الفصل السادس

تكامل لوبيغ

الفصل السادس

تكامل لوبيغ

1- مكاملة الدّوال الموجبة بمفهوم لوبيغ[1] (Lebesgue)

رأينا في الفصل السابق كيف تمّ تعريف تكامل ريمان على مجموعة ضيّقة جدًا من الدوال المحدودة على فترات محدودة، بينما التكامل المعتلّ هو تعميم طبيعي لتكامل ريمان من أجل دوال غير محدودة على فترات ليست بالضرورة محدودة. سوف نعمّم فيما يلي مفهوم التكامل لصنف أكبر بكثير من الدوال المتّصلة تقريبًا أينما كانت حيث يحتفظ بكل الخصائص التي يتميز بها تكامل ريمان. في الواقع يُعرّف هذا التكامل من أجل دوال ليست بالضرورة متّصلة وعلى مجموعات أعمّ من الفترات، المستطيلات وغيرها.

ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا.

تعريف 01.6: لتكن $\theta=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$ دالة بسيطة قابلة للقياس وموجبة، نعرّف تكامل لوبيغ θ على E وفق القياس الموجب μ بـ

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)\text{،} \qquad (1)$$

ونرمز له بـ $\int_E \theta d\mu$ ، $\int_E \theta(x)d\mu(x)$ أو $\int_E \theta$.

مثال 02.6: لتكن $J=[a,b]$ ، نعتبر في $(J,J\cap\mathcal{L},m)$ دالة ديركليه $\psi:J\to[0,1]$ المعرّفة بـ $\psi=\chi_{J\cap\mathbb{Q}}$. لدينا إذن

$$\int_J\psi dm=\int_J\chi_{J\cap\mathbb{Q}}dm=m(J\cap\mathbb{Q})=0\text{،}$$

---

[1]) هنري ليون لوبيغ [Henri Leon Lebesgue] (1875-1941)

لأنّ $J\cap\mathbb{Q}$ مجموعة مهملة.

مثال 03.6: نعتبر في $\left([-1,4],[-1,4]\cap\mathcal{L},m\right)$ الدالة الدرجية $\varphi:[-1,4]\to\mathbb{R}^+$ المعرّفة بـ $\varphi=2\chi_{[-1,0[}+3\chi_{]2,4]}$. لدينا

$$\int_{[-1,4]}\varphi dm=2m\left([-1,0[\right)+3m\left(]2,4]\right)$$
$$=2(1)+3(2)=8$$

تعريف 04.6: لتكن f دالة قابلة للقياس وموجبة على E، نعرّف تكامل لوبيغ f على E وفق القياس الموجب بـ μ

$$\int_E fd\mu=\sup\left\{\int_E\theta d\mu,\ \theta\in\mathbb{S}^+(E,\Sigma):\theta\le f\right\}\qquad(2)$$

(نرمز أحيانًا للتكامل بـ $\int_E f(x)d\mu(x)$ أو $\int_E f$)

كما نعرّف تكامل لوبيغ f على مجموعة جزئية قابلة للقياس A من E بـ
$\int_A fd\mu=\int_E f\chi_A d\mu$.

في الواقع قد يتساءل القارئ ما إذا كان **التعريف 01.6** يضمن قيمة وحيدة للتكامل من أجل أيّ تمثيل للدالة البسيطة θ. بينما التساؤل الثاني هو هل نحصل على نفس القيمة لتكامل دالة بسيطة قابلة للقياس وموجبة عن طريق **التعريف 04.6**.
تجيب القضية التالية على هذين التساؤلين الهامّين:

قضيّة 05.6: أ) لا تتعلق قيمة التكامل (1) بتمثيل الدالة البسيطة θ.
ب) إذا كانت f دالة بسيطة موجبة وقابلة للقياس فإنّ قيمة التكامل (2) تساوي قيمة التكامل (1).

إثبات: أ) بالتأكيد، لنفرض أنّ θ تقبل التمثيلين المختلفين التاليين:

$$\theta=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j}.$$

نلاحظ أنّه إذا كان $E_i\cap F_j\neq\varnothing$ فإنّ $\alpha_i=\beta_j$ على $E_i\cap F_j$، ومنه

$$\sum_{1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\sum_{j=1}^{m}\mu(E_i\cap F_j)\right)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\mu(E_i\cap F_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(E_i\cap F_j)$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(F_j\cap E_i)\right)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(F_j)$$

(لأنّ $E_i=E_i\cap E=\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j)$ و $F_j=F_j\cap E=\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\cap F_j)$).

إذن

$$\int_E\theta d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(F_j).$$

ب) نفرض أنّ $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}$. نستخلص من **التعريف 01.6** أنّ $\int_E fd\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)$ ، ومن **التعريف 04.6** أنّ $\int_E fd\mu=\sup\left\{\int_E\theta d\mu\right\}$ ، حيث θ دالة بسيطة قابلة للقياس تحقق $0\le\theta\le f$.

بوضع $I(f)=\sup\left\{\int_E\theta d\mu\right\}$ نجد أنّ $\int_E fd\mu\le I(f)$ (لأنّ f دالة بسيطة). ومن جهة أخرى، إذا كان $\theta=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\chi_{F_j}$ بحيث $0\le\theta\le f$، فإنّ $\beta_j\le\alpha_i$ على المجموعة الجزئية $E_i\cap F_j$ طالما كان $\mu(E_i\cap F_j)\ne 0$. إذن،

$$\int_E\theta d\mu=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\mu(F_j)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\beta_j\mu(F_j\cap E_i)$$
$$\le\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(F_j\cap E_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)=\int_E fd\mu$$

بأخذ الحد الأعلى نجد $I(f)\le\int_E fd\mu$ ، وعليه فإنّ

$$I(f)=\int_E f d\mu=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu(E_i)$$ ،

وهذا يثبت المساواة المطلوبة.■

ملاحظة 06.6: 1) نشير إلى أنّه ليس بالضرورة أن تكون المجموعة E أو إحدى مجموعاتها الجزئية ذات قياس منته، وبإمكاننا مصادفة الحالة $\alpha_i=0$ و $\mu(E_i)=+\infty$. لذا نصطلح على وضع

$$0.(+\infty)=(+\infty).0=0$$.

2) من أجل كلّ دالة قابلة للقياس $f:E\to[0,+\infty]$ فإنّ تكامل لوبيغ يأخذ قيمه في نصف المستقيم الموسّع الموجب $[0,+\infty]$.

مثال 07.6: لتكن E مجموعة غير خالية، $a\in E$ و $f\in\mathcal{M}^+(E,\mathcal{P}(E))$.
لنحسب تكامل f على E وفق قياس ديراك δ_a المعرّف بـــ

$$\delta_a(A)=\begin{cases}1, & a\in A\\ 0, & a\notin A\end{cases}\text{، }(\forall A\subset E)$$.

نفرض أوّلاً أنّ $f(a)<\infty$، نلاحظ أنّ
$\varphi=f(a)\chi_{\{a\}}\in\mathcal{S}^+(E,\mathcal{P}(E))$، وتحقق $\varphi\le f$، وعليه فإنّ

$$\int_E \varphi d\delta_a=f(a)\delta_a(\{a\})=f(a)\le\int_E f d\delta_a$$.

لتكن الآن $\theta=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_{E_i}\in\mathcal{S}^+(E,\mathcal{P}(E))$ بحيث $\theta\le f$، يوجد إذن مؤشر وحيد i_0، $1\le i_0\le n$، بحيث $a\in E_{i_0}$، ومنه

$$\theta(a)=\alpha_{i_0}\le f(a)$$.

لدينا من جهة أخرى،

$$\int_E \theta d\delta_a=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_a(E_i)=\alpha_{i_0}\le f(a)$$ ،

ينتج عن كون θ اختيارياً أنّ

$$\int_E f d\delta_a = \sup\left\{\int_E \theta d\delta_a , \theta \le f , \theta \in \mathbb{S}^+\right\} \le f(a) \text{ .}$$

إذن

$$\int_E f d\delta_a = f(a) \text{ ، } \left(\forall f \in \mathfrak{M}^+\left(E,\mathcal{P}(E)\right) : f(a) < \infty\right) \text{.}$$

(نحصل كذلك على $\int_E f d\delta_a = f(a) = \infty$ عندما $f(a) = \infty$).

نعلم أنّ كل دالة قابلة للقياس f هي نهاية لمتتالية من الدوال البسيطة القابلة للقياس $\{\theta_n\}_n$ حسب المبرهنة الأساسية للتقريب **33.4** ، وعليه فإنّه بإمكاننا تعريف تكامل لوبيغ كالآتي: $\int_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E \theta_n d\mu$. علينا كذلك إثبات أنّ هذا التعريف هو تعريف "جيّد"، بمعنى أنّ قيمة التكامل ليست مرتبطة بالمتتالية $\{\theta_n\}_n$، فضلا على أنّ هذه القيمة تساوي قيمة التكامل (2). يستعمل بعض المؤلفين هذا كتعريف لتكامل لوبيغ، أمّا فيما يخصّنا فهي نتيجة مباشرة لمبرهنة التقارب الرتيب التي سوف نتطرّق إليها أثناء هذا الفصل.

يتّضح من تعريف التكامل على مجموعة جزئيّة قابلة للقياس A من E أنّه يكفينا دراسة خواص التكامل على E، ومن ثمّ نستنتج بسهولة خواص التكامل على A مع الملاحظة أنّ $\theta\chi_A$ دالة بسيطة طالما كانت θ دالة بسيطة.

نفرض فيما يلي أنّ كلّ الدوال المستعملة هي قابلة للقياس وموجبة.

خواص عامة 08.6:

أ) $\int_A d\mu = \int_E \chi_A d\mu = \mu(A)$ ، $(\forall A \in \Sigma)$

ب) إذا كانت $\theta = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ **دالة بسيطة قابلة للقياس فإنّ**

$$\int_A \theta d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A \cap E_i) \text{ ، } (\forall A \in \Sigma)$$

ج) لدينا $\int_{A\cup B} \theta d\mu = \int_A \theta d\mu + \int_B \theta d\mu$ **، من أجل كلّ مجموعتين جزئيتين من** E **قابلتين للقياس ومنفصلتين** A **و** B**.**

د) إذا كانت θ ، φ دالتين بسيطتين قابلتين للقياس فإنّ

$$\int_A (\theta+\varphi)d\mu = \int_A \theta d\mu + \int_A \varphi d\mu \text{ ،} \quad (\forall A\in\Sigma) .$$

إثبات: من الواضح أنّ الخاصيّتين أ) وب) هما نتيجة مباشرة لتعريف التكامل على مجموعة جزئية قابلة للقياس والمساواة $\chi_A \cdot \chi_{E_i} = \chi_{A\cap E_i}$.

ج) فيما يخصّ هذه الخاصيّة لدينا

$$\int_A \theta d\mu + \int_B \theta d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap A) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap (A\cup B)) = \int_{A\cup B} \theta d\mu$$

د) يكفي إثبات هذه الخاصيّة من أجل $A=E$. لنفرض أنّ

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \text{ و } \varphi = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{F_j} \text{ ،}$$

لدينا حسب تعريف الدوال البسيطة $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = E = \bigcup_{j=1}^{m} F_j$. إذن

$$\theta+\varphi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (\alpha_i+\beta_j)\chi_{E_i\cap F_j} \text{ ،}$$

إنّ الدالة $\theta+\varphi$ تأخذ القيمة $\alpha_i+\beta_j$ على $E_i \cap F_j$ ، ومنه

$$\int_{E_i\cap F_j} (\theta+\varphi)d\mu = \int_{E_i\cap F_j} \theta d\mu + \int_{E_i\cap F_j} \varphi d\mu .$$

بما أنّ المجموعات $E_i \cap F_j$ منفصلة مثنى مثنى و $E = \bigcup_{i,j} E_i \cap F_j$ ،

فإنّ الخاصية د) تُـستخلص فورًا من ج).■

مثال 09.6: نعتبر فضاء القياس $(E,\mathcal{P}(E),\mu_c)$ حيث

$$\mu_c : \mathcal{P}(E) \to [0,\infty]$$

قياس العدّ. لتكن $A=\{a_1,a_2,\dots,a_N\}\subset E$ ، $(N\geq 1)$، بحيث $a_i \neq a_j$ ،

$$\int_A \theta d\mu_c = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_c(A\cap E_i) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_c\left(\bigcup_{k=1}^{N}(E_i\cap\{a_k\})\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left\{\sum_{k=1}^{N}\mu_c(E_i\cap\{a_k\})\right\} = \sum_{k=1}^{N}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_c(E_i\cap\{a_k\})\right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\int_{\{a_k\}}\theta d\mu_c = \sum_{k=1}^{N}\int_E \theta\chi_{\{a_k\}}d\mu_c = \sum_{k=1}^{N}\int_E \theta(a_k)\chi_{\{a_k\}}d\mu_c$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\theta(a_k)\mu_c(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^{N}\theta(a_k)$$

وهكذا فإنّ

$$\int_A \theta d\mu_c = \sum_{k=1}^{N}\theta(a_k) \text{ ، } \forall\theta\in\mathbb{S}^+(E,\mathcal{P}(E)) \text{ ، } \forall N\geq 1.$$

خاصّيتا الرّتابة 10.6: أ) إذا كان $0\leq f\leq g$ فإنّ $0\leq\int_E fd\mu\leq\int_E gd\mu$.

ب) إذا كان $B\in\Sigma$ ، A بحيث $A\subset B$ فإنّ $\int_A fd\mu\leq\int_B fd\mu$.

إثبات: أ) لدينا فورًا

$$\int_E fd\mu = \sup\left\{\int_E \theta d\mu, \theta\in\mathbb{S}^+(E,\Sigma):\theta\leq f\right\}$$
$$\leq \sup\left\{\int_E \theta d\mu, \theta\in\mathbb{S}^+(E,\Sigma):\theta\leq g\right\}$$
$$= \int_E gd\mu$$

ب) يكفي الملاحظة أنّ $f\chi_A\leq f\chi_B$ ، وبالتالي

$$\int_E f\chi_A d\mu = \int_A fd\mu \leq \int_E f\chi_B d\mu = \int_B fd\mu. \blacksquare$$

نستنتج فورًا ممّا سبق أنّ

لازمة 11.6: إذا كانت $0\leq m\leq f\leq M$ على $A\in\Sigma$ فإنّ

إثبات: لدينا $m = m\chi_A \le f \le M = M\chi_A$ (على A)، ومنه حسب خاصية

الرتابة أ) فإنّ $m\mu(A) \le \int_A f d\mu \le M\mu(A)$. ■

قضيّة 12.6: 1) لدينا من أجل كلّ عدد موجب c ما يلي $\int_E cf d\mu = c\int_E f d\mu$.

