الفصل الثامن

فضاءات لوبيغ

obeikandi.com

obeikandl.com

الفصل الثامن
فضـاءات لوبيـغ

سوف ندرس في هذا الفصل بعض الفضاءات المعيّرة التامة $L^p(E,\Sigma,\mu)$، $(1\leq p\leq\infty)$، التي تلعب دورًا متميّزًا في التحليل الرياضي، المعادلات التفاضلية وكثير من الفروع الأخرى نظرًا لخواصها العديدة الهامة كالتمام، قابلية الفصل، الانعكاسية إلخ. كما نتطرّق إلى كثافة البعض من فضاءاتها الجزئية التي تلعب دورًا هامًّا في مبرهنات التقريب.

نفرض فيما يأتي أنّ (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريّ.

1- الفضاءات $\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$، $(0<p<\infty)$

نعرّف الفضاء $\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ أو اختصارا $\mathfrak{L}^p(E)$ إن لم يكن هنالك أيّ لُبس كالآتي:

$$\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)=\left\{f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma):\int_E|f|^p\,d\mu<\infty\right\}.$$

بتزويد $\mathfrak{L}^p(E)$ بالعمليتين:

$+:\mathfrak{L}^p(E)\times\mathfrak{L}^p(E)\to\mathfrak{L}^p(E)$ المعرّفة بِـ $(f,g)\mapsto f+g$

و $\bullet:\mathrm{K}\times\mathfrak{L}^p(E)\to\mathfrak{L}^p(E)$ المعرّفة بِـ $(\lambda,f)\mapsto\lambda\bullet f$،

(حيث $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) تصبح الثلاثيّة $\left(\mathfrak{L}^p(E),+,\bullet\right)$ فضاء متّجهات على الحقل K. بالتأكيد، نحصل بفضل المتباينة الجبرية

$$|x+y|^p \le 2^p\left(|x|^p+|y|^p\right)$$ ،

المحقّقة من أجل كلّ عدد حقيقي $p>0$ وكلّ عددين حقيقيين x و y،
على

$$\int_E |f+g|^p\,d\mu \le 2^p\left[\int_E |f|^p\,d\mu + \int_E |g|^p\,d\mu\right] < \infty$$ ،

من أجل كلّ عنصرين f و g من $\mathfrak{L}^p(E)$. وهذا يثبت أنّ $f+g$ هو كذلك عنصر من $\mathfrak{L}^p(E)$. أمّا باقي الخواص فهي بديهية ونتركها للقارئ للتأكد من صحّتها. تدعى عناصر $\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ **الدوال ذات الأسّ p قابلة للجمع على E.**

كما سبق لنا تعريف الدوال القابلة للجمع على E فإنّ الفضاء $\mathfrak{L}^1(E)$ هو بالضبط فضاء كلّ الدوال القابلة للجمع على E.

ملاحظة 01.8 : لاحظ جيّدًا أنّ تعريف الفضاء $\mathfrak{L}^p(E)$ لا ينصّ صراحة على قابلية قياس الدالة $|f|$ بل يفرض أنّ الدالة f قابلة للقياس مما يؤدّي إلى قابلية قياس $|f|$، ومن ثمّ التعريف الجيّد للتكامل $\int_E |f|^p\,d\mu$.

امثلة 02.8:

1) الدالة $f(x)=x$ عنصر من $\mathfrak{L}^p([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$، من أجل $0<p<\infty$.

2) لا تنتمي الدالة $f(x)=x$ إلى $\mathfrak{L}^p([0,\infty[,\mathcal{B}([0,\infty[),m)$، من أجل $0<p<\infty$.

3) الدالة $f(x)=e^{-x}$ تنتمي إلى $\mathfrak{L}^p([0,\infty[,\mathcal{B}([0,\infty[),m)$، من أجل $0<p<\infty$، بينما $f\notin\mathfrak{L}^p(]-\infty,0],\mathcal{B}(]-\infty,0]),m)$، من أجل $0<p<\infty$.

4) الدالة $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{[1,\infty[}(x)$ عنصر من الفضاء $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$، من أجل $2<p<\infty$، بينما $f\notin\mathfrak{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$، من أجل $0<p\leq 2$.

5) ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًّا و $f=\chi_A$، حيث $A\in\Sigma$ و $\mu(A)<\infty$، عندئذ f عنصر من $\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$، من أجل $0<p<\infty$. وبما أنّ $\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ فضاء متّجهات فإنّ

$$f=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k}\in\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)،$$

من أجل كلّ $\{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\Sigma$ بحيث $\mu(A_k)<\infty$، $(k=1,\dots,n)$، و $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathbb{R}$.

سوف نثبت الآن متباينة يونغ[1] (Young) ذات حدّين بطريقة تحليلية بحتة تختلف عن التي قدّمناها في التطبيق 55.6.

توطئة 03.8 [متباينة يونغ]: ليكن $a,b\in\mathbb{R}^+$، عندئذ من أجل كلّ زوج $(p,q)\in]1,\infty[\times]1,\infty[$ يحقّق $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فإنّ

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \qquad (1)$$

(يدعى q الأس المرافق لـ p)

إثبات: نعتبر الدالة $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ .

$$\varphi(x)=\frac{1}{p}x^p-x+\frac{1}{q}.$$

لدينا فورًا $\varphi'(x)=x^{p-1}-1$، إذن φ' سالبة تمامًا على الفترة $[0,1[$، موجبة تمامًا على الفترة $]1,+\infty[$ وأنّ $\varphi'(x)=0$ إذا وإذا فقط كان

[1] وليام هنري يونغ [Willian Henry Young] (1863-1942)

$x=1$. بما أنّ $\varphi''(1)>0$ عندئذ φ تدرك قيمتها الصغرى 0 عند النقطة $x=1$، وبالتالي الدالة φ موجبة على المجموعة $\mathbb{R}^+$، بالإضافة إلى أنّ

$$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \qquad (2)$$

من الواضح كذلك أنّ المتباينة (1) محققة عندما يكون أحد الحدّين a أو b معدومًا. نفرض إذن أنّ $a>0$ و $b>0$ ونضع $x=ab^{-q/p}$ لنحصل ممّا سبق على $\varphi\left(ab^{-q/p}\right)\geq 0$، أي

$$ab^{-q/p}\leq \frac{1}{p}a^p b^{-q}+\frac{1}{q}،$$

وبضرب الطرفين بـ b^q نجد

$$ab^{-q(-1+1/p)}=ab\leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

وهو المطلوب.■

ملاحظة 04.8: ينتج عن التكافؤ (2) أنّ طرفي المتباينة (1) يتساويان عندما يكون $x=ab^{-q/p}=1$، أي عندما تحصل المساواة $a^p=b^q$.
في الواقع متباينة يونغ ما هي إلاّ حالة خاصة من المتباينة العامة

$$ab\leq \int_0^a \Phi(x)dx+\int_0^b \Psi(x)dx،$$

حيث $\Phi:\mathbb{R}^+\to\overline{\mathbb{R}}$ دالة متّصلة ومتزايدة تمامًا بحيث $\Phi(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty}\Phi(x)=+\infty$ و $\Psi=\Phi^{-1}$.
يتساوى طرفا المتباينة إذا وإذا فقط كان $b=\Phi(a)$.
بأخذ $\Phi(x)=x^{p-1}$، من أجل $p>1$، نجد $\Psi(y)=y^{\frac{1}{p-1}}$، وبالتالي

$$ab\leq \int_0^a \Phi(x)dx+\int_0^b \Psi(x)dx=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

مبرهنة 05.8 [متباينة هولدر[2] # Hölder] : ليكن $1<p<\infty$، $f\in\mathcal{L}^p(E)$

---

[2] اوتو هولدر [Otto Ludwig Hölder] (1859–1937)

و $g\in\mathcal{L}^{q}(E)$ ، (q الأس المرافق لـ p)، عندئذ $fg\in\mathcal{L}^{1}(E)$ ، بالإضافة إلى أنّ

$$\int_E |fg|\,d\mu \le N_p(f)N_q(g) \qquad (3)$$

حيث نرمز بـ N_r للدّالّي (functional) $N_r(h)=\left(\int_E |h|^r\,d\mu\right)^{1/r}$ ، $1\le r<\infty$.

إثبات: إذا كان $N_p(f)N_q(g)=0$ فإنّ $f=0$ أو $g=0$ ، μ–تاك، ومنه $|fg|=0$ ، μ–تاك، ومن ثمّ $\int_E |fg|\,d\mu=0$. وهكذا فإنّ المتباينة (3) محقّقة.

نفرض الآن أنّ $N_p(f)N_q(g)\ne 0$. بأخذ $a=\dfrac{|f(x)|}{N_p(f)}$ و $b=\dfrac{|g(x)|}{N_p(g)}$ في المتباينة (1) نحصل على

$$ab=\frac{|f(x)|}{N_p(f)}\frac{|g(x)|}{N_p(g)}\le\frac{1}{p}\left\{\frac{|f(x)|^p}{N_p{}^p(f)}\right\}+\frac{1}{q}\left\{\frac{|g(x)|^q}{N_q{}^q(g)}\right\}،$$

من أجل كلّ x في E. وبالمكاملة على E نجد

$$\frac{1}{N_p(f)N_q(g)}\int_E |fg|\,d\mu\le\frac{1}{pN_p{}^p(f)}\left\{\int_E |f|^p\,d\mu\right\}+\frac{1}{qN_q{}^q(g)}\left\{\int_E |g|^q\,d\mu\right\}$$

$$=\frac{N_p{}^p(f)}{pN_p{}^p(f)}+\frac{N_q{}^q(g)}{qN_q{}^q(g)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

ومنه نستنتج المتباينة (3).

نلاحظ أخيرًا أنّ الطرف الأيمن لـ (3) منته لكون $|f|^p$ و $|g|^q$ قابلتين للجمع على E، وبالتالي فإنّ $fg\in\mathcal{L}^{1}(E)$.■

ملاحظة 06.8:

1) نسمّي المتباينة (3) بمتباينة كوشي–شوارز[3] (Cauchy-Schwarz) عندما

[3] هرمان امندوس شوارز [Hermann Amandus Schwarz] (1843–1921)

obeikandl.com

يكون $p=q=2$. إذن متباينة هولدر هي تعميم لمتباينة كوشي-شوارز إلى فضاءات لوبيغ.

2) يتساوى طرفا المتباينة (3) إذا وإذا فقط كانت الدالتان $|f|^p$ و $|g|^q$ متناسبتين μ-تاك في E.

سوف نثبت في المبرهنة التالية متباينة متلّثية بالغة الاهميّة في فضاءات لوبيغ وبفضلها نحصل في المرحلة الأولى على نصف معيار N_p على فضاء المتجهات $\mathfrak{L}^p(E)$ من أجل $1\le p<\infty$. لدينا

مبرهنة 07.8 [متباينة مينكوفسكي[4] Minkowski #]: ليكن f و g عنصرين من $\mathfrak{L}^p(E)$، $(1\le p<\infty)$، عندئذ

$$N_p(f+g)\le N_p(f)+N_p(g). \qquad (4)$$

إثبات: نفرض أوّلاً أنّ $p=1$، عندئذ

$$\begin{aligned} N_1(f+g) &= \int_E |f+g|\,d\mu \\ &\le \int_E (|f|+|g|)\,d\mu = \int_E |f|\,d\mu + \int_E |g|\,d\mu \\ &\le N_1(f)+N_1(g) \end{aligned}$$

ومنه المتباينة (4) محقّقة من أجل $p=1$.

ليكن الآن $1<p<\infty$. من الواضح أنّ (4) محقّقة عندما يكون $N_p(f+g)=0$. نفرض إذن أنّ $N_p(f+g)\neq 0$ ونضع $q=\frac{p}{p-1}$ (الأس المرافق لـ p). لدينا المتباينة التالية

$$|f+g|^p = |f+g|\,|f+g|^{p-1} \le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$$

---

[4]) هرمان مينكوفسكي [Hermann Minkowski] (1864-1909)

ومنه

$$N_p{}^p(f+g)=\int_E|f+g|^p\,d\mu$$
$$\leq \int_E|f||f+g|^{p-1}\,d\mu+\int_E|g||f+g|^{p-1}\,d\mu$$

وبتطبيق متباينة هولدر نحصل على ما يلي

$$N_p{}^p(f+g)$$
$$\leq N_p(f)\left\{\int_E|f+g|^{q(p-1)}\right\}^{1/q}+N_p(g)\left\{\int_E|f+g|^{q(p-1)}\right\}^{1/q}$$
$$\leq\left(N_p(f)+N_p(g)\right)\left\{\int_E|f+g|^p\right\}^{1/q}$$
$$=\left(N_p(f)+N_p(g)\right)N_p{}^{p-1}(f+g)$$

وبالتقسيم على $N_p{}^{p-1}(f+g)$ نحصل على (4) كما هو مطلوب.■

ملاحظة 08.8: 1) باعتبار الدالتين $f=\chi_{]0,\frac{1}{2}[}$ و $g=\chi_{]\frac{1}{2},1[}$ على $]0,1[$ نرى أنّ متباينة منكوفسكي غير صحيحة عندما $0<p<1$. راجع كذلك التمرين 15.

