الفصل الثالث

القياسات الموجبة والخارجية

الفصل الثالث

القياسات الموجبة والخارجية

1- القياسات الموجبة

نستهل هذا الفصل بتعريف الدّوال الجمعية التي تلعب دورًا متميّزا في النظريّة العامة للقياس. تُعرّف هذه الدّوال على أسرة من مجموعات جزئية من مجموعة غير خالية E. نقدّم بعد ذلك مفهوم القياس الموجب كدالّة جمعية معرّفة على جبر على E وتأخذ قيمها في $[0,+\infty]$. من أهمّ الخصائص التي سنتطرّق إليها هي إمكانيّة تمديد القياسات الموجبة من جبر إلى العشيرة المولّدة بهذا الجبر وذلك بفضل مبرهنتي هان وكراثيودوري. وكتطبيق عملي لنظرية القياس نعرّف قياس لوبيغ الذي يُمدّد مفهوم الطّول الاعتيادي على المستقيم الحقيقي.

تعريف 01.3: لتكن E مجموعة غير خالية، $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$ أسرة غير خالية و F إحدى المجموعات التالية $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$، $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. نقول عن دالة $\psi:\mathcal{C}\to F$ إنّها جمعية (على الترتيب، σ−جمعية) إذا حققت الخاصية التالية:

جم) $\psi\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\psi(A_k)$ *(التجميع المنتهي)*،

(على الترتيب،

جع) $\psi\left(\bigcup_{k\geq1}A_k\right)=\sum_{k\geq1}\psi(A_k)$) *(التجميع القابل للعد)*،

وذلك من أجل كلّ جملة منتهية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{C}$ (على الترتيب، متتالية قابلة للعد ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\{A_k\}_{k\geq1}\subset\mathcal{C}$) بحيث $\bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\mathcal{C}$ (على الترتيب، $\bigcup_{k\geq1}A_k\in\mathcal{C}$).

ملاحظة 02.3: 1) إذا كانت $\psi : \mathcal{C} \to \mathrm{F}$ دالّة جمعيّة بحيث $\varnothing \in \mathcal{C}$ و $\psi \not\equiv \infty$، عندئذ $\psi(\varnothing) = 0$. بالتأكيد، ينتج عن كون $\psi \not\equiv \infty$ وجود مجموعة جزئية $A \in \mathcal{C}$ بحيث $|\psi(A)| < \infty$، ومنه
$$\psi(A) = \psi(A \cup \varnothing) = \psi(A) + \psi(\varnothing).$$
إذن $\psi(\varnothing) = 0$.

2) إذا كانت $\psi : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ دالّة جمعيّة و $A, B \in \mathcal{C}$ بحيث $A \subset B$، $B \setminus A \in \mathcal{C}$ و $\psi(A)$ منته، فإنّ
$$\psi(B \setminus A) = \psi(B) - \psi(A).$$
بالفعل، بما أنّ $B = (B \setminus A) \cup A$ و $(B \setminus A) \cap A = \varnothing$، عندئذ
$$\psi(B) = \psi((B \setminus A) \cup A) = \psi(B \setminus A) + \psi(A),$$
ومنه $\psi(B \setminus A) = \psi(B) - \psi(A)$، بفضل محدودية المقدار $\psi(A)$.

تعريف 03.3: لتكن E مجموعة غير خالية و $\mathcal{A}$ جبرًا على E. نسمي قياسًا موجبًا على $\mathcal{A}$ كلّ دالّة σ-جمعية μ من $\mathcal{A}$ نحو $[0,\infty]$.

بعبارة أخرى، تكون الدالّة μ قياسًا موجبًا على جبر $\mathcal{A}$ إذا وإذا فقط حقّقت الشرطين:

قم1) $\mu(\varnothing) = 0$،

قم2) $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n)$ *(التجميع القابل للعد)*،

من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$، ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى بحيث $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

ملاحظة 04.3: نشيــر إلى أنّه يمكننا بفضل الملاحظة 02.3، 1) الاستغناء عــن الشرط **قم1)** طالما كانت الدالة غير منحلّة، بمعنى أنّه يوجــد عنصر $A \in \mathcal{A}$، A غير خال بحيث $\mu(A) < \infty$.

ملاحظة 05.3: كما هو واضح من تعريف القياسات الموجبة فإنّنا لا نهتمّ إلاّ بالدّوال ذات القيم الموجبة. في الواقع، يمكننا في أغلب الأحيان كتابة كلّ دالة σ-جمعية ذات قيم في $\overline{\mathbb{R}}$ كفرق لقياسين موجبين ولذلك سوف نكتفي بدراسة الدّوال الـــ σ-جمعية الموجبة فقط.

هذه بعض الأمثلة عن القياسات الموجبة:

مثال 06.3: لتكن E مجموعة غير خالية. نعتبر الدّالة

$$\mu:\mathcal{P}(E)\to[0,+\infty]$$

المعرّف بـ . . $\mu(A)=|A|$ إذا كانت A منتهية

و $\mu(A)=+\infty$، إذا كانت A غير منتهية.

من الواضح أنّ $\mathcal{A}=\mathcal{P}(E)$ جبر على E وأنّ $\mu(\varnothing)=0$. لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{P}(E)$ متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى، نضع $U=\bigcup\limits_{n\geq 1}A_n$.

أ) إذا كانت المجموعة U منتهية فكلّ المجموعات الجزئية A_n منتهية، وبالتالي فمن أجل عدد منته فقط من المؤشرات $n_1,\dots,n_p$ تكون هذه الأخيرة غير خالية (وإلاّ صارت U غير منتهية) ، وعليه فإنّنا نحصل بسهولة على

$$|U|=\left|\bigcup_{k=1}^{p}A_{n_k}\right|=\sum_{k=1}^{p}\left|A_{n_k}\right|=\sum_{n\geq 1}|A_n|،$$

إذن، $\mu\left(\bigcup\limits_{n\geq 1}A_n\right)=\sum\limits_{n\geq 1}\mu(A_n)$.

ب) إذا كانت U غير منتهية، فإمّا أن يوجد (على الأقل) مؤشر n_0 بحيث $\left|A_{n_0}\right|=+\infty$، وإمّا $0<|A_n|<\infty$، مهما يكن n في مجموعة جزئية غير منتهية $S\subset\mathbb{N}^*$. نحصل في الحالة الأولى على

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)=\infty=\infty+\sum_{\substack{n\geq 1\\ n\neq n_0}}\mu(A_n)=\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)\,.$$

وفيما يخصّ الحالة الثانية فإنّنا نحصل على

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)=+\infty=\sum_{n\in S} 1\leq\sum_{n\in S}\mu(A_n)\leq\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)\text{،}$$

ومنه $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)=\sum_{n\geq 1}\mu(A_n)=+\infty$.

إذن، الدّالة (الموجبة) μ قياس موجب على $\mathcal{A}=\mathcal{P}(E)$، يدعى **قياس العدّ** *(counting measure)*، ونرمز له بـــ μ_c .

مثال 07.3: لتكن E مجموعة غير خالية و $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$ جبرًا على E.
نعتبر الدالّة $\delta_a:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ المعرّفة بـ .

$$\delta_a(A)=\begin{cases}1, \text{ if } & a\in A\\ 0, \text{ if } & a\notin A\end{cases}\text{، }(\forall A\in\mathcal{A})\text{،}$$

حيث a عنصر مثبّت في E.
إنّ δ_a قياس موجب على E. بالتأكيد، لدينا أوّلا $\delta_a(\varnothing)=0$ لأنّ $a\notin\varnothing$. لتكن الآن $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{A}$ متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى بحيث $\bigcup_{n\geq 1} A_n\in\mathcal{A}$، نضع $U=\bigcup_{n\geq 1} A_n$.

أ) إذا كان $a\in U$، يوجد عندئذ مؤشر وحيد n_0 بحيث $a\in A_{n_0}$ و $a\notin A_n$، $(\forall n\neq n_0)$، ومنه

$$\delta_a(A_n)=0\text{، }(\forall n\neq n_0)\text{ و }\delta_a(A_{n_0})=1\,.$$

نستنتج فورًا أنّ

$$\delta_a\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)=1=\delta_a(A_{n_0})+\sum_{n\neq n_0}\delta_a(A_n)=\sum_{n\geq 1}\delta_a(A_n)\,.$$

ب) إذا كان $a\notin U$، عندئذ $a\notin A_n$، $(\forall n\geq 1)$، وبالتالي

$$\delta_a\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)=\sum_{n\geq 1}\delta_a(A_n)=0\,.$$

وهكذا فإنّ δ_a قياس موجب على $\mathcal{A}$، يدعى قياس ديراك[1] (Dirac) عند النقطة a.

تعريف 08.3: ليكن μ قياسًا موجبًا على عشيرة $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$، نسمّي الثلاثية (E,Σ,μ) بفضاء قياس *(measure space)*.

نقول عن فضاء قياس (E,Σ,μ) إنّه منته إذا كان القياس الموجب μ منتهيًا، بمعنى أنّ $\mu(A)<\infty$، $(\forall A\in\Sigma)$.

كما نقول عن فضاء قياس (E,Σ,μ) إنّه σ-منته إذا وُجدت متتالية $\{A_n\}_{n\ge 1}\subset\Sigma$ بحيث $E=\bigcup_{n\ge 1} A_n$ و $\mu(A_n)<\infty$، $(\forall n\ge 1)$.

ملاحظة 09.3: نُسمّى في نظريّة الاحتمالات قانون احتمال كلّ قياس موجب $P:\mathscr{P}\to[0,1]$ على عشيرة $\mathscr{P}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ بحيث $P(\Omega)=1$، كما نسمّي الثنائية $(\Omega,\mathscr{P})$ (على الترتيب، الثلاثية $(\Omega,\mathscr{P},P)$) بالفضاء الاحتمالي (على الترتيب، فضاء احتمال)، أخيرًا، نسمّي حـدَثًا كلّ عنصر من العشيرة $\mathscr{P}$.

مثال 10.3: يكون قياس العدّ المعرّف في المثال 06.3 منتهيًا إذا وإذا فقط كانت E منتهية، ويكون σ-منتهيًا إذا وإذا فقط كانت E قابلة للعد.

مثال 11.3: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة متزايدة ومتّصلة عن اليمين. نعرّف $\mu_f:\mathcal{B}(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ كالآتي:

$$\mu_f(]a,b])=f(b)-f(a)\text{، } -\infty<a<b<\infty\text{،}$$

عندئذ μ_f قياس موجب و σ-منته على $\mathcal{B}(\mathbb{R})$، يسمّى بقياس لوبيغ-ستلجس[2].

---

[1]) بول ادريان ديراك [Paul Adrien Dirac] (1902–1984)

[2]) طوماس جونس ستلجس [Thomas Joannes Stieltjes] (1856–1895)

نقدّم فيما يلي بعض الخواص الهامة التي تتمتّع بها القياسات الموجبة والتي توضّح أهميّة هذا الصنف من الدّوال الجمعية وأسباب التّعمّق في دراسته.

خواص عامة 12.3: ليكن $\mathcal{A}$ جبرًا على مجموعة غير خالية E، وليكن $\mu:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ قياسًا موجبًا معطى. عندئذ،

1) *التجميع المنتهي*: **من أجل كلّ متتالية منتهية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\{A_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{A}$ فإنّ**

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k).$$

2) *الرتابة*: **مهما يكن A و B في $\mathcal{A}$ بحيث $A\subset B$ فإنّ $\mu(A)\le\mu(B)$.**

وإذا كان $\mu(A)<\infty$ فإنّ $\mu(B\setminus A)=\mu(B)-\mu(A)$.

3) *التجميع الجزئي القابل للعد*: **مهما تكن المتتالية $\{A_n\}_{n\ge1}\subset\mathcal{A}$ بحيث $\bigcup_{n\ge1}A_n\in\mathcal{A}$ فإنّ**

$$\mu\left(\bigcup_{n\ge1}A_n\right)\le\sum_{n\ge1}\mu(A_n).$$

إثبات: 1) نعرّف المتتالية $\{B_k\}_{K\ge1}\subset\mathcal{A}$ كالآتي
$B_k=\varnothing$، عندما $k>n$ و $B_k=A_k$ ، عندما $n\ge k$.
لدينا فورًا $\{B_k\}_{K\ge1}$ متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى وأنّ $\bigcup_{k\ge1}B_k=\bigcup_{k=1}^{n}A_k\in\mathcal{A}$. إذن،

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\mu\left(\bigcup_{k\ge1}B_k\right)=\sum_{k\ge1}\mu(B_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)+\sum_{k>n}\mu(\varnothing)=\sum_{k=1}^{n}\mu(A_k)$$

2) لدينا $A, B\setminus A \in \mathcal{A}$ و $B = A\cup(B\setminus A)$ مع $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$.
ينتج عن الخاصية 1) أنّ

$$\mu(B)=\mu(A)+\mu(B\setminus A), \qquad (1)$$

ومنه $\mu(A)\le\mu(B)$.
من جهة ثانية، إذا كان $\mu(A)<\infty$ فبإمكاننا نقل الحد $\mu(A)$ إلى الطرف الآخر من المعادلة (1) للحصول على المساواة المطلوبة.