2) إذا كانت A مجموعة جزئية مهملة فإنّ $\int_A f d\mu = 0$.

إثبات: إذا كان $c = 0$ فإنّ الخاصية بديهية. نفرض إذن أنّ $c > 0$. لتكن $\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ دالة بسيطة بحيث $\theta \le f$، عندئذ $c\theta \le cf$، ولدينا

$$\int_E c\theta d\mu = \sum_{i=1}^{n} c\alpha_i \mu(E_i) = c\int_E \theta d\mu .$$

إذن

$$\begin{aligned}\int_E cf d\mu &= \sup\left\{\int_E \theta d\mu, 0 \le \theta \le cf\right\}\\ &= \sup\left\{\int_E c\theta d\mu, 0 \le \theta \le f\right\}\\ &= \sup\left\{c\int_E \theta d\mu, 0 \le \theta \le f\right\}\\ &= c\sup\left\{\int_E \theta d\mu, 0 \le \theta \le f\right\} = c\int_E f d\mu\end{aligned}$$

2) إذا كانت $\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ دالة بسيطة قابلة للقياس وموجبة فإنّ

$$\begin{aligned}\int_A \theta d\mu = \int_E \theta \chi_A d\mu &= \int_E \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A\cap E_i} d\mu\\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A \cap E_i) = 0\end{aligned}$$

(لأنّ $\mu(A) = 0$)، وعليه فإنّ

$$\int_A f d\mu = \int_E f\chi_A d\mu = \sup\left\{\int_E \theta d\mu : \theta \in \mathbb{S}^+(E,\Sigma), \theta \le f\chi_A\right\}$$

$$= \sup\left\{\int_A \theta d\mu + \int_{A^c} \theta d\mu : \theta \in \mathbb{S}^+(E,\Sigma), \theta \le f\chi_A\right\} = 0$$

لأنّ $\int_A \theta d\mu = 0$ و $\int_{A^c} \theta d\mu = 0$ لكون $\theta \le f\chi_A$.

إذا كان $f = +\infty$ فيكفي استعمال الاصطلاح $0.(+\infty) = 0$.■

نقدّم الآن هذه الخاصيّة الهامة جدّا:

قضيّة 13.6: يكون التكامل $\int_A f d\mu = 0$ إذا وإذا فقط كان $f = 0$، μ–تاك على $A \in \Sigma$.

إثبات: نفرض أنّ $\int_A f d\mu = 0$، ونضع $A_n = \left\{x \in A : f(x) \ge \frac{1}{n}\right\}$، $(\forall n \ge 1)$. من الواضح أنّ A_n قابلة للقياس (لأنّ A و f قابلتان للقياس)، ولدينا كذلك

$A_n \subset A_{n+1}$، $(\forall n \ge 1)$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > 0\}$.

نستنتج من الخاصية الأولى للتقارب أنّ

$\mu(\{x \in A : f(x) > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$،

لدينا من جهة أخرى بمقتضى خاصيّة الرتابة

$0 = \int_A f d\mu \ge \int_{A_n} f d\mu \ge \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(A_n)$،

ومنه $\mu(A_n) = 0$، من أجل كلّ $n \ge 1$. إذن

$\mu(\{x \in A : f(x) > 0\}) = 0$، ومن ثمّ فإنّ $f = 0$، μ–تاك على A.

عكسيًّا، إذا كانت $f = 0$، μ–تاك على A فإنّ $\int_A \theta d\mu = 0$، لكل دالة بسيطة θ بحيث $0 \le \theta \le f$ لكون $\theta = 0$، μ–تاك على A، وعليه فإنّ

$\int_A f d\mu = 0$ (وكذلك في الحالة $\mu(A) = +\infty$).■

قضيّة 14.6: لتكن $\theta \in \mathbb{S}^+(E,\Sigma)$، عندئذ الدالة $\lambda : \Sigma \to [0,+\infty]$ المعرّفة بـ $\lambda(A) = \int_A \theta d\mu$، $(\forall A \in \Sigma)$ قياس موجب على Σ.

إثبات: من الواضح أنّ λ دالة موجبة. لدينا من جهة أخرى، $\lambda(\varnothing) = 0$. لنثبت أنّ λ تحقق خاصيّة التجميع القابل للعد ، بالتأكيد، لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى.

نضع $A = \bigcup_{j\geq 1} A_j$ و $\theta = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$، لدينا إذن

$$\lambda(A) = \int_A \theta d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu\left(E_i \cap \left(\bigcup_{j\geq 1} A_j\right)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_i \cap A_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \theta d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j)$$

وهكذا فإنّ λ قياس موجب على Σ.■

للمبرهنة التالية تطبيقات كثيرة حيث تعطي شرطًا كافيًا لتبادل رمز التكامل مع رمز النهاية، لدينا

مبرهنة 15.6 (التقارب الرتيب): لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ متتالية متزايدة على E، بحيث $f_n \xrightarrow{s} f$، عندما $n \to \infty$، عندئذ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu .$$

إثبات: ينتج فورًا عن رتابة المتتالية أنّ $f(x) = \sup_{n\geq 1} f_n(x)$، ومنه $0 \leq f_n(x) \leq f(x)$، $(\forall n \geq 1)$ و $(\forall x \in E)$،

إذن $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ ، $(\forall n \geq 1)$، وهذا يستلزم أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \sup_{n\geq 1} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu ،$$

لأنّ $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة.

لإثبات المتباينة العكسيّة نعتبر عددًا $0<c<1$ و $\theta \in \mathbb{S}^+(E,\Sigma)$ بحيث $\theta \leq f$. نضع

$$A_n = \{x : f_n(x) \geq c\theta(x)\} ، (\forall n \geq 1).$$

لدينا فورًا $A_n \subset A_{n+1}$، $(\forall n \geq 1)$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$ ، لأنّ $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة و $f_n \xrightarrow{s} f$. نستنتج من كون $\lambda(A) = \int_A \theta d\mu$ قياسًا موجبًا على Σ وبفضل **الخاصية الأولى للتقارب** أنّ $\lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) = \lambda(E)$. إذن $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \theta d\mu = \int_E \theta d\mu$. بالمرور إلى النهاية في المتباينة التالية

$$\int_{A_n} c\theta d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu ،$$

نحصل على

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} c\theta d\mu = c \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \theta d\mu = c\int_E \theta d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu .$$

إذن، $c\int_E \theta d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$، وبجعل $c \to 1$ نجد أنّ $\int_E \theta d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$ ، من أجل كلّ $\theta \in \mathbb{S}^+(E,\Sigma)$ بحيث $\theta \leq f$، ومنه $\int_E f d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n d\mu$ ، حسب تعريف التكامل، وبهذا يكتمل الإثبات.■

ملاحظة 16.6: 1) ينتج عن **المبرهنة الأساسية للتقريب** *33.4* أنّه من أجل كلّ دالة قابلة للقياس (موجبة) f توجد متتالية متزايدة من الدوال البسيطة الموجبة القابلة للقياس $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ بحيث $f = \lim_{n\to\infty} \theta_n$. نستنتج إذن من **مبرهنة التقارب الرتيب** أنّ $\int_E f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E \theta_n d\mu$ ، ويُعَدّ هذا تعريفًا آخر

2) بما أنّ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}_{n\geq 1}$ متتاليتان متزايدتان فبإمكاننا كتابة مبرهنة التقارب الرتيب كالآتي:

$$\sup_{n\geq 1}\int_E f_n d\mu=\int_E \sup_{n\geq 1} f_n d\mu .$$

مثال مضاد 17.6: إنّ شرط التزايد ضروري لصحّة مبرهنة التقارب الرتيب كما يبيّنه المثال التالي:

لتكن $f_n=\frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$، $(\forall n\geq 1)$، لدينا $f_n \xrightarrow{s} f=0$، ومنه $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n dm=0$. لدينا من جهة أخرى $\int_{\mathbb{R}} f_n dm=1$، $(\forall n\geq 1)$، ومنه $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n dm=1\neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n dm=0$، يعود هذا إلى كون المتتالية غير متزايدة كما تنصّ عليه المبرهنة بالرغم من أنّ المتتالية متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

مثال 18.6: نعتبر الدالة $f(x)=\frac{1}{[x]^2}:[1,\infty[\to \mathbb{R}^+$، حيث $[x]$ ترمز إلى الجزء الصحيح للعدد x. لنحسب التكامل $\int_{[1,\infty[} fdm$.

نلاحظ أوّلا أنّ

$$f=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\chi_{[n,n+1[}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\chi_{[n,n+1[}=\lim_{n\to\infty} f_N ،$$

وبما أنّ $f_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}\chi_{[n,n+1[}$ قابلة للقياس، $(\forall N\geq 1)$، فإنّ النهاية f قابلة للقياس.

نلاحظ من جهة أخرى أنّ $\{f_N\}_{N\geq 1}$ متتالية متزايدة، نستنتج إذن من

مبرهنة التقارب الرتيب أنّ

$$\begin{aligned}\int_{[1,\infty[} fdm &= \lim_{N\to\infty} \int_{[1,\infty[} f_N dm \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_{[1,\infty[} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \chi_{[n,n+1[} dm \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} m([n,n+1[) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

مبرهنة 19.6: 1) ليكن $\{f_k\}_{k=1}^{m} \subset \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$، m منته، عندئذ

$$\int_E \sum_{k=1}^{m} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k d\mu$$ ، (*التجميع المنتهي للدوال*)،

2) $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$، عندئذ

$$\int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu$$ ، (*التجميع القابل للعد للدوال*).

إثبات: 1) من أجل كلّ k توجد $\{\theta_i^k\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{S}^+(E,\Sigma)$ بحيث $\theta_i^k \nearrow f_k$، ومنه $\sum_{k=1}^{m} \theta_i^k \nearrow \sum_{k=1}^{m} f_k$. نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب أنّ

$$\int_E \sum_{k=1}^{m} f_k d\mu = \lim_{i\to\infty} \int_E \sum_{k=1}^{m} \theta_i^k d\mu = \sum_{k=1}^{m} \lim_{i\to\infty} \int_E \theta_i^k d\mu = \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k d\mu ،$$

وعليه فإنّ

$$\int_E \sum_{k=1}^{m} f_k d\mu = \sum_{k=1}^{m} \int_E f_k d\mu .$$

2) بوضع $g_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ نحصل على متتالية $\{g_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$ متقاربة ببساطة إلى $g = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ على E. نستنتج فورًا من مبرهنة التقارب

الرتيب أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_E g_n d\mu=\int\limits_E g d\mu$. باستعمال **التجميع المنتهي للدوال** نجد

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E\sum_{k=1}^{n} f_k d\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k d\mu$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k d\mu=\int_E g d\mu=\int_E\sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu$$

وهذا يثبت خاصّية **التجميع القابل للعد للدوال**.■

نقدّم فيما يلي طريقة عمليّة لإنشاء قياسات موجبة انطلاقا من قياس معطى. لقد تعرّضنا إلى نفس الأمر في **القضيّة 14.6** حيث استعملنا دالة بسيطة موجبة وقابلة للقياس بينما نستعمل هنا أي دالة عددية موجبة قابلة للقياس.

قضية 20.6: لتكن $f\in\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$. نعرّف $\lambda:\Sigma\to[0,\infty]$ بـ $\lambda(A)=\int\limits_A f d\mu$ ، $(\forall A\in\Sigma)$ ، عندئذ λ قياس موجب على Σ.

إثبات: لدينا λ دالة موجبة و $\lambda(\varnothing)=0$. لنثبت أنّ λ دالة σ-جمعية. بالتأكيد، لتكن $\{A_n\}_{n\ge1}\subset\Sigma$ متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى.

نضع $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ ، من المبرهنة **19.6** نرى أنّ

$$\lambda(A)=\int_A f d\mu=\int_E f\chi_A d\mu$$
$$=\int_E\sum_{n=1}^{\infty} f\chi_{A_n} d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E \chi_{A_n} d\mu$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(A_n)$$

ومنه λ قياس موجب على Σ.■

تُعمّم اللازمة التالية الخاصيّة **08.6 ج)** على صعيدين: أوّلا، نعتبر دوال موجبة قابلة للقياس عوض دوال بسيطة موجبة قابلة للقياس، ثانيًا، نعتبر الحالة القابلة للعد عوض الحالة المنتهية. لدينا

إثبات: بما أنّ $\lambda(A)=\int_A f d\mu$ ،$(\forall A\in\Sigma)$، قياس موجب و $E=\bigcup_{n\geq 1}E_n$،
حيث $E_m\cap E_n=\varnothing$، عندما $m\neq n$، عندئذ

$$\int_E f d\mu=\lambda(E)=\lambda\left(\bigcup_{n\geq 1}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f d\mu \cdot ■$$

مثال 22.6: نعتبر فضاء القياس $(E,\mathcal{P}(E),\mu_0)$ حيث $E=\bigcup_{n\geq 1}\{a_n\}$،
$a_m\neq a_n$، $(\forall m\neq n)$ و $\mu_0:\mathcal{P}(E)\to[0,\infty]$ قياسا موجبًا بحيث
$\mu_0(\{a_n\})=\alpha_n$، $(\forall n\geq 1)$، من أجل متتالية من الأعداد
$\{\alpha_n\}_{n\geq 1}\subset]0,\infty[$.