2) بتطبيق متباينة منكوفسكي نرى أنّ الدّالي $N_p:\mathfrak{L}^p(E)\rightarrow\mathbb{R}^+$ نصف معيار فقط على فضاء المتّجهات $\mathfrak{L}^p(E)$ وأنّه ليس معيارا لعدم استيفائه لخاصيّة هاوسدورف[5] (*Hausdorff*)، لأنّ $N_p(f)=0$ لا تستلزم أنّ $f=0$، بل نحصل على $f=0$، μ-تاك في E.

3) لا توجد على العموم علاقة مباشرة ما بين الفضاءات $\mathfrak{L}^p(E)$، فعلى سبيل المثال لدينا $\frac{1}{x}\in\mathfrak{L}^2(]1,\infty[)$ غير أنّ $\frac{1}{x}\notin\mathfrak{L}^1(]1,\infty[)$، ولدينا كذلك $\frac{1}{\sqrt{x}}\in\mathfrak{L}^1(]0,1[)$ بينما $\frac{1}{\sqrt{x}}\notin\mathfrak{L}^2(]0,1[)$.

---

[5] فيلكس هاوسدورف [Felix Hausdorff] (1868–1942)

نستطيع بفضل المبرهنة التالية ترتيب الفضاءات $\mathcal{L}^p(E)$ في فضاء قياس منته، لدينا

مبرهنة 09.8: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيا و $0<p<q<\infty$، عندئذ $N_p(f)\le N_q(f)\left(\mu(E)\right)^{(q-p)/pq}$، من أجل كلّ $f\in\mathcal{L}^q(E)$، ومنه $\mathcal{L}^q(E)\subset\mathcal{L}^p(E)$.

إثبات: لتكن $f\in\mathcal{L}^q(E)$، نضع $r=\frac{q}{p}>1$ و $r'=\frac{q}{q-p}$ (الأس المرافق لـ r). بتطبيق متباينة هولدر نجد

$$\int_E|f|^p d\mu\le\left(\int_E|f|^{pr} d\mu\right)^{1/r}\left(\int_E 1^{r'} d\mu\right)^{1/r'}$$
$$\le\left(\int_E|f|^q d\mu\right)^{p/q}\left(\mu(E)\right)^{(q-p)/q}$$

ومنه

$$N_p(f)\le N_q(f)\left(\mu(E)\right)^{(q-p)/pq}<\infty.$$

ينتج عن الانتماء $f\in\mathcal{L}^q(E)$ ومن كون القياس منتهيا أنّ الطرف الأيمن منته، وعليه فإنّ الطرف الأيسر هو بدوره منته، وبالتالي $f\in\mathcal{L}^p(E)$.

إذن $\mathcal{L}^q(E)\subset\mathcal{L}^p(E)$. ■

ملاحظة 10.8: يمكننا كتابة المتباينة $N_p(f)\le N_q(f)\mu(E)^{(q-p)/pq}$ كالآتي

$$\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\le\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}},$$

وهذا معناه أنّ الدالة $p\mapsto\widetilde{N}_p(f)=\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ متزايدة مع الملاحظة أنّ $\widetilde{N}_p(1)=1$.

من جهة أخرى، بتثبيت $g\in\mathfrak{L}^{q}$ نحصل على شكل خطّي $G(f)=\int_E fgd\mu$ متّصل على $\mathfrak{L}^{p}(E)$.

لازمة 11.8 : ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيا، لدينا من أجل كلّ $1\le r<\infty$، الاحتواء التالي $\mathfrak{L}^{r}(E)\subset\mathfrak{L}^{1}(E)$.

إثبات: الاحتواء واضح عندما $r=1$، نفرض إذن أنّ $1<r$ ونطبّق المبرهنة 09.8 من أجل $q=r$ و $p=1$. ■

تبيّن هذه اللازمة سعة الفضاء $\mathfrak{L}^{1}(E)$ مقارنة بالفضاءات $\mathfrak{L}^{p}(E)$ الأخرى وذلك في حالة القياس المنتهي. أمّا في الحالة غير المنتهية فالاحتواء السابق ليس صحيحًا على العموم. من جهة أخرى، قد يكون الاحتواء تامًّا كما يؤكّده المثال التالي:

مثال 12.8: نعتبر فضاء القياس $\left(]0,1],\mathcal{B}(]0,1]),m\right)$ و $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

من الواضح أنّ $f\in\mathfrak{L}^{1}(]0,1])$ بينما $f\notin\mathfrak{L}^{2}(]0,1])$. إذن، $\mathfrak{L}^{2}(]0,1])\subsetneq\mathfrak{L}^{1}(]0,1])$.

تعريف 13.8: لتكن E مجموعة غير خالية و $f:E\to\mathbb{R}$ (أو $\mathbb{C}$).

نــعرّف من أجل كلّ $0<p<\infty$ المجموع $\sum_{x\in E}|f(x)|^p$ كالآتي

$$\sum_{x\in E}|f(x)|^p=\sup\left\{\sum_{x\in A}|f(x)|^p : Card(A)<\infty \ \& \ A\subset E\right\}.$$

نعرّف الفضاء $\ell^{p}(E)$ كما يلي

$$\ell^{p}(E)=\left\{f:E\to\mathbb{R}(or\,\mathbb{C}): \sum_{x\in E}|f(x)|^p<\infty\right\},$$

عندما $0<p<\infty$،

$$\ell^{\infty}(E)=\left\{f:E\to\mathbb{R}(or\,\mathbb{C}): \sup_{x\in E}|f(x)|<\infty\right\},$$

عندما $p=\infty$.

نضع

$$|f|_p=\left(\sum_{x\in E}|f(x)|^p\right)^{1/p}،\ \text{عندما}\ 0<p<\infty$$

و $|f|_\infty=\sup_{x\in E}|f(x)|$، عندما $p=\infty$.

بإمكاننا إثبات المتباينتين التاليتين من أجل كلّ دالتين

$$f,g:E\to\mathbb{R}\ (\text{أو}\ \mathbb{C})$$

متباينة [هولدر] **14.8**: $|fg|_1\le|f|_p|g|_q$، **حيث** q **الأس المرافق للعدد** $1\le p\le\infty$.

متباينة [مينكوفسكي] **15.8**: $|f+g|_p\le|f|_p+|g|_p$، **من أجل** $1\le p\le\infty$.

نشير إلى أنّ الدّالي $|.|_p:\ell^p(E)\to\mathbb{R}^+$ المعرّف أعلاه معيار عـلى $\ell^p(E)$، من أجل $1\le p\le\infty$، وأنّ $\left(\ell^p(E),|.|_p\right)$ فضاء معيّر تام.

ملاحظة 16.8:

1) في الواقع الفضاء $\ell^p(E)$ ما هو إلاّ الفضاء $\mathfrak{L}^p(E,\mathcal{P}(E),\mu_c)$ حيث μ_c قياس العدّ.

2) سوف نرمز بـــ ℓ^p للفضاء $\ell^p(E)$ عندما $E=\mathbb{N}$. لدينا إذن

$$\ell^p=\left\{\{a_n\}_{n\ge0}\subset\mathbb{R}(or\ \mathbb{C}):\ \sum_{n\ge0}|a_n|^p<\infty\right\}،\ \text{عندما}\ 0<p<\infty،$$

و $\ell^\infty=\left\{\{a_n\}_{n\ge0}\subset\mathbb{R}(or\ \mathbb{C}):\ \sup_{n\ge0}|a_n|<\infty\right\}$، عندما $p=\infty$.

من السهل إثبات أنّ $\ell^p\subset\ell^q$، من أجل كلّ $1\le p<q\le\infty$، وهي

عكس الخاصيّة المحصّل عليها في المبرهنة 09.8 بالنسبة للقياسات المنتهية.

2- الفضاءات $L^p(E,\Sigma,\mu)$، $(1\leq p<\infty)$

نعرّف على الفضاء $\mathfrak{L}^p(E)$ علاقة التكافؤ التالية :

$[f,g\in\mathfrak{L}^p(E), f\mathfrak{R}g] \Leftrightarrow f=g \quad (E$ في μ-تاك$)$.

نرمز لفضاء القسمة $\mathfrak{L}^p(E)/\mathfrak{R}$ بِ $L^p(E,\Sigma,\mu)$ (نكتبه اختصارا $L^p(E)$) ، كما نرمز بِ $[f]$ لصفّ تكافؤ العنصر $f\in\mathfrak{L}^p(E)$. بتزويد $L^p(E)$ بالعمليتين:

$+:L^p(E)\times L^p(E)\to L^p(E)$ و $\cdot:K\times L^p(E)\to L^p(E)$ المعرّفتين بِ $[f]+[g]=[f+g]$ و $\lambda.[f]=[\lambda.f]$ ، $(\forall\lambda\in K)$، نحصل على فضاء متّجهات جديد $(L^p(E),+,.)$ على الحقل K ($=\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$) يتمتّع بخواص هامّة للغاية.

ملاحظة 17.8:

1) سوف نتعامل مع عناصر الفضاء $L^p(E)$ (مجموعة صفوف التكافؤ) كدوال عادية طالما نتعامل مع ممثّل اختياري لصفّ التكافؤ، لذلك نرمز لصفّ التكافؤ $[f]:=\{h\in\mathfrak{L}^p(E): f\mathfrak{R}h\}$ بِ f إن لم يكن هنالك أيّ لبس. لدينا على سبيل المثال

$\int_E fd\mu=\int_E gd\mu$ ، $\forall g\in[f]$.

2) خلافاً للدّالّي $N_p : \mathscr{L}^p(E) \to \mathbb{R}^+$ فإنّ الدّالّي

$$\|.\|_p : L^p(E) \to [0,\infty[$$

المعرّف بِ

$$\|[f]\|_p = \left(\int_E |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad \left(= \|f\|_p \right)$$

معيار على $L^p(E)$. لدينا حسب تعريف المعيار على فضاء القسمة ما يلي

$$.\|[f]\|_p = \inf\{N_p(g),\ g \in [f]\} \equiv N_p(f)$$

3) إنّ متباينة مينكوفسكي غير صحيحة من أجل $0 < p < 1$

(راجع الملاحظة 08.8)، وبالتالي فالدّالّي $\|.\|_p : L^p(E) \to [0,\infty[$ ليس معياراً من أجل $0 < p < 1$. والملفت للانتباه هو أنّ المتباينة التالية محققة:

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$$

من أجل كلّ $f,g \in L^p(E)$ و $0 < p < 1$.

وبوضع

$$،d(f,g) = \|f-g\|_p^p \quad \left(= \int_E |f-g|^p \, d\mu \right)$$

نحصل على مترية على $L^p(E)$، $0 < p < 1$، بحيث يكون الفضاء المتري $(L^p(E), d)$ تامًّا وقابلا للفصل. نشير إلى أنّ المترية d لا تنبثق عن أيّ معيار $\|.\|$ وإلا صار لدينا

$$،\|f\| = d(0,f) = \int_E |f|^p \, d\mu$$

ومن ثمّ

obeikandi.com

$\|\lambda f\| = \int_E |\lambda f|^p \, d\mu = \lambda^p \int_E |f|^p \, d\mu = \lambda^p \|f\|$، ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (أو $\mathbb{C}$)،

وهذا تناقض مع شرط تجانس المعيار.

تعريف 18.8: نقول عن متتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ من $\mathcal{L}^p(E)$ (على الترتيب، $\mathrm{L}^p(E)$) إنّها تتقارب بالوسط من المرتبة p إلى $f \in \mathcal{L}^p(E)$ (على الترتيب، $\mathrm{L}^p(E)$)، ونكتبها $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p(E)} f$ (على الترتيب، $f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p(E)} f$)، إذا حققت $\lim\limits_{n\to\infty} N_p(f_n - f) = 0$ (على الترتيب، $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$).

تنصّ المبرهنة التالية على أنّ الفضاءات $\mathrm{L}^p(E)$، $1 \leq p < \infty$، تامة بالنسبة للمعيار $\|.\|_p$، وهذا ما يفتقده الفضاءان $\mathcal{R}([a,b])$ و $C([a,b])$ بالنسبة للمعيار $\|.\|_p$ كما يتبيّن في المثال التالي:

مثال 19.8: على الرغم من الاحتواء التالي $C([a,b]) \subset \mathrm{L}^p([a,b])$، $1 \leq p < \infty$، إلاّ أنّ $C([a,b])$ ليس تامًّا بالنسبة إلى المعيار $\|.\|_p$.
لنعتبر على سبيل المثال على الفترة $J = [-1,1]$ المتتالية

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ 1 + nx, -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ 1, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (\forall n \geq 1).$$

من السهل التأكد من أنّ $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset C(J)$ وأنّها تحقق من أجل كلّ $m > n \geq 1$ المساواة

$$\|f_m - f_n\|_p = \left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(\frac{1}{n(p+1)}\right)^{1/p},$$

وعليه فإنّها متتالية كوشية. لدينا من جهة أخرى، $f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p} f = \chi_{[0,1]}$.