3) لتكن $\{A_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{A}$ بحيث $\bigcup\limits_{n\ge 1} A_n\in\mathcal{A}$، توجد حسب **خاصيّة الفصل 17.2** متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\{B_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{A}$ بحيث

$$\bigcup_{n\ge 1} B_n\in\mathcal{A},\ \bigcup_{n\ge 1} B_n=\bigcup_{n\ge 1} A_n \text{ و } B_n\subset A_n,\ (\forall n\ge 1).$$

نستنتج فورًا من التجميع القابل للعد ومن الرتابة أنّ

$$\mu\left(\bigcup_{n\ge 1} A_n\right)=\mu\left(\bigcup_{n\ge 1} B_n\right)=\sum_{n\ge 1}\mu(B_n)\le\sum_{n\ge 1}\mu(A_n). \blacksquare$$

نتطرّق فيما يلي إلى أولى نتائج التقارب التي تتمتّع بها القياسات الموجبة والتي تسمّى في بعض المراجع بخواص الاتصال للقياس الموجب. نقول عن دالة جمعية $\nu: \mathcal{C}\to[0,\infty]$ إنّها **متّصلة عند** $\varnothing$ إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty}\nu(A_n)=0$ من أجل كلّ متتالية متناقصة $\{A_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{C}$ بحيث $\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\varnothing$. والسؤال الجدير بالطرح هو متى تكون دالة جمعية ν دالة σ-جمعيّة؟ التمرين 06 يجيب جزئيّا على السؤال وذلك عند توفّر شرط الاتصال لدى ν عند $\varnothing$.

مبرهنة 13.3 (خاصيتا التقارب): ليكن $\mathcal{A}$ جبرًا على مجموعة E، و $\mu: \mathcal{A}\to[0,\infty]$ قياسًا موجبًا. عندئذ

خت1) من أجل كلّ متتالية متزايدة $\{A_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{A}$ بحيث $\bigcup\limits_{n\ge 1} A_n\in\mathcal{A}$ فإنّ

$$\mu\left(\bigcup_{n\ge 1} A_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n),\ \left(\equiv\sup_{n\ge 1}\mu(A_n)\right).$$

خت2) من أجل كلّ متتالية متناقصة $\{B_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{A}$ بحيث $\bigcap_{n\ge 1}B_n\in\mathcal{A}$ و $\mu\left(B_{n_0}\right)<\infty$ ، من أجل مؤشر $n_0\ge 1$ ، فإنّ

$$\mu\left(\bigcap_{n\ge 1}B_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(B_n\right),\ \left(\equiv\inf_{n\ge 1}\mu\left(B_n\right)\right).$$

إثبات: خت1) توجد بفضل خاصيّة الفصل متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\{C_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{A}$ بحيث

$$\bigcup_{n\ge 1}C_n=\bigcup_{n\ge 1}A_n\in\mathcal{A} \text{ و } \bigcup_{k=1}^{n}C_k=\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_n ،\ (\forall n\ge 1).$$

وبالتالي فإنّ

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n\ge 1}A_n\right)&=\mu\left(\bigcup_{n\ge 1}C_n\right)=\sum_{n\ge 1}\mu\left(C_n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mu\left(C_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}C_k\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)\end{aligned}$$

خص2) نعرّف المتتالية $\{A_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{A}$ كما يلي

$$A_n=B_{n_0}\setminus B_{n_0+n} ،\ (\forall n\ge 1).$$

من الواضح أنّ المتتالية $\{A_n\}_{n\ge 1}$ متزايدة وتحقق

$$\bigcup_{n\ge 1}A_n=B_{n_0}\setminus\bigcap_{n\ge 1}B_{n_0+n}=B_{n_0}\setminus\bigcap_{n\ge 1}B_n\in\mathcal{A}.$$

بما أنّ

$$\mu\left(\bigcap_{n\ge 1}B_n\right)\le\mu\left(B_{n_0}\right)<\infty \text{ و } \mu\left(B_{n_0+n}\right)\le\mu\left(B_{n_0}\right)<\infty ،$$

$(\forall n\ge 1)$، فإنّنا نحصل بفضل الخواص السابقة للقياس على

$$\mu\left(\bigcup_{n\ge 1}A_n\right)=\mu\left(B_{n_0}\right)-\mu\left(\bigcap_{n\ge 1}B_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\mu\left(B_{n_0}\right) - \mu\left(B_{n_0+n}\right)\right]$$
$$= \mu\left(B_{n_0}\right) - \lim_{n\to\infty}\mu\left(B_{n_0+n}\right)$$
$$= \mu\left(B_{n_0}\right) - \lim_{n\to\infty}\mu\left(B_n\right)$$

ينتج فورًا عن محدودية المقدار $\mu\left(B_{n_0}\right)$ أنّ

$$\blacksquare .\ \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu\left(B_n\right)$$

ملاحظة 14.3: إنّ شرط وجود مؤشر n_0 بحيث $\mu\left(B_{n_0}\right) < \infty$ ضروري لصحة الخاصية الثانية للتقارب خت2) كما يتّضح في المثال المضاد التالي:

مثال مضاد 15.3: نعتبر المجموعة $E = \mathbb{R}$، الجبر $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ وقياس العد μ_c. نعرّف المتتالية $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ بـ $B_n = [n,+\infty[$، لكلّ $n \geq 1$. من الواضح أنّ

- $\{B_n\}_{n\geq 1}$ متناقصة،
- $\mu_c\left(B_n\right) = +\infty$، $(\forall n \geq 1)$،
- $\bigcap_{n\geq 1} B_n = \varnothing$.

نستنتج من الخاصيتين الأخيرتين أنّ

$$\lim_{n\to\infty}\mu_c\left(B_n\right) = +\infty \text{ و } \mu_c\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right) = 0 \text{ ،}$$

وهكذا فإنّ $\lim_{n\to\infty}\mu_c\left(B_n\right) \neq \mu_c\left(\bigcap_{n\geq 1} B_n\right)$، ويعود سبب عدم الحصول على المساواة إلى كون شرط محدودية قياس حد من حدود المتتالية غير محقق كما تنصّ عليه **المبرهنة 13.3**.

2- القياسات الخارجية

إنّ الهدف الرئيس للقياسات الخارجية التي نحن بصدد تعريفها هو استعمالها في تمديد قياس موجب μ معرّف على جبر $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$ إلى قياس موجب $\tilde{\mu}$ معرّف على العشيرة المولّدة بـــ $\mathcal{A}$، ألا وهي $\sigma_E(\mathcal{A})$. وكتطبيق مباشر لهذا التمديد سوف نعرّف قياس لوبيغ على أسرة $\mathcal{L}$ من المجموعات الجزئية من المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$.

نستهلّ دراستنا بهذا التعريف.

تعريف 16.3: نسمّي قياسا خارجيًا على مجموعة غير خالية E كلّ دالّة

$$\mu^*:\mathcal{P}(E)\to\overline{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty]$$

تتمتّع بالخواص التالية:

قخ1) $\mu^*(\varnothing)=0$،

قخ2) $(\forall A,B\subset E: A\subset B)\Rightarrow\mu^*(A)\le\mu^*(B)$ *(خاصيّة الرتابة)*

قخ3) $\left(\forall\{A_n\}_{n\ge1}\subset\mathcal{P}(E)\right)\Rightarrow\mu^*\left(\bigcup_{n\ge1}A_n\right)\le\sum_{n\ge1}\mu^*(A_n)$،

(خاصيّة التجميع الجزئي القابل للعد).

ملاحظة 17.3: كلّ قياس موجب معرّف على $\mathcal{P}(E)$ هو مثال عن قياس خارجي على E بينما القياس الخارجي ليس بالضرورة قياسًا موجبًا كما يوضّحه المثال التالي:

مثال 18.3: لتكن E مجموعة بحيث $|E|\ge2$ و $\mu^*:\mathcal{P}(E)\to[0,\infty]$ معرّفا بـــ $\mu^*(\varnothing)=0$ و $\mu^*(A)=1$ لكلّ $A\subset E$، $A\neq\varnothing$. عندئذ الدّالة μ^* قياس خارجيّ على E غير أنّه ليس قياسًا موجبًا على $\mathcal{P}(E)$.

مبرهنة 19.3: ليكن $\mu:\mathcal{A}\to[0,\infty]$ قياسًا موجبًا معرّفا عل جبر $\mathcal{A}$ على

E . عندئذ الدالّة $\mu^* : \mathcal{P}(E) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ المعرّفة بـ

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\geq 1}\mu(A_n),\ \{A_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{R}_A\right\},\ (\forall A \subset E),$$

قياس خارجي على E حيث يتطابق اقتصاره على $\mathcal{A}$ مع القياس الموجب μ ، (حيث $\mathcal{R}_A$ أسرة كلّ تغـطيات المجموعة الجزئية A بعناصر من الجبر $\mathcal{A}$) يدعى μ^* القياس الخارجي المولّد بالقياس الموجب μ .

إثبات: لاحظ أنّ الأسرة $\mathcal{R}_A$ غير خالية لاحتوائها على المجموعة E. لنثبت أوّلا أنّ μ^* قياس خارجي على E. من الواضح أنّ $\mu^* \geq 0$، كما ينتج عن تعريف μ^* أنّ من أجل كلّ مجموعة جزئية $A \subset E$ لدينا

$$0 \leq \mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(A_n),\ \left(\forall \{A_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{R}_A\right). \qquad (2)$$

1) بما أنّ $\varnothing \subset \bigcup_{n\geq 1} A_n$، حيث $A_n = \varnothing$، $(\forall n \geq 1)$، عندئذ نحصل بفضل (2) على

$$0 \leq \mu^*(\varnothing) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(A_n) = \sum_{n\geq 1}\mu(\varnothing) = 0,$$

ومنه $\mu^*(\varnothing) = 0$.

2) ليكن $A, B \subset E$ بحيث $A \subset B$.

- إذا كان $\mu^*(B) = +\infty$، فواضح أنّ
$$\mu^*(A) \leq \mu^*(B) = +\infty .$$
- نفرض أنّ $\mu^*(B) < +\infty$. لدينا حسب تعريف الحد الأدنى ما يلي:
$$\left(\forall \varepsilon > 0, \exists \{B_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{R}_B\right): \sum_{n\geq 1}\mu(B_n) < \mu^*(B_n) + \varepsilon .$$
بما أنّ $\{B_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{R}_B$ لدينا إذن حسب (2)
$$0 \leq \mu^*(A) \leq \sum_{n\geq 1}\mu(B_n) < \mu^*(B_n) + \varepsilon .$$

نستنتج أخيرًا من كون ε اختياريًّا أنّ $\mu^*(A) \leq \mu^*(B) < +\infty$.

3) لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(E)$.

- إذا وُجد مؤشر $n_0 \geq 1$ بحيث $\mu^*\left(A_{n_0}\right) = +\infty$، فواضح أنّ

[illegible] (A_n) [illegible] $(\forall n \geq 1)$ ، ينتج من

تعريف الحد الأدنى أنّ من أجل كلّ مؤشر $n \geq 1$، ومن أجل كلّ عدد موجب $\varepsilon > 0$، توجد تغطية $\{A_k^n\}_{k\geq 1} \in \mathfrak{R}_{A_n}$ بحيث

$$\sum_{k\geq 1} \mu\left(A_k^n\right) < \mu^*\left(A_n\right) + \frac{\varepsilon}{2^n}،$$

وبتجميع حدود طرفي المتباينة من أجل $n \geq 1$ نحصل على

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \mu\left(A_k^n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*\left(A_n\right) + \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

إنّ الاحتواء $\bigcup_{n\geq 1} A_n \subset \bigcup_{\substack{k\geq 1\\ n\geq 1}} A_k^n$ يستلزم أنّ

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{\substack{k\geq 1\\ n\geq 1}} \mu\left(A_k^n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*\left(A_n\right) + \varepsilon،$$

وبما أنّ ε اختياري فإنّنا نحصل على

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu^*\left(A_n\right)،$$

وعليه فإنّ μ^* قياس خارجي على E.