لدينا من أجل كلّ $f\in\mathcal{M}^+(E,\mathcal{P}(E))$ ما يلي

$$\begin{aligned}\int_E f d\mu_0&=\int_{\bigcup_{n\geq 1}\{a_n\}} f d\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\{a_n\}} f d\mu_0\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f(a_n)\chi_{\{a_n\}}d\mu_0\\&=\sum_{n=1}^{\infty}f(a_n)\mu_0(\{a_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f(a_n)\end{aligned}$$

إذن

$$\int_E f d\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f(a_n)\cdot$$

سوف نقدّم فيما يلي أوّل متباينة تبيّن العلاقة ما بين تكامل النهاية الدنيا لمتتالية من الدوال الموجبة القابلة للقياس والنهاية الدنيا لتكامل هذه المتتالية ، تسمى بمتباينة فاتو[2] (Fatou) :

[2]) بيار فاتو [Pierre Fatou] (1878-1929)

توطئة 23.6 (متباينة فاتو): لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$، عندئذ

$$\int_E \underline{lim} f_n d\mu \le \underline{lim} \int_E f_n d\mu .$$

إثبات: بوضع $g_n(x) = inf\{f_k(x) : k \ge n\}$ نحصل على متتالية $\{g_n\}_{n\ge 1}$ متزايدة في $\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$، ومنه

$$\underline{lim} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \equiv \sup_{n\ge 1} g_n(x) .$$

نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب 15.6 أنّ

$$\int_E \underline{lim} f_n d\mu = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu .$$

وبما أنّ $\int_E g_n d\mu \le \int_E f_k d\mu$، $(\forall k \ge n)$ فإنّ

$$\int_E g_n d\mu \le inf\left\{\int_E f_k d\mu : k \ge n\right\} \le \underline{lim} \int_E f_n d\mu ،$$

إذن

$$\int_E \underline{lim} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu \le \underline{lim} \int_E f_n d\mu . \blacksquare$$

لازمة 24.6: لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ بحيث $f_n \xrightarrow{s} f$. نفرض وجود $M > 0$ بحيث $\int_E f_n d\mu \le M$، $(\forall n \ge 1)$، عندئذ $\int_E f d\mu \le M$.

ملاحظة 25.6: لم نأخذ بعين الاعتبار في الإثباتات السابقة بما فيهم **مبرهنة التقارب الرتيب 15.6** الحالة $\int_E f d\mu = \infty$ التي تظهر عندما يكون القياس $\mu(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) > 0$. عمليًا إنّنا لا نتعامل إلاّ مع صنف الدوال "**القابلة للمكاملة**"، أي الدوال ذات تكامل منته، وبالنّسبة لهذه الدوال فإنّ المجموعة $\{x : f(x) = +\infty\}$ مهملة.

قضية 26.6: لتكن $\{f,g\} \subset \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ بحيث $f = g$، μ-تاك، عندئذ

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu .$$

إثبات: من الواضح أنّ المجموعة $A=\{x\in E: f(x)\neq g(x)\}$ قابلة للقياس وأنّ $\mu(A)=0$. لدينا إذن

$$\int_E fd\mu=\int_A fd\mu+\int_{A^c} fd\mu=\int_A fd\mu+\int_{A^c} gd\mu$$
$$=0+\int_{A^c} gd\mu=\int_A gd\mu+\int_{A^c} gd\mu=\int_E gd\mu$$

وهو المطلوب.■

ملاحظة 27.6: يمكن للقارئ مقارنة **القضيّة 26.6 بالقضية 13.6** السابقة بأخذ $h=f-g$. في الواقع تهدف هذه الصيغة إلى الفكرة التالية: يمكننا أن نستبدل بفضل هذه القضية التقارب النقطي بالتقارب "تقريبًا **أينما كان**" ومفهوم "**المعرّف على** E" "**بالمعرّف أينما كان تقريبًا على** E" في **مبرهنة التقارب الرتيب**. وبكلّ بساطة يعود السبب إلى عدم تأثر التكامل بتغيير قيم الدالة على مجموعة مهملة.

نختم هذا المقطع بإعطاء نتيجة مماثلة لمبرهنة التقارب الرتيب الخاصّة بالمتتاليات المتناقصة.

مبرهنة 28.6: لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ **متتالية متناقصة على** E **بحيث** $f_n\xrightarrow{s} f$، **عندما** $n\to\infty$. **إذا كان** $\int_E f_1 d\mu<\infty$ **فإنّ**
$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E fd\mu.$$

إثبات: نضع $g_n=f_1-f_n$. إنّ $\{g_n\}_{n\geq 1}$ معرّفة تعريفا جيّدًا لأنّ الدالة f_1 منتهية تقريبًا أينما كانت، وبالتالي فإنّ المجموعة
$$A=\{x\in E: g_n(x)=\infty-\infty\}$$
مهملة. نلاحظ كذلك أنّ g_n قابلة للقياس تقريبًا أينما كانت و $\{g_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة على E.
نستنتج من **مبرهنة التقارب الرتيب** أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E g_n d\mu=\int_E \lim_{n\to\infty} g_n d\mu=\int_E (f_1-f)d\mu،$$

أي

$$\int_E f_1 d\mu - \int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_E f_1 d\mu - \int_E f d\mu ،$$

ومنه $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$ ، لأنّ $\int_E f_1 d\mu < \infty$. ■

ملاحظة 29.6: يتّضح من الإثبات أنه بإمكاننا وضع الشرط $\int_E f_{n_0} d\mu < \infty$ ، من أجل أي مؤشر $n_0 \geq 1$ ، عوض $\int_E f_1 d\mu < \infty$.

2- مكاملة الدوال العددية

ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريّاً.
على غرار النتائج المحصّل عليها في المقطع السابق من أجل دوال موجبة قابلة للقياس سوف نعرّف فيما يلي تكامل لوبيغ من أجل دوال عددية قابلة للقياس $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$.

تعريف 30.6: لتكن $f \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ بحيث $\min\left\{\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu\right\} < \infty$.

نعرّف تكامل لوبيغ f على E وفق القياس الموجب μ كما يلي:

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu .$$

ملاحظة 31.6: 1) وُضع الشرط $\min\left\{\int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu\right\} < \infty$ لتفادي حالة عدم التعيين $\infty - \infty$.

2) إنّ تكامل لوبيغ يأخذ قيمه في المستقيم الموسّع $\overline{\mathbb{R}}$.

تعريف 32.6: نقول عن دالة $f \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ إنّها قابلة للمكاملة أو قابلة للجمع بمفهوم لوبيغ على E إذا وإذا فقط كان $\int_E |f| d\mu < \infty$.
كما نقول عن f إنّها قابلة للمكاملة (أو قابلة للجمع) على مجموعة جزئية قابلة للقياس $A \subset E$ إذا كانت الدالة $f\chi_A$ قابلة للمكاملة على E.

ترميز: – سوف نرمز لمجموعة كل الدوال العددية القابلة للمكاملة على E وفق القياس الموجب μ بـــ $\mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ أو $\mathfrak{L}^1(E)$ إن لم يكن هنالك أيّ لبس، كما نضع $\mathfrak{L}^1_+(E)=\left\{f\in\mathfrak{L}^1(E): f\geq 0\right\}$.

– إذا كانت f قابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ على E فإنّنا نستعمل أحيانًا العبارة "f دالة (ل)-قابل للمكاملة على E".

ملاحظة 33.6: إذا كانت $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ فإنّ التكافؤ التالي محقق: f دالة قابلة للجمع إذا وإذا فقط كانت $|f|$ قابلة للجمع. **ولكن ينبغي الانتباه إلى** أنّ كون $|f|$ قابلة للجمع (مع $f\notin\mathfrak{M}(E,\Sigma)$) لا يستلزم على الإطلاق أنّ f قابلة للجمع، يعود هذا إلى عدم صحّة الاستلزام التالي $\left(|f|\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)\Rightarrow f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)\right)$.

مثال 34.6: لتكن A مجموعة جزئية غير قابلة للقياس (بمفهوم لوبيغ) من الفترة $[0,1]$ و $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرّفة بـــ $f=1$ على A، و $f=-1$ على A^c، عندئذ f ليست قابلة للجمع لأنّ f ليست قابلة للقياس بالرّغم من أنّ $|f|\equiv 1$ دالة قابلة للقياس.

مبرهنة 35.6: لتكن $\{f,g\}\subset\mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ و $c\in\mathbb{R}$، عندئذ

أ) $f+g\in\mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$، cf،

ب) $\int_E(f+g)d\mu=\int_E fd\mu+\int_E gd\mu$ و $\int_E cfd\mu=c\int_E fd\mu$.

إثبات: أ) لدينا من جهة $cf\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$، ومن جهة أخرى فإنّ $\int_E|cf|d\mu=|c|\int_E|f|d\mu<\infty$، وعليه فإنّ $cf\in\mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$.

لدينا كذلك $f+g\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ و $|f+g|\leq|f|+|g|$، وبالتالي

$$\int_E|f+g|d\mu\leq\int_E|f|+|g|d\mu=\int_E|f|d\mu+\int_E|g|d\mu<\infty،$$

إذن $f+g\in\mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$.

ب) من السهل التأكد من أنّ

$$\int_E cfd\mu=\int_E(cf)^+d\mu-\int_E(cf)^-d\mu$$

$$= c\int_E f d\mu$$

ومن جهة أخرى لدينا

$(f+g)=(f+g)^+-(f+g)^-$ و $f+g=\left(f^+-f^-\right)+\left(g^+-g^-\right)$ ،

إذن $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$.

وبمكاملة الطرفين نجد

$$\begin{aligned}&\int_E (f+g)^+ d\mu + \int_E f^- d\mu + \int_E g^- d\mu \\ &\qquad = \int_E (f+g)^- d\mu + \int_E f^+ d\mu + \int_E g^+ d\mu\end{aligned}$$

أي

$$\begin{aligned}\int_E (f+g) d\mu &= \int_E (f+g)^+ d\mu - \int_E (f+g)^- d\mu \\ &= \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu + \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu \\ &= \int_E f d\mu + \int_E g d\mu\end{aligned}$$

وهو المطلوب.■

ملاحظة 36.6: إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ والتكامل $\int_E g d\mu$ موجودا فإنّ $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.

لازمة 37.6: لتكن $\{f,g\} \subset \mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ و $\{A,B\} \subset \Sigma$ بحيث $A \cap B = \varnothing$، عـندئذ

أ) $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$،

ب) $f \le g$، μ–تاك يستلزم $\int_E f d\mu \le \int_E g d\mu$،

ج) $\left|\int_E f d\mu\right| \le \int_E |f| d\mu$.

إثبات: أ) لدينا بمقتضى المبرهنة 35.6 ب) ما يلي

$$\int_{A\cup B} fd\mu = \int_E f\chi_{A\cup B} d\mu = \int_E f(\chi_A + \chi_B)d\mu$$
$$= \int_E f\chi_A d\mu + \int_E f\chi_B d\mu = \int_A fd\mu + \int_B fd\mu$$

ب) إنّ $f \le g$ ، μ–تاك يستلزم أنّ $0 \le g-f$ ، μ–تاك، ومنه $(g-f)^- = 0$ ، μ–تاك، إذن $\int_E (g-f)^- d\mu = 0$. ومن ثمّ فإنّ

$$\int_E gd\mu = \int_E (f+(g-f))d\mu = \int_E fd\mu + \int_E (g-f)d\mu$$
$$= \int_E fd\mu + \int_E (g-f)^+ d\mu \ge \int_E fd\mu$$

ج) واضح أنّ

$$\left|\int_E fd\mu\right| = \left|\int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu\right| \le \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu$$
$$\le \int_E (f^+ + f^-)d\mu = \int_E |f| d\mu$$

لكلّ $f \in \mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$.■

ملاحظة 38.6: في الواقع تبقى المتباينة ج) صحيحة طالما كان التكامل $\int_E fd\mu$ موجودًا.

قضية 39.6: لتكن $f \in \mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ ، عندئذ f منتهية μ–تاك على E .

إثبات: نضع $A = \{x \in E : |f(x)| = \infty\}$. نحصل بفضل مبرهنة التقارب الرتيب على

$$\infty > \int_E |f| d\mu \ge \int_A |f| d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty}(n) d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_A n d\mu = \infty \cdot \mu(A)$$

ومنه $\mu(A) = 0$ ، وهذا يعني أنّ f دالة منتهية μ–تاك على E .■

هذا الآن تعميم لمبرهنة التقارب الرتيب من أجل متتاليات من الدوال ذات إشارة اختياريّة.

مبرهنة 40.6: لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ متتالية متزايدة على E بحيث $f_n \xrightarrow{s} f$، عندما $n \to \infty$، عندئذ،

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu .$$

إثبات: بما أنّ f_1 دالة قابلة للمكاملة فهي منتهية تقريبًا أينما كانت. بوضع $g_n = f_n - f_1$ و $g = f - f_1$ نحصل على متتالية متزايدة من الدوال الموجبة بحيث $g_n \xrightarrow{s} g$. نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب 15.6 أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E g d\mu ،$$

ومنه

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_E f_n d\mu - \int_E f_1 d\mu\right) = \int_E f d\mu - \int_E f_1 d\mu$$

وهذا يؤدّي إلى النتيجة المطلوبة لأنّ $\int_E f_1 d\mu < \infty$.■

مبرهنة 41.6 (الاتّصال المطلق للتكامل): إذا كان (E,Σ,μ) فضاء قياس و f دالة قابلة للجمع، فإنّ

$$\lim_{\substack{\mu(A)\to 0 \\ A\in\Sigma}} \int_A |f| d\mu = 0 .$$

إثبات: نعتبر المتتالية المتزايدة $f_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}$, $(\forall n \geq 1)$.

بتطبيق مبرهنة التقارب الرتيب نحصل على

$$\forall A\in\Sigma, \quad \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A |f| d\mu ،$$

إذن، يوجد من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ مؤشر n_0 بحيث، مهما تكن $A \in \Sigma$ و $n \geq n_0$، فإنّ

$$\int_A |f| d\mu \leq \int_A f_{n_0}\, d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_A n_0\, d\mu + \frac{\varepsilon}{2} = n_0\, \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل كلّ $A \in \Sigma$.