نفرض وجود $g \in C(J)$ بحيث $f_n \xrightarrow{\mathrm{L}^p} g$. ينتج فورًا عن وحدانية النهاية في $\mathrm{L}^p(J)$ أنّ $g = f$، وهذا يتناقض مع كون g متّصلة.

إذن الفضاء $\left(C(J),\|.\|_p\right)$ ليس تامًّا.

في الواقع إنّ تتمّة $C([a,b])$ بالنسبة للمعيار $\|.\|_p$ (وكذا فضاء الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان $\left(\mathcal{R}([a,b])\right)$ هي الفضاء $L^p([a,b])$.

مبرهنة 20.8 [ريس[6] - فيشر[7]] *(Riesz-Fischer)* : إنّ الفضاء المعيّر $\left(L^p(E),\|.\|_p\right)$ تام من أجل كلّ $1 \le p < \infty$.

إثبات: لتكن $\{f_n\}_{n\ge 1}$ متتالية كوشية في الفضاء $L^p(E)$، عندئذ من أجل كلّ عدد طبيعي k يوجد عدد طبيعي $m_k \ge 1$ بحيث

$$\|f_m - f_n\| \le \left(\tfrac{1}{2}\right)^k ,\quad (\forall m,n : m > n \ge m_k).$$

نعرّف متتالية الأعداد الطبيعية $\{n_j\}_{j\ge 1}$ كالآتي

$$n_1 = m_1 \text{ و } n_j = max\left(m_j, n_{j-1}+1\right) ,\quad (\forall j \ge 2).$$

نحصل بهذه الكيفية على $m_j \le n_j < n_{j+1}$ ، $(\forall j \ge 1)$، ومن ثمّ فإنّ

$$\left\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right\|_p \le \frac{1}{2^j} ,\quad (\forall j \ge 1).$$

نضع

$$S_n = \sum_{j=1}^{n}\left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right| ,\quad (\forall n \ge 1) \text{ و } S = \sum_{j=1}^{+\infty}\left|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right|.$$

بتطبيق متباينة مينكوفسكي للمجموع S_n (هذا ممكن بفضل مبدأ

---

[6] فريدريك ريس [Friedrich Riesz] (1880–1956)

[7] شارل البير فيشر [Charles Albert Fischer] (1884–1922)

الاستقراء) نحصل على

$$\|S_n\|_p \le \sum_{j=1}^{n} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p$$
$$\le \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1$$

وهذا من أجل كلّ $n \ge 1$. ومن جهة أخرى، بتطبيق متباينة فاتو على المتتالية $\{S_n{}^p\}_{n\ge1}$ نجد

$$\int_E \underline{\lim}_n S_n{}^p \, d\mu = \int_E S^p \, d\mu \le \underline{\lim}_n \int_E S_n{}^p \, d\mu \le 1 \text{ ،}$$

وعليه فإنّ الدالة S منتهية μ-تاك على E. إذن، السلسلة

$$f_{n_1} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right)$$

متقاربة مطلقًا μ-تاك على E. نضع $D = \{x \in E : S(x) < +\infty\}$ (لاحظ

أنّ D^c مجموعة مهملة)، ونعرّف الدالة $f : E \to \mathbb{R}$ كما يلي

$$f = \left\{f_{n_1} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right)\right\} \chi_D \text{ ،}$$

حيث χ_D الدّالة المميّزة للمجموعة الجزئية D. لدينا في الواقع

$$f = \lim_{k\to\infty} \left\{f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right)\right\} \chi_D$$
$$= \lim_{k\to\infty} \{f_{n_k}\} \chi_D$$

وعليه فإنّ f دالة قابلة للقياس. لنثبت الآن أنّ $f \in L^p(E)$. ينتج عن كون $\{f_n\}_{n\ge1}$ متتالية كوشية أنّ لكلّ عدد موجب $\varepsilon > 0$ يوجد عدد

obeikandl.com

طبيعي $N \geq 1$ بحث من أجل $n \geq N$ و $n_j \geq N$ (المعرّف أعلاه) فإنّ

$$\left\| f_n - f_{n_j} \right\|_p < \varepsilon \text{ .}$$

نُثبّت الآن $N \leq n$ ونطبّق متباينة فاتو على المتتالية $\left\{ \left| f_n - f_{n_j} \right|^p \right\}_{j \geq 1}$ لنحصل على

$$\int_E \underline{\lim}_j \left| f_n - f_{n_j} \right|^p d\mu = \int_E \left| f_n - f \right|^p d\mu \leq \underline{\lim}_j \int_E \left| f_n - f_{n_j} \right|^p d\mu \leq \varepsilon^p$$

ومنه نستنتج أنّ $f_n - f \in L^p(E)$، إذن $f = f_n - (f_n - f) \in L^p(E)$ (لأنّ $L^p(E)$ فضاء متّجهات و $f_n \in L^p(E)$).

لدينا من جهة أخرى حسب المتباينة السابقة

$$\left\| f_n - f \right\|_p = \left(\int_E \left| f_n - f \right|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \varepsilon \text{ ،} \quad (\forall n \geq N) \text{ ،}$$

وهذا يثبت أنّ $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$. إذن $L^p(E)$ فضاء معيّر تام.■

ملاحظة 21.8: إذا كـــان $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$ و $f_n \xrightarrow{L^p(E)} g$، فإنّ $f(x) = g(x)$، μ–تاك x في E، بينما $f = g$ كصفّ تكافؤ وذلك لوحدانية النهاية في فضاء معيّر (لأنّه فضاء انفصالي).

لازمة 22.8: تقبل كلّ متتالية كوشية في $L^p(E)$ متتالية جزئية متقاربة تقريبًا أينما كانت في E.

إثبات: بالرجوع إلى إثبات المبرهنة السابقة نجد أنّ المتتالية الجزئية $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ تحقّق $\lim_{k \to \infty} f_{n_k} = f$ على المجموعة D، مع التذكير أنّ D^c مهملة، وهذا يعني بالضبط أنّ f_{n_k} تتقارب إلى f، μ–تاك.■

$1 \le p < \infty$، متتالية رتيبة بحيث $\sup_{n\ge 1}\|f_n\|_p \le M < \infty$. عندئذ توجد دالة $f \in L^p(E)$ بحيث

$$f_n \to f \text{ ،} \mu\text{–تاك، } f_n \xrightarrow{L^p(E)} f \text{ و } \lim_{n\to\infty}\|f_n\|_p = \|f\|_p .$$

إثبات: نضع $g_n = f_n - f_1$ إذا كانت المتتالية $\{f_n\}_{n\ge 1}$ متزايدة و $g_n = f_1 - f_n$ إذا كانت $\{f_n\}_{n\ge 1}$ متناقصة. لدينا في كلتا الحالتين $g_n \ge 0$ و $\{g_n\}$ متتالية متزايدة. نحصل بمقتضى متباينة مينكوفسكي على

$$\|g_n\|_p = \|f_1\|_p + \|f_n\|_p \le 2M \text{ ،} (\forall n \ge 1) .$$

وبتطبيق مبرهنة التقارب الرتيب على المتتالية المتزايدة $\{g_n^p\}$ نحصل على $\lim_{n\to\infty}\int_E g_n^p d\mu = \int_E h d\mu \le (2M)^p < \infty$، حيث $h = \lim_{n\to\infty} g_n^p$ ، μ–تاك.

لدينا إذن $h \in L^1(E)$ و $h \ge 0$. بوضع $g = h^{1/p}$ نحصل على $g_n \to g$، μ–تاك، مع الملاحظة أنّ $g \in L^p(E)$.

باستعمال المتباينة

$$x^p + y^p \le (x+y)^p \text{ ،} (\forall x, y \ge 0) \text{ ،} (\forall p \ge 1)\text{،}$$

نجد $(g-g_n)^p \le g^p - g_n^p$ ، $(\forall n \ge 1)$، ومنه

$$0 \le \|g-g_n\|_p^p \le \|g\|_p^p - \|g_n\|_p^p \text{ ،} (\forall n \ge 1)\text{،}$$

وبالتالي

$$\lim_{n\to\infty}\|g-g_n\|_p = 0 . \qquad (5)$$

بوضع $f = f_1 + \varepsilon g$، حيث $\varepsilon = +1$ إذا كانت $\{f_n\}$ متزايدة و $\varepsilon = -1$ إذا كانت $\{f_n\}$ متناقصة، نحصل على $f_n \to f$ ، μ–تاك.

لدينا من جهة أخرى،

$$\|f\|_p = \|f_1 + \varepsilon g\|_p \le \|f_1\|_p + \|g\|_p < \infty \text{،}$$

ومنه $f \in L^p(E)$. نستنتج من المساواة $|f - f_n| = |g - g_n|$، $(\forall n \geq 1)$،
ومن (5) أنّ $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$، ومن ثمّ فإنّ $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$. ■

على غرار صيغة مبرهنة التقارب الرتيب في الفضاء $L^p(E)$ نقدّم مبرهنة التقارب المرجّح في $L^p(E)$.

مبرهنة 24.8 (التقارب المرجّح في $(L^p(E)$): لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(E)$، $1 \leq p < \infty$، متتالية بحيث $f_n \to f$، μ–تاك. نفرض وجود دالة $g \in L^p(E)$، $g \geq 0$ بحيث $|f_n(x)| \leq g(x)$، $(\forall n \geq 1)$، (μ–تاك).
عندئذ،

$f \in L^p(E)$، $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$ و $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$.

إثبات: بما أنّ $\{f_n\}$ متتالية ذات عناصر قابلة للقياس و $f_n \to f$، μ–تاك، عندئذ f دالة قابلة للقياس وتحقق $|f| \leq g$، μ–تاك، ومنه

$\|f\|_p \leq \|g\|_p < \infty$،

إذن $f \in L^p(E)$.

نضع $g_n = |f_n - f|^p$. من الواضح أنّ g_n دالة قابلة للقياس وأنّها تحقق المتباينة

$$|g_n| \leq 2^{p-1}\left(|f_n|^p + |f|^p\right) \leq (2g)^p \text{، } (\forall n \geq 1) \text{، } (\mu\text{–تاك})\text{،}$$

مع التذكير أنّ $(2g)^p \in L^1(E)$.
بمكاملة الطرفين نجد

$$\int_E |g_n| d\mu \leq \int_E (2g)^p d\mu < \infty \text{ ،}$$

ومنه $\{g_n\} \subset L^1(E)$. من جهة أخرى، لدينا $g_n \to 0$، μ–تاك، وهكذا فإنّ كلّ شروط مبرهنة التقارب المرجّح محققة وبتطبيق هذه الأخيرة على المتتالية $\{g_n\}$ نجد

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = 0 \text{ ،}$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$، وعليه فإنّ $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$. ■

3- الفضاء $\mathfrak{L}^{\infty}(E,\Sigma,\mu)$

يختلف تعريف الفضاء $\mathfrak{L}^{\infty}(E)$ تمامًا عن سابقيه بحيث لا نستعمل مفهوم التكامل في تعريفه كما هو الشأن بالنسبة إلى الفضاءات $\mathfrak{L}^{p}(E)$، $0<p<\infty$. وفيما يخصّ القياس فنفرض أنّه غير منحلّ وإلاّ فلا أهميّة لهذا الفضاء.

نقول عن دالة $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma,\mu)$ إنّها **محدودة تقريبًا أينما كانت في** E إذا وُجد $0\le M<\infty$ بحيث $|f(x)|\le M$ ، μ-تاك $x\in E$.

نعرّف الفضاء $\mathfrak{L}^{\infty}(E,\Sigma,\mu)$ (أو اختصارا $\mathfrak{L}^{\infty}(E)$ إن لم يكن هناك أيّ لُبس) كالآتي

$$\mathfrak{L}^{\infty}(E)=\{f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma,\mu):\exists M\ge 0:|f|\le M,\ \ \mu\text{- تاك}\}$$

أو أيضا

$$\mathfrak{L}^{\infty}(E)=\{f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma,\mu):N_{\infty}(f)<\infty\}$$

حيث $N_{\infty}(f)=\inf\left\{\sup_{x\notin A}|f(x)|,\ A\in\Sigma,\ \mu(A)=0\right\}$.

تدعى عناصر $\mathfrak{L}^{\infty}(E)$ **دوال محدودة أساسيًّا على** E.

إذا كانت $f\in\mathfrak{L}^{\infty}(E)$ فنسمّي عندئذ $N_{\infty}(f)$ **بالحد الأعلى الأساسي لِـ** f، نرمز له أحيانا بِـ $ess.sup|f|$.