يبقى إثبات أنّ μ^* يتطابق مع القياس الموجب μ على الجبر $\mathcal{A}$. بالتأكيد، إذا كان $A \in \mathcal{A}$ فإنّ $\{A, \varnothing, \varnothing, \ldots\} \in \mathfrak{R}_A$، ومنه

$$\mu^*(A) \leq \mu(A) + \mu(\varnothing) + \ldots = \mu(A).$$

من جهة أخرى، إذا كان $A \in \mathcal{A}$ فإنّه من أجل كلّ تغطية $\{A_n\}_{n\geq 1} \in \mathfrak{R}_A$، لدينا $A = \bigcup_{n\geq 1}(A \cap A_n)$، علما أنّ $A \cap A_n \in \mathcal{A}$، $(\forall n \geq 1)$، وعليه فإنّ

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}(A \cap A_n)\right) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A \cap A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(A_n).$$

وبما أنّ التغطية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ اختيارية فإنّنا نحصل على

$$\mu(A)\leq inf\left\{\sum_{n\geq 1}\mu(A_n),\{A_n\}_{n\geq 1}\in\mathcal{R}_A\right\}\equiv\mu^*(A).$$

إذن $\mu^*(A)=\mu(A)$، مهما يكن $A\in\mathcal{A}$، بمعنى أنّ $\mu^*_{|\mathcal{A}}=\mu$، وهو المطلوب.■

تُعتبر المبرهنة التالية من أهمّ المبرهنات في نظرية القياس حيث ترفق بكلّ قياس خارجي μ^* (على مجموعة غير خالية E) عشيرة $\mathcal{B}_{\mu^*}$ (على E) بحيث يكون اقتصار μ^* على $\mathcal{B}_{\mu^*}$ قياسًا موجبًا. ومن جهة أخرى، نعرّف بفضل هذه المبرهنة عشيرة وقياس لوبيغ على المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$ من أجل $E=\mathbb{R}$.

مبرهنة 20.3 [كرالبودوري[3] # Carathéodory]: **ليكن μ^* قياسًا خارجيًا على مجموعة غير خالية E. إنّ الأسرة**

$$\mathcal{B}_{\mu^*}=\left\{A\subset E:\mu^*(S)=\mu^*(S\cap A)+\mu^*\left(S\cap A^c\right),\forall S\subset E\right\}،$$

عشيرة على E، تسمّى بعشيرة المجموعات الجزئية الـ μ^*–قابلة للقياس.
بالإضافة إلى ذلك فإنّ اقتصار μ^* على العشيرة $\mathcal{B}_{\mu^*}$ هو قياس موجب.

إثبات: بإمكاننا التأكّد بسهولة أنّ $\varnothing\in\mathcal{B}_{\mu^*}$، وعليه فإنّ $\mathcal{B}_{\mu^*}$ غير خالية.

1) ليكن $A\in\mathcal{B}_{\mu^*}$، عندئذ من أجل كلّ مجموعة جزئية $S\subset E$ فإنّ

$$\begin{aligned}\mu^*(S)&=\mu^*(S\cap A)+\mu^*\left(S\cap A^c\right)\\&=\mu^*\left(S\cap\left(A^c\right)^c\right)+\mu^*\left(S\cap A^c\right)\end{aligned}$$

ومنه $A^c\in\mathcal{B}_{\mu^*}$.

2) ليكن A، $B\in\mathcal{B}_{\mu^*}$، عندئذ من أجل كلّ مجموعة جزئية $T\subset E$ فإنّ

---

[3]) قسنطين كرالبودوري [Constantin Carathéodory] (1873–1950)

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap A)+\mu^*(T\cap A^c)$$

وبالخصوص من أجل $T=S\cap(A\cup B)$ ، حيث $S\subset E$، فإننا نحصل على ما يلي

$$\begin{aligned}&\mu^*(S\cap(A\cup B))\\&=\mu^*(S\cap(A\cup B)\cap A)+\mu^*(S\cap(A\cup B)\cap A^c)\\&=\mu^*(S\cap A)+\mu^*(S\cap B\cap A^c)\end{aligned}$$

بإضافة الحد $\mu^*\left(S\cap(A\cup B)^c\right)$ إلى طرفي المعادلة الأخيرة نحصل على

$$\begin{aligned}&\mu^*(S\cap(A\cup B))+\mu^*\left(S\cap(A\cup B)^c\right)\\&=\mu^*(S\cap A)+\mu^*(\underline{S\cap A^c}\cap B)+\mu^*(\underline{S\cap A^c}\cap B^c)\\&=\mu^*(S\cap A)+\mu^*(S\cap A^c)=\mu^*(S)\end{aligned}$$

(لأنّ A و B عنصران من $\mathcal{B}_{\mu^*}$). إذن $A\cup B\in\mathcal{B}_{\mu^*}$.

نستنتج ممّا سبق أنّ $\mathcal{B}_{\mu^*}$ جبر على E.

لنثبت الآن أنّ $\mathcal{B}_{\mu^*}$ عشيرة على E؛ بالتأكيد، من أجل كلّ مجموعتين جزئيتين منفصلتين A و B في $\mathcal{B}_{\mu^*}$، ومن أجل كلّ $S\subset E$ فإنّ

$$\begin{aligned}&\mu^*\left(\underline{S\cap(A\cup B)}\right)\\&=\mu^*\left(\underline{S\cap(A\cup B)}\cap A\right)+\mu^*\left(\underline{S\cap(A\cup B)}\cap A^c\right)\\&=\mu^*(S\cap A)+\mu^*(S\cap B\cap A^c)\\&=\mu^*(S\cap A)+\mu^*(S\cap B)\end{aligned}$$

بالاستدلال بالاستقراء نجد أنّ من أجل كلّ جملة منتهية $\{A_k\}_{k=1}^{N}\subset\mathcal{B}_{\mu^*}$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى لدينا

$$\mu^*\left(S\cap\left(\bigcup_{k=1}^{N}A_k\right)\right)=\sum_{k=1}^{N}\mu^*(S\cap A_k)\text{ ، }(\forall S\subset E).$$

$V=\bigcup_{n\geq 1} A_n$ و $V_N=\bigcup_{k=1}^{N} A_k$،

عندئذ،

$S\cap V^c \subset S\cap V_N^c$، $(\forall S\subset E)$، $(\forall N\geq 1)$.

وعليه فإنّه من أجل كلّ $S\subset E$ لدينا

$$\begin{aligned}\mu^*(S)&=\mu^*(S\cap V_N)+\mu^*(S\cap V_N^c)\\&=\sum_{k=1}^{N}\mu^*(S\cap A_k)+\mu^*(S\cap V_N^c)\\&\geq\sum_{k=1}^{N}\mu^*(S\cap A_k)+\mu^*(S\cap V^c)\end{aligned}$$

وبجعل $N\to\infty$ نحصل على ما يلي

$$\mu^*(S)\geq\sum_{n\geq 1}\mu^*(S\cap A_k)+\mu^*(S\cap V^c).$$

من جهة ثانية، نحصل بفضل التجميع الجزئي القابل للعد على

$$\begin{aligned}\mu^*(S)&=\mu^*\left(S\cap(V\cup V^c)\right)\\&\leq\mu^*(S\cap V)+\mu^*(S\cap V^c)\\&\leq\sum_{n\geq 1}\mu^*(S\cap A_n)+\mu^*(S\cap V^c)\leq\mu^*(S)\end{aligned}$$

ومنه نحصل على المساواة

$$\begin{aligned}\mu^*(S)&=\mu^*(S\cap V)+\mu^*(S\cap V^c)\\&=\sum_{n\geq 1}\mu^*(S\cap A_n)+\mu^*(S\cap V^c)\end{aligned}\qquad(3)$$

وهذا يثبت أنّ $V=\bigcup_{n\geq 1}B_n\in\mathcal{B}_{\mu^*}$، وبالتالي الأسرة $\mathcal{B}_{\mu^*}$ هي عشيرة على المجموعة E.

أخيرًا، يبقى بيان أنّ القياس الخارجي μ^* قياس موجب على العشيرة $\mathcal{B}_{\mu^*}$. بالتأكيد، لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{B}_{\mu^*}$ متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى. بتعويض $S=V=\bigcup_{n\geq 1}A_n$ في المعادلة (3) نحصل على ما يلي

$$\mu^{*}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)=\sum_{n\geq 1}\mu^{*}(A_n)+\mu^{*}(\varnothing)=\sum_{n\geq 1}\mu^{*}(A_n)\text{ ،}$$

وهذا يثبت أنّ μ^{*} دالّة σ-جمعية، وبالتالي فهي قياس موجب على العشيرة $\mathcal{B}_{\mu^{*}}$ مع الملاحظة أنّ $\mu^{*}(\varnothing)=0$. ■

ملاحظة 21.3: تكون مجموعة جزئية $A\subset E$ μ^{*}-قابلة للقياس إذا وإذا فقط أمكن تجزئة أيّ مجموعة $S\subset E$ إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين بحيث يكون μ^{*} جمعيًا من أجل هذه التجزئة، بمعنى أنّ

$$\mu^{*}(S)=\mu^{*}(S\cap A)+\mu^{*}\left(S\cap A^{c}\right)\text{ ،}\ (\forall S\subset E).$$

ملاحظة 22.3: بما أنّ كلّ قياس خارجي μ^{*} يحقق خاصيّة التجميع الجزئي القابل للعد فيكفي التأكّد فقط من المتباينة

$$\mu^{*}(S\cap A)+\mu^{*}\left(S\cap A^{c}\right)\leq\mu^{*}(S)\text{ ، لكلّ } S\subset E\text{ ،}\quad(\#)$$

لإثبات أنّ $A\in\mathcal{B}_{\mu^{*}}$.

نلاحظ من جهة أخرى أنّ المتباينة (#) صحيحة عندما $\mu^{*}(S)=\infty$. نستخلص إذن أنّ مجموعة جزئية A هي μ^{*}-قابلة للقياس إذا وإذا فقط تحققت المتباينة (#)، لكلّ $S\subset E$ يحقق $\mu^{*}(S)<\infty$.

ملاحظة 23.3: إذا كان (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيًا و μ^{*} القياس الخارجي الممدّد للقياس الموجب μ، عندئذ $A\in\mathcal{B}_{\mu^{*}}$ إذا وإذا فقط تحققت المساواة التالية:

$$\mu^{*}(E)=\mu^{*}(A)+\mu^{*}\left(A^{c}\right).$$

(انظر تمرين 15).

3- تمديد قياس موجب

سوف نهتمّ طيلة هذا المقطع بفكرة تمديد قياس موجب μ معرّف على جبر $\mathcal{A}$ إلى قياس موجب على العشيرة المولّدة بهذا الجبر $\mathcal{A}$. يكون هذا التمديد وحيدًا و σ-منتهيًا إذا كان القياس الموجب μ σ-منتهيًا.
نبدأ بهذه التوطئة الخاصة بوحدانية تمديد قياس موجب σ-منته إلى العشيرة المولّدة بجبر:

توطئة 24.3: ليكن $\mathcal{A}$ جبرًا على مجموعة E و μ قياسًا موجبًا σ-منتهيًا على $\mathcal{A}$. إذا كان μ_1 و μ_2 تمديدين للقياس الموجب μ إلى $\sigma(\mathcal{A})$، عندئذ يكون $\mu_1 \equiv \mu_2$ على $\sigma(\mathcal{A})$.

إثبات: بما أنّ μ قياس σ-منته، عندئذ توجد متتالية $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ بحيث

$$E = \bigcup_{n\geq 1} E_n \text{ و } \mu(E_n) < +\infty \text{ ، } (\forall n \geq 1).$$

تجدر الملاحظة إلى أنّ المتتالية السابقة تحقق الخواص التالية:
$E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$، $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \sigma(\mathcal{A})$، و $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) = \mu(E_n) < +\infty$، $(\forall n \geq 1)$. إذن التمديدان μ_1 و μ_2 هما كذلك σ-منتهيان على العشيرة $\sigma(\mathcal{A})$. بوضع $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$، $(\forall n \geq 1)$، نحصل على متتالية متزايدة $\{F_n\}_{n\geq 1}$ تحقق:

$$E = \bigcup_{n\geq 1} F_n \text{ ، } \{F_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \text{ و } \mu(F_n) < +\infty \text{ ، } (\forall n \geq 1).$$

نعرّف الأسرة

$$\mathcal{M} = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \mu_1(A \cap F_n) = \mu_2(A \cap F_n), \forall n \geq 1\}.$$

من الواضح أنّ $\mu_1(A \cap F_n) = \mu_2(A \cap F_n)$، $(\forall n \geq 1)$، من أجل كلّ $A \in \mathcal{A}$، ومنه $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.