باختيار المجموعة A بحيث $\mu(A) \leq \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$ نرى أنّ

$\int_A |f| d\mu < n_0 \dfrac{\varepsilon}{2n_0} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

إذن، لكلّ $\varepsilon > 0$ يوجد $\eta \leq \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$ بحيث $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$ ، من أجل كلّ $A \in \Sigma$ يحقّق $\mu(A) \leq \eta$ ، وهذا يبيّن أنّ $\lim\limits_{\substack{\mu(A)\to 0 \\ A\in\Sigma}} \int_A |f| d\mu = 0$. ■

مبرهنة 42.6 (التقارب المحدود): ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، $A \in \Sigma$ بحيث $0 < \mu(A) < \infty$ و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(A, A\cap\Sigma)$ متتالية تحقق

أ) $f_n \xrightarrow{s} f$ ، على A،

ب) $|f_n(x)| \leq M$ ، $(\forall x \in A)$، $(\forall n \geq 1)$، (أي $\{f_n\}_{n\geq 1}$ محدودة بانتظام على A)، عندئذ، النهاية f قابلة للجمع على A ، إضافة إلى أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_A |f_n - f| d\mu = 0 \text{ ،} \qquad (3)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \text{ .} \qquad (4)$$

إثبات: ينتج فورًا عن (ب) أنّ $\int_A |f_n| d\mu \leq M\mu(A)$ ، $(\forall n \geq 1)$، ومنه

نحصل بفضل متباينة فاتو على

$$\int_A |f| d\mu \le \underline{\lim} \int_A |f_n| d\mu \le M\mu(A) < \infty$$ ،

إذن f دالة قابلة للجمع على A. بما أنّ $\mu(A) < \infty$ فبإمكاننا تطبيق مبرهنة إغوروف 34.4 لنجد من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ مجموعة جزئية $A_\varepsilon \subset A$ بحيث $\mu(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$ و f_n متقاربة بانتظام على $A \setminus A_\varepsilon$.
إذن يوجد من أجل نفس العدد ε مؤشر $n_0 \ge 1$ بحيث، مهما يكن n $(\ge n_0)$، فإنّ

$$\sup_{A \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}.$$

وبما أنّ $|f_n(x) - f(x)| \le 2M$ ، $(\forall x \in A)$، حسب ب)، عندئذ

$$\int_A |f_n - f| d\mu = \int_{A \setminus A_\varepsilon} |f_n - f| d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f| d\mu$$
$$\le \frac{\varepsilon}{2\mu(A)} \mu(A \setminus A_\varepsilon) + 2M\mu(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

وهكذا فإنّ النتيجة (3) محققة، ومنها نحصل على (4) بفضل المتباينة ج) من اللازمة 36.6. ■

ملاحظة 43.6: إذا كان القياس μ منتهيًا فيكفي أخذ $A = E$ ومتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ تحقق الشرطين أ) وب).

إنّ مبرهنة التقارب المحدود هي حالة خاصّة لـمبرهنة التقارب المُرَجَّح *(dominated convergence theorem)* حيث نعوّض شرط محدودية قياس المجموعة الجزئية A والشرط ب) بشرط الترجيح بدالة مناسبة قابلة للمكاملة. تعدّ مبرهنة التقارب المرجّح من أهمّ المبرهنات في التحليل الرياضي ولها تطبيقات عديدة في ميادين كثيرة.

مبرهنة 44.6 (التقارب المُرَجَّح): لتكن $\{f_n\}_{n\ge1} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ بحيث

أ) $f_n \to f$ ، μ−تاك ب) توجد دالة قابلة للجمع $g : E \to [0,\infty]$ بحيث $|f_n(x)| \le g(x)$ ، $(\forall n \ge 1)$، $(x \in E$ ، μ−تاك$)$، عندئذ، النهاية f قابلة للجمع على E،

$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| d\mu = 0$ و $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$.

نسمّي الشرط ب) **بشرط الترجيح، كما نسمّي g بالدالة المُرَجِّحة للمتتالية** $\{f_n\}$.

إثبات: نضع

$A = \{x \in E : f_n(x) \not\to f(x)\}$ و $B = \bigcup_{n\geq 1}\{x \in E : |f_n(x)| > g(x)\}$.

إنّ المجموعتين A و B مهملتان، وبالتالي $A \cup B$ هي بـــدورها مجموعة مهملة. نعرّف المتتالية $\{g_n\}_{n\geq 1}$ بـ $g_n = f_n \chi_{(A\cup B)^c}$، $(\forall n \geq 1)$. لدينا $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ لأنّ g_n هي عبارة عن ضرب دالتين قابلتين للقياس، بالإضافة إلى أنّ

$|g_n(x)| \leq g(x)$، $(\forall x \in E)$ و $g_n \xrightarrow{s} \tilde{f} = f\chi_{(A\cup B)^c}$.

لاحظ أنّ $\tilde{f} \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ و $\lim_{n\to\infty}|g_n(x)| = |\tilde{f}(x)| \leq g(x)$، $(\forall x \in E)$، ومنه $\int_E |\tilde{f}| d\mu \leq \int_E g d\mu < \infty$. نستنتج من كون $|\tilde{f}| = |f|$، μ-تاك، أنّ $\int_E |f| d\mu = \int_E |\tilde{f}| d\mu < \infty$، أي أنّ الدالة f قابلة للجمع على E. لدينا من جهة أخرى، $\int_E |g_n| d\mu \leq \int_E g d\mu < \infty$، $(\forall n \geq 1)$، إذن كلّ عناصر المتتالية $\{g_n\}_{n\geq 1}$ قابلة للجمع على E.

بوضع $h_n = 2g - |g_n - \tilde{f}|$، $(\forall n \geq 1)$، نحصل على $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$.

بإمكاننا الآن تطبيق متباينة فاتو على $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ للحصول على

$$\int_E \underline{\lim}\, h_n d\mu = \int_E 2g d\mu \leq \underline{\lim} \int_E \left(2g - |g_n - \tilde{f}|\right) d\mu$$
$$= 2\int_E g d\mu - \overline{\lim} \int_E |g_n - \tilde{f}| d\mu$$

وهذا يستلزم أنّ $\lim_{n\to\infty} \int_E |g_n - \tilde{f}| d\mu = 0$.

من المساواة $|g_n - \tilde{f}| = |f_n - f|$، μ-تاك، ومن كون

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\left|\int_E (f_n - f)d\mu\right| \le \lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| d\mu = 0 ،$$

نستخلص أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| d\mu = 0 \text{ و } \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu .\blacksquare$$

ملاحظة 45.6: إنّ شرط الترجيح ضروري لصحّة مبرهنة التقارب المُرَجّح كما يتّضح في المثال المضاد التالي:

مثال مضاد 46.6: نعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+\left(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^+\right)\right)$ المعرّفة بــ $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. لدينا $f_n \xrightarrow{u} 0$ (تقارب منتظم)، على $\mathbb{R}^+$، غير أنّ

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_n dm = 1 \not\to \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n\to\infty} f_n dm = 0 ،$$

يعود هذا الخلل إلى عدم وجود دالة قابلة للجمع $g : \mathbb{R}^+ \to [0,\infty]$ تحقّق $|f_n(x)| \le g(x)$، $(\forall n \ge 1)$، $x \ge 0$، (m–تاك).

مبرهنة 47.6: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(E,\Sigma)$ بحيث $\sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| d\mu < \infty$، **عندئذ تتقارب السلسلة** $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **مطلقًا تقريبًا أينما كانت إلى دالة قابلة للجمع** f، **ولدينا**

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n d\mu .$$

إثبات: نستنتج من المبرهنة 19.6 أنّ $\int_E \sum_{n=1}^{\infty}|f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E |f_n| d\mu < \infty$،

أي أنّ الدالة $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ قابلة للجمع على E، وبالتالي فهي μ–تاك منتهية على E، إذن تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ مطلقًا تقريبًا أينما كانت إلى دالة f. نرى فورًا من المتباينة

$$|f| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = g$$ ،

أنّ f دالة قابلة للجمع على E.

نعرّف الآن المتتالية $\{g_m\}_{m\geq 1}$ بـ $g_m = \sum_{n=1}^{m} f_n$ ، $(\forall m \geq 1)$. من الواضح أنّ $\{g_m\}_{m\geq 1} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ و $|g_m(x)| \leq g(x)$ ، $(\forall m \geq 1)$، μ–تاك، إضافة إلى أنّ $g_m \to f$ ، μ–تاك.

نستنتج من مبرهنة التقارب المرجّح 44.6 أنّ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int_E f_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{m} f_n d\mu$$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_E g_m d\mu = \int_E f d\mu$$

وبهذا يكتمل الإثبات.■

ملاحظة 48.6: بإمكاننا تعويض الفرضية $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty$ بالشرط التالي: توجد دالة g قابلة للجمع على E بحيث

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq g(x)$$ ، ($x \in E$ ، μ–تاك)، $(\forall n \geq 1)$.

نظرًا لأهمّيتها التطبيقية في الاحتمالات والمعادلات التكاملية سوف نقدّم ونثبت متباينة جنسان في حالتها العامة إذ أنّه بإمكاننا استنتاج العديد من المتراجحات وذلك حسب اختيار فضاء القياس والدالة المحدّبة المستعملة. نستهلّ دراستنا بتـ عريف الدّوال المحدّبة التي تتميّز بخاصيّة الاتّصال إضافة إلى قابلية اشتقاقها باستثناء متتالية من نقاط مجموعة التعريف.

تعريف 49.6: نقول عن دالة $f : I =]a,b[\to \mathbb{R}$ ، $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$،

إنّها محدّبة في I إذا حققت المتباينة التالية

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)\le \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)،$$
$$(\forall \alpha,\beta\ge 0:\alpha+\beta=1)،\ (\forall x_1,x_2\in I).$$

هندسيًّا، نستطيع القول بأنّ الدالة f محدّبة إذا كان من أجل كلّ $x_1,x_2\in I$ فإنّ القطعة المستقيمة التي تربط النقطة $M_1(x_1,f(x_1))$ بـــ $M_2(x_2,f(x_2))$ تقع فوق منحنى f ما بين النقطتين M_1 و M_2.

امثلة 50.6: الدّوال التالية محدّبة:

$f(x)=e^{\alpha x}$ على $\mathbb{R}$، من أجل $\alpha\in\mathbb{R}^*$

$g(x)=x^{\alpha}$ على $I=]0,\infty[$، من أجل $\alpha\ge 1$

$h(x)=-\ln x$ على $I=]0,\infty[$

$k(x)=x\ln x$ على $I=]0,\infty[$

هذه بعض الخواص التي تتمتّع بها الدوال المحدّبة:

خواص عامّة 51.6:

1) تكون دالة قابلة للاشتقاق f على I محدّبة إذا وإذا فقط كانت مشتقتها الأولى متزايدة، وبالخصوص إذا كانت f قابلة للاشتقاق إلى المرتبة الثانية على I بحيث $f''(x)\ge 0$، $(\forall x\in I)$، عندئذ f دالة محدّبة في I،

2) كلّ دالّة محدّبة $f:I=]a,b[\to\mathbb{R}$ هي متّصلة على I،

3) تكونّ دالّة متّصلة $f:I=]a,b[\to\mathbb{R}$ محدّبة على I، إذا وإذا فقط حققت

$$(\forall x_1,x_2\in I),f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]$$

قضية 52.6: لتكن $f:I=]a,b[\to\mathbb{R}$ دالّة محدّبة على I، عندئذ من أجل كلّ $t\in I$ يوجد ثابت $\gamma=\gamma(f,t)\in\mathbb{R}$ بحيث

$$.(\forall x \in I) \ ،f(x) \geq \gamma(x-t)+f(t)$$

إثبات: نثبّت أوّلاً t في I ونعتبر $x_1,x_2 \in I$ بحيث $x_1 < t < x_2$.
نضع

$$.\beta = \frac{t-x_1}{x_2-x_1} \text{ و } \alpha = \frac{x_2-t}{x_2-x_1}$$

من الواضح أنّ $\alpha,\beta \geq 0$ و $\alpha+\beta=1$، وبالتالي

$$f(\alpha x_1+\beta x_2)=f(t) \leq \alpha f(x_1)+\beta f(x_2)$$
$$\leq \frac{x_2-t}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{t-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

ومن ثمّ فإنّ

$$.\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(t)}{x_2-t}$$

بأخذ الحد الأعلى للطرف الأيسر على $z \in]a,t[$ نجد

$$،\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} \leq \gamma := \sup_{a<z<t} \frac{f(t)-f(z)}{t-z} \leq \frac{f(x_2)-f(t)}{x_2-t}$$

$(\forall x_2 \in]t,b[)$، ومنه نستخلص أنّ

$$،(\forall x \in]a,t[) \ ،f(x) \geq \gamma(x-t)+f(t)$$

$$،(\forall x \in]t,b[) \ ،f(x) \geq \gamma(x-t)+f(t) \text{ و }$$

مع الإشارة إلى أنّ المتباينة هي كذلك صحيحة من أجل $x=t$، وهو المطلوب.■

متباينة جنسان[3] [Jensen] **53.6** : ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيا

[3] جوهان وليام جنسان [Johan William Jensen] (1859–1925)

$$\cdot\varphi\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu\right)\le\frac{1}{\mu(E)}\int_E\varphi\circ f\,d\mu$$

إثبات: نلاحظ أوّلاً أنّ $a<\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu<b$. بوضع

$t=\frac{1}{\mu(E)}\int_E f\,d\mu$، وتطبيق القضية **52.6** نجد $\gamma\in\mathbb{R}$ (متعلق بـــ t و φ) بحيث

$$.(\forall x\in I)\ ،\varphi(x)\ge\gamma(x-t)+\varphi(t)$$

وبتعويض x بـ $f(z)$ ، $(z\in E)$، نحصل على

$$.(\forall z\in E)\ ،\varphi(f(z))=\varphi\circ f(z)\ge\gamma(f(z)-t)+\varphi(t)$$

ينتج عن كون φ محدّبة أنّها متّصلة، وبالتالي فإنّها قابلة للقياس. إذن، $\varphi\circ f$ دالة قابلة للقياس. بمكاملة طرفي المتباينة الأخيرة على E وفق القياس μ نحصل على

$$\int_E\varphi\circ f(z)d\mu(z)\ge\gamma\Big(\underbrace{\int_E f(z)d\mu(z)-t\mu(E)}_{\overset{\shortparallel}{0}}\Big)+\varphi(t)\mu(E)$$

أي $\int_E\varphi\circ f(z)d\mu(z)\ge\varphi(t)\mu(E)$ ، وبتعويض t بعبارته نجد المتباينة المطلوبة.■

نستطيع بفضل اللازمة التالية إزالة شرط محدودية القياس بإضافة دالة قابلة للجمع يتكفل بهذا الشرط، لدينا

لازمة 54.6: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريّاً، $\varphi:I=]a,b[\to\mathbb{R}$ دالة محدّبة و $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ بحيث $f(E)\subset I$. عندئذ، مــن أجــل كــلّ دالة μ-قابلة للجمع $p:E\to[0,\infty]$ بحيث $pf\in\mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ و $\int_E p\,d\mu>0$ فإنّ

$$.\ \varphi\left(\frac{1}{\int_E p\,d\mu}\int_E pf\,d\mu\right)\le\frac{1}{\int_E p\,d\mu}\int_E p(\varphi\circ f)\,d\mu$$

إثبات: نعرّف القياس الموجب $\nu:\Sigma\to[0,\infty]$ بـــ

$$.(\forall A\in\Sigma)\ ،\nu(A)=\int_A p\,d\mu$$

بما أنّ $0<\nu(E)=\int_E p\,d\mu<\infty$ و $\int_E pf\,d\mu=\int_E f\,d\nu<\infty$ حسب **التمرين 12.6**، السؤال 2)، عندئذ $f\in\mathcal{L}^1(E,\Sigma,\nu)$. بتطبيق متباينة جنسان في فضاء القياس (E,Σ,ν) نجد

$$،\varphi\left(\frac{1}{\nu(E)}\int_E f\,d\nu\right)\le\frac{1}{\nu(E)}\int_E\varphi\circ f\,d\nu$$

وباستعمال **التمرين 12.6**، السؤال 2) مرّة أخرى وتعويض $\nu(E)$ بـــ $\int_E p\,d\mu$ نحصل على المتباينة المطلوبة.■

تطبيق 55.6: لتكن $E=\{a_1,\dots,a_n\}$ و μ قياسًا موجبًا على $\mathcal{P}(E)$ معرّفًا بـــ $\mu(\{a_i\})=p_i>0$ ، من أجل $i=1,\dots,n$ بحيث $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.
باعتبار الدالة المحدّبة $\varphi(x)=e^x:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ ودالة قابلة للجمع $f:E\to]0,\infty[$ ، نجد أنّ

$$،\mu(E)=\sum_{i=1}^{n}\mu(\{a_i\})=\sum_{i=1}^{n}p_i=1$$

وبتطبيق متباينة جنسان نرى أنّ

$$\varphi\left(\int_E f\,d\mu\right)=e^{\sum_{i=1}^{n}p_if(a_i)}=\prod_{i=1}^{n}\left(e^{f(a_i)}\right)^{p_i}$$
$$\le\int_E\varphi\circ f\,d\mu=\int_E e^{f(x)}\,d\mu(x)=\sum_{i=1}^{n}p_ie^{f(a_i)}$$

1) بوضع $y_i=e^{f(a_i)}$ ، من أجل $i=1,\dots,n$ ، تأخذ المتباينة الأخيرة الشكل التالي:

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i} = y_1^{p_1}.y_2^{p_2}...y_n^{p_n} \le \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \quad (5)$$

بما أنّ الدالة f اختياريّة فإنّ المتباينة (5) محققة من أجل كلّ جملة من الأعداد الموجبة $\{y_1,...,y_n\}$.