لدينا $N_{\infty}(f)=\infty$ إذا وإذا فقط لا تقبل الدالة f حدًّا أساسيًّا على E.

مثال 25.8: كلّ دالة محدودة على E هي دالة محدودة أساسيًّا على E.

قضية 26.8 : لتكن $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma,\mu)$ **، توجد** $A\in\Sigma$ **مهملة (مرتبطة بـ** f**) بحيث**

1) $N_\infty(f)=\sup_{x\notin A}|f(x)|$ ،

2) $|f|\le N_\infty(f)$ ، μ−تاك،

3) $N_\infty(f)$ هي أصغر قيمة تكون من أجلها 2) محقّقة.

إثبات: 1) عندما $N_\infty(f)=\infty$ فبإمكاننا أخذ $A=\varnothing$ لنحصل على النتيجة، نفرض إذن أنّ $N_\infty(f)<\infty$. نستنتج من تعريف $N_\infty(f)$ ومن تعريف الحدّ الأدنى أنّ من أجل كلّ $n\ge 1$ تــوجد مــجموعة مهملة $A_n\in\Sigma$ بحيث

$$\sup_{x\notin A_n}|f(x)|<N_\infty(f)+\tfrac{1}{n}.$$

بوضع $A=\bigcup_{n\ge 1}A_n$ نجد أنّ $A\in\Sigma$ مع $\mu(A)=0$ ، ولدينا كذلك

$$N_\infty(f)\le\sup_{x\notin A}|f(x)|\le\sup_{x\notin A_n}|f(x)|<N_\infty(f)+\tfrac{1}{n},\quad(\forall n\ge 1)،$$

ممّا يؤدّي إلى $N_\infty(f)=\sup_{x\notin A}|f(x)|$.

2) نستنتج من 1) أنّ $|f(x)|\le N_\infty(f)$ من أجل كلّ $x\in A^c$ ، وبما أنّ A مهملة فهذا يعني أنّ $|f|\le N_\infty(f)$ ، μ−تاك.

3) ليكن α عددًا حقيقيًّا بحيث

$$|f|\le\alpha ،\ \mu\text{−تاك،}$$

عندئذ $\sup_{x\notin D}|f(x)|\le\alpha$ ، من أجل كلّ مجموعة مهملة من Σ. وعليه فإنّ

$$N_\infty(f)=\inf\left\{\sup_{x\notin A}|f(x)|,\ A\in\Sigma,\ \mu(A)=0\right\}\le\alpha ،$$

وهكذا فإنّ $N_\infty(f)$ هو أصغر عدد تكون من أجله الخاصيّة 2) محقّقة.■

باستطاعتنا الآن تعميم متباينة هولدر إلى الزوج $(p,q)=(1,\infty)$

كالآتي:

قضية 27.8 (متباينة هولدر): لتكن $f \in \mathcal{L}^1(E)$ و $g \in \mathcal{L}^\infty(E)$، عندئذ $fg \in \mathcal{L}^1(E)$ ، بالإضافة إلى أنّ

$$\int_E |fg| d\mu \leq N_1(f) N_\infty(g) \quad (6)$$

إثبات: من المتباينة $|g| \leq N_\infty(g)$، μ−تاك، نحصل على
$N_1(fg) = \int_E |f||g| d\mu \leq \int_E |f| N_\infty(g) d\mu = N_1(f) N_\infty(g) < \infty$،

ومن ثمّ فإنّ $fg \in \mathcal{L}^1(E)$. ■

لدينا القضية التالية:

قضية 28.8: من أجل كلّ f و g في $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ فإنّ
$N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

إثبات: إذا كان $N_\infty(f) = +\infty$ أو $N_\infty(g) = +\infty$ فإنّ المتباينة محققة، نفرض إذن أنّ $N_\infty(f) < +\infty$ و $N_\infty(f) < +\infty$. من المتباينتين $|f| \leq N_\infty(f)$، μ−تاك و $|g| \leq N_\infty(g)$، μ−تاك نرى أنّ
$|f+g| \leq |f| + |g| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$، μ−تاك،
ومنه $N_\infty(f+g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$. ■

قضية 29.8: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيا. إذا كانت $f \in \mathcal{L}^\infty(E)$، فإنّ

$$\lim_{p\to\infty} N_p(f) = N_\infty(f) \quad (7)$$

إثبات: نفرض أنّ $f \neq 0$، μ−تاك وإلاّ صارت النهاية المطلوبة بديهية.

نستنتج فورًا من المبرهنة 09.8 أنّ

$$\limsup_{p\to\infty} N_p(f) \leq N_\infty(f) \quad (8)$$

من جهة أخرى، من أجل كلّ $0 < \varepsilon < N_\infty(f)$، نعرّف المجموعة

غير المهملة $A=\{x:|f(x)|\geq N_\infty(f)-\varepsilon\}$. عندئذ

$$N_p(f)^p \geq \int_A |f|^p\, d\mu \geq \left(N_\infty(f)-\varepsilon\right)^p \mu(A) ،$$

ومنه

$$\left(N_\infty(f)-\varepsilon\right)\left(\mu(A)\right)^{1/p} \leq N_p(f) .$$

إذن

$$\left(N_\infty(f)-\varepsilon\right) \leq \liminf_{p\to\infty} N_p(f) ،$$

ينتج عن كون ε اختياريًّا أنّ

$$N_\infty(f) \leq \liminf_{p\to\infty} N_p(f) ، \qquad (9)$$

ونحصل بفضل المتباينتين (8) و(9) على المساواة (7).■

ملاحظة 30.8: هذه القضية هي على العموم غير صحيحة في فضاء غير منته، اعتبر على سبيل المثال دالة ثابتة (غير معدومة) على فترة غير محدودة من $\mathbb{R}$. نشير إلى أنّه بإمكاننا الحصول على نفس النتيجة في الحالة $\mu(E)=\infty$ وذلك بتعويض الشرط $\mu(E)<\infty$ بـ .
$f\in\mathfrak{L}^p(E)$ ، $(\forall p\in]0,\infty[)$.

4- الفضاء $L^\infty(E,\Sigma,\mu)$

نعرّف على $\mathfrak{L}^\infty(E)$ علاقة التكافؤ التالية

$$f,g\in\mathfrak{L}^\infty(E),\ f\mathfrak{R}g \Leftrightarrow f=g \quad \mu\text{–تاك،}$$

نرمز لفضاء القسمة $\mathfrak{L}^\infty(E)/\mathfrak{R}$ بِـ . $L^\infty(E,\Sigma,\mu)$ (أو اختصارا $L^\infty(E)$). نعرّف على $L^\infty(E)$ الدّالّي $\|\cdot\|_\infty : L^\infty(E)\to[0,\infty[$ كالآتي

$$\|f\|_\infty = ess.sup|f| \equiv inf\{M\geq 0 : |f|\leq M \quad \mu\text{–تاك،}\} .$$

تجدر الإشارة إلى أنّنا لا نستطيع على الإطلاق تعويض $\|f\|_\infty = ess.sup|f|$ بـ $\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$ من أجل ممثل اختياري لصفة التكافؤ f وإلاّ وجدنا قيمًا متباينة لقيمة الحد الأعلى حسب صيغة كلّ ممثل. لهذا السبب وعكس الفضاءات $L^p(E)$، $1\le p<\infty$، التي لا تتغيّر فيها قيمة التكامل من أجل أي ممثل لصفةٍ ما فإنّ

$$\|f\|_\infty = \inf_{h\in[f]}\sup_{x\in E}|h(x)|.$$

قضية 31.8: إنّ الدّالّي $\|.\|_\infty$ معيار على الفضاء $L^\infty(E)$.

إثبات: واضح أنّ $L^\infty(E)$ فضاء متّجهات وأنّه مهما تكن $f\in L^\infty(E)$ و $\lambda\in(\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C})$ فإنّ $\|f\|_\infty\ge 0$، $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$. لدينا من جهة أخرى، $\|0\|_\infty = 0$، وبغية إثبات أنّ $\|f\|_\infty = 0$ يستلزم أنّ $f=0$، نلاحظ أنّ من أجل كلّ $n\ge 1$ توجد مجموعة مهملة $A_n\in\Sigma$ بحيث $|f(x)|\le\frac{1}{n}$، $(\forall x\notin A_n)$. نضع $A=\bigcup\limits_{n\ge 1}A_n$، عندئذ

$A\in\Sigma$، $\mu(A)=0$ و $|f(x)|=0$، $(\forall x\notin A)$.

إذن $f=0$، μ-تاك، أي $f=0$ كعنصر (صف تكافؤ) من $L^\infty(E)$.

أخيرًا، ينتج عن القضية 28.8 أنّ

$$\|f+g\|_\infty\le\|f\|_\infty+\|g\|_\infty,\quad f,g\in L^\infty(E).$$

وهكذا فإنّ $\|.\|_\infty$ معيار على الفضاء $L^\infty(E)$.■

قضية 32.8: إنّ الفضاء المعيّر $\left(L^\infty(E),\|.\|_\infty\right)$ تام.

إثبات: لتكن $\{f_n\}_{n\ge 1}$ متتالية كوشية في الفضاء $L^\infty(E)$. من أجل $m,n\ge 1$ نضع

$$S_{m,n}=\{x\in E:\|f_m-f_n\|_\infty<|f_m(x)-f_n(x)|\}$$

و $.T_n=\{x\in E:\|f_n\|_\infty<|f_n(x)|\}$

بوضع $A=\left(\bigcup_{m,n\geq 1}S_{m,n}\right)\cup\left(\bigcup_{n\geq 1}T_n\right)$ نجد $A\in\Sigma$ و $\mu(A)=0$. لاحظ أنّ لكلّ $x\in A^c$ المتتالية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ كوشية في الفضاء المتري التام $\mathbb{R}$، ولتكن $f(x)$ نهايتها. بما أنّ A مهملة فيمكننا وضع على سبيل المثال $f(x)=0$ على A. إذن الدالة $f:E\to\mathbb{R}$ قابلة للقياس. يبقى لنا إثبات أنّ $f_n\to f$ في $L^\infty(E)$. بالتأكيد، ليكن $\varepsilon>0$، يوجد عدد طبيعي $N\geq 1$ بحيث $\|f_m-f_n\|_\infty<\varepsilon$، $(\forall m,n\geq N)$. إذن لكلّ $x\in A^c$ و $n\geq N$ مثبّتين فإنّ

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leq\|f_m-f_n\|_\infty<\varepsilon,\quad(\forall m\geq N)،$$

وعليه فإنّ

$$|f_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon,\quad(\forall x\in A^c),\quad(\forall n\geq N).$$

نستنتج فورًا أنّ $\|f_n-f\|_\infty\leq\varepsilon$، $(\forall n\geq N)$، وبما أنّ

$$\|f\|_\infty=\|f-f_N+f_N\|_\infty\leq\|f_N-f\|_\infty+\|f_N\|_\infty<\infty،$$

فهذا يثبت أنّ $f\in L^\infty(E)$ و $f_n\to f$ في $L^\infty(E)$. إذن $L^\infty(E)$ فضاء معيّر تام.■

ملاحظة 33.8: يتبيّن من الإثبات السابق أنّ المتتالية الكوشية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ تؤول μ-تأك إلى f، وأنّها تتقارب بانتظام على A^c إلى نفس النهاية f، حيث A المجموعة المهملة المعرّفة في الإثبات.

5- مبرهنات الكثافة وقابلية الفَصل

ليكن $(E,\|.\|)$ فضاءً معيّرا و E_0 مجموعة جزئية من E. نقول عن E_0

إنّها **كثيفة** في E إذا وُجد من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ و $f \in E$ عنصر $f_0 \in E_0$ بحيث $\|f - f_0\| < \varepsilon$.

كما نقول عن E إنّها **قابلة للفصل** (*separable*) إذا وجدت مجموعة جزئية E_1 قابلة للعد وكثيفة في E.

نستهلّ مبرهنات الكثافة بالنتيجة التالية:

مبرهنة 34.8: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $\mathcal{S}$ فضاء صفوف الدوال البسيطة القابلة للقياس على E بحيث
$(\forall \theta \in \mathcal{S})$ ، $\mu(\{x \in E : \theta(x) \neq 0\}) < \infty$.
عندئذ $\mathcal{S}$ كثيف في $(L^p(E,\Sigma,\mu), \|\cdot\|_p)$، من أجل $1 \leq p < \infty$.