لنثبت الآن أنّ $\mathcal{M}$ صف رتيب على E.

أ) لتكن $\mathcal{M} \supset \{G_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة، عندئذ، من أجل كلّ $n \geq 1$ فإنّ المتتالية $\{F_n \cap G_k\}_{k\geq 1} \subset \sigma(\mathcal{A})$ متزايدة. نستنتج من الخاصيّة الأولى للتقارب أنّ

$$\mu_1\left(\bigcup_{k\geq 1}(F_n \cap G_k)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu_1(F_n \cap G_k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu_2(F_n \cap G_k) = \mu_2\left(\bigcup_{k\geq 1}(F_n \cap G_k)\right)$$

وعليه فإنّ

$$\mu_1\left(F_n \cap \left(\bigcup_{k\geq 1} G_k\right)\right) = \mu_2\left(F_n \cap \left(\bigcup_{k\geq 1} G_k\right)\right),\quad (\forall n \geq 1),$$

وهذا يثبت أنّ $\bigcup_{n\geq 1} G_n \in \mathcal{M}$.

ب) لتكن $\mathcal{M} \supset \{H_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متناقصة، عندئذ، من أجل كلّ $n \geq 1$ فإنّ المتتالية $\{F_n \cap H_k\}_{k\geq 1} \subset \sigma(\mathcal{A})$ متناقصة ولدينا، من أجل $j=1$ و $j=2$، ما يلي

$$\mu_j(F_n \cap H_k) \leq \mu_j(F_n) < \infty,\quad (\forall k \geq 1).$$

نستنتج من الخاصيّة الثانية للتقارب أنّ

$$\mu_1\left(\bigcap_{k\geq 1}(F_n \cap H_k)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu_1(F_n \cap H_k)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \mu_2(F_n \cap H_k) = \mu_2\left(\bigcap_{k\geq 1}(F_n \cap H_k)\right)$$

وعليه فإنّ

$$\mu_1\left(F_n\cap\left(\bigcap_{k\geq 1}H_k\right)\right)=\mu_2\left(F_n\cap\left(\bigcap_{k\geq 1}H_k\right)\right)\text{،}\quad(\forall n\geq 1)\text{،}$$

وهذا يثبت أنّ $\bigcap_{n\geq 1}H_n\in\mathcal{M}$، وبالتالي $\mathcal{M}$ صف رتيب يحوي الجبر $\mathcal{A}$. وهكذا فإنّنا نستخلص من المبرهنة **31.2** أنّ

$$\mathcal{A}\subset\mathcal{M}\subset\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{M}_E(\mathcal{A})\text{،}$$

وعليه فإنّ $\mathcal{M}=\sigma(\mathcal{A})$.

لقد تحصّلنا أخيرًا على النتيجة التالية:

$$\mu_1(A\cap F_n)=\mu_2(A\cap F_n)\text{،}\quad(\forall A\in\sigma(\mathcal{A}))\text{،}\quad(\forall n\geq 1)\text{،}$$

ومنه نرى بفضل الخاصية الأولى للتقارب أنّ

$$\mu_1(A)=\mu_2(A)\text{،}\quad(\forall A\in\sigma(\mathcal{A}))\text{،}$$

وهذا يعني بالضبط أنّ $\mu_1\equiv\mu_2$ على العشيرة $\sigma(\mathcal{A})$.■

مبرهنة 25.3 [هان[4] # Hahn]: **يقبل كلّ قياس موجب μ على جبر $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(E)$ تمديدًا $\tilde{\mu}$ إلى $\sigma(\mathcal{A})$. يكون هذا التمديد وحيدًا و σ-منتهيًا إذا كان μ قياسًا σ-منتهيًا.**

إثبات: بما أنّ μ قياس موجب على الجبر $\mathcal{A}$ فهو يولّد قياسًا خارجيًّا μ^* حسب المبرهنة **19.3**. من جهة أخرى، القياس الخارجي μ^* هو قياس موجب على عشيرة المجموعات الجزئية الـ μ^*-قابلة للقياس $\mathcal{B}_\mu$ وذلك بفضل مبرهنة كرابيودوري **20.3**. لنثبت الآن أنّ $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_\mu$.

ليكن $S\subset E$ و $A\in\mathcal{A}$. يكفي حسب الملاحظة **23.3** إثبات أنّ

---

[4]) هانز هان [Hans Hahn] (1879–1934)

نفرض أن $\mu^*(S)<+\infty$. ينتج عن تعريف الحد الأدنى أنه من أجل كلّ عدد $\varepsilon>0$ توجد تغطية $\{S_n\}_{n\geq 1}\in\mathfrak{R}_S$ بحيث

$$\sum_{n\geq 1}\mu(S_n)<\mu^*(S)+\varepsilon .$$

بما أنّ $\{A\cap S_n\}_{n\geq 1}\in\mathfrak{R}_{A\cap S}$ و $\{A^c\cap S_n\}_{n\geq 1}\in\mathfrak{R}_{A^c\cap S}$ فإنّنا نحصل على

$$\begin{aligned}\mu^*(S)&\leq\mu^*(S\cap A)+\mu^*(S\cap A^c)\\&\leq\sum_{n\geq 1}\mu(A\cap S_n)+\sum_{n\geq 1}\mu(A^c\cap S_n)\\&=\sum_{n\geq 1}\left(\mu(A\cap S_n)+\mu(A^c\cap S_n)\right)\\&=\sum_{n\geq 1}\mu(S_n)<\mu^*(S)+\varepsilon\end{aligned}$$

ينتج عن كون ε اختياريًّا أنّ

$$\mu^*(S)=\mu^*(S\cap A)+\mu^*(S\cap A^c) ،$$

وهذا يثبت أنّ $A\in\mathcal{B}_{\mu^*}$. إذن $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}_{\mu^*}$، ومنه $\mathcal{A}\subset\sigma(\mathcal{A})\subset\mathcal{B}_{\mu^*}$.
إنّ الاقتصار $\tilde{\mu}=\mu^*_{|\sigma(\mathcal{A})}$ قياس موجب على $\sigma(\mathcal{A})$، ولدينا

$$\tilde{\mu}_{|\mathcal{A}}=\mu^*_{|\mathcal{A}}=\mu .$$

فيما يخصّ وحدانية التمديد $\tilde{\mu}$ عندما يكون القياس الموجب μ σ-منتهيًا يكفي تطبيق التوطئة **24.3**، ولإثبات أنّ التمديد $\tilde{\mu}$ قياس σ-منته نلاحظ ما يلي: إنّ كون μ قياسًا σ-منتهيًا يستلزم وجود متتالية $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{A}$ بحيث

$$E=\bigcup_{n\geq 1}E_n \text{ و } \mu(E_n)<+\infty \text{ ،} (\forall n\geq 1) .$$

تُحقق ذات المتتالية الخواص التالية: $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\sigma(\mathcal{A})$،

$$E=\bigcup_{n\geq 1}E_n \text{ و } \tilde{\mu}(E_n)<+\infty \text{ ،} (\forall n\geq 1) .$$

وعليه فإنّ $\tilde{\mu}$ قياس σ−منته، وهو المطلوب.■

4- تتميم القياسات الموجبة

تعريف 26.3: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس. نقول عن مجموعة قابلة للقياس $A\in\Sigma$ إنّها مهملة *(negligible)* إذا كان $\mu(A)=0$. تدعى كلّ مجموعة جزئية من مجموعة مهملة مجموعة μ−مهملة.

سوف نرمز لأسرة كلّ المجموعات الـμ−مهملة في (E,Σ,μ) بـ $\mathcal{N}_\mu$.

ملاحظة 27.3: إنّ كلّ اتحاد قابل للعد لمجموعات مهملة هو مجموعة مهملة، وكلّ اتحاد ق . ابل للعد لمجموعات μ−مهملة هـ . و م جموعة μ−مهملة. نشير إلى أنّ المجموعة الـ μ−مهملة ليست بالضرورة قابلة للقياس وإلاّ صارت مهملة.

تعريف 28.3: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس. نقـ ول عن القياس μ إنّـه تام *(complete)* إذا كانت كلّ مجموعة μ−مهملة في E مجموعة مهملة (بمعنى أنه إذا كانت $A\in\Sigma$ بحيث $\mu(A)=0$ و $B\subset A$ فإنّ $B\in\Sigma$).

نقول عن فضاء قياس (E,Σ,μ) إنّه تام إذا كان القياس الموجب μ تامًّا.

مثال 29.3: كمثال لقياس تام نذكر قياس العدّ μ_c فهو تام على كلّ عشيرة $\Sigma\subset\mathcal{P}(E)$.

ملاحظة 30.3: يوجد العديد من القياسات غير التامّة، ولعلّ أشهرها هو قياس بوريل الذي سوف نتعرّض له خلال هذا الفصل.

بغية تتميم قياس موجب غير تام نُدخل أوّلا مفهومًا جديدًا لمقارنة قضيتين باختلاف مجموعة مهملة، ألا وهو مفهوم صحّة قضية μ–تقريبًا أينما كانت. نضع التعريف التالي:

تعريف 31.3: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس. نقول عن قضية $(\mathcal{P})$ على E إنّها محققة μ–تقريبًا أينما كانت إذا كانت مجموعة النقاط $x\in E$ التي من أجلها القضية $(\mathcal{P}(x))$ غير صحيحة هي مجموعة مهملة، نكتبها اختصارًا: $(\mathcal{P})$ μ–تاك. (تاك، هي اختصار للعبارة تقريبًا أينما كانت)، يقابلها بالإنجليزي *a.e.* *(almost everywhere)*.

مثال 32.3: ليكن $(\mathbb{R},\Sigma,\mu)$ فضاء قياس و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة معطاة.
عندئذ،

م1) التعبير "$f\geq 0$، μ–تاك" معناه أنّ $\mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}: f(x)<0\right\}\right)=0$.

م2) التعبير "f دالة متّصلة μ–تاك" معناه أنّ نقاط تقطع الدّالة f تشكّل مجموعة مهملة، أي أنّ الدّالة f متّصلة إلا على مجموعة مهملة في $(\mathbb{R},\Sigma,\mu)$.

نتطرّق فيما يلي إلى مسألة تتميم كلّ قياس موجب غير تام. لدينا

مبرهنة 33.3: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس. نعرّف الأسرة
$\tilde{\Sigma}=\left\{S\subset E: S=A\cup N, A\in\Sigma \ \& \ N\in\mathcal{N}_\mu\right\}$،
والدالّة $\tilde{\mu}:\tilde{\Sigma}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ بـ
$\tilde{\mu}(A\cup N)=\mu(A)$، $\left(\forall A\in\Sigma, \forall N\in\mathcal{N}_\mu\right)$.
عندئذ،

أ) $\tilde{\Sigma}$ عشيرة على E تحوي Σ.

ب) $\tilde{\mu}$ قياس موجب تام على $\tilde{\Sigma}$ يمدّد μ.

ج) الفضاء $\left(E,\tilde{\Sigma},\tilde{\mu}\right)$ هو أصغر فضاء قياس تام يحوي (E,Σ,μ).

(يدعى القياس $\tilde{\mu}$ تتمّة μ، كما نسمّي الفضاء $(E,\tilde{\Sigma},\tilde{\mu})$ بفضاء القياس المتمّم لـ $((E,\Sigma,\mu))$.

إثبات: أ) لدينا $A=A\cup\varnothing$، من أجل كلّ $A\in\Sigma$، ومنه $A\in\tilde{\Sigma}$ (لأنّ $\varnothing\in\mathcal{N}_\mu$)، وبالتالي $\Sigma\subset\tilde{\Sigma}$. لنثبت الآن أنّ $\tilde{\Sigma}$ عشيرة على E، بالتأكيد، ليكن $S\in\tilde{\Sigma}$، يوجد $A\in\Sigma$ و $N\in\mathcal{N}_\mu$ بحيث $S=A\cup N$. بما أنّ $N\in\mathcal{N}_\mu$ فتوجد إذن $B\in\Sigma$ بحيث $N\subset B$ و $\mu(B)=0$. لدينا من جهة أخرى، $S^c=(A\cup B)^c\cup((B\setminus N)\setminus A)$، مع العلم أنّ $(A\cup B)^c\in\Sigma$ و $(B\setminus N)\setminus A\subset B$)، إذن $(B\setminus N)\setminus A$ عنصر من $\mathcal{N}_\mu$، ومن ثمّ فإنّ $S^c\in\tilde{\Sigma}$.