2) بوضع $q_i = 1/p_i$ و $z_i = y_i^{p_i}$ ، من أجل $i = 1,...,n$، في (5) نحصل على

$$\prod_{i=1}^{n} z_i = z_1.z_2...z_n \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} z_i^{q_i}, \quad (6)$$

فهي إذن محققة من أجل كلّ جملة من الأعداد الموجبة $\{z_1,...,z_n\}$.

تسمّى المتباينة (6) بمتباينة يونغ[4] (Young)، مع التذكير أنّ $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} = 1$.

حالة خاصّة: بأخذ $p_i = 1/n$، $i = 1,...,n$، في (5) فإنّنا نحصل على

$$(y_1 y_2 ... y_n)^{1/n} \le \frac{1}{n}(y_1 + y_2 + ... + y_n), \quad \forall y_i \ge 0$$

وهذا يثبت أنّ **الوسط الهندسي** هو دومًا أصغر من **الوسط الحسابي**.

نعود الآن لمبرهنة **التقارب المرجّح**، لنقدّم تطبيقين عمليين هامّين، وهما **اشتقاق** و**اتّصال** التكامل المتعلّق بوسيط *(parameter)* معيّن y. نلفت انتباه القارئ أنّه في هاتين المبرهنتين بإمكاننا تعويض العبارة "**أينما كان**" بـ . "**تقريبًا أينما كان**". لدينا

مبرهنة 56.6 (اتّصال التكامل): ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و (F,d) فضاءً متريًا و $f: E \times F \to \mathbb{R}$ دالة تتمتّع بالشروط التالية:

أ) $x \mapsto f^y(x) := f(x,y)$ دالة $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-قابلة للقياس، $(\forall y \in F)$.

ب) $y \mapsto f_x(y) := f(x,y)$ دالة متّصلة عند نقطة $y_0 \in F$، $(\forall x \in E)$.

ج) توجد دالة قابلة للجمع $g: E \to [0,\infty]$ بحيث

---

[4]) وليام هنري يونغ [William Henry Young] (1863–1942)

$$\left|f(x,y)\right| \le g(x)\text{ ،}\left(\forall(x,y)\in E\times F\right).$$

عندئذ الدالة $f^{y}\in\mathcal{L}^{1}(E,\Sigma,\mu)$ ،$(\forall y\in F)$، إضافة إلى أنّ

$$\lim_{y\to y_0}\int_E f(x,y)\,d\mu(x)=\int_E f(x,y_0)\,d\mu(x)\text{ ،}$$

(أي أنّ الدالة $y\mapsto\int_E f(x,y)\,d\mu(x)$ متّصلة عند النقطة y_0).

إثبات: ينتج فورًا عن الشرط ج) أنّ $f^{y}\in\mathcal{L}^{1}(E,\Sigma,\mu)$ ،$(\forall y\in F)$.
لنثبت أنّ الدالة $y\mapsto\int_E f(x,y)\,d\mu(x)$ متّصلة عند النقطة y_0.
بالتأكيد، لتكن $\{y_n\}_{n\ge1}\subset F$ بحيث $y_n\to y_0$، عندما $n\to\infty$. تحقّق المتتالية $\{f(x,y_n)\}_{n\ge1}$ ما يلي:

1) $\{f^{y_n}\}_{n\ge1}\subset\mathcal{M}(E,\Sigma)$، 2) $f^{y_n}\xrightarrow{s}f^{y_0}$ ، عندما $n\to\infty$،
و 3) $\left|f^{y_n}(x)\right|\le g(x)$ ،$\left(\forall(x,n)\in E\times\mathbb{N}^*\right)$.

نستنتج من مبرهنة التقارب المرجّح أنّ

$$\int_E f(x,y_0)\,d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_E f(x,y_n)\,d\mu(x)\text{ ،}$$

وهذا يثبت اتّصال الدالة $y\mapsto\int_E f(x,y)\,d\mu(x)$ لكون المتتالية $\{y_n\}_{n\ge1}$ اختياريّة.■

مبرهنة 57.6 (قابلية الاشتقاق لدى التكامل): ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، $J=]a,b[$ فترة مفتوحة من $\mathbb{R}$ و $f:E\times J\to\mathbb{R}$ دالة تتمتّع بالشروط التالية:

أ) $x\mapsto f^{y}(x):=f(x,y)$ دالة $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-قابلة للقياس، $(\forall y\in J)$،

ب) توجد نقطة $y_0\in J$ بحيث تكون الدالة $x\mapsto f^{y_0}(x):=f(x,y_0)$ قابلة للجمع على E،

ج) المشتقّة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ موجودة على $E\times J$،

ه) توجد دالة قابلة للجمع $g:E\to[0,\infty]$ بحيث
$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le g(x)$ ، $(\forall(x,y)\in E\times J)$.

عندئذ الدالة $f^y\in\mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ ، $(\forall y\in J)$، إضافة إلى أنّ الدالة $h:J\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ $h(y)=\int_E f(x,y)d\mu(x)$ قابلة للاشتقاق على J، ولدينا

$$h'(y)=\frac{d}{dy}\int_E f(x,y)d\mu(x)=\int_E\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)d\mu(x).$$

إثبات: نستنتج من مبرهنة القيمة الوسطى أنّ

$$|f(x,y)|\le|f(x,y_0)|+|y-y_0|g(x)\text{ ،}(\forall(x,y)\in E\times J)\text{،}$$

وعليه فإنّ $f^y\in\mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ ، $(\forall y\in J)$.

ليكن الآن $z_0\in J$ و $\{z_n\}_{n\ge1}\subset J$ بحيث $z_n\ne z_0$ ، $(\forall n\ge1)$ و $z_n\to z_0$ ، عندما $n\to\infty$. بوضع

$$F_n(x)=\frac{f(x,z_n)-f(x,z_0)}{z_n-z_0}\text{ ،}(\forall n\ge1)\text{،}$$

نجد أنّ $\{F_n\}_{n\ge1}\subset\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ و $\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,z_0)$ ، $(\forall x\in E)$، إذن $x\mapsto\frac{\partial f}{\partial y}(x,z_0)$ دالة قابلة للقياس. نستنتج مرّة أخرى من مبرهنة القيمة الوسطى أنّ $F_n(x)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\theta_n)$ من أجل $min(z_0,z_n)<\theta_n<max(z_0,z_n)$ ، ومنه
$|F_n(x)|\le g(x)$ ، $(\forall(x,n)\in E\times\mathbb{N}^*)$.

أخيراً، لدينا بفضل مبرهنة التقارب المرجّح ما يلي

$$h'(z_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{h(z_n)-h(z_0)}{z_n-z_0}=\lim_{n\to\infty}\int_E F_n(x)d\mu$$
$$=\int_E\lim_{n\to\infty}F_n(x)d\mu=\int_E\frac{\partial f}{\partial y}(x,z_0)d\mu$$

وبما أنّ z_0 اختياريّ في J فإنّنا نحصل على النتيجة المطلوبة.■

هذا الآن تعميم لمبرهنة إغوروف 34.4 إلى فضاءات قياس غير منتهية:

مبرهنة [إغوروف] 58.6: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا و $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس من E نحو $\mathbb{R}^N$، متقاربة تقريبًا أينما كانت إلى f. نفرض وجود $g\in\mathcal{L}_+^1(E)$ بحيث $\|f_n\|\leq g$، $(\forall n\geq 1)$، μ-تاك. عندئذ $f_n\xrightarrow{a.u.}f$. ($\|.\|$ هو المعيار الإقليدي في $\mathbb{R}^N$، وتعني $a.u$ تقريبًا بانتظام).

إثبات: نعرّف من أجل كلّ m و n في $\mathbb{N}^*$ المجموعات

$$A_{mn}=\bigcap_{k\geq n}\left\{x\in E:\|f_k(x)-f(x)\|\leq\tfrac{1}{m}\right\}.$$

ليكن $x\in E$، لدينا $f_n(x)\nrightarrow f(x)$، عندما $n\to\infty$، إذا وإذا فقط وجد $m\in\mathbb{N}^*$ بحيث مهما يكن $n\in\mathbb{N}$ يوجد مؤشر $n\leq k$ و $\|f_k(x)-f(x)\|>\frac{1}{m}$، إذا وإذا فقط وجد $m\in\mathbb{N}^*$ بحيث

$$x\in\bigcap_{n\geq 0}\bigcup_{k\geq n}\left\{x\in E:\|f_k(x)-f(x)\|>\tfrac{1}{m}\right\},$$

إذا وإذا فقط $x\in\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 0}A_{mn}^c$.

إذن،

$$N_0:=\left\{x\in E:f_n(x)\nrightarrow f(x)\right\}=\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{n\geq 0}A_{mn}^c,$$

وهي مجموعة مهملة. نرى من الاحتواء $\bigcap_{n\geq 0}A_{mn}^c\subset N_0$ أنّ $\mu\left(\bigcap_{n\geq 0}A_{mn}^c\right)=0$. نلاحظ من جهة أخرى أنّ $A_{mn}\subset A_{m(n+1)}$، $(\forall m\geq 1,\forall n\geq 0)$، وبالتالي، $A_{m(n+1)}^c\subset A_{mn}^c$، $(\forall m\geq 1,\forall n\geq 0)$، أي أنّ المتتالية $\left\{A_{m(n+1)}^c\right\}_{n\geq 0}$ متناقصة. يبقى الآن التأكد من وجود مؤشر $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث $\mu\left(A_{mn_0}^c\right)<\infty$، من أجل كلّ $m\in\mathbb{N}^*$. بالتأكيد، ينتج عن المتباينة $\|f_n\|\leq g$، $(\forall n\geq 1)$، μ-تاك أنّ $\|f\|\leq g$، μ-تاك، وعليه فإنّ $\|f_n-f\|\leq 2g$، $(\forall n\geq 1)$، μ-تاك. إذن

ومن ثمّ

$$\mu\left(A_{mn}^{c}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in E : 2g > \tfrac{1}{m}\right\}\right) = \int_{\{2mg>1\}} 1 d\mu$$
$$\leq \int_E 2mg d\mu = 2m \int_E g d\mu < \infty$$

إذن $\mu\left(A_{mn}^{c}\right) < \infty$ ، $(\forall m \geq 1, \forall n \geq 0)$. بتطبيق الخاصية الثانية للتقارب نحصل على

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_{mn}^{c}\right) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(A_{mn}^{c}\right) = 0 \cdot$$

إذن، يوجد من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ و $m \in \mathbb{N}^*$ مؤشر $n_{\varepsilon,m} \in \mathbb{N}^*$ بحيث $\mu\left(A_{mn_{\varepsilon,m}}^{c}\right) < \varepsilon / 2^{m+1}$.

أخيرًا، بوضع $A = \bigcap_{m\geq 1} A_{mn_{\varepsilon,m}}$ ، نجد أنّ $A \in \Sigma$ و

$$\mu\left(A^{c}\right) \leq \sum_{m\geq 1} \mu\left({A^{c}}_{mn_{\varepsilon,m}}\right) < \varepsilon \cdot$$

فيما يخصّ التقارب المنتظم على المجموعة الجزئية A نلاحظ أنّ من أجل كلّ $m \in \mathbb{N}^*$ وكلّ $n_{\varepsilon,m} \leq k$ ($n_{\varepsilon,m}$ المعرّف أعلاه) فإنّ

$$\left\|f_k(x) - f(x)\right\| \leq \tfrac{1}{m} \text{ ، } (\forall x \in A) \text{ ،}$$

(لأنّ $x \in A$ يستلزم أنّ $x \in A_{mn_{\varepsilon,m}}$ ، مهما يكن $m \in \mathbb{N}^*$).

وهذا يثبت أنّ $f_n \xrightarrow{u} f$ على A. ■

3- مكاملة الدوال المركّبة

لتكن $f : E \to \mathbb{C}$ دالة ذات قيم مركّبة معرّفة على مجموعة E. توجد دالتان حقيقيتان $f_1, f_2 : E \to \mathbb{R}$ بحيث $f = f_1 + if_2$ ، (أي $f_1 = \mathrm{Re} f$ و $f_2 = \mathrm{Im} f$).

تعريف 59.6: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، نقول عن دالة مركّبة $f:E\to\mathbb{C}$ إنّها $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-قابلة للقياس إذا وإذا فقط كانت f_1 و f_2 دالتين $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-قابلتين للقياس.