إثبات: لنثبت أوّلاً أنّ $\mathcal{S} \subset L^p(E)$. لتكن $\theta \in \mathcal{S}$، عندئذ $\theta = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{A_k}$ من أجل ثوابت حقيقية مختلفة ليست كلّها معدومة $\{c_k\}_{k=1}^{m}$ و $\{A_k\}_{k=1}^{m} \subset \Sigma$. لدينا من جهة أخرى

$$\int_E |\theta|^p d\mu \leq \int_E \left(m^p \sum_{k=1}^{m} |c_k|^p \chi_{A_k} \right) d\mu$$

$$= m^p \sum_{k=1}^{m} |c_k|^p \int_E \chi_{A_k} d\mu = m^p \sum_{k=1}^{m} |c_k|^p \mu(A_k)$$

$$\leq m^p \mu(\{\theta \neq 0\}) \sum_{k=1}^{m} |c_k|^p < \infty$$

لأنّ $A_k \subset \{x \in E : \theta(x) \neq 0\}$ و $\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right)^p \leq m^p \sum_{k=1}^{m} \alpha_k^p$، من أجل $\alpha_k \geq 0$ و $p \geq 1$. إذن $\mathcal{S} \subset L^p(E)$.

لتكن $f \in L^p(E)$، نفرض على سبيل التيسير أنّ $f \geq 0$، لأنّ كلّ دالة f يمكن كتابتها على الشكل $f = f^+ - f^-$. نعرّف

$B_n=\{x\in E: \frac{1}{n}\le f(x)\le n\}$ من أجل $n\ge 1$.

لاحظ أنّ B_n مجموعات قابلة للقياس وتحقّق $B_n\subset B_{n+1}$، $(\forall n\ge 1)$، بالإضافة إلى أنّ $\bigcup_{n\ge 1} B_n=\{x\in E: f(x)>0\}$.

من جهة أخرى لدينا

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)^p \mu(B_n)=\int_{B_n}\left(\tfrac{1}{n}\right)^p d\mu\le\int_{B_n}|f|^p\,d\mu\le\int_E|f|^p\,d\mu ،$$

ومنه $\mu(B_n)\le n^p\|f\|_p^p<\infty$، $(\forall n\ge 1)$.

بوضع $\theta_n=f\chi_{B_n}$، $(\forall n\ge 1)$، نحصل على f $\theta_n\to f$، μ–تأك، عندما $n\to\infty$، مع الملاحظة أنّ $\mu(\{x\in E: f(x)=\infty\})=0$. لدينا من جهة ثانية

$$\int_E|\theta_n|^p\,d\mu=\int_{B_n}|f|^p\,d\mu\le\int_E|f|^p\,d\mu<\infty ،$$

وعليه فإنّ $\{\theta_n\}\subset L^p(E)$. ينتج عن المتباينة $\theta_n\le f$ على E أنّ $|f-\theta_n|^p\le f^p$، $(\forall n\ge 1)$. بما أنّ $f^p\in\mathfrak{L}^1(E)$ فيكفي تطبيق مبرهنة التقارب المرجّح على $\{|f-\theta_n|^p\}_{n\ge 1}$ للحصول على

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f-\theta_n|^p d\mu=\int_E\lim_{n\to\infty}|f-\theta_n|^p\,d\mu=0 ،$$

وهذا يعني أنّ من أجل كلّ عدد موجب $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $N_0\ge 1$ بحيث $\|\theta_n-f\|_p<\varepsilon$، $(\forall n\ge N_0)$.

نستنتج من تعريف θ_n أنّ $0\le\theta_n\le n$، $(\forall n\ge 1)$، أي أنّ كلّ عنصر θ_n هو محدود على E. وعليه فإنّ من أجل العدد الطبيعي N_0 يوجد بمقتضى **المبرهنة الأساسية للتقريب 33.4** متتالية من الدوال البسيطة القابلة للقياس $\{s_n\}_{n\ge 0}$ وعدد طبيعي $N_1\ge 1$ بحيث

$$\|s_n-\theta_{N_0}\|_\infty=\sup_{x\in E}|s_n(x)-\theta_{N_0}(x)|<\varepsilon ،\ (\forall n\ge N_1) ،$$

ومنه $\|s_n\|_\infty<\varepsilon+\|\theta_{N_0}\|_\infty\le\varepsilon+N_0<\infty$، $(\forall n\ge N_1)$.

ليكن $m_0=\max\{N_0,N_1\}$، بوضع $\sigma_{m_0}=s_{m_0}\chi_{B_{m_0}}$، نحصل على دالة

obeikandl.com

بسيطة قابلة للقياس تحقق

$$\mu\left(\left\{x\in E:\sigma_{m_0}(x)\neq 0\right\}\right)\leq \mu\left(B_{m_0}\right)<\infty\text{،}$$

$$\left\|\sigma_{m_0}\right\|_\infty\leq\left\|s_{m_0}\right\|_\infty<\infty\text{،}$$

إضافة إلى

$$\begin{aligned}
\left\|f-\sigma_{m_0}\right\|_p &\leq \left\|f-\theta_{N_0}\right\|_p+\left\|\theta_{N_0}-\sigma_{m_0}\right\|_p\\
&<\varepsilon+\left(\int_E\left|\theta_{N_0}-\sigma_{m_0}\right|^p d\mu\right)^{1/p}\\
&=\varepsilon+\left(\int_E\left|f\chi_{B_{N_0}}-s_{m_0}\chi_{B_{m_0}}\right|^p d\mu\right)^{1/p}\\
&=\varepsilon+\left(\int_{B_{m_0}}\left|\theta_{N_0}-s_{m_0}\right|^p d\mu\right)^{1/p}\\
&=\varepsilon+\left\|\theta_{N_0}-s_{m_0}\right\|_\infty \mu^{1/p}\left(B_{m_0}\right)\\
&=\varepsilon+\varepsilon\mu^{1/p}\left(B_{m_0}\right)=\left(1+\mu^{1/p}\left(B_{m_0}\right)\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

وهكذا فإنّ S كثيف في $L^p(E)$، من أجل $1\leq p<\infty$.■

مبرهنة 35.8: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس. إنّ فضاء الدوال القابلة للقياس المحدودة على E كثيف في $\left(L^p(E,\Sigma,\mu),\|\cdot\|_p\right)$، من أجل $1\leq p<\infty$.

إثبات: لتكن $f\in L^p(E)$، بما أنّ $f=f^+-f^-$ فيكفي اعتبار $f\geq 0$.
نعرّف المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ كالآتي:

$$f_n=\min\{f,n\}\text{، }(\forall n\geq 1)\text{.}$$

لدينا فورًا $0\leq (f_n)^p\leq f^p$ و $0\leq (f-f_n)^p\leq f^p$، $(\forall n\geq 1)$، ومنه $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^p(E)$، إضافة إلى أنّ المتتالية $\left\{(f-f_n)^p\right\}_{n\geq 1}$ محدودة من الأعلى بالدالة القابلة للجمع f^p. بما أنّ $f_n\xrightarrow{ت} f$، عندما $n\to\infty$، عندئذ $(f-f_n)^p\xrightarrow{ت} 0$.

obeikandi.com

$\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس والمحدودة. إذن، من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ توجد دالة قابلة للقياس ومحدودة f_N و $N = N(\varepsilon) \geq 1$، بحيث $\|f_N - f\|_p < \varepsilon$، وهو المطلوب.■

قضية 36.8: إنّ الفضاء الجزئي $\mathfrak{L}^p(E) \cap \mathfrak{L}^q(E)$ كثيف في $\mathfrak{L}^p(E)$ من أجل كلّ $1 \leq p, q < \infty$.

إثبات: ليكن $p \geq 1$ و $f \in \mathfrak{L}^p(E)$ بحيث $f \geq 0$. نعرّف من أجل $n \geq 1$ المجوعات الجزئية $B_n = \{x \in E : \frac{1}{n} \leq f(x) \leq n\}$. لدينا حسب إثبات المبرهنة 32.8 $B_n \subset B_{n+1}$، $(\forall n \geq 1)$ و $\mu(B_n) \leq n^p \|f\|_p^p < \infty$، $(\forall n \geq 1)$. بوضع $\theta_n = f\chi_{B_n}$، $(\forall n \geq 1)$، نحصل على $\theta_n \to f$، μ−تأك، عندما $n \to \infty$، مع الملاحظة أنّ $\mu(\{x \in E : f(x) = \infty\}) = 0$. لدينا من جهة ثانية $\{\theta_n\} \subset \mathfrak{L}^p(E)$، ولدينا من أجل كلّ $1 \leq q < \infty$ ما يلي

$$\int_E |\theta_n|^q \, d\mu = \int_{B_n} |f|^q \, d\mu \leq \int_{B_n} n^q d\mu = n^q \mu(B_n) < \infty،$$

إذن، $\{\theta_n\} \subset \mathfrak{L}^q(E)$، وبالتالي فإنّ $\{\theta_n\} \subset \mathfrak{L}^p(E) \cap \mathfrak{L}^q(E)$.

ينتج عن المتباينة $\theta_n \leq f$ على E أنّ $|f - \theta_n|^p \leq f^p$، $(\forall n \geq 1)$.

أخيرًا، بما أنّ $f^p \in \mathfrak{L}^1(E)$ و $\theta_n \to f$، μ−تأك، عندما $n \to \infty$، فإنّنا نحصل بفضل مبرهنة التقارب المرجّح على

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f - \theta_n|^p d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} |f - \theta_n|^p \, d\mu = 0.$$

إذن، من أجل كلّ عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N_0 \geq 1$ بحيث $\|\theta_n - f\|_p < \varepsilon$، $(\forall n \geq N_0)$.■

ملاحظة 37.8: نستنتج من قضية 36.8 أنّ الفضاء $\mathfrak{L}^1(E) \cap \mathfrak{L}^2(E)$ كثيف

onbeikanali.com

في $\mathfrak{L}^2(E)$، ولهذه النتيجة أهمّية بالغة في نظريّة محوّلة فورييه[8] (Fourier) حيث نمرّ بفضل مبرهنة الكثافة من الفضاء الجزئي $\mathfrak{L}^1(E)\cap\mathfrak{L}^2(E)$ إلى الفضاء $\mathfrak{L}^2(E)$.

ملاحظة 38.8: نذكّر القارئ أنّ مساواة عنصرين من $C(E)$ (فضاء الدوال المتّصلة على E) أو من $C_c(E)$ **(فضاء الدوال المتّصلة على E ذات حامل متراص في E) تقريبًا أينما كانا** يستلزم أنّهما متساويان على E. لدينا إذن، $\underset{x\in E}{ess.sup}|f(x)| = \underset{x\in E}{sup}|f(x)|$، من أجل كلّ $f\in C(E)$.

لدينا نتيجة الكثافة التالية:

مبرهنة 39.8: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس يحقق شروط مبرهنة لوسين 40.4، عندئذ يكون الفضاء $C_c(E)$ كثيف في $L^p(E)$ من أجل $1\le p<\infty$.

إثبات: لتكن $f\in L^p(E)$. نرى من المبرهنة **34.8** أنّه من أجل كلّ عدد $\varepsilon>0$ توجد (صف) دالة بسيطة قابلة للقياس θ بحيث

$\mu(\{x\in E:\theta(x)\neq 0\})<\infty$ و $\|f-\theta\|_p<\varepsilon$.

بوضع $A=\{x\in E:\theta(x)\neq 0\}$ نحصل على $\theta=0$ على A^c.

بتطبيق مبرهنة لوسين **40.4**، من أجل ε و θ السابقين، نجد دالة $\tilde{f}\in C_c(E)$ بحيث $\mu(\{x\in E:\tilde{f}(x)\neq\theta(x)\})<\varepsilon^p$، إضافة إلى أنّ

$$\|\tilde{f}\|_\infty=\underset{x\in E}{sup}|\tilde{f}(x)|\le\|\theta\|_\infty.$$

بوضع $B=\{x\in E:\tilde{f}(x)\neq\theta(x)\}$ نرى أنّ $\mu(B)<\varepsilon^p$ و $\tilde{f}=\theta$ على B^c، وعليه فإنّ

[8] جان جوزيف فورييه [Jean Joseph Fourier] (1768–1830)

$$\left\|f-\tilde{f}\right\|_p \le \left\|f-\theta\right\|_p + \left\|\theta-\tilde{f}\right\|_p \le \varepsilon + \left(\int_E \left|\theta-\tilde{f}\right|^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$\le \varepsilon + \left(\int_B \left|\theta-\tilde{f}\right|^p d\mu + \underbrace{\int_{B^c} \left|\theta-\tilde{f}\right|^p d\mu}_{=0}\right)^{1/p}$$

$$\le \varepsilon + \left(\int_B \left(2\|\theta\|_\infty\right)^p d\mu\right)^{1/p}$$

$$= \varepsilon + 2\|\theta\|_\infty \mu^{1/p}(B) = \left(1+2\|\theta\|_\infty\right)\varepsilon$$

وهكذا فإنّ الفضاء $C_c(E)$ كثيف في $L^p(E)$. ■

ملاحظة 40.8: 1) بأخذ $E=[a,b]$ نجد أنّ $C_c([a,b]) \equiv C([a,b])$ كثيف في $L^p(a,b) := L^p([a,b],\mathcal{L},m)$، من أجل $1 \le p < \infty$، وبما $C([a,b]) \subset \mathcal{R}([a,b])$، عندئذ $\mathcal{R}([a,b])$ هو بدوره كثيف في $L^p([a,b])$.