لتكن الآن $\{S_n\}_{n\geq 1}\subset\tilde{\Sigma}$ إذاً $S_n=A_n\cup N_n$، $(\forall n\geq 1)$، بحيث $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ و $\{N_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{N}_\mu$. ينتج فورًا عن كون $\bigcup_{n\geq 1}A_n\in\Sigma$ و $\bigcup_{n\geq 1}N_n\in\mathcal{N}_\mu$ أنّ

$$\bigcup_{n\geq 1}S_n=\left(\bigcup_{n\geq 1}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n\geq 1}N_n\right)\in\tilde{\Sigma}.$$

وهكذا فإنّ $\tilde{\Sigma}$ عشيرة على المجموعة E.

ب) لنتأكّد الآن من أنّ الدّالة $\tilde{\mu}$ معرّفة تعريفا جيّدًا على $\tilde{\Sigma}$. ليكن $S'\in\tilde{\Sigma}$، S بحيث $S'=S$. توجد مجموعات جزئية $A, A'\in\Sigma$ و $N, N'\in\mathcal{N}_\mu$، بحيث

$$S=A\cup N=S'=A'\cup N'.$$

نستنتج أنّ

$$\begin{aligned}\varnothing&=(A'\cup N')\cap(A\cup N)^c=(A'\cup N')\cap A^c\cap N^c\\&=(A'\cap A^c\cap N^c)\cup(N'\cap A^c\cap N^c)\end{aligned}$$

ومنه $A'\cap A^c\cap N^c=\varnothing$، إذن $A'\cap A^c=A'\setminus A\subset N$، وبالتالي $\mu(A'\setminus A)=0$. وبنفس الكيفية نحصل على $A\cap A'^c=A\setminus A'\subset N'$، ومنه $\mu(A\setminus A')=0$.

نلاحظ أنّ

$.(A \setminus A') \cap (A \cap A') = (A' \setminus A) \cap (A \cap A') = \varnothing$

وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A) &= \mu((A \setminus A') \cup (A \cap A')) \\ &= \mu(A \setminus A') + \mu(A \cap A') = 0 + \mu(A \cap A') \\ &= \mu(A' \setminus A) + \mu(A \cap A') = \mu((A' \setminus A) \cup (A \cap A')) \\ &= \mu(A') = \tilde{\mu}(A' \cup N') = \tilde{\mu}(S')\end{aligned}$$

وهكذا فإنّ $\tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(S') = \mu(A \cap A')$، وهذا يثبت أنّ الدّالة $\tilde{\mu}$ معرّفة جيّدًا على $\tilde{\Sigma}$.

بيان أنّ $\tilde{\mu}$ قياس موجب على $\tilde{\Sigma}$: لتكن $\{S_n\}_{n\geq 1} \subset \tilde{\Sigma}$ متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى، $S_n = A_n \cup N_n$، $(\forall n \geq 1)$. لدينا فورًا $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ وأنّها ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى، إضافة إلى أنّ

$$.\tilde{\mu}\left(\bigcup_{n\geq 1} S_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = \sum_{n\geq 1} \tilde{\mu}(S_n)$$

لدينا من جهة أخرى $\tilde{\mu}(\varnothing) = \tilde{\mu}(\varnothing \cup \varnothing) = \mu(\varnothing) = 0$، وهكذا فإنّ $\tilde{\mu}$ قياس موجب على $\tilde{\Sigma}$.

بيان أنّ $\tilde{\mu}$ تام: ليكن $S \in \mathcal{N}_{\tilde{\mu}}$، يوجد $A \in \Sigma$ و $N \in \mathcal{N}_\mu$ بـــحيث $S \subset A \cup N$ و $\tilde{\mu}(A \cup N) = \mu(A) = 0$. إنّ $N \in \mathcal{N}_\mu$ يستلزم وجود $B \in \Sigma$ بحيث $N \subset B$ و $\mu(B) = 0$، وعليه فإنّ $S \subset A \cup B$ حيث $A \cup B \in \Sigma$ و $\mu(A \cup B) = 0$، وبالتالي $S \in \mathcal{N}_\mu$. إذن $S = \varnothing \cup S \in \tilde{\Sigma}$، إضافة إلى أنّ $\tilde{\mu}(S) = \mu(\varnothing) = 0$، وهكذا فإنّ القياس $\tilde{\mu}$ تام.

القياس $\tilde{\mu}$ هو تمديد للقياس μ: ليكن $A\in\Sigma$، عندئذ $A=A\cup\varnothing\in\tilde{\Sigma}$، ومنه $\tilde{\mu}(A)=\mu(A\cup\varnothing)=\mu(A)$. إذن $\tilde{\mu}_{|\Sigma}=\mu$.

ج) لنثبت الآن أنّ الفضاء $(E,\tilde{\Sigma},\tilde{\mu})$ هو أصغر فضاء قياس تام يحوي (E,Σ,μ). ليكن $(E,\hat{\Sigma},\hat{\mu})$ فضاء قياس تام آخر بحيث $\Sigma\subset\hat{\Sigma}$ و $\hat{\mu}_{|\Sigma}=\mu$. إنّ كون $\hat{\mu}$ تامًّا يستلزم أنّ $\mathcal{N}_{\hat{\mu}}\subset\hat{\Sigma}$. ليكن $N\in\mathcal{N}_{\mu}$، يوجد $B\in\Sigma$ بحيث $N\subset B$ و $\mu(B)=0$. ينتج عن الاحتواء $\Sigma\subset\hat{\Sigma}$ أنّ $B\in\hat{\Sigma}$ و $\hat{\mu}(B)=\mu(B)=0$، وهذا يعني أنّ $N\in\mathcal{N}_{\hat{\mu}}$، وبالتالي $\mathcal{N}_{\mu}\subset\mathcal{N}_{\hat{\mu}}$.

ليكن $S\in\tilde{\Sigma}$، يوجد $A\in\Sigma\subset\hat{\Sigma}$ و $N\in\mathcal{N}_{\mu}\subset\mathcal{N}_{\hat{\mu}}\subset\hat{\Sigma}$ بحيث $S=A\cup N$، ومنه، $S\in\hat{\Sigma}$. إذن $\tilde{\Sigma}\subset\hat{\Sigma}$.
لدينا من جهة أخرى،

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(S)&=\hat{\mu}(A\cup N)\\&\geq\hat{\mu}(A)=\mu(A)=\tilde{\mu}(A\cup N)=\tilde{\mu}(S)\end{aligned}$$

ومنه $\tilde{\mu}\leq\hat{\mu}$ على $\tilde{\Sigma}$. وهكذا فإنّ $(E,\tilde{\Sigma},\tilde{\mu})$ هو أصغر فضاء قياس تام يحوي (E,Σ,μ)، وهو المطلوب.■

ملاحظة 34.3: على العموم العشيرة $\mathcal{B}_{\mu}$. لا تتطابق مع العشيرة المتمّمة $\tilde{\Sigma}$ لـــ Σ إن لم يكن القياس σ-منتهيًا وهذا ما يوضّحه المثال المضاد التالي:

لتكن E مجموعة غير قابلة للعد، نعتبر قياس العدّ μ_c على العشيرة

$$\Sigma=\left\{A\subset E:\ |A|\leq\omega_0\ \text{أو}\ |A^c|\leq\omega_0\right\}.$$

إنّ μ_c قياس تام على Σ (غير σ-منته). من جهة أخرى، يساوي القياس الخارجي μ_c^* الممدّد لـــ μ_c ما يلي

$$\mu_c^*(A)=inf\left\{\mu_c(B):A\subset B,B\in\Sigma\right\}\text{،}\ (\forall A\subset E).$$

- إذا كان $|A|<\infty$ فإنّ $A\in\Sigma$، وبالتالي $\mu_c^*(A)=\mu_c(A)$.

– إذا كانت $|A|=\infty$ فإنّ $A\subset B$، $B\in\Sigma$ يستلزم أنّ B غير منتهية، ومنه $\mu_c(B)=\infty$. إذن $\mu_c^*(A)=\infty$، وبالتالي μ_c^* يتطابق مع قياس العدّ على $\mathcal{P}(E)$.

لدينا من أجل كلّ $A,S\subset E$ المساواة التالية:

$$\mu_c^*(S\cap A)+\mu_c^*(S\cap A^c)=\mu_c(S\cap A)+\mu_c(S\cap A^c)=\mu_c(S)،$$

لأنّ μ_c قياس موجب على $\mathcal{P}(E)$، وعليه فإنّ $\mathcal{B}_{\mu_c^*}=\mathcal{P}(E)$.

نستخلص من هذا أنّ $\Sigma=\tilde{\Sigma}\subsetneq\mathcal{B}_{\mu_c^*}=\mathcal{P}(E)$.

قضية 35.3: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس وليكن $(E,\tilde{\Sigma},\tilde{\mu})$ مُتمّمَه. إذا كان μ^* القياس الخارجي المرفق بالقياس الموجب μ و $\mathcal{B}_{\mu^*}$ عشيرة المجموعات الـ μ^*-قابلة للقياس على E، عندئذ،

$$\tilde{\Sigma}\subset\mathcal{B}_{\mu^*} \text{ و } \mu^*_{|\tilde{\Sigma}}=\tilde{\mu}.$$

إثبات: ليكن $T\in\tilde{\Sigma}$، يوجد $A\in\Sigma$ و $N\in\mathcal{N}_\mu$ بحيث $T=A\cup(N\setminus A)$، يوجد من جهة أخرى $B\in\Sigma$ بحيث

$$\mu(B)=0 \text{ و } N':=N\setminus A\subset N\subset B.$$

لدينا من أجل كلّ $S\subset E$،

$$\begin{aligned}\mu^*(S)&\le\mu^*(S\cap N')+\mu^*(S\cap N'^c)\\&\le\mu^*(N')+\mu^*(S)\\&\le\mu^*(B)+\mu^*(S)=0+\mu^*(S)\end{aligned}$$

ومنه، $\mu^*(S)=\mu^*(S\cap N')+\mu^*(S\cap N'^c)$، أي أنّ $N'\in\mathcal{B}_{\mu^*}$. بما أنّ $A\in\Sigma\subset\mathcal{B}_{\mu^*}$ فإنّنا نحصل على $T\in\mathcal{B}_{\mu^*}$، وبالتالي $\tilde{\Sigma}\subset\mathcal{B}_{\mu^*}$.

لدينا من جهة أخرى،

$$\mu^*(T)=\mu^*(A\cup N')=\mu^*(A)+\mu^*(N')$$

$$= \mu(A) + 0 = \mu(A)$$
$$= \tilde{\mu}(A \cup N') = \tilde{\mu}(T)$$

وبما أنّ T اختيارية فإنّنا نحصل على

$(\forall T \in \tilde{\Sigma})$ ، $\mu^*(T) = \tilde{\mu}(T)$،

وهذا يثبت أنّ $\mu^*_{|\tilde{\Sigma}} = \tilde{\mu}$. ■

كتطبيق عملي للنتائج السابقة سوف نرمز بـ $\mathcal{I}$ لأسرة كلّ الفترات المفتوحة في $\mathbb{R}$، كما نرمز بـ $\mathcal{I}_A$ لأسرة كلّ التغطيات القابلة للعد لمجموعة جزئية $A \subset \mathbb{R}$ بعناصر من $\mathcal{I}$، أي $\{J_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{I}_A$ إذا وإذا فقط كان

$(J_n \in \mathcal{I})$ ، $(\forall n \geq 1)$ و $A \subset \bigcup_{n\geq 1} J_n$.

سوف نرمز بـ ℓ لدالّة **"الطول الاعتيادي"** المعرّف على أسرة الفترات الحقيقية، فعلى سبيل المثال إذا كانت J فترة من $\mathbb{R}$ فإنّ

$\ell(J) = \sup J - \inf J$، مع وضع $\ell(]x,x[) = 0$ ، $(\forall x \in \mathbb{R})$.

سوف نمدّد من خلال القضية المقبلة الطول الاعتيادي ℓ إلى قياس خارجي λ^* على $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

قضية 36.3: إنّ الدّالة $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ **المعرّفة بـ**

$$\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n\geq 1} \ell(J_n), \{J_n\}_{n\geq 1} \in \mathcal{I}_A\right\} \text{ ، } (\forall A \subset \mathbb{R})\text{،}$$

قياس خارجي على $\mathbb{R}$ يتمتّع بالخواص التالية:

أ) $\lambda^*(\{x\}) = 0$ ، $(\forall x \in \mathbb{R})$،

ب) $\lambda^*(J) = \ell(J)$، **مهما تكن الفترة** $J \subset \mathbb{R}$،

ت) $\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$ ، $(\forall A \subset \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R})$، (الصمود بالانزياح).

ث) $\lambda^*(xA) = |x|\lambda^*(A)$ ، $(\forall A \subset \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R})$.