تعريف 60.6: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $f:E\to\mathbb{C}$ دالة مركّبة قابلة للقياس، نعرّف تكامل f وفق القياس الموجب μ على E بـ

$$\int_E fd\mu=\int_E f_1d\mu+i\int_E f_2d\mu\text{ ،}$$

بشرط وجود التكاملين الحقيقيين $\int_E f_1d\mu$ و $\int_E f_2d\mu$.

نقول عن f إنّها قابلة للجمع (أو قابلة للمكاملة) على E إذا وإذا فقط كانت $Re\,f$ و $Im\,f$ قابلتين للجمع على E.

ترميز: سوف نرمز لمجموعة الدوال المركّبة القابلة للجمع بالنسبة إلى فضاء قياس (E,Σ,μ) بـ $\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$ أو $\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E)$ إن لم يكن هنالك أيّ لبس.

نشير إلى أنّ كلّ ما تطرّقنا إليه في الحالة الحقيقية يبقى صحيحًا في الحالة المركّبة. لدينا

خواص عامة 61.6:

1) ليكن $f,g\in\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$ و $c\in\mathbb{C}$، عندئذ $f+g\in\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$، cf.

2) لدينا من أجل كلّ $f\in\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$ المتباينة التالية:

$$\left|\int_E fd\mu\right|\le\int_E|f|d\mu.$$

3) (التقارب المنتظم): ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيا و $\{f_n\}_{n\ge1}$ متتالية من الدوال الـ $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{C}))$-قابلة للقياس والمحدودة على E بحيث $f_n\xrightarrow{u}f$ على E. عندئذ

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=\int_E f d\mu .$$

4) **(التقارب المرجّح): لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$ متتالية متقاربة تقريبًا أينما كانت إلى دالة f على E. نفرض وجود دالة قابلة للجمع $g:E\to[0,\infty]$ بحيث**

$|f_n(x)|\leq g(x)$، $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$، ($\mu$-تأك، $x\in E$).

عندئذ $f\in\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$، ولدينا:

$$\int_E f d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu .$$

إثبات: الخاصيتان 1) و2) واضحتان (تمرين).

3) ينتج عن كون f نهاية منتظمة لمتتالية من الدوال المحدودة على E ذات القياس المنتهي أنّها دالة قابلة للجمع (مع الملاحظة أنّ كلّ عناصر المتتالية هي دوال قابلة للجمع). لدينا إذن

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n d\mu-\int_E f d\mu\right|&=\left|\int_E (f_n-f)d\mu\right|\leq\int_E|f_n-f|d\mu\\&\leq\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\mu(E)\end{aligned}$$

وبالمرور إلى النهاية نجد أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_E f_n d\mu-\int_E f d\mu\right|\leq\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x\in E}|f_n(x)-f(x)|\mu(E)\right\}=0 .$$

4) أوّلاً، لدينا f دالة قابلة للقياس كنهاية (تأك) لدوال قابلة للقياس. من جهة أخرى، لدينا $|f_n-f|\to 0$ μ-تأك و $|f_n(x)-f(x)|\leq 2g(x)$، $(\forall n\geq 1)$، (μ-تأك $x\in E$)، عندئذ نحصل بفضل مبرهنة التقارب **المرجّح** (الصيغة الحقيقية) على

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\int_E (f_n-f)d\mu\right|&\leq\lim_{n\to\infty}\int_E|f-f_n|d\mu\\&=\int_E\lim_{n\to\infty}|f-f_n|d\mu=0\end{aligned}$$

وهو المطلوب.■

ملاحظة 62.6: يتّضح من الخواص السابقة أنّ $\left(\mathfrak{L}^{1}_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu),+,\cdot\right)$ فضاء متّجهات على الحقل $\mathbb{C}$.

تطبيق 63.6: لتكن $f\in\mathfrak{L}^{1}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$. لنثبت أنّ **مُحولّة فورييه**[5] (*Fourier transform*) للدالة f المعطاة بـ .

$$\hat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-iwx}f(x)dm(x):\mathbb{R}\to\mathbb{C}$$ ،

دالة متّصلة على $\mathbb{R}$.

بالتأكيد، ينتج عن كون f قابلة للجمع على $\mathbb{R}$ أنّ $e^{-iwx}f(x)$ هي بدورها قابلة للجمع على $\mathbb{R}$.

لتكن $\{w_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}$ بحيث $w_n\to w_0$، عندما $n\to\infty$. نضع $f_n(x)=e^{-iw_nx}f(x)$ و $f_0(x)=e^{-iw_0x}f(x)$.

من الواضح أنّ $f_n\xrightarrow{s}f_0$، عندما $n\to\infty$ و $|f_n|=|f_0|=|f|$، $(\forall n\geq 1)$، إذن كلّ عناصر المتتالية قابلة للجمع على $\mathbb{R}$. نستنتج من **مبرهنة التقارب المرجّح** (الصيغة المركّبة) أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n dm=\int_{\mathbb{R}}f_0 dm$$ ،

وهذا يؤكّد أنّ $\lim_{n\to\infty}\hat{f}(w_n)=\hat{f}(w_0)$، أي $\hat{f}$ متّصلة عند النقطة w_0، وبما أنّ w_0 اختياري في $\mathbb{R}$ فإنّ $\hat{f}$ متّصلة على $\mathbb{R}$.■

4- مقارنة تكامل لوبيغ بتكامل ريمان

نشير أوّلا بـــ J للفترة المغلقة والمحدودة $J=[a,b]$، حيث

---

[5] جوزاف فورييه [Jean Baptiste Joseph Fourier] (1768-1830)

$-\infty < a < b < \infty$، كما نذكر أنّ دالة حقيقية $f : J \to \mathbb{R}$ هي (ر)-قابلة للمكاملة على J (أي $f \in \mathcal{R}(J)$) إذا وإذا فقط كان

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_J}\{S(f,P)\} = \sup_{P\in\mathcal{P}_J}\{s(f,P)\}، \qquad (7)$$

حيث $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ تقسيم للفترة J، $\mathcal{P}_J$ أسرة كلّ تقسيمات الفترة J و $s(f,P)$ (على الترتيب، $S(f,P)$) مجموع داربو الأدنى (على الترتيب، الأعلى) للدالة f الموافقة للتقسيم P.
إذن، حسب التعريف، فالقيمة المشتركة (7) تمثّل تكامل ريمان f على J.

قد يتساءل القارئ عن العلاقة التي تربط تكامل لوبيغ بتكامل ريمان،

والإجابة الجزئية عن هذا التساؤل تحملها المبرهنة التالية حيث تنصّ على أنّ كلّ دالة محدودة على J و(ر)-قابلة للمكاملة هي (ل)-قابلة للمكاملة وكلا التكاملين متساويين على J. لدينا

مبرهنة 64.6: كلّ دالة حقيقية f محدودة على الفترة المتراصّة $J = [a,b]$ و(ر)-قابلة للمكاملة هي (ل)-قابلة للمكاملة، ولدينا

$$\int_J f\,dm = \int_a^b f\,dx .$$

إثبات: لتكن $\{P_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة من التقسيمات للفترة J. نضع

$$\sigma_1 = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \lim_{n\to\infty} S(f,P_n).$$

ينتج عن كون f (ر)- قابلة للمكاملة أنّ $\int_a^b f\,dx = \sigma_1 = \sigma_2$ (حسب (7)). نضع

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{t\in J_i}\{f(t)\}\chi_{J_i}(x) \quad \text{و} \quad v_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in J_i}\{f(t)\}\chi_{J_i}(x).$$

لدينا فورًا من أجل كلّ $n \geq 1$:

ث. $\int_J u_n\, dm = s(f, P_n)$ و $\int_J v_n\, dm = S(f, P_n)$.

ينتج عن كون f محدودة وجود ثابت $0 < M < \infty$ بحيث $|f(x)| \leq M$، $(\forall x \in J)$، ومنه $|u_n(x)| \leq 2M$ و $|v_n(x)| \leq 2M$، $(\forall x \in J)$، $(\forall n \geq 1)$. نستنتج من الخاصيتين أ) وت) وجود دالتين قابلتين للقياس (بمفهوم لوبيغ) $u, v : J \to \mathbb{R}$ بحيث $u_n \xrightarrow{s} u$ و $v_n \xrightarrow{s} v$، وعليه فإنّ من أجل كلّ $n \geq 1$، لدينا

$u \leq f \leq v$، (حسب ب))، $v_n - u_n \xrightarrow{s} v - u$ و $|v_n - u_n| \leq 4M$.

بتطبيق مبرهنة التقارب المحدود 42.6 نحصل على

$$\int_J (v-u)dm = \lim_{n\to\infty} \int_J (v_n - u_n)dm = \lim_{n\to\infty} \left(\int_J v_n dm - \int_J u_n dm \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) - \lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = 0$$

وهكذا فإنّ $u = v$، m–تأك، (مع التذكير أنّ $u \leq f \leq v$)، وعليه فإنّ $f = v$، m–تأك، إذن f قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ. لدينا من جهة أخرى،

$$\int_J |f| dm \leq \int_J M dm = M(\sup J - \inf J) < \infty \text{ ،}$$

ومنه $f \in \mathfrak{L}^1(J, J \cap \mathcal{L}, m)$. بتطبيق مبرهنة التقارب المحدود مرّة ثانية للمتتالية $\{v_n\}_{n\geq 1}$ نجد أنّ $v \in \mathfrak{L}^1(J, J \cap \mathcal{L}, m)$، إضافة إلى أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \int_J v_n dm = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \int_J v dm = \int_J f dm = \int_a^b f(x)dx$$

وهذا يثبت تساوي التكاملين، أي $\int_J f dm = \int_a^b f(x)dx$. ■

لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة 65.6: لتكن f دالة حقيقيّة معرّفة على فترة $I \subset \mathbb{R}$.

1) إذا كانت f (ر)-قابلة للمكاملة على I فإنّها قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ.
2) إذا كانت f و $|f|$ (ر)-قابلتين للمكاملة على I فإنّ $f \in \mathcal{L}^1(I, I \cap \mathcal{L}, m)$، إضافة إلى أنّ

$$\int_I f dm = \int_\alpha^\beta f(x) dx$$ ، (حيث $\alpha = \inf I$ و $\beta = \sup I$).

إثبات: نفرض على سبيل المثال أنّ $I =]\alpha, \beta[$.

1) ينتج عن كون f (ر)- قابلة للمكاملة على I أنّها (ر)-قابل للمكاملة على كلّ فترة متراصة من I، وبالتالي فهي قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ على I.

2) لتكن $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}$ و $\{\beta_n\}_{n\geq 1}$ متتاليتين من I بحيث $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \searrow \alpha$ و $\{\beta_n\}_{n\geq 1} \nearrow \beta$. لدينا بمقتضى المبرهنة 64.6 ما يلي

$$+\infty > A = \int_\alpha^\beta |f| dx \geq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |f|(x) dx$$
$$= \int_{[\alpha_n, \beta_n]} |f| dm = \int_I |f| \chi_{]\alpha_n, \beta_n[} dm$$

بوضع $f_n = |f| \chi_{]\alpha_n, \beta_n[}$، $(\forall n \geq 1)$، ثمّ استعمال متباينة فاتو نجد

$$\int_I |f| dm = \int_I \underline{\lim} f_n \, dm \leq \underline{\lim} \int_I f_n \, dm \leq A < \infty$$ ،

ومنه $f \in \mathcal{L}^1(I, I \cap \mathcal{L}, m)$.

لدينا من جهة أخرى بفضل الصيغة المتّصلة لمبرهنة التقارب المرجّح (انظر تمرين 23) ما يلي

$$\int_\alpha^\beta f dx = \lim_{\substack{a \to \alpha^+ \\ b \to \beta^-}} \int_a^b f dx = \lim_{\substack{a \to \alpha^+ \\ b \to \beta^-}} \int_{[a,b]} f dm$$
$$= \lim_{b \to \beta^-} \left\{ \lim_{a \to \alpha^+} \int_{]\alpha, b]} f \chi_{[a, \beta[} dm \right\} = \lim_{b \to \beta^-} \int_{]\alpha, b]} f dm$$
$$= \lim_{b \to \beta^-} \int_{]\alpha, \beta[} f \chi_{]\alpha, b]} dm = \int_I |f| dm$$

وهو المطلوب.■

ترميز: إذا كانت f دالة (ل)- قابلة للمكاملة على فترة $J\subset\mathbb{R}$ وفق قياس لوبيغ m فإنّنا نكتب $\int_a^b fdx$ $\left(a=\inf J\right.$ و $\left.b=\sup J\right)$ بدلا من $\int_J fdm$.

تميّز المبرهنة التالية الدوال الـــ(ر)-قابلة للمكاملة عن غيرها على فترة منتهية. لدينا

مبرهنة 66.6 [لوبيغ]: **لتكن f دالة حقيقية محدودة على فترة متراصة $J=[a,b]$. عندئذ، تكون f (ر)-قابلة للمكاملة إذا وإذا فقط كانت متّصلة m-تاك.**

إثبات: نذكر أوّلا أنّ مجموعة نقاط تقطّع الدالة f هيّ قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ لأنّ متمّمتها مجموعة مــن نمط G_δ، وبالـــتالي فـــهي مجموعة بوريليّة.
سوف نستعمل نفس الرموز الواردة في بيان المبرهنة **64.6**. لقد رأينا أنّ كون f (ر)- قابلة للمكاملة يستلزم أنّ $u=f=v$ تقريبًا أينما كان.
نضع الآن

$$\Gamma=\left\{x\in J: u(x)=f(x)=v(x)\ \&\ x\notin P_n,\forall n\geq 1\right\}.$$

لتكن $x_0\in\Gamma$، نفرض أنّ f غير متّصلة عند x_0، عندئذ يوجد $\varepsilon>0$ وتوجد $\{x_n\}_{n\geq 1}$ بحيث $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ و $\left|f(x_n)-f(x_0)\right|\geq\varepsilon$، $(\forall n\geq 1)$، ومنه $v(x_0)-u(x_0)\geq\varepsilon>0$، وهذا تناقض.
إذن f دالة متّصلة تقريبًا أينما كان على J، وذلك لكون المجموعة $J\setminus\Gamma$ مهملة.
عكسيًّا، لتكن x_0 نقطة اتّصال لـــ f، عندئذ من أجل كلّ $\varepsilon>0$ توجد فترة $J_\delta=]x_0-\delta,x_0+\delta[\subset J$ بحيث $\sup\limits_{t\in J_\delta} f(t)-\inf\limits_{t\in J_\delta} f(t)<\varepsilon$.
من أجل العدد δ و n_0 كبير بقدر كاف، يوجد تقسيم P_{n_0} بحيث x تنتمي إلى فترة جزئية $]t_{i-1},t_i[$ من J_δ. نختار من أجل كلّ $n>n_0$

تقسيم P_n بحيث $P_{n_0} \subset P_n$ لنحصل على

$0 \le v_n(x_0) - u_n(x_0) < \varepsilon$، $(\forall n \ge n_0)$،

ومنه $u(x_0) = v(x_0)$.