2) يعتبر الفضاء $\left(L^p(E), \|\cdot\|_p\right)$، $(1 \le p < \infty)$، تتمّة الفضاء الجزئي $C_c(E)$ لأنّ $C_c(E) \subset L^p(E)$، $L^p(E)$ فضاء معيّر تام و $\overline{C_c(E)} = L^p(E)$. وبالخصوص، عندما $(E,\Sigma,\mu) = (\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ و $p=1$ فإنّ الفضاء $\left(L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1\right)$ المؤلف من (صفوف) الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ هو التتمة الطبيعية للفضاء المعيّر غير التام $\left(C_c(\ \ ), \|\cdot\|_1\right)$. وهكذا فإنّ تكامل لوبيغ هو التعميم الطبيعي لتكامل ريمان على $C_c(\mathbb{R})$.

3) نشير إلى أنّ الفضاء الجزئي $C_c(E)$ ليس كثيفاً في $L^\infty(E)$ (من أجل $p=\infty$).

سوف نفرض فيما يأتي أنّ Ω مجموعة جزئية مفتوحة وغير خالية من $\mathbb{R}^n$.

تمهيدًا لإثبات كثافة فضاء كلّ الدوال القابلة للاشتقاق بلا تناه وذات حامل متراص في Ω، والذي نرمز له بـ $C_c^\infty(\Omega)$، في $L^p(\Omega)$ نعتبر أسرة من الدوال $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon\geq 0}\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ بحيث

$\varphi_\varepsilon\geq 0$، $supp(\varphi_\varepsilon)\subset\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leq\varepsilon\}$ و $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon dx=1$،

حيث أنّ $|x|^2=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2$ المعيار الإقليدي في $\mathbb{R}^n$.

نسمّي هذه الأسرة بأسرة الدوال **المُنظِّمة** *(regularizing functions)* أو *(mollifiers)*. نعرّف من أجل كلّ دالة قابلة للقياس $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ **مُنتظمة** *(regularized function)* f، ونرمز لها بـ f_ε، الدالة

$$f_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy=\int_{\mathbb{R}^n}f(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy$$ ،

(نفرض أنّ التكامل معرّف تعريفا جيّدًا).

توطئة 41.8: لتكن $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$، عندئذ $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$ و $supp(f_\varepsilon)\subset S_\varepsilon=supp(f)+\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leq\varepsilon\}$.

إثبات: نستعمل في الاحتواء الأول مبرهنة الاشتقاق تحت رمز التكامل مع دستور ليبنيز للاشتقاق، أمّا فيما يخصّ الاحتواء الثاني فيكفي اعتبار عنصر $x\in S_\varepsilon^c$ للحصول على $f_\varepsilon(x)=0$ أي $x\notin supp(f)$، ومنه النتيجة المطلوبة.■

توطئة 42.8: 1) **إذا كانت $f\in C(\mathbb{R}^n)$، فإنّ f_ε تؤول بانتظام إلى f على كلّ مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}^n$، عندما $\varepsilon\to 0$.**

2) **إذا كانت $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$، $1\leq p<\infty$، عندئذ $f_\varepsilon\xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)}f$، عندما $\varepsilon\to 0$.**

إثبات: 1) لتكن $K\subset\mathbb{R}^n$ مجموعة جزئية متراصة مثبّتة. من أجل كلّ $\eta>0$ يوجد عدد $\delta>0$، متعلّق بـ K و η، بحيث

$|f(x-y)-f(x)|<\eta$، $(\forall x\in K)$، $(\forall y:|y|<\delta)$.

لدينا من جهة أخرى،

$$f_\varepsilon(x)-f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\big(f(x-y)-f(x)\big)\varphi_n(y)dy$$
$$=\int_{B(0,\varepsilon)}\big(f(x-y)-f(x)\big)\varphi_n(y)dy$$

حيث $B(0,\varepsilon)=\{y:|y|<\varepsilon\}$، وعليه فإنّ

$|f_\varepsilon(x)-f(x)|\leq\eta\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon dx=\eta$، $(\forall x\in K)$، $(\forall\varepsilon:\varepsilon<\delta)$.

إذن $\sup\limits_{x\in K}|f_\varepsilon(x)-f(x)|\leq\eta$، ومنه $f_\varepsilon\xrightarrow{unif}f$ على K.

2) ليكن $\eta>0$، يوجد $g\in C_c(\mathbb{R}^n)$ بحيث $\|f-g\|_p<\eta$، ولدينا حسب الجزء 1) من المبرهنة $g_\varepsilon\xrightarrow{u}g$ على كلّ مجموعة جزئية متراصة من $\mathbb{R}^n$. لدينا من جهة أخرى، $supp g_\varepsilon\subset\bar{B}(0,\varepsilon)+supp g\subset K_0$، حيث K_0 مجموعة جزئية متراصة مثبّتة. إذن

$$\int_{\mathbb{R}^n}|g_\varepsilon(x)-g(x)|^p dx=\int_H|g_\varepsilon(x)-g(x)|^p dx$$
$$\leq\left\{\sup_{x\in H}|g_\varepsilon(x)-g(x)|^p\right\}\lambda_n(H)$$

حيث $H=K_0\cup supp(g)$ (مجموعة جزئية متراصة)، إذن

$g_\varepsilon\xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)}g$، عندما $\varepsilon\to 0$. لنستعمل الكتابة التالية

$$f_\varepsilon-f=(f-g)_\varepsilon+(g_\varepsilon-g)+(g-f)\text{،}\qquad(10)$$

حيث

$$f_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}f(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy$$

و $$(f-g)_\varepsilon(x)=\int_{\mathbb{R}^n}(f-g)(y)\varphi_\varepsilon(x-y)dy.$$

لدينا بمقتضى متباينة هولدر من أجل $1<p<\infty$ و q أسّه المرافق ما يلي

$$|(f-g)_\varepsilon(x)|\leq\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)dy\right\}^{1/q}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)|f-g|^p(y)dy\right\}^{1/p}$$
$$\leq\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)|f-g|^p(y)dy\right\}^{1/p}$$

وبتطبيق مبرهنة فوبنيه نجد

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|(f-g)_\varepsilon(x)\right|^p \le \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)|f-g|^p(y)dydx$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}|f-g|^p(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x-y)dx\right)dy$$
$$=\int_{\mathbb{R}^n}|f-g|^p(y)dy=\|f-g\|_p^p$$

نستخلص أخيرًا من العلاقة (10) وممّا سبق أنّ
$$\|f_\varepsilon-f\|_p\le 2\|f-g\|_p+\|g_\varepsilon-g\|_p$$
$$\le 2\eta+\|g_\varepsilon-g\|_p$$

ومنه
$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\|f_\varepsilon-f\|_p\le 2\eta \text{، } (\forall\eta>0)\text{،}$$

وهذا يؤدّي إلى $f_\varepsilon\xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)}f$. ■

مبرهنة 43.8: لتكن $\Omega\neq\varnothing$ مجموعة مفتوحة اختيارية في $\mathbb{R}^n$، عندئذ الفضاء $C_c^\infty(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ من أجل $1\le p<\infty$.

إثبات: ليكن $f\in L^p(\Omega)$ و $\eta>0$، توجد حسب المبرهنة 39.8 $g\in C_c(\Omega)$ بحيث $\|f-g\|_{p,\Omega}<\frac{\eta}{2}$.

نضع $\tilde{g}=g\chi_\Omega$، عندئذ $\tilde{g}\in L^p(\mathbb{R}^n)$ ، لدينا بفضل التوطئة 42.8 $\tilde{g}_\varepsilon\xrightarrow{L^p(\mathbb{R}^n)}\tilde{g}$، عندما $\varepsilon\to 0$. من جهة أخرى، من أجل ε صغير بالقدر الكافي فإنّه

$$supp\,\tilde{g}_\varepsilon\subset\overline{B}(0,\varepsilon)+supp\,g\subset\Omega\text{.}$$

أخيرًا، إذا رمزنا بـ h_ε لاقتصار $\tilde{g}_\varepsilon$ على Ω فإنّنا نحصل على $h_\varepsilon\in C_c^\infty(\Omega)$، من أجل ε صغير بالقدر الكافي، إضافة إلى أنّ

$$\|h_\varepsilon-g\|_{p,\Omega}<\tfrac{\eta}{2}\text{، عندما } \varepsilon\to 0\text{.}$$

وهكذا فإنّ

obeikandi.com

$$\begin{aligned}\|h_\varepsilon - f\|_{p,\Omega} &= \|(h_\varepsilon - g) + (g - f)\|_{p,\Omega} \\ &\le \|h_\varepsilon - g\|_{p,\Omega} + \|g - f\|_{p,\Omega} < \eta\end{aligned}$$

إذن من أجل كلّ $f \in L^p(\Omega)$ و $\eta > 0$، يوجد $h_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ بحيث

$\|h_\varepsilon - f\|_{p,\Omega} < \eta$، وهذا يثبت أنّ $C_c^\infty(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$. ■

نذكر فيما يلي بمبرهنة ستون[9]– فايرشتراس [10] [Stone-Weierstrass] الشهيرة الخاصة بتقريب الدوال المتّصلة بكثيرات الحدود.

تعريف 44.8: لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة جزئية مفتوحة. نعرّف فضاء الدوال الحقيقية المحدودة والمتّصلة بانتظام على Ω بـ $C(\overline{\Omega})$. إنّ الفضاء $C(\overline{\Omega})$ تام بالنسبة إلى المعيار $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$.

ملاحظة 45.8: على العموم عناصر الفضاء $C(\Omega)$ ليست محدودة ولذلك فإنّ $C(\overline{\Omega}) \subsetneq C(\Omega)$، لدينا على سبيل المثال $C(\overline{\mathbb{R}^n}) \subsetneq C(\mathbb{R}^n)$.

مبرهنة 46.8 [ستون– فايرشتراس]: لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ مجموعة جزئية مفتوحة ومحدودة. عندئذ، من أجل كلّ عدد $\varepsilon > 0$ ودالة $f \in C(\overline{\Omega})$ يوجد كثير حدود P ذو معاملات حقيقية بحيث

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ ،} \quad (\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega).$$

(أي أنّ مجموعة كثيرات الحدود كثيفة في $C(\overline{\Omega})$)

(للإطّلاع على هذه المبرهنة وتعميمها نوجّه القارئ إلى كتب التحليل الدّالي التي أسهبت فيها من كلّ الجوانب).

---

[9]) مارشل هارفي ستون [Marshall Harvey Stone] (1903–1989)

[10]) كارل تيودور فايرشتراس [Karl Theodor Weierstrass] (1815–1897)

obeikandi.com

هذه الآن بعض التطبيقات لمبرهنات الكثافة. نستهلّها أوّلاً بقابلية فصل الفضاء $L^p(E)$ من أجل E فترة متراصة من $\mathbb{R}$، ثمّ من أجل مجموعة جزئية مفتوحة ومحدودة من $\mathbb{R}^n$.

مبرهنة 47.8: لتكن $J=[a,b]$ فترة منتهية من $\mathbb{R}$، عندئذ الفضاءات $L^p(J,\mathcal{L}_J,m)$ قابلة للفصل من أجل $1\le p<\infty$. ($\mathcal{L}_J := J\cap\mathcal{L}$)

إثبات: ليكن $f\in L^p(J)$ و $\varepsilon>0$، توجد حسب مبرهنة كثافة $C_c(J)$ في $L^p(J)$ دالة $g\in C_c(J)$ بحيث $\|f-g\|_p\le\frac{\varepsilon}{2}$. مــن أجل الدالة g يوجد حسب مبرهنة ستون-فايرشتراس كثير حدود φ (ذو معاملات نسبية بحيث

$$\|g-\varphi\|_\infty\le\tfrac{\varepsilon}{2}(b-a)^{-1/p}،$$

ومنه

$$\begin{aligned}\|g-\varphi\|_p&=\left(\int_J|g-\varphi|^p\,dx\right)^{1/p}\\&\le(b-a)^{1/p}\|g-\varphi\|_\infty<\tfrac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

إذن

$$\|f-\varphi\|_p\le\|f-g\|_p+\|g-\varphi\|_p<\tfrac{\varepsilon}{2}+\tfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

وهكذا فإنّ مجموعة كثيرات الحدود ذات المعاملات النسبية على J كثيفة في $L^p(J)$.■

مبرهنة 48.8: لتكن $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ مجموعة جزئية مفتوحة ومحدودة، عندئذ الفضاءات $L^p(\Omega,\mathcal{L}_\Omega,\lambda_n)$ قابلة للفصل من أجل $1\le p<\infty$. ($\mathcal{L}_\Omega:=\Omega\cap\mathcal{L}$)

إثبات: نعرّف من أجل $k=1,2,\ldots$ المجموعات المتراصة

$$\Omega_k=\left\{x\in\Omega:|x|\le k\ \&\ dist(x,\partial\Omega)\ge\tfrac{1}{k}\right\}،$$

حيث نرمز بـــ $dist(x,\partial\Omega)$ لمسافة x إلى $\partial\Omega$ (حد Ω) المعرّفة

بـ $dist(x,\partial\Omega)=\inf\{|x-y|, y\in\partial\Omega\}$.