إثبات: يمكن للقارئ الرجوع إلى إثبات **مبرهنة تمديد قياس موجب إلى قياس خارجي** للتأكد من أنّ λ^* قياس خارجي على $\mathbb{R}$. فيما يخصّ الخواص الأربع الأخرى لدينا:

أ) ليكن $x\in\mathbb{R}$، عندئذ، $\{x\}\subset\bigcup_{n\geq 1}J_n$، حيث

$$J_n=\left]x-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}},x+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[\text{،}\quad(\forall n\geq 1,\forall\varepsilon>0)\text{،}$$

ومنه

$$0\leq\lambda^*(\{x\})\leq\sum_{n\geq 1}\ell(J_n)=\varepsilon\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}=\varepsilon.$$

وبما أنّ ε اختياري فإنّنا نحصل على $\lambda^*(\{x\})=0$.

ب) لتكن J فترة من $\mathbb{R}$.

الحالة الأولى: $\ell(J)<+\infty$. من أجل كلّ تغطية $\{J_n\}_{n\geq 1}\in\mathcal{I}_J$ فإنّ $J\subset\bigcup_{n\geq 1}J_n$، ومنه $\ell(J)\leq\sum_{n\geq 1}\ell(J_n)$، وبالتالي،

$$\ell(J)\leq\lambda^*(J)=\inf\left\{\sum_{n\geq 1}\ell(J_n),\{J_n\}_{n\geq 1}\in\mathcal{I}_J\right\}.$$

من جهة أخرى، بوضع $\tilde{J}=\left]\inf J-\frac{\varepsilon}{2},\sup J+\frac{\varepsilon}{2}\right[$، $(\varepsilon>0)$،

نحصل على $J\subset\tilde{J}\in\mathcal{I}$ و $\ell(\tilde{J})=(\sup J-\inf J)+\varepsilon=\ell(J)+\varepsilon$.

بما أنّ $\{J_n\}:=\{\tilde{J},\varnothing,\varnothing,...\}\in\mathcal{I}_J$، عندئذ،

$$\lambda^*(J)\leq\sum_{n\geq 1}\ell(J_n)=\ell(\tilde{J})=\ell(J)+\varepsilon\text{،}$$

ينتج فورًا عن كون ε اختياريًّا أنّ

$$\lambda^*(J)\leq\ell(J).$$

وعليه فإنّ $\lambda^*(J)=\ell(J)$.

$\delta < \ell(J_\delta) = \lambda^*(J_\delta) \le \lambda^*(J)$،

ومنه، $\lambda^*(J) = \ell(J) = +\infty$ لكون δ اختياريًّا.

ت) لدينا من أجل كلّ فترة J من $\mathbb{R}$،

$\ell(J+x) = \ell(J)$، $(\forall x \in \mathbb{R})$،

ومنه $\lambda^*(J+x) = \lambda^*(J)$، $(\forall x \in \mathbb{R})$، لأنّ λ^* تمديد لدالّة الطول ℓ.

ليكن $A \subset \mathbb{R}$ و $\{J_n\}_{n\ge1} \in \mathcal{I}_A$، عندئذ، من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $A + x \subset \bigcup_{n\ge1}(J_n + x)$. واضح إذن أنّ

$$\lambda^*(A+x) \le \sum_{n\ge1} \lambda^*(J_n + x) = \sum_{n\ge1} \ell(J_n + x) = \sum_{n\ge1} \ell(J_n)،$$

ومنه

$$\lambda^*(A+x) \le \inf\left\{\sum_{n\ge1} \ell(J_n), \{J_n\}_{n\ge1} \in \mathcal{I}_A\right\} = \lambda^*(A).$$

وهكذا فإنّ

$$\lambda^*(A+x) \le \lambda^*(A)، \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

نستنتج من هذه المتباينة الأخيرة أنّ

$$\lambda^*(A) = \lambda^*((A+x)+(-x)) \le \lambda^*(A+x) \le \lambda^*(A)، \quad (\forall x \in \mathbb{R})،$$

وعليه فإنّ $\lambda^*(A+x) = \lambda^*(A)$، $(\forall x \in \mathbb{R})$.

ث) إذا كان $x = 0$ فواضح أنّ $\lambda^*(0.A) = 0.\lambda^*(A) = 0$ لأنّ $0.A = \{0\}$، $(\forall A \ne \varnothing)$ و $0.A = \varnothing$، عندما $A = \varnothing$. نفرض إذن أنّ $x \ne 0$. لدينا، $\ell(xJ) = |x|\ell(J)$، من أجل كلّ فترة J من $\mathbb{R}$.

ليكن $A\subset\mathbb{R}$، عندئذ من أجل كلّ تغطية $\{J_n\}_{n\geq 1}\in\mathcal{I}_A$ فإنّ

$xA\subset\bigcup_{n\geq 1}(xJ_n)$، ومنه

$$\lambda^*(xA)\leq\sum_{n\geq 1}\ell(xJ_n)=|x|\sum_{n\geq 1}\ell(J_n).$$

إذن

$$\lambda^*(xA)\leq|x|\lambda^*(A).$$

نستنتج فورًا من هذه المتباينة أنّ

$$\lambda^*(A)=\lambda^*\left(x^{-1}(xA)\right)\leq|x|^{-1}\lambda^*(xA)،$$

أي أنّ $|x|\lambda^*(A)\leq\lambda^*(xA)$، وبالتالي تتحقق المساواة المطلوبة.■

5- عشيرة وقياس لوبيغ على $\mathbb{R}$

من أجل القياس الخارجي λ^* المحصّل عليه في القضية **36.3** نعرّف بفضل مبرهنة كرائيودوري العشيرة $\mathcal{B}_\lambda$. التي نرمز لها بـــ $\mathcal{L}$ بحيث يصبح القياس الخارجي λ^* قياسًا موجبًا على $\mathcal{L}$. بعبارة أدقّ الأسرة

$$\mathcal{L}=\left\{A\subset\mathbb{R}:\lambda^*(S)=\lambda^*(S\cap A)+\lambda^*(S\cap A^c),\forall S\subset\mathbb{R}\right\}$$

عشيرة على $\mathbb{R}$، تدعى **عشيرة لوبيغ على** $\mathbb{R}$. نسمّي عناصر $\mathcal{L}$ **بالمجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ**، كما نسمّي اقتصار القياس الخارجي λ^* على $\mathcal{L}$ **بقياس لوبيغ على** $\mathbb{R}$، ونرمز له بـــ m أو λ.
إنّه قياس موجب على $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة كرائيودوري.

مبرهنة 37.3: لدينا الخواص التالية:

1) إذا كان $A\subset\mathbb{R}$ بحيث $\lambda^*(A)=0$ فإنّ $A\in\mathcal{L}$،

4) $m(A+x)=m(A)$ ، $(\forall A\subset\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R})$ ، (الصمود بالانزياح).

إثبات: 1) لدينا من أجل كلّ مجموعة جزئية $S\subset\mathbb{R}$ ما يلي:

$$\begin{aligned}\lambda^*(S)&\le\lambda^*(S\cap A)+\lambda^*(S\cap A^c)\\&\le\lambda^*(A)+\lambda^*(S)=0+\lambda^*(S)\\&\le\lambda^*(S)\end{aligned}$$

ومنه $\lambda^*(S)=\lambda^*(S\cap A)+\lambda^*(S\cap A^c)$. إذن $A\in\mathcal{L}$ (لدينا كذلك $m(A)=0$ ، أي A مهملة بمفهوم لوبيغ).

2) لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ بحيث $A\subset B$ و $m(B)=0$. لنثبت أنّ $A\in\mathcal{L}$. بالفعل، إنّ كون $m(B)=0$ يقتضي أنّ $B\in\mathcal{L}$ و $\lambda^*(B)=0$. لدينا من أجل كلّ مجموعة جزئية $S\subset\mathbb{R}$ ما يلي

$0\le\lambda^*(S\cap A)\le\lambda^*(S\cap B)=0$ و $\lambda^*(S\cap A^c)\le\lambda^*(S)$ ،

ومنه

$$\lambda^*(S)\le\lambda^*(S\cap A)+\lambda^*(S\cap A^c)\le 0+\lambda^*(S).$$

إذن، $\lambda^*(S)=\lambda^*(S\cap A)+\lambda^*(S\cap A^c)$ ، $(\forall S\subset\mathbb{R})$ ، وهذا يثبت أنّ $A\in\mathcal{L}$. وهكذا فإنّ القياس m تام.

3) بما أنّ $\sigma\left(\left\{]a,\infty[\,,a\in\mathbb{R}\right\}\right)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ، فيكفي بيان أنّ $]a,\infty[\in\mathcal{L}$ ، $(\forall a\in\mathbb{R})$. يرجع هذا إلى إثبات أنّ

$$\lambda^*(S)\ge\lambda^*(S\cap]a,\infty[)+\lambda^*(S\cap]-\infty,a]),\quad(\forall S\subset\mathbb{R}).$$

ليكن $a\in\mathbb{R}$ و $S\subset\mathbb{R}$ ، نضع $J=]a,\infty[$.

- إذا كان $\lambda^*(S)=+\infty$ فإنّ المتباينة محققة دوما.
- نفرض إذن أنّ $\lambda^*(S)<+\infty$. من أجل كلّ عدد موجب $\varepsilon>0$ توجد تغطية $\{J_n\}_{n\geq1}\in\mathcal{I}_S$ بحيث

$$\sum_{n\geq1}\ell(J_n)<\lambda^*(S)+\varepsilon \; .$$

وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}\lambda^*(S)&\leq\lambda^*(S\cap J)+\lambda^*(S\cap J^c)\\&\leq\sum_{n\geq1}\ell(J_n\cap J)+\sum_{n\geq1}\ell(J_n\cap J^c)\\&\leq\sum_{n\geq1}\left(\ell(J_n\cap J)+\ell(J_n\cap J^c)\right)\\&\leq\sum_{n\geq1}\ell(J_n)<\lambda^*(S)+\varepsilon\end{aligned}$$

ينتج عن كون ε اختياريًّا أنّ

$$\lambda^*(S)=\lambda^*(S\cap J)+\lambda^*(S\cap J^c) \text{،}$$

وهكذا فإنّ $J\in\mathcal{L}$، $(\forall a\in\mathbb{R})$. إذن، $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\mathcal{L}$.

4) باستعمال العلاقتين التاليتين المحققتين من أجل كلّ عدد $a\in\mathbb{R}$ وكلّ مجموعتين جزئيتين $A,B\subset\mathbb{R}$: (انظر تمرين 01)

ع1) $A\cap(B+a)=(A-a)\cap B+a$ ،

ع2) $(A+a)^c=A^c+a$.

نحصل من أجل كلّ $A\in\mathcal{L}$، $a\in\mathbb{R}$ و $S\subset\mathbb{R}$، على

$$\begin{aligned}&\lambda^*\left(S\cap(A+a)\right)+\lambda^*\left(S\cap(A+a)^c\right)\\&=\lambda^*\left((S-a)\cap A+a\right)+\lambda^*\left(S\cap(A^c+a)\right)\end{aligned}$$

$$= \lambda^*(S-a) = \lambda^*(S)$$

إذن $A+a \in \mathcal{L}$، وبالتالي

$$\lambda^*(A+a) = \lambda^*(A) = m(A) = m(A+a)$$

أي أنّ $m(A+a) = m(A)$، $(\forall a \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{L})$. ■

مثال 38.3: نستنتج من القضية **36.3** أ) والمبرهنة **37.3** –1) أنّ $\{x\} \in \mathcal{L}$، $(\forall x \in \mathbb{R})$، إضافة إلى أنّ $m(\{x\}) = 0$، $(\forall x \in \mathbb{R})$، أي كلّ المجموعات أحادية العنصر هي مهملة، كما نحصل بفضل التجميع القابل للعد على أنّ كلّ مجموعة جزئية قابلة للعد من $\mathbb{R}$ هي مجموعة مهملة، فعلى سبيل المثال المجموعات $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ كلها مهملة في فضاء القياس $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$.

تعريف 39.3: يدعى اقتصار قياس لوبيغ على العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ قياس بوريل، ونرمز له بـــ λ (أو m)، (إنه قياس غير تام).

ملاحظة 40.3: على ضوء النتائج السابقة فإنّ الفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ هو متمّم للفضاء $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$، أي $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m) = \left(\mathbb{R}, \widetilde{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, \tilde{\lambda}\right)$، ولدينا

$$|\mathcal{B}(\mathbb{R})| = |\mathbb{R}| = c \text{ و } |\mathcal{L}| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| > c،$$

إذن $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{L}$، أي توجد في $\mathbb{R}$ مجموعات جزئية قابلة للقياس (لوبيغ) غير بوريلية.