بما أنّ f متّصلة تقريبًا أينما كانت فإنّنا نحصل على $u = v$، m–تاك، ومن ثمّ فإنّ $\int_J udm = \int_J vdm$. نستنتج من مبرهنة التقارب المحدود أنّ

$$\lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \int_J u_n dm = \int_J udm$$
$$\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} \int_J v_n dm = \int_J vdm$$

إذن $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n)$ ، ومنه f (ر)-قابلة للمكاملة على J، ولدينا $\int_J vdm = \int_J udm = \int_a^b f(x)dx$. ■

مثال 67.6: نعتبر الدالة $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ المعرّفة بـــ

$f = 1 - \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$،

لدينا $f = 1$، m–تاك، وبالتالي تكاملها بمفهوم لوبيغ يساوي 1، بينما مجموعي داربو الأدنى والأعلى هما 0 و1، على الترتيب. ومن ثمّ فإنّها ليست (ر)- قابلة للمكاملة على $[0,1]$.

يكمن الخلل في كون مجموعة نقاط تقطّع f هي الفترة $[0,1]$ بأكملها، وهي غير مهملة.

ملاحظة 68.6: إنّ فرضية $|f|$ دالة (ر)-قابلة للمكاملة هي ضرورية للغاية وإلاّ فلا معنى لتكامل لوبيغ في مثل هذه الحالة، ويعود السبب إلى أنّ كون f (ل)- قابلة للمكاملة يستلزم أنّ $|f|$ (ل)-قابلة للمكاملة. نشير إلى أنّ هذه الحالة لا تظهر إلاّ عندما تكون f ذات إشارة اختياريّة.

يبيّن المثال التالي أهمّية هذا الشرط:

مثال 69.6: نعتبر الدالة $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّفة بـــ

$$. f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

إنّ f ليست (ل)- قابلة للمكاملة لعدم تحقيقها للشرط $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx=+\infty$ ، بينما تكامل ريمان المعتلّ موجود، ولدينا $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$. نقول حينئذ أنّ التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} fdx$ هو نصف متقارب.

ملاحظة 70.6: في الواقعّ كلّ الخصائص المحصلّ عليها بفضل تكامل لوبيغ تبقى صحيحة بالنسبة إلى تكامل ريمان بما فيها **متباينة فاتو** و**مبرهنة التقارب الرّتيب** غير أنّ قابلية المكاملة لدى النّهاية ليست على العموم مضمونة إن لم تُفرض في المعطيات. فعلى سبيل المثال، توجد متتاليات من الدوال الـــ (ر)-قابلة للمكاملة والرتيبة بحيث تكون نهاياتها غير قابلة للمكاملة، يعود هذا لعدم تمام فضاء الدوال (ر)-القابلة للمكاملة بالنّسبة إلى نصف المعيار

$$.\|f\|_1=\int_{[a,b]}|f|dm$$

مثال 71.6: نعتبر مجموعة كانتور من المرتبة $0<\alpha<1$:

$C_\alpha=J_0\setminus\bigcup_{n\geq 1}\Theta_n$ ، حيث $J_0=[0,1]$. نعرّف من أجل كلّ $n\geq 1$ الدالة $f_n=\chi_{G_n}$ ، حيث $G_n=\bigcup_{k=1}^{n}\Theta_k$. من السهل التأكد من أنّ

$$.f_n\xrightarrow{s}f=1-\chi_{C_\alpha}$$

إنّ النهاية f غير متّصلة على C_α. لإثبات هذه القضية نفرض العكس، لتكن $x_0\in C_\alpha$ نقطة اتّصال لـــ f . بأخذ $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ، يوجد $\delta>0$ بحيث من أجل كلّ $x\in J_0$ يحقّق $|x-x_0|<\delta$ فإنّ $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}$.

بما أنّ $\overset{o}{C}_\alpha=\varnothing$ ، فإنّه توجد $x\in J_0$ بحيث $|x-x_0|<\delta$ و $x\notin C_\alpha$ ، لدينا إذن $f(x)=1$ ، ومنه $|f(x)-f(x_0)|=|1-0|<\frac{1}{2}$ ، وهذا تناقض.

نستنتج فورًا من **المبرهنة 66.6** أنّ f ليست (ر)- قابلة للمكاملة لأنّ

$.m(C_\alpha)=1-\alpha\neq 0$

لنثبت الآن أنّ المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ كوشية بالنسبة لنصف المعيار $\|f\|_1=\int_{J_0}|f|dx$. يكفي الملاحظة أنّ $\{f_n\}_{n\geq 1}$ محدودة بانتظام و $f_n \xrightarrow{s} f$ لنحصل بفضل **مبرهنة التقارب المحدود** على $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|_1=0$ ، وبالتالي فهي متتالية كوشية على J_0.

لدينا من جهة

$$\int_{J_0}|f|dm=\int_{J_0}\left|1-\chi_{C_\alpha}\right|dm=\int_{J_0}\left(1-\chi_{C_\alpha}\right)dm$$
$$=1-(1-\alpha)=\alpha<\infty$$

أي f دالة (ل)-قابلة للمكاملة على J_0. ومن جهة أخرى، فإنّ كلّ حدود المتتالية f_n هي (ر)-قابلة للمكاملة لأنّ مجموعة نقاط تقطّع f_n مهملة. نشير في الأخير أنّه لا توجد دالة (ر)-قابلة للمكاملة g بحيث $\int_0^1|f_n-g|dx\to 0$ وإلا وجدنا

$$\int_0^1|f-g|dx\leq\int_0^1|f-f_n|dx+\int_0^1|f_n-g|dx\to 0 ،$$

أي $\int_0^1(f-g)dx=0$ ، ومنه $\int_0^1 fdx=\int_0^1 gdx$ ، وهذا يعني أنّ f دالة (ر)-قابلة للمكاملة، وهو تناقض مع ما بيّنا أعلاه.

العبرة: فضاء الدوال الـ(ر)-قابلة للمكاملة والمحدودة على $J_0=[0,1]$ ليس تامّا بالنسبة إلى نصف المعيار $\|f\|_1=\int_{J_0}|f|dm$.

مسألة محلولة

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متّصلة و T-دوريّة، و لتكن $A\in\mathcal{L}$ بحيث $.m(A)<\infty$

أحسب النهاية التالية: $.\lim_{p\to\infty}\int_A f(px)dx$

تطبيق: أحسب هذه النهاية من أجل الدوال الدورية التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\cos x+\sin x+2} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{1}{1-\cos\alpha\cos x}،$$

حيث $\alpha\neq 0(mod[\pi])$.

الحل:

إذا كانت A مجموعة جزئية مهملة فإنّ $\lim_{p\to\infty}\int_A f(px)dx=0$.

نفرض إذن أنّ $0<m(A)<\infty$ ولنحسب النهاية من أجل فترة مفتوحة $A=]a,b[$. ليكن $p\geq\left[\frac{3T}{b-a}\right]$ مثبتًا، يوجد عددان طبيعيان m و n بحيث

$$\frac{m}{p}T\leq a<\frac{m+1}{p}T\leq\frac{n}{p}T\leq b<\frac{n+1}{p}T،$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_{]a,b[}f(px)dx&=\int_{\left]a,\frac{m+1}{p}T\right[}f(px)dx\\&+\sum_{k=1}^{n-m-1}\int_{\left]\frac{m+k}{p}T,\frac{m+k+1}{p}T\right[}f(px)dx+\int_{\left]\frac{n}{p}T,b\right[}f(px)dx\\&=\int_a^{\frac{m+1}{p}T}f(px)dx+\int_{\frac{n}{p}T}^{b}f(px)dx+\frac{n-m-1}{p}\int_0^T f(y)dy\end{aligned}$$

نضع $M=\sup_{x\in[0,T]}|f(x)|$، عندئذ

$$\left|\int_{]a,b[}f(px)dx-\frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)dx\right|\leq\int_{\frac{m}{p}T}^{\frac{m+1}{p}T}|f(px)|dx$$

$$+\int_{\frac{n}{p}T}^{\frac{n+1}{p}T}|f(px)|dx+\left|\frac{b}{T}-\frac{a}{T}-\frac{n-m-1}{p}\right|\int_0^T f(x)dx$$
$$\leq \frac{M}{p}T+\frac{M}{p}T+\left\{\left(\frac{b}{T}-\frac{n}{p}\right)+\left(\frac{a}{T}-\frac{m}{p}\right)+\frac{1}{p}\right\}MT\leq 5\frac{M}{p}T$$

و هكذا فإنّ

$$\lim_{p\to\infty}\int_{]a,b[}f(px)dx=\frac{b-a}{T}\int_0^T f(x)dx \ .$$

الحالة العامة:

ينتج عن كون A قابلة للقياس أنّ من أجل كلّ $0<\varepsilon$ توجد مجموعة مفتوحة $V\subset\mathbb{R}$ تحوي A بحيث $m(V\setminus A)<\varepsilon$. نعلم أنّ كلّ مفتوحة من $\mathbb{R}$ تكتب على شكل اتحاد قابل للعد لفترات مفتوحة ومنفصلة مثنى مثنى، وعليه فإنّ $V=\bigcup_{n\geq 1}]a_n,b_n[$. لدينا من جهة،

$$(\#)\qquad \left|\int_V f(px)dx-\int_A f(px)dx\right|=\left|\int_{V\setminus A}f(px)dx\right| \leq Mm(V\setminus A)<\varepsilon M$$

و من جهة أخرى فإنّ

$$\lim_{p\to\infty}\int_V f(px)dx=\lim_{p\to\infty}\sum_{n\geq 1}\int_{a_n}^{b_n}f(px)dx=\sum_{n\geq 1}\left(\lim_{p\to\infty}\int_{a_n}^{b_n}f(px)dx\right)$$
$$=\sum_{n\geq 1}\left(\frac{b_n-a_n}{T}\int_0^T f(x)dx\right)$$
$$=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx\right)\sum_{n\geq 1}(b_n-a_n)=\frac{m(V)}{T}\int_0^T f(x)dx$$

ينتج عن (#) وممّا سبق أنّ

$$\lim_{p\to\infty}\left|\int_V f(px)dx-\int_A f(px)dx\right|=\left|\lim_{p\to\infty}\int_A f(px)dx-\frac{m(V)}{T}\int_0^T f(x)dx\right|$$
$$=\left|\lim_{p\to\infty}\int_A f(px)dx-\frac{m(A)}{T}\int_0^T f(x)dx-\frac{m(V\setminus A)}{T}\int_0^T f(x)dx\right|\leq\varepsilon M$$

وهذا يؤدّي إلى

$$\left|\lim_{p\to\infty}\int_A f(px)\,dx-\frac{m(A)}{T}\int_0^T f(x)\,dx\right|\le \varepsilon M+\frac{m(V\setminus A)}{T}\int_0^T\left|f(x)\right|dx$$
$$\le \varepsilon M+\varepsilon M=2\varepsilon M$$

إذن

$\lim\limits_{p\to\infty}\int_A f(px)\,dx=\frac{m(A)}{T}\int_0^T f(x)\,dx$ ، لكون ε اختيارياً.

تطبيق:

1) إنّ الدالة $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+\sin x+2}$ متّصلة و 2π-دورية على المستقيم الحقيقي.

يكفينا حساب التكامل $J=\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$. بتعويض x بِـ $\pi-y$، ثمّ y بِـ $2Arctant$ نحصل على

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{3t^2+2t+1}dt=\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(t+1/3)^2+2/9}dt$$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\infty}\frac{1}{z^2+1}dz=\pi\sqrt{2}$$

و منه فإنّ

$$\lim_{p\to\infty}\int_A f(px)\,dx=\frac{m(A)}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$
$$=\frac{m(A)}{2\pi}\cdot\pi\sqrt{2}=\frac{m(A)}{\sqrt{2}}$$

2) إنّ الدالة $f(x)=\dfrac{1}{1-\cos\alpha\cos x}$ متّصلة و 2π-دورية على المستقيم الحقيقي. يكفي إذن حساب التكامل

$$.\,J=\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-\cos\alpha\cos x}dx$$

بتعويض x بِـ $\pi-y$، ثمّ y بِـ $2Arctant$ نحصل على

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{(1-\cos\alpha)t^2+1+\cos\alpha}dt$$

$$=\frac{2}{\sin\alpha}\left[Arc\tan\left(t\cdot \tan t\frac{\alpha}{2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}=\frac{2\pi}{|\sin\alpha|}$$

إذن، لدينا من أجل $\alpha\neq 0\ (mod[\pi])$،

$$\lim_{p\to\infty}\int_A f(px)\,dx=\frac{m(A)}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx$$

$$=\frac{m(A)}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{|\sin\alpha|}=\frac{m(A)}{|\sin\alpha|}$$

تمارين مقترحة

01 ليكن $\{a_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{C}$ و $\varphi:[1,\infty[\to\mathbb{C}$ دالة متّصلة الاشتقاق على $]1,+\infty[$. نضع $A(x)=\sum_{n\leq x}a_n$، $(\forall x\geq 1)$.

1) أثبت صحّة العلاقة التالية من أجل كلّ $1<x$:

$$\sum_{n\leq x}a_n\varphi(n)=A(x)\varphi(x)-\int_1^x A(t)\varphi'(t)\,dt .$$

2) أحسب التكاملين $\int_1^{\infty}\frac{[x]^*}{x^2}dx$ و $\int_1^{\infty}\frac{[x]^*}{x^s}dx$ من أجل $2<s$، حيث $[x]^*=x-[x]$ (الجزء العشري للعدد x).

3) استنتج ممّا سبق أنّ

$$(\forall s>2),\ \frac{1}{s-1}<\varsigma(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^s}<\frac{s}{s-1}.$$

02 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$.

1) أثبت أنّ $\int_E|f|\,d\mu=0$ إذا و إذا فقط كان $f=0$، μ-تاك.

$.(\forall A \in \Sigma), \int_A f^+ d\mu = \int_A f^- d\mu$

أثبت أنّ $f = 0$، μ–تاك.