لتكن $\mathcal{P}$ مجموعة كثيرات الحدود على $\mathbb{R}^n$ ذات معاملات نسبية، نضع $\mathcal{P}_k=\{\varphi\chi_{\Omega_k}:\varphi\in\mathcal{P}\}$، $(\forall k\geq 1)$.

إنّ المجموعة $\mathcal{D}=\bigcup_{k\geq 1}\mathcal{P}_k$ قابلة للعد، ولدينا $\mathcal{P}_k$ كثيف في $C(\Omega_k)$ بمقتضى مبرهنة ستون- فايرشتراس. ليكن $\varepsilon>0$ و $f\in L^p(\Omega)$، توجد $g\in C_c(\Omega)$ بحيث $\|f-g\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$.

من جهة أخرى، إذا كان $\frac{1}{k}<dist(supp\,g,\partial\Omega)$، يوجد عندئذ $\varphi\in\mathcal{P}_k$ بحيث $\|g-\varphi\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}|\Omega_k|^{-1/p}$، حيث $|\Omega_k|=\lambda_n(\Omega_k)$.

إذن

$$\|g-\varphi\|_p=\left(\int_{\Omega_k}|g-\varphi|^p\,dx\right)^{1/p}$$
$$\leq|\Omega_k|^{1/p}\|g-\varphi\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$$

ومنه

$$\|f-\varphi\|_p\leq\|f-g\|_p+\|g-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

نستخلص أنّ المجموعة القابلة للعد $\mathcal{D}$ كثيفة في $L^p(\Omega)$، وبالتالي الفضاء $L^p(\Omega)$ قابل للفصل.■

ملاحظة 49.8: إنّ الفضاء $L^\infty(\Omega)$ ليس قابلاً للفصل. بالفعل، نعتبر على سبيل المثال الفترة $\Omega=]a,b[$ من $\mathbb{R}$. نفرض جدلاً أنّ الفضاء $L^\infty(\Omega)$ قابل للفصل، توجد عندئذ مجموعة جزئية قابلة للعد وكثيفة $E\subset L^\infty(\Omega)$. من أجل كلّ $x\in\Omega$ نضع

$$B_x=\left\{f\in L^\infty(\Omega):\|f-f_x\|_\infty<\frac{1}{3}\right\},$$

حيث $f_x=\chi_{]a,x[}$. بما أنّ $\|f_x-f_y\|_\infty=1$، $(\forall x,y\in\Omega:x\neq y)$، عندئذ

$$B_x\cap B_y=\varnothing,\ (\forall x,y\in\Omega:x\neq y),$$

أي $\{B_x\}_{x\in\Omega}$ هي أسرة من المفتوحات ذات عناصر منفصلة مثنى

مثنى. نرفق الآن بكلّ $x\in\Omega$ عنصرا φ_x من $E\cap B_x$ (غير خالية لأنّ E كثيفة في $L^{\infty}(\Omega)$) لنحصل على دالة متباينة من Ω في E، وبالتالي تكون الفترة Ω قابلة للعد، وهذا تناقض. إذن $L^{\infty}(\Omega)$ ليس قابلاً للفصل.

بإمكاننا كذلك إثبات أنّ الفضاء ℓ^{∞} غير قابل للفصل وذلك باعتبار المجموعة S_{01} لكلّ المتتاليات $\{u_n\}_{n\geq 1}\subset\ell^{\infty}$ بحيث $u_n=0$ أو $u_n=1$. إنّ S_{01} غير قابلة للعد، ولدينا
$|v_n-u_n|_{\infty}=1$، $(\forall\{u_n\},\{v_n\}\in S_{01})$ بحيث $\{u_n\}\neq\{v_n\}$.
نستنتج فورًا أنّ الفضاء ℓ^{∞} غير قابل للفصل.

نختم هذا الفصل بهذه المبرهنة التي تبيّن العلاقة ما بين الفضاءات الهيلبرتية القابلة للفصل ذات بُعدٍ غير منته والفضاء البسيط ℓ^2.

مبرهنة 50.8: **كلّ فضاء هيلبرتي قابل للفصل ذي بعد غير منته هو متقايس مع الفضاء ℓ^2.**

إثبات: يكون فضاء هيلبرتي H متقايسًا مع ℓ^2 إذا وجد **تشاكل خطي** *(isomorphism)* $T:H\to\ell^2$ بحيث
$\|Tx\|_{\ell^2}=\|x\|_H$، $(\forall x\in H)$،
بالإضافة إلى أنّ $\langle Tx,Ty\rangle_{\ell^2}=\langle x,y\rangle_H$، $(\forall x,y\in H)$.

لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ قاعدة متعامدة ومتجانسة لِـ H و $\{e_n\}_{n\geq 1}$ القاعدة الطبيعية لِـ ℓ^2، عندئذ،

$$x=\sum_{n\geq 1}\langle x,f_n\rangle f_n \text{ و } \|x\|_H^2=\sum_{n\geq 1}\left|\langle x,f_n\rangle\right|^2\text{، }(\forall x\in H).$$

إنّ الدالة $T:H\to\ell^2$ المعرّفة بِـ

$$Tx=\sum_{n\geq 1}\langle x,f_n\rangle e_n\text{، }(\forall x\in H)\text{،}$$

تشاكل خطّي يحقق الخاصيتين:

أ) $\langle Tx,Ty\rangle_{\ell^2}=\langle x,y\rangle_H$، $(\forall x,y\in H)$،

ب) $\|Tx\|_{\ell^2}^2 = \sum_{n\geq 1} |\langle x, f_n\rangle|^2 = \|x\|_H^2$ ، $(\forall x \in H)$ ،

وهو المطلوب.■

مسألة محلولة

1) لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ ، أثبت أنّ

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+h)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx \text{ ، } (\forall h \in \mathbb{R}).$$

2) لتكن $f \in L^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ ، $1 \leq p < \infty$. إذا رمزنا بـ f_h للدالة $f_h(x) = f(x-h)$ ، $(\forall x \in \mathbb{R})$ (تدعى إنزياح f)، أثبت أنّ الدالة $h \mapsto f_h$ المعرّفة من $\mathbb{R}$ نحو $L^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ متصلة بانتظام.

3) استنتج أنّ الدالة $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّفة بـ

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)g(x)dx$$

متصلة على $\mathbb{R}$ ، حيث $f \in L^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ و $g \in L^q(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ ، (q الأس المرافق لـ p).

الحل:

1) لتكن $A \in \mathcal{L}$ ، عندئذ

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_A(x+h)dx = \int_{\mathbb{R}} \chi_{A-h}(x)dx = m(A-h)$$
$$= m(A) = \int_{\mathbb{R}} \chi_A(x)dx$$

وهذا يعني أنّ العلاقة محققة مـن أجل $f=\chi_A$. بما أنّ $f=f^+-f^-$ فـيكفي اعتبار الحالة $f\geq 0$. توجد بـمقتضى المبرهنة الأساسية للتقريب متتالية متزايدة $\{\theta_n\}_{n\geq 1}\subset \mathbb{S}^+(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ بحيث $\theta_n \xrightarrow{s} f$، عندما $n\to\infty$. نـفرض أنّ $\theta_n=\sum_{k=1}^{N_n} c_{k,n}\chi_{A_{k,n}}$، عندئذ

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x+h)dx &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty}\theta_n(x+h)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\theta_n(x+h)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n} c_{k,n}\int_{\mathbb{R}}\chi_{A_{k,n}}(x+h)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{N_n} c_{k,n}\int_{\mathbb{R}}\chi_{A_{k,n}}(x)dx\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\theta_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)dx\end{aligned}$$

2) ينتج عـن كـثافة فـضاء الدوال المتّصلة ذات حـامل مـتراص $C_c(\mathbb{R})$ في $L^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$، $(1\leq p<\infty)$ أنّ من أجل كلّ $\varepsilon>0$ توجد $g\in C_c(\mathbb{R})$ بحيث $\|f-g\|_p<\varepsilon$. بما أنّ g ذات حـامل متراص، يوجد عـندئذ $M>0$ بحيث $g(x)=0$، $(\forall x\notin]-M,M[)$. من جهة أخرى، ينتج عن كون g متّصلة بانتظام وجود $\delta\in]0,M[$ (متعلق بـ ε) بـحيث $|g(u)-g(v)|<\varepsilon$ طالما كان $|v-u|<\delta$، و منه

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|g(x-v)-g(x-u)|^p dx &= \int_{[S-M,T+M]}|g(x-v)-g(x-u)|^p dx\\ &\leq \varepsilon^p(2M+T-S)<\varepsilon^p(2M+\delta)<3M\varepsilon^p\end{aligned}$$

حيث $S=\min(u,v)$ و $T=\max(u,v)$. إذن $\|g_v-g_u\|_p<(3M)^{1/p}\varepsilon$، وبالتالي

$$\begin{aligned}\|f_v-f_u\|_p &= \|(f_v-g_v)+(g_v-g_u)+(g_u-f_u)\|_p\\ &\leq \|(f-g)_v\|_p+\|g_v-g_u\|_p+\|(g-f)_u\|_p\end{aligned}$$

بتطبيق 1) لـ $|f|^p$ و $|g|^p$ (لإنّهما قابلتان للجمع على $\mathbb{R}$) نجد

$$\left\|(g-f)_u\right\|_p=\left\|(f-g)_v\right\|_p=\|f-g\|_p$$ ،

وعليه فإنّ

$$\|f_v-f_u\|_p\le 2\|f-g\|_p+\|g_v-g_u\|_p<2\varepsilon+(3M)^{1/p}\varepsilon$$

من أجل كلّ u و v تحققان $|v-u|<\delta$. وهذا يثبت أنّ الدالة $h\mapsto f_h$ متّصلة بانتظام من $\mathbb{R}$ نحو $L^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$.

3) ليكن $y,h\in\mathbb{R}$. لدينا من جهة حسب 2) $\lim\limits_{h\to 0}\left\|f_{(-h)}-f\right\|_p=0$،

ومن جهة أخرى نحصل بفضل متباينة هولدر ومن 1) على

$$\begin{aligned}|\varphi(y+h)-\varphi(y)|&\le\int_{\mathbb{R}}|f(x+y+h)-f(x+y)|.|g(x)|dx\\&\le\left\|f_{(-h)}-f\right\|_p\|g\|_q\end{aligned}$$

ومن ثمّ فإنّ

$$\lim_{h\to 0}|\varphi(y+h)-\varphi(y)|=0.$$

وهذا يثبت أنّ الدالة φ متّصلة على $\mathbb{R}$.

تمارين مقترحة

01 ليكن $a,b\in\mathbb{R}^+$، أثبت أنّ من أجل كلّ عدد موجب تمامًا ε وكلّ زوج $(p,q)\in]1,\infty[\times]1,\infty[$ بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ فإنّ

$$ab\le\varepsilon\frac{a^p}{p}+\varepsilon^{-\frac{q}{p}}\frac{b^q}{q}.$$

02 إلى أيّ فضاء من الفضاءات $\mathfrak{L}^p(\mathbb{R})$ تنتمي الدوال $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ الآتية:

1) $f(x)=\ell n\left(1+e^{-|x|}\right)$ ،

2) $f(x)=|x|^m g^{(n)}(x)$ ، حيث $m,n\in\mathbb{N}^*$ ، و $g\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ يحقّق $|x|^k\left|g^{(j)}(x)\right|<\infty$ ، $(\forall k\in\mathbb{N},\forall j\in\mathbb{N})$ ، $(\forall x\in\mathbb{R})$ ،

3) $f(x)=x^\alpha\chi_{[1,\infty[}(x)$ حيث $\alpha>0$.

03 ليكن $1\le p<q\le\infty$. قارن بين الفضائين $\mathcal{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ و $\mathcal{L}^q(E,\Sigma,\mu)$ من أجل فضاءات القياس التالية:

1) $(E,\Sigma,\mu)=\left(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu_c\right)$ حيث μ_c قياس العدّ.

2) $(E,\Sigma,\mu)=\left(\mathbb{R},\mathcal{P}(\mathbb{R}),\delta_a\right)$ حيث δ_a قياس ديراك عند النقطة $a\in\mathbb{R}$ المعرّف بِ $\delta_a(A)=1$ ، عندما $a\in A$ ، و $\delta_a(A)=0$ ، عندما $a\notin A$.