إنشاء مجموعة غير قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ في $\mathbb{R}$:

يبيّن المثال المضاد التالي الذي يعود إلى فيتالي[5] (Vitali) أنّ عشيرة لوبيغ $\mathcal{L}$ محتواة تمامًا في $\mathcal{P}(\mathbb{R})$، أي توجد في $\mathbb{R}$ مجموعات غير قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ. تعتمد الفكرة أساسًا على **مسلمة الاختيار** المذكورة في الفصل الأول.

نعرّف على الفترة $J=[0,1[$ علاقة التكافؤ التالية:

$$.(\forall x,y\in J),\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y\in\mathbb{Q}$$

لنرمز بـــ $\dot{x}$ لصفّ تكافؤ العنصر $x\in J$، أي $\dot{x}=\{y\in J: y\mathcal{R}x\}$، وبـــ $J/\mathcal{R}$ لمجموعة القسمة المرفقة بالعلاقة $\mathcal{R}$. لدينا إذن،

$$.J=\bigcup\left\{\dot{x},\ \dot{x}\in J/\mathcal{R}\right\}$$

يمكننا بفضل مُسلمة الاختيار إنشاء مجموعة $\mathcal{H}\subset J$ بحيث

$$.\left(\forall\dot{x}\in J/\mathcal{R}\right)\text{، } Card\left(\dot{x}\cap\mathcal{H}\right)=1$$

ليكن r_1، r_2، ...، r_n، ... ترقيمًا لعناصر المجموعة $[-1,+1]\cap\mathbb{Q}$. لدينا فورًا

$$.(\forall k\neq j)\text{، }(\mathcal{H}+r_k)\cap(\mathcal{H}+r_j)=\varnothing$$

بالتأكيد، ليكن $x\in(\mathcal{H}+r_k)\cap(\mathcal{H}+r_j)$، يوجد عندئذ h و h' فـــي $\mathcal{H}$ بحيث $x=h+r_k=h'+r_j$، نستنتج أنّ $h'-h=r_k-r_j\in\mathbb{Q}$، أي $h\mathcal{R}h'$. إذن، $h=h'$ حسب تعريف المجموعة $\mathcal{H}$، وبالتالي فإنّ $r_k=r_j$ ممّا يؤدّي إلى تناقض. التقاطع هو إذن خال.

من جهة أخرى، لدينا الاحتواء المزدوج

[5]) جيوساب فيتالي [Giuseppe Vitali] (1875–1932)

$$.J\subset\bigcup_{n\geq 1}(\mathcal{H}+r_n)\subset[-1,2]$$

بالتأكيد، ليكن $x\in J$، يوجد عندئذ $a\in\mathcal{H}$ بحيث $x\in\dot{a}$، ومنه $x\mathcal{R}a$. إذن $x-a\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]=\bigcup_{n\geq 1}\{r_n\}$، وبالتالي $x=a+r_{n_0}$، من أجل مؤشر $n_0\geq 1$. إذن $x\in\bigcup_{n\geq 1}(\mathcal{H}+r_n)$.

الاحتواء الثاني بديهي ويمكن إثباته بالطرق التقليدية.

نفرض جدلاً أنّ $\mathcal{H}\in\mathcal{L}$، عندئذ $\mathcal{H}+r_n\in\mathcal{L}$، $(\forall n\geq 1)$، وبالتالي

$$\begin{aligned}m(J)=1\leq m\left(\bigcup_{n\geq 1}(\mathcal{H}+r_n)\right)&=\sum_{n\geq 1}m(\mathcal{H}+r_n)\\&=\sum_{n\geq 1}m(\mathcal{H})=m(\mathcal{H})\times\infty\leq m([-1,2])=3\end{aligned}$$

إذن $1\leq m(\mathcal{H})\times\infty\leq 3$.

إنّ هذه المتباينة غير صحيحة في كلتا الحالتين $m(\mathcal{H})=0$ و $m(\mathcal{H})>0$، وهذا تناقض، وعليه فإنّ $\mathcal{H}\notin\mathcal{L}$.

6- تمييز المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ

بإمكاننا بفضل المبرهنة التالية تمييز المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ وذلك بتقريبها ببعض المجموعات الجزئية المفتوحة، المغلقة وحتى المجموعات الجزئية من نمط $\mathcal{F}_\sigma$ و $\mathcal{G}_\delta$. لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة 41.3: لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$. إنّ القضايا التالية متكافئة:

1) $A\in\mathcal{L}$،

2) **مهما يكن $\varepsilon>0$ توجد مفتوحة $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$ تحوي A بحيث**

$\lambda^*(\mathcal{O}\setminus A)<\varepsilon$،

3) مهما يكن $0<\varepsilon$ توجد مغلقة $\mathcal{C}\subset\mathbb{R}$ محتواة في A بحيث $\lambda^*(A\setminus\mathcal{C})<\varepsilon$،

4) توجد مجموعة جزئية $G\subset\mathbb{R}$ من نمط $\mathcal{G}_\delta$ يحوي A بحيث $\lambda^*(G\setminus A)=0$،

5) توجد مجموعة جزئية $H\subset\mathbb{R}$ من نمط $\mathcal{F}_\sigma$ محتواة في A بحيث $\lambda^*(A\setminus H)=0$.

إثبات: سوف نتّبع المخطّط التالي:

$$\begin{array}{ccccc} & & 5) & & \\ & \nearrow & \downarrow & & \\ 3) & \leftarrow & 1) & \rightarrow & 2) \\ & & \uparrow & \swarrow & \\ & & 4) & & \end{array}$$

أ) الاستلزام $1)\Rightarrow 2)$: نفرض أوّلا أنّ $m(A)<\infty$. ينتج عن تعريف $\lambda^*(A)$ أنّ ، من أجل كلّ عدد $\varepsilon>0$ توجد تغطية $\{J_n\}_{n\ge 1}\in\mathcal{I}_A$ بحيث

$$\sum_{n\ge 1}\ell(J_n)<\lambda^*(A)+\varepsilon.$$

بوضع $V=\bigcup_{n\ge 1}J_n$ نحصل على مفتوحة $V\subset\mathbb{R}$ بحيث $A\subset V$، وعليه فإنّ

$$\lambda^*(A)\le\lambda^*(V)\le\sum_{n\ge 1}\ell(J_n)<\lambda^*(A)+\varepsilon.$$

لدينا $V\setminus A\in\mathcal{L}$ و $\lambda^*(A)<\infty$، ومنه

$$\begin{aligned}\lambda^*(V\setminus A)&=m(V\setminus A)=m(V)-m(A)\\&=\lambda^*(V)-\lambda^*(A)<\varepsilon\end{aligned}$$

نفرض الآن أنّ $m(A)=\infty$. نضع $A_n=A\cap\left]-n,n\right[$، $(\forall n\ge 1)$.

لدينا فورًا $m(A_n)<\infty$ ، $(\forall n\geq 1)$. نستنتج من الخطوة السابقة أن من أجل كلّ $\varepsilon>0$ و $n\geq 1$، توجد مفتوحة مجموعة $V_n\subset\mathbb{R}$ تحوي A_n بحيث $\lambda^*(V_n\setminus A_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}$. بوضع $V=\bigcup_{n\geq 1}V_n$ نحصل على مجموعة مفتوحة $V\subset\mathbb{R}$ تحوي A بحيث

$$\lambda^*(V\setminus A)=\lambda^*\left(\bigcup_{n\geq 1}V_n\setminus\bigcup_{n\geq 1}A_n\right)\leq\lambda^*\left(\bigcup_{n\geq 1}(V_n\setminus A_n)\right)$$
$$\leq\sum_{n\geq 1}\lambda^*(V_n\setminus A_n)<\varepsilon$$

الاستلزام $2)\Rightarrow 4)$: من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 1$ توجد مجموعة مفتوحة $\mathcal{O}_n\subset\mathbb{R}$ تحوي A بحيث $\lambda^*(\mathcal{O}_n\setminus A)<\frac{1}{n}$. بوضع $G=\bigcap_{n\geq 1}\mathcal{O}_n$ نحصل على مجموعة من نمط $\mathcal{G}_\delta$ بحيث $A\subset G$، إضافة إلى أنّ

$$\lambda^*(G\setminus A)=\lambda^*\left(\bigcap_{n\geq 1}(\mathcal{O}_n\setminus A_n)\right)\leq\lambda^*(\mathcal{O}_n\setminus A_n)<\tfrac{1}{n},\ (\forall n\geq 1)،$$

ومنه $\lambda^*(G\setminus A)=0$.

الاستلزام $4)\Rightarrow 1)$: لتكن $G\subset\mathbb{R}$ مجموعة جزئية من نمط $\mathcal{G}_\delta$ بحيث $A\subset G$ و $\lambda^*(G\setminus A)=0$، عندئذ $G\setminus A\in\mathcal{L}$ (حسب المبرهنة 37.3)، ومن ثمّ فإنّ

$$A=G\setminus(G\setminus A)\in\mathcal{L}.$$

الاستلزام $3)\Rightarrow 1)$: إنّ كون $A\in\mathcal{L}$ يقتضي أنّ $A^c\in\mathcal{L}$، وعليه فإنّ من أجل كلّ عدد $\varepsilon>0$ توجد بفضل الاستلزام $1)\Rightarrow 2)$ مجموعة مفتوحة $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}$ تحوي A^c بحيث $\lambda^*(\mathcal{O}\setminus A^c)<\varepsilon$. لدينا إذن

$$\mathcal{O}^c\subset A \text{ وَ } \mathcal{O}\setminus A^c=A\setminus\mathcal{O}^c=A\cap\mathcal{O}.$$

وهكذا فإنّ المجموعة المغلقة $\mathcal{C}:=\mathcal{O}^c$ تحقق $\mathcal{C}\subset A$ و $\lambda^*(A\setminus\mathcal{C})<\varepsilon$،

ومنه النتيجة المطلوبة.

الاستلزام $5) \Leftarrow 3)$: من أجل كلّ عدد طبيعي $n \geq 1$ توجد مجموعة مغلقة $\mathcal{C}_n \subset \mathbb{R}$ محتواة في A بحيث $\lambda^*(A \setminus \mathcal{C}_n) < \frac{1}{n}$. بوضع $H = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$ نحصل على مجموعة من نمط $\mathcal{F}_\sigma$ بحيث $H \subset A$، إضافة إلى أنّ

$$\lambda^*(A \setminus H) = \lambda^*\left(\bigcap_{n \geq 1} (A \setminus \mathcal{C}_n)\right) \leq \lambda^*(A \setminus \mathcal{C}_n) < \tfrac{1}{n}, \quad (\forall n \geq 1),$$

ومنه $\lambda^*(A \setminus H) = 0$.

الاستلزام $1) \Leftarrow 5)$: لتكن $H \subset \mathbb{R}$ مجموعة جزئية من نمط $\mathcal{F}_\sigma$ بحيث $H \subset A$ و $\lambda^*(A \setminus H) = 0$، عندئذ $A \setminus H \in \mathcal{L}$، ومن ثمّ فإنّ

$$A = H \cup (A \setminus H) \in \mathcal{L}.$$

إذن، كلّ القضايا متكافئة فيما بينها وبهذا يكتمل الإثبات.■

قضية 42.3: لتكن $A \in \mathcal{L}$ غير خالية بحيث $m(A) < \infty$. عندئذ من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة جزئية متراصة K محتواة في A بحيث $m(A \setminus K) < \varepsilon$.

إثبات: نستنتج من المبرهنة السابقة وجود مجموعة مغلقة $\mathcal{C} \subset A$ بحيث $m(A \setminus \mathcal{C}) < \frac{\varepsilon}{2}$. بوضع $\mathcal{C}_n = \mathcal{C} \cap [-n, n]$، $(\forall n \geq 1)$، نحصل على متتالية متزايدة بحيث $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$. بتطبيق الخاصية الأولى للتقارب نرى أنّ

$$m(\mathcal{C}) = \lim_{n \to \infty} m(\mathcal{C}_n),$$

يوجد إذن مؤشر n_0 بحيث $0 \leq m(\mathcal{C}) - m(\mathcal{C}_{n_0}) = m(\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{n_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$، مع التذكير أنّ $m(\mathcal{C}) < \infty$. نلاحظ من جهة أخرى أنّ المجموعة الجزئية $\mathcal{C}_{n_0}$ متراصة في A وأنّ $A \setminus \mathcal{C}_{n_0} = (A \setminus \mathcal{C}) \cup (\mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{n_0})$، وعليه فإنّ

$$m\left(A\setminus\mathcal{C}_{n_0}\right)\leq m\left(\mathcal{C}\setminus\mathcal{C}_{n_0}\right)+m\left(A\setminus\mathcal{C}_{n_0}\right)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$ ،

وهو المطلوب.■

لقد أثبتنا سابقًا أنّ قياس لوبيغ الخارجي لمجموعة أحادية العنصر معدوم، وبالتالي فإنّ قياس لوبيغ الخارجي لكلّ مجموعة قابلة للعد هو حتمًا معدوم، وأنّ كلّ مجموعة قابلة للعد هي قابلة للقياس (ومهملة) بمفهوم لوبيغ. نتساءل في هذا السياق عن صحّة القضيّة العكسيّة من عدمها، وللإجابة عن هذا السؤال نستعين بمبرهنة تيخنوف[6] (Tychonoff) التالية:

مبرهنة 43.3: كلّ مجموعة جزئية غير خالة من $\mathbb{R}$ ، مغلقة وكاملة لا تحوي نقاطًا معزولة فهي غير قابلة للعد.