2) ليكن λ عددًا حقيقيًّا، $J =]a,b[$ فترة مفتوحة و $f \in \mathfrak{L}^1(J)$ يحقق العلاقة

$$.(\forall y \in J), \frac{1}{y-a} \int_{]a,y[} f(x)dx = \lambda$$

أثبت أنّ $f = \lambda$، m–تاك J.

04 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، A و B مجموعتين قابلتين للقياس و $f \in \mathfrak{L}^1(A, A\cap\Sigma,\mu)$. إذا كان $\mu(A\Delta B)=0$ بيّن أنّ $f \in \mathfrak{L}^1(B,B\cap\Sigma,\mu)$ وَ $\int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu$.

05 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، A و B مجموعتين قابلتين للقياس. ليكن a و b عددين موجبين تمامًا. نعرّف المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ كالآتي

$f_n = a\chi_A$ إذا كان n فرديًّا، و $f_n = b\chi_B$ إذا كان n زوجيًّا.

أحسب $\int_E \underline{lim} f_n\,d\mu$ و $\underline{lim}\int_E f_n\,d\mu$. ماذا تستنتج ؟

06 (تعميم متباينة فاتو): لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ و $h \in \mathfrak{L}^1_+(E,\Sigma,\mu)$ بحيث: $f_n + h \geq 0$، $(\forall n \geq 1)$. أثبت أنّ

$$\cdot \int_E \underline{lim} f_n d\mu \leq \underline{lim}\int_E f_n d\mu$$

07 لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ بحيث $\lim_{n\to\infty} f_n = f$، μ–تاك

وَ $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu = \int_E f\,d\mu < \infty$.

أثبت أنّ $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu = \int_A f\,d\mu$، من أجل كلّ $A \in \Sigma$.

08 أحسب النهاية $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n dx$ من أجل $E=[0,1]$ وَ

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{x}}\chi_{\left[\frac{1}{n},1\right]} \text{ ، } (\forall n \geq 1).$$

09 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ متتالية متزايدة بحيث $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$. أثبت أنّ

$$\int_E f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f\,d\mu \text{ ،}$$

من أجل كلّ $f \in \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$.

10 لتكن $f \in \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$ و $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ متتالية متزايدة . نعرّف $f_n = \min(f,u_n)$ ، $(\forall n \geq 1)$.

أحسب النهاية التالية $\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu$.

11 لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$ متتالية متزايدة إلى دالة f μ-قابلة للجمع وموجبة تمامًا على E. أحسب النهاية $\lim_{n\to\infty} \int_E \sqrt[n]{f_n}\,d\mu$.

12 ليكن (E,Σ,μ) فضاءَ قياس، (E',Σ') فضاءً قابلاً للقياس و $\omega : E \to E'$ دالة (Σ,Σ')-قابلة للقياس.

1) نعرّف القياس الموجب $\mu_\omega : \Sigma' \to [0,\infty]$ بِ

$$(\forall B \in \Sigma'),\ \mu_\omega(B) = \mu\left(\omega^{-1}(B)\right).$$

- أثبت أنّ $\int_{E'} f\,d\mu_\omega = \int_E f\circ\omega\,d\mu$ ، من أجل كلّ $f \in \mathcal{M}^+(E',\Sigma')$.

2) نفرض الآن أنّ $\omega \in \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$ ونعرّف القياس الموجب $\nu : \Sigma \to [0,\infty]$ بِ $(\forall A \in \Sigma),\ \nu(A) = \int_A \omega\,d\mu$.

- أثبت أنّ $\left(\forall f \in \mathcal{M}^+(E,\Sigma)\right),\ \int_E f\,d\nu = \int_E f\omega\,d\mu$.

13 1) أثبت أنّ من أجل كلّ $f \in \mathcal{M}^+(E,\Sigma)$ و $a > 0$ لدينا المتباينة التالية

$$\mu\left(\{x \in E : f(x) \geq a\}\right) \leq \frac{1}{a}\int_E f\,d\mu.$$

2) إذا فرضنا أنّ $\mu \equiv \mu_c$ (قياس العدّ) و $\int_E f\,d\mu_c < \infty$ ، استنتج من 1) أنّ المجموعة $\{x \in E, f(x) > 0\}$ قابلة للعد.

3) نعرّف من أجل كلّ مجموعة جزئية $A \subset E$ المجموع

$$\sum_{x\in A} f(x) := sup\left\{\sum_{x\in J} f(x) : J \subset A, |J| < \infty\right\}.$$

أثبت أنّ $\sum_{x\in E} f(x) = \int_E f\,d\mu_c$.

14 ليكن $J =]0,1[$ و p عددًا طبيعيًّا بحيث $0 \le p \le 8$ ، نرمز بِ P_n للعدد الطبيعي $\overline{pp...p}$ حيث p يتكرّر n مرّة. نعرّف الدالة $f : J \to \mathbb{R}^+$ بِ

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in J \cap \mathbb{Q} \\ m = max\left\{n \in \mathbb{N} : \left[10^n x\right] = P_n\right\}, & x \notin J \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

(أي أنّ m هو عدد تكرار p مباشرة بعد الفاصلة عند كتابة x على الشكل العشري)

1) أثبت أنّ الدالة $\hat{f} : J \to \mathbb{R}^+$ المعرّفة بِ . $\hat{f}(x) = \sum_{n\ge 1} n\chi_{J_n}(x)$

تساوي f ، m–تقريبًا أينما كانت في J ، حيث

$$(\forall n \ge 0), J_n = [(P_{n+1}+1)\cdot 10^{-n-1}, (P_n+1)\cdot 10^{-n}[$$ مع $P_0 = 0$

2) أحسب قيمة التكامل $\int_J f\,dx$.

15 لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ و $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ بحيث

$\lim_{|x|\to\infty} |g(x)| = +\infty$ و $|f(x)| \le |g(x)|$ ، $(\forall x \in \mathbb{R})$.

أثبت أنّ الدالة $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ المعرّفة بِ

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)}, & g(x) \ne 0 \\ 0, & g(x) = 0 \end{cases}$$

عنصر من $\mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$.

16 هل الدوال التالية قابلة للمكاملة على مجموعة التعريف المرافقة لها؟

أ. $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ معرّفة بِ $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^{\alpha}}$ حيث $0<\alpha\le 1$.

ب. $g:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ معرّفة بِ $g(x)=e^{-ax}$، حيث $a>0$.

ت. $h:[1,\infty[\to\mathbb{R}$ معرّفة بِ $h(x)=x^{-\alpha}$، حيث $0<\alpha\le 1$.

ث. $k:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرّفة بِ $k(x)=c\chi_{\{0\}}(x)+x^{-\alpha}\chi_{]0,1]}(x)$،
حيث $c\ge 0$ و $0<\alpha<1$.

17 أحسب التكاملات التالية

1. $J_p=\int_{]0,1[}\dfrac{|\ell n\, x|^p}{(1-x)^2}dx$، من أجل عدد حقيقي $p>1$.

2. $\int_{\mathbb{R}}a^{-|[x]|}dx$، حيث $a>1$.

3. $\int_{[0,\sqrt{3}]}\chi_{\mathbb{Q}^c}(x)\,Arctan\,x\,dx$.

18 لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة بِ

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\notin\mathbb{Q}\cap[a,b]\\ \dfrac{1}{q^3}+pq, & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\cap[a,b]\end{cases}$$

أحسب قيمة التكامل $\int_{[a,b]}f\,dm$.

19 أحسب النهايات التالية:

1) $\lim_{n\to\infty}\int_{cn}^{\infty}\left(1+\dfrac{x}{2n}\right)^n 2^{-x}dx$، حيث $c\ge 0$،

2) $\lim_{n\to\infty}\int_{[-1,5]}\left(\dfrac{2}{3}e^{-3ix}+\dfrac{1}{5}e^{4ix}\right)^n dx$،

3) $\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]}\dfrac{\ell n(x+n)}{(x+n)^{\alpha}}\sin\left(3e^{nx}+\dfrac{x^2}{n}\right)$، من أجل $\alpha>0$،

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{]a,b[} f_n\,dx$ ، $(0<a<b)$ حيث $f_n(x)=\frac{\sqrt[n]{x}}{x}$ ، ثمّ استنتج أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{b}-\sqrt[n]{a}\right)=\ln\frac{b}{a}$.

20 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ متتالية متزايدة بحيث $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)=\infty$ و $\mu(A_1)\neq 0$.

أثبت أنّ المتتالية $f_n(x)=\frac{1}{\mu(A_n)}\chi_{A_n}(x)$ متقاربة بانتظام على E إلى $f=0$ بينما $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n\,d\mu\neq\int_E \lim\limits_{n\to\infty} f_n\,d\mu=0$. أين يكمن الخلل؟

21 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $f\in\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ بحيث $0<\int_E f^p d\mu<\infty$ ، حيث $p>0$.

ناقش حسب قيم العدد $q\geq 0$ النهايتين:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E n^p \operatorname{Arctan}\left(\frac{f}{n}\right)^q d\mu \quad \text{و} \quad \lim_{n\to\infty}\int_E n^p \ln\left(1+\left(\frac{f}{n}\right)^q\right)d\mu .$$

22 (الصيغة المتصلة لمبرهنة التقارب الرتيب) ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، $\Gamma=[\beta,\gamma]\subset\mathbb{R}$ و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subset\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ متتالية متزايدة بحيث $f_\alpha\xrightarrow{s}f$ ، عندما $\alpha\to\alpha_0$ ، حيث $\alpha_0\in\Gamma$. أثبت أنّ f قابلة للمكاملة على E وأنّ

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\int_E f_\alpha d\mu=\int_E f d\mu .$$

23 (الصيغة المتّصلة لمبرهنة التقارب المرجّح) ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، $\Gamma=[\beta,\gamma]\subset\mathbb{R}$ و $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}\subset\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ بحيث $f_\alpha\xrightarrow{s}f$ ، عندما $\alpha\to\alpha_0$ ، حيث $\alpha_0\in\Gamma$. نفرض وجود دالة قابلة للجمع $g:E\to[0,\infty]$ تحقّق $|f_\alpha(x)|\leq g(x)$ ، $(\forall\alpha\in\Gamma)$ ، $(\forall x\in E)$.

أثبت أنّ f قابلة للجمع على E وأنّ $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int_E f_\alpha d\mu=\int_E f d\mu$.

24 ليكن r عددًا مثبّتًا في $]-1,1[$.

1) أحسب بدلالة r و $\cos x$ العبارة التالية:

$$\frac{1}{1-re^{ix}}+\frac{1}{1-re^{-ix}}\text{،}$$

2) أحسب بطريقتين مختلفتين التكامل:

$$J=\int_{[0,\pi/2]}\frac{1}{1-2r\cos x+r^2}dm(x)$$

25 ليكن $a>0$ و $f:]a,\infty[\to\mathbb{R}$ معرّفة بِ $f(x)=\sum_{n\geq 1}f_n(x)$ حيث

$$f_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}}{1+(nx)^2}\text{، }(\forall n\geq 1).$$

1) أثبت أنّ f دالة m-قابلة للجمع على $]a,\infty[$.

2) أحسب

$$\sum_{n\geq 1}\int_{]a,\infty[}|f_n|dx\text{ ، }\sum_{n\geq 1}\int_{]a,\infty[}f_n dx\text{ و }\int_{]a,\infty[}f dx\text{ .}$$

3) ماذا تستنتج في حالة ما إذا كان $a=0$؟

26 1) لتكن $\varphi,\psi:I=]a,b[\to\mathbb{R}$ دالّتين محدّبتين. أثبت أنّ $\varphi+\psi$ و $c\varphi$، $(c>0)$ دالتان محدّبتان في I.

2) أثبت أنّه إذا كانت $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال المحدّبة في I بحيث $\varphi_n\xrightarrow{s}\varphi$ في I فإنّ φ دالة محدّبة في I.

27 لتكن $\varphi:I=]a,b[\to\mathbb{R}$ دالة محدّبة. استنتج من متباينة جنسان أنّ من أجل كلّ $\{x_i\}_{i=1}^{n}\subset I$ و $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}\subset[0,\infty[$ بحيث $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ فإنّ

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(x_i)\text{ .}$$

28 باستعمال متباينة جنسان أثبت أنّه من أجل $\{a_i\}_{i=1}^{m}\subset]0,\infty[$ (m منته)

و $1 \le p < \infty$ فإنّ

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^p \le m^{p-1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_i^p\right).$$

29 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس بحيث $\mu(E)=1$ و $f:E\to[0,+\infty[$ دالة قابلة للقياس. أثبت أنّ

$$\ln \int_E f\,d\mu \ge \int_E \ln f\,d\mu$$

طالما كان الطرف الأيمن معرّفًا جيّدًا.

30 لتكن $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة بِ

$$f(x,t)=\frac{\sin x}{x}e^{-tx}\chi_{]0,\infty[}(x).$$

1) أثبت أنّ ، من أجل كلّ $t>0$، $f(.,t)\in\mathfrak{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$.

2) إذا عرّفنا الدالة $F:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ بِ $F(t)=\int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx$، برهن أنّ $F(t)$ قابلة للاشتقاق من أجل كلّ $t>0$، ثمّ أوجد $F'(t)$.

3) استنتج عبارة $F(t)$.

31 لتكن $f:[0,1]\times[0,\infty[\to[0,\infty[$ دالة معرّفة بِ

$$f(x,t)=\frac{1}{1+x^2}e^{-t^2(1+x^2)}$$

نضع $F(t)=\int_{[0,1]} f(x,t)dx$.

1) أحسب $F(0)$ و $\lim_{t\to\infty} F(t)$.

2) أوجد عبارة الدالة المشتقّة $F'(t)$ ، ثمّ استنتج قيمة الكامل

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx.$$

32 أثبت أنّ

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x^q+1}dx=\sum_{n\ge 0}\left(\frac{1}{p+2nq}-\frac{1}{p+(2n+1)q}\right),$$

من أجل $p>0$ و $q>0$ ، ثمّ استنتج مجموعي السلسلتين التاليتين

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1+4n}-\frac{1}{3+4n}\right) \quad \text{و} \quad \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1+2n}-\frac{1}{2+2n}\right).$$

33 ليكن $f,g\in\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$ و $c\in\mathbb{C}$. أثبت أنّ

1) $f+g\in\mathfrak{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\Sigma,\mu)$ ، cf.

2) $\left|\int_E f d\mu\right|\leq\int_E |f| d\mu$.