ب	(١٤) ج	(١٥) د
(١٦) ج	(١٧) أ	(١٨) ج	(١٩) ب	(٢٠) أ
(٢١) د	(٢٢) ب	(٢٣) د	(٢٤) د	(٢٥)ب
(٢٦) د	(٢٧) ج	(٢٨) ب	(٢٩) أ	(٣٠) ب
(٣١) ج	(٣٢) د	(٣٣) ب	(٣٤) د	(٣٥) أ
(٣٦) د	(٣٧) ب	(٣٨) أ	(٣٩) ج	(٤٠) أ
(٤١) ج	(٤٢) د	(٤٣) د	(٤٤) ج	(٤٥) أ
(٤٦) د	(٤٧) ج	(٤٨) ب	(٤٩) ج	(٥٠) ب
(٥١) ج	(٥٢) أ	(٥٣) أ	(٥٤) ج	(٥٥) ج
(٥٦) أ	(٥٧) د	(٥٨) ب	(٥٩) ب	(٦٠) د
(٦١) ب	(٦٢) د	(٦٣) ج	(٦٤) د	(٦٥) ج
(٦٦) ب	(٦٧) أ	(٦٨) ج	(٦٩) ب	(٧٠) د
(٧١) أ	(٧٢) ج	(٧٣) ب	(٧٤) أ	(٧٥) ب
(٧٦) ج	(٧٧) ب	(٧٨) ج	(٧٩) ب	(٨٠) د
(٨١) أ	(٨٢) ج	(٨٣) د	(٨٤) د	(٨٥) د
(٨٦) ج	(٨٧) د	(٨٨) د	(٨٩) ب	(٩٠) ب
(٩١) د	(٩٢) د	(٩٣) ج	(٩٤) د	(٩٥) ب