04 1) إذا كانت $f,g\in\mathcal{L}^p(E)$ ، $1\le p\le\infty$ ، أثبت أنّ $min(f,g), max(f,g)\in\mathcal{L}^p(E)$.

2) أوجد أسرة $\{f_i\}_{i\in J}\in\mathcal{L}^p(E)$ بحيث $\sup\limits_{i\in J} f_i\notin\mathcal{L}^p(E)$.

05 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا. نقول عن عنصرين $f,g\in L^2(E)$ إنّهما متعامدان، ونكتب $f\perp g$ ، إذا حققا العلاقة التالية:

$$<f,g>=\int_E f\bar{g}d\mu=0 .$$

1) أثبت صحّة مساواة فيثاغورث[11] [Pythagoras] التالية:

$$\|f+g\|_2^2=\|f\|_2^2+\|g\|_2^2 ،$$

من أجل كلّ $f,g\in L^2(E)$ بحيث $f\perp g$.

2) أثبت صحّة المساواة التالية:

$$\|f+g\|_2^2+\|f-g\|_2^2=2\|f\|_2^2+2\|g\|_2^2 ، \left(\forall f,g\in L^2(E)\right) ،$$

[11]) فيثاغورث [Pythagoras] (572 -492 ق.م.)

(تدعى متطابقة متوازي الأضلاع).

06 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس بحيث $\mu(E)=1$ و $f,g:E\to[0,+\infty]$ دالتين قابلتين للقياس.

أثبت أنّ $fg\geq 1$ ، μ–تأك يستلزم أنّ

$$\left(\int_E fd\mu\right)\left(\int_E gd\mu\right)\geq 1 .$$

07 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا و $1\leq p<\infty$. برهن على أنّ

$$\mu\left(\left\{x\in E:|f(x)|>\alpha\right\}\right)\leq\left(\|f\|_p/\alpha\right)^p ،$$

من أجل كلّ $\alpha>0$ و $f\in L^p(E)$.(تدعى متباينة *Bienaymé-Chebyshev*)

08 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا و $f:E\to\mathbb{R}$.

1) أثبت المتباينة التالية

$$\left(\int_E|f|d\mu\right)^p\leq\left(\int_E|g|d\mu\right)\left(\int_E\frac{|f|^q}{|g|^{q/p}}d\mu\right)^{p/q} ،$$

من أجل كلّ دالة قابلة للقياس $g:E\to\mathbb{R}$ بحيث $|g|>0$ و $1<p,q<\infty$ أسّان مترافقان.

2) أثبت في الفضاء $(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ المتباينة التالية

$$\left(\int_{\mathbb{R}}|f|dx\right)^2\leq 2\left(\int_{\mathbb{R}}e^{|x|}|f|^2dx\right) ،$$

ثمّ استنتج الاستلزام التالي

$$e^{|x|/2}f\in\mathcal{L}^2(\mathbb{R})\Rightarrow f\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) .$$

09 أثبت أنّه يتساوى طرفا متباينة هولدر إذا وإذا فقط كانت $|f|^p$ و $|g|^q$ متناسبتين μ–تأك في E .

10 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا و α ، β ، p و q أعدادًا موجبة تمامًا. إذا كان $f\in\mathcal{L}^p(E)$ و $g\in\mathcal{L}^q(E)$ ، فلأيّ $\mathcal{L}^r(E)$ فضاء تنتمي

الدالة $|f|^{\alpha}|g|^{\beta}$؟

11 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا، $f\in\mathcal{L}^{p}(E)$ و $g\in\mathcal{L}^{q}(E)$، حيث $p,q\in]0,\infty[$.

1) أثبت أنّ $N_r(fg)\le N_p(f)N_q(g)$، من أجل r يحقّق $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$.

2) استنتج أنّ $fg\in\mathcal{L}^{r}(E)$.

ليكن الآن $p,q\in]1,\infty[$ بحيث $p+q\le pq$، نفرض أنّ $\{f_n\}_{n\ge1}\subset L^p(E,\Sigma,\mu)$ و $\{g_n\}_{n\ge1}\subset L^q(E,\Sigma,\mu)$ بحيث $f_n\xrightarrow{L^p}f$ و $g_n\xrightarrow{L^q}g$.

3) أوجد الفضاء المناسب الذي تتقارب فيه المتتالية $\{f_ng_n\}_{n\ge1}$.

12 (تعميم متباينة هولدر) ليكن $p_1,p_2,\ldots,p_n\in]1,\infty[$ بحيث $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}=1$.

أثبت المتباينة التالية:

$$\int_E|f_1f_2\ldots f_n|d\mu\le\|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\ldots\|f_n\|_{p_n}$$،

من أجل كلّ $f_1,f_2,\ldots,f_n\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$.

<u>مساعدة</u>: استدلّ بالاستقراء على n.

13 أثبت الاحتواء $\mathcal{L}^{p}(E)\cap\mathcal{L}^{q}(E)\subset\mathcal{L}^{r}(E)$ وذلك من أجل كلّ ثلاثية (p,q,r) بحيث $1\le p\le r\le q\le\infty$.

14 ليكن $1\le p\le q\le\infty$. أثبت أنّ $\ell^{p}\subset\ell^{q}$ و $|x|_q\le|x|_p$، من أجل كلّ $x\in\ell^{p}$.

15 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا و $0<p<1$. نضع $q=-\frac{p}{1-p}$. أثبت ما يلي:

1) إذا كانت $f\in\mathcal{L}^{p}(E)$ و $g\in\mathcal{L}^{q}(E)$ فإنّ

$$\int_E |fg|\,d\mu \le \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}\left(\int_E |g|^q\,d\mu\right)^{1/q}$$ ،

2) إذا كانت $f,g \in \mathcal{L}^p(E)$ فإنّ

$$\left(\int_E (|f|+|g|)^p\,d\mu\right)^{1/p} \le \left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |g|^p\,d\mu\right)^{1/p}.$$

16 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيًا، $p \in [1,\infty[$ و $f : E \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس. نضع من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^*$،

$$A_n = \{x \in E :\ n-1 \le |f(x)| < n\}.$$

أثبت التكافؤ التالي

$$f \in \mathcal{L}^p(E) \iff \sum_{n\ge 1} n^p \mu(A_n) < \infty.$$

17 ليكن $1 \le p \le \infty$، $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و $g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$. أثبت أنّ الدالة $y \mapsto f(x-y)g(y)$ عنصر من $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$، تقريبًا من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$. لمثل هذه القيم للمتغيّر x نعرّف الدالة

$$x \mapsto f*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

(يدعى ضرب إلتفاف f و g) (convolution product).

أثبت أنّ $f*g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ و $\|f*g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_p$.

18 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس بحيث $\mu(E)=1$ ولتكن $f \in \mathcal{L}^1(E)$.
نضع $\alpha = \int_E |f|\,d\mu$.

أ) بيّن أنّ من أجل كلّ $p \in [1,\infty[$ الدالة فإنّ

$F_p = \left(1+|f|^p\right)^{1/p} \in \mathcal{L}^1(E)$، وأنّ $\int_E F_p\,d\mu \le 1+\alpha$.

ب) بتطبيق متباينة جنسان [Jensen] أثبت أنّ

$$\left(1+\alpha^p\right)^{1/p} \le \int_E F_p\,d\mu.$$

19 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس بحيث $\mu(E)=1$ و $f : E \to \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس. نفرض وجود $p_0 > 0$ بحيث $\int_E |f|^{p_0}\,d\mu < \infty$.

1) بيّن أنّ الدالة $g:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ المعرّفة بِ $g(x)=\dfrac{a^x-1}{x}$ (حيث $a>0$ عدد مثبّت) متزايدة، ثمّ أوجد $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

2) أثبت أنّ $\lim\limits_{p\to0^+}\left(\int_E|f|^p\,d\mu\right)^{1/p}=e^{\int_{E_0}Log|f|\,d\mu}$، حيث $E_0=\{x\in E: f(x)\neq0\}$.

20 لتكن $f\in L^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ و $g\in L^q(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$، حيث p و q أسّان مترافقان ومنتهيان.

1) أثبت أنّ $m(\lambda A)=|\lambda|m(A)$ ، $(\forall\lambda\in\mathbb{R}),(\forall A\in\mathcal{L})$،

2) بـيّن أنّ $\|g\|_q=\sqrt[q]{|\lambda|}\,\|g(\lambda x)\|_q$ ، $(\forall\lambda\in\mathbb{R}^*)$،

3) أثبت أنّ

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f(x)g(\lambda x)dm=0\text{ ،}\qquad(*)$$

4) إذا فرضنا وجود $a\in\mathbb{R}^*$ بحيث

$$g(x+a)=-g(x)\text{ ، }(\forall x\in\mathbb{R})\text{،}$$

أثبت أنّ النتيجة (*) تبقى محقّقة من أجل الزوج $(p,q)=(1,\infty)$.

21 1) لتكن $f\in\mathfrak{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ ، $(1\le p<\infty)$.
أثبت أنّ النهاية $\lim\limits_{|x|\to\infty}f(x)$ معدومة في حالة وجودها.

2) لتكن $g(x)=\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ ، ($\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبية).

أثبت أنّ $g\in\mathfrak{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ بينما $\lim\limits_{|x|\to\infty}g(x)$ غير موجودة.

22 لتكن $\{f_n\}_{n\ge1}\subset L^p(E,\Sigma,\mu)$ متتالية كوشية بحيث $f_n(x)\to f(x)$ ، μ-تاك. أثبت أنّ $f\in L^p(E)$ و $f_n\xrightarrow{L^p(E)}f$.

23 لتكن $\{f_n\}_{n\ge1}\subset\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ ، $1\le p<\infty$، بحيث $f_n\to f$ ، μ-تاك، مع $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$. أثبت تكافؤ القضيتين:

أ) $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n - f|^p \, d\mu = 0$ ،

ب) $f \in \mathcal{L}^p(E)$ و $\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n|^p \, d\mu = \int_E |f|^p \, d\mu$.

24 أثبت أنّ الفضاء $C_c(\mathbb{R})$ ليس كثيفًا في $L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$.

<u>مساعدة</u>: اعتبر الدالة المحدودة

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

ثمّ بيّن أنّه لا توجد $\{f_n\}_{n\ge 1} \subset C_c(\mathbb{R})$ بحيث $f_n \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} f$.

25 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا، $1 \le p < \infty$
و $\{f_n\}_{n\ge 1} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$.
أثبت المتباينة التالية (متباينة مينكوفسكي المعمّمة):

$$N_p\left(\sum_{n\ge 1} |f_n|\right) \le \sum_{n\ge 1} N_p(f_n) .$$

26 لتكن $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$.
استنتج من متباينتي هولدر و مينكوفسكي أنّ

1) $$\left|\sum_{n=1}^\infty a_n b_n\right| \le \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^q\right)^{1/q}$$

من أجل كلّ أسّين مترافقين $1 < p,q < \infty$.

2) $$\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n + b_n|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^p\right)^{1/p}$$

من أجل $1 \le p < \infty$.

<u>مساعدة</u>: اعتبر الحالتين المنتهية وغير المنتهية للطرف الأيمن للمتباينتين 1) و2).

27 ليكن $1 < p < \infty$ و $f \in C_c(\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^+)$. نعرّف

$$\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_{]0,x[}f(y)dy \text{ ، } (0<x<\infty).$$

1) أثبت أنّ $\|\varphi\|_p \le \frac{p}{p-1}\|f\|_p$ ،

2) استنتج أنّ الدالة $f \mapsto \varphi$ تقبل تمديدًا متّصلا من $L^p(\mathbb{R}_+^*)$ نحو $L^p(\mathbb{R}^+)$ ، حيث $L^p(\mathbb{R}_+^*) := L^p(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^* \cap \mathcal{L}, m)$.

3) بيّن بمثال أنّه لا يمكن تعويض الثابت $\frac{p}{p-1}$ في السؤال 1) بثابت أصغر منه.

28 من أجل كلّ $p,q \in [1,\infty[$ نعرّف الفضاء التالي:

$$\Lambda^{p,q} = \left\{ f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) : f+\hat{f} \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^+),\ f-\hat{f} \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^+) \right\}$$

حيث $\hat{f}$ معرّفة بِ : $\hat{f}(x)=f(-x)$ ، $(\forall x \in \mathbb{R})$.

1) أثبت أنّ $\Lambda^{p,q} \cap \Lambda^{q,p} = \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^q(\mathbb{R})$ ،

2) استنتج أنّ $\Lambda^{p,p} = \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ ، من أجل $1 \le p < \infty$.

29 ليكن $0<p<1$ ، و $f,g \in \mathcal{L}^p(E)$. بيّن أنّ

1) $0 \le u(x) = 2^{-1+1/p}\left(1+x^{1/p}\right) - (1+x)^{1/p}$ ، $(\forall x \ge 0)$ ،

2) استنتج أنّ $N_p(f+g) \le 2^{-1+1/p}\left(N_p(f)+N_p(g)\right)$.