سوف ننشئ فيما يلي أسرة من المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ تسمى بمجموعات كانتور التي تتمتّع ببعض الخواص المتميّزة حيث تمدّنا في أغلب الأحيان بأحسن الأمثلة المضادة في التحليل الرياضي.

7- مجموعات كانتور

نعتبر الفترة المغلقة $J_0=[0,1]$. سوف نتّبع الخطوات التالية:

- نقتطع من J_0 فترة أوسطيّة مفتوحة I_1^1 طولها $\frac{\alpha}{3}$، حيث α عدد ينتمي إلى الفترة $]0,1[$. تبقى لنا فترتان مغلقتان J_1^1 و J_1^2 طول كلّ واحدة منهما يساوي $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\alpha}{3}\right)$.
- نقتطع من الفترتين J_1^1 و J_1^2 على الترتيب فترتين أوسطيتين مفتوحتين I_2^1 و I_2^2 طول كلّ واحدة منهما يساوي $\frac{\alpha}{3^2}$. يبقى من

[6] اندري تيخنوف [Andreï Tikhonoff] (1906-1993)

الفترة J_0 أربع فترات مغلقة J_2^k، $(k=1,...,4)$، طول كلّ واحدة منها يساوي $\frac{1}{2^2}-\frac{\alpha}{2^2\times 3}-\frac{\alpha}{2\times 3^2}$.

نستمرّ على هذا المنوال إلى أن نصل إلى المرحلة n:

نقتطع من الـ 2^{n-1} فترة المغلقة المتبقّية J_{n-1}^k، $\left(k=1,...,2^{n-1}\right)$، الفترات الأوسطية المفتوحة I_n^k، $\left(k=1,...,2^{n-1}\right)$ طول كلّ واحدة منها يساوي $\frac{\alpha}{3^n}$. تبقى لنا 2^n فترة مغلقة J_n^k، $\left(k=1,...,2^n\right)$ طول كلّ واحدة منها هو أقلّ من $\frac{1}{2^n}$.

- نضع $\Theta_n=\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k$ و $\mathfrak{F}_n=\bigcup_{k=1}^{2^n} J_n^k$، من أجل $n\geq 1$. لدينا

$$m(\Theta_n)=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\ell\left(I_n^k\right)=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\frac{\alpha}{3^n}=\frac{\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\text{، } (\forall n\geq 1).$$

بهذه المقدّمة نصل إلى التعريف التالي:

تعريف 44.3: نسمّي مجموعة كانتور من المرتبة α ($\alpha\in\left]0,1\right[$)، ونرمز لها بـــ C_α المجموعة

$$C_\alpha=\bigcap_{n\geq 1}\mathfrak{F}_n=J_0\setminus\bigcup_{n\geq 1}\Theta_n.$$

نلخّص أهمّ الخواص التي تتمتّع بها مجموعات كانتور في المبرهنة التالية:

مبرهنة 45.3: لدينا من أجل كلّ $\alpha\in\left]0,1\right[$،

1) **C_α مجموعة متراصّة،**

2) **C_α ذات داخليّة خالية،**

3) $m(C_\alpha)=1-\alpha$، **وبالخصوص** $m(C_1)=0$،

4) C_α ليست قابلة للعد.

إثبات: لإثبات 1) يكفي الملاحظة أنّ C_α مجموعة جزئية مغلقة ومحدودة في $\mathbb{R}$ فهي إذن مجموعة متراصة.

2) نرى من تعريف C_α أنّ $\ell\left(J_n^k\right)<\frac{1}{2^n}$، $(\forall n\geq 1)$، $\left(\forall k=1,...,2^n\right)$ و $J_n^k\cap J_n^{k'}=\varnothing$، $\left(k\neq k',\ k,k'=1,...,2^n\right)$.

نفرض أنّ C_α يحوي فترة غير منحلّة J. ينتج عن تعريف C_α أنّ $J\subset\mathfrak{F}_n$، $(\forall n\geq 1)$، وعليه فإنّ $\ell(J)<\frac{1}{2^n}$، $(\forall n\geq 1)$. إذن $\ell(J)=0$، وبالتالي $\overset{\circ}{C}_\alpha=\varnothing$.

3) نذكّر من جهة أنّ كلّ المجموعات C_α قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ، ومن جهة ثانية فإنّ المفتوحات Θ_n منفصلة مثنى مثنى، إضافة إلى أنّ $\bigcup_{n\geq 1}\Theta_n\subset J_0$ مع $m\left(\bigcup_{n\geq 1}\Theta_n\right)\leq 1$. إذن

$$m(C_\alpha)=m\left(J_0\setminus\bigcup_{n\geq 1}\Theta_n\right)=m(J_0)-m\left(\bigcup_{n\geq 1}\Theta_n\right)$$
$$=1-\sum_{n\geq 1}m(\Theta_n)=1-\sum_{n\geq 1}\frac{\alpha}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=1-\alpha$$

وبالخصوص فإنّ $m(C_1)=0$ عندما $\alpha=1$.

4) إنّ المجموعة C_α مغلقة، فيكفي إذن إثبات أنّها تتطابق مع مجموعة نقاط التراكم C'_α. من الواضح أنّ $C'_\alpha\subset\overline{C_\alpha}=C_\alpha$. لنعتن الآن بالاحتواء العكسي. ليكن $x\in C_\alpha$، عندئذ، $x\in\mathfrak{F}_n$، $(\forall n\geq 1)$. إذن، من أجل كلّ عدد طبيعي $n\geq 1$ يوجد مؤشر $k_n\in\{1,...,2^n\}$ بحيث $x\in J_n^{k_n}$. بما أنّ $\ell\left(J_n^k\right)<\frac{1}{2^n}$، $(\forall n\geq 1)$، $\left(\forall k=1,...,2^n\right)$، فإنّه

يوجد من أجل كلّ عدد $\varepsilon>0$ مؤشران $n_0\geq 1$ و $k_{n_0}\in\{1,...,2^{n_0}\}$ بحيث

$$\frac{1}{2^{n_0}}<\varepsilon \text{ و } x\in J_{n_0}^{k_{n_0}}\subset I_x=]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\,.$$

نستنتج من انتماء العددين $minJ_{n_0}^{k_{n_0}}$ و $maxJ_{n_0}^{k_{n_0}}$ إلى C_α أنّهما ينتميان إلى الفترة I_x. إذن، مهما يكن $x\in C_\alpha$ ومهما يكن الجوار V لـ x فإنّ $Card(V\cap C_\alpha)\geq 2$، ممّا يثبت أنّ $x\in C'_\alpha$، وبهذا يتحقق الاحتواء العكسي.

وهكذا فإنّ $C'_\alpha=C_\alpha$، أي أنّ المجموعة C_α كاملة. بالاستدلال بمبرهنة تيخنوف **43.3** نرى أنّ المجموعات C_α، $(0<\alpha\leq 1)$، ليست قابلة للعد، وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة.■

ملاحظة 46.3: نستنتج ممّا سبق أنّ مجموعة كانتور من المرتبة الأولى C_1 ليست قابلة للعد بالرغم من كونها مهملة $(m(C_1)=0)$.

مسألة محلولة

ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًا و $A\in\Sigma$ بحيث $0<\mu(A)<\infty$.

لتكن $\{\alpha_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}^+$ بحيث $\alpha_n>\inf\limits_{n\geq 1}\alpha_n=\alpha\in]0,\infty[$ ، $(\forall n\geq 1)$

وَ $\Psi=\{A_i\}_{i\in I}\subset\Sigma$ أسرة ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى. نضع من أجل كلّ $n\geq 1$:

$$\Gamma_n=\{G\in\Psi:\ \mu(A\cap G)\geq\alpha_n\}.$$

أ. **أثبت أنّ** $Card(\Gamma_n)\leq\frac{1}{\alpha_n}\mu(A)$، $(\forall n\geq 1)$.

ب. **أثبت أنّ** $\Gamma:=\{G\in\Psi:\ \mu(A\cap G)>\alpha\}=\bigcup\limits_{n\geq 1}\Gamma_n$.

ت. استنتج أنّ Γ قابلة للعد.

الحل:

ا) نفرض جدلاً أنّ Γ_n ليست منتهية ولتكن $\left\{A_{i_k}\right\}_{k\geq 1}\subset\Gamma_n$. ينتج عن **خاصيّة التجميع القابل للعد** أنّ

$$\alpha_n\cdot\infty=\infty\leq\sum_{k\geq 1}\mu\left(A\cap A_{i_k}\right)=\mu\left(\bigcup_{k\geq 1}\left(A\cap A_{i_k}\right)\right)\leq\mu(A)<\infty$$

وهذا مستحيل، وعليه فإنّ Γ_n منتهية من أجل كلّ $n\geq 1$.

بوضع $n'=Card\left(\Gamma_n\right)$ و $\Gamma_n=\left\{A_{i_k}\right\}_{k=1}^{n'}$ نجد أنّ

$$\mu(A)\geq\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n'}\left(A\cap A_{i_k}\right)\right)=\sum_{k=1}^{n'}\mu\left(A\cap A_{i_k}\right)\geq n'\cdot\alpha_n$$ ،

و منه $n'=Card\left(\Gamma_n\right)\leq\frac{1}{\alpha_n}\mu(A)$.

ب) ليكن B عنصرا من $\bigcup_{n\geq 1}\Gamma_n$. يوجد n_0 بحيث B ينتمي إلى Γ_{n_0}،

ومنه $\mu(A\cap B)\geq\alpha_{n_0}>\alpha$، إذن $B\in\Gamma$، هذا يثبت أنّ $\bigcup_{n\geq 1}\Gamma_n\subset\Gamma$.

من جهة أخرى، إذا كان $B\in\Gamma$، فإنّ $\alpha<\mu(A\cap B)$، أي $\mu(A\cap B)-\alpha>0$. نستنتج من تعريف الحد الأدنى $\inf_{n\geq 1}\alpha_n=\alpha$ أنّه من أجل $\varepsilon=\mu(A\cap B)-\alpha$ يوجد مؤشر $n_\varepsilon\geq 1$ بحيث

$$\alpha+\varepsilon=\mu(A\cap B)>\alpha_{n_\varepsilon}$$ ،

وعليه فإنّ $B\in\Gamma_{n_\varepsilon}\subset\bigcup_{n\geq 1}\Gamma_n$. إذن $\Gamma\subset\bigcup_{n\geq 1}\Gamma_n$.

نستخلص من الاحتوائين المحصّل عليهما أعلاه أنّ $\Gamma=\bigcup_{n\geq 1}\Gamma_n$.

ت) ينتج عن أ) و ب) أنّ Γ قابلة للعد لكونها اتحادًا قابل للعد لمجموعات منتهية (إذن قابلة للعد).

تمارين مقترحة

01 أثبت صحّة العلاقتين التاليتين:

ع1) $A\cap(B+a)=(A-a)\cap B+a$

ع2) $(A+a)^c=A^c+a$

من أجل كلّ $a\in\mathbb{R}$ و $A,B\subset\mathbb{R}$.

02 لتكن $\{a_n\}_{n\geq 0}\subset\mathbb{R}^+$، $\Sigma=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\mu,\nu:\Sigma\to[0,+\infty]$ دالّتين معرّفتين بـــ

$$(\forall A\subset\mathbb{N}),\ \mu(A)=\sum_{n\in A}a_n$$

و

$$\nu(A)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{1}{n!} & ,\ Card(A)<\infty\\ 1, & Card(A)=+\infty\end{cases}$$

(مع مراعاة الاصطلاح $\sum_{n\in\emptyset}a_n=0$).

هل الدّالتان μ و ν قياسان موجبان على Σ؟

03 لتكن $f:E\to F$ دالّة معطاة و μ قياسًا موجبًا على $\mathcal{P}(F)$. نعرّف الدالّة $\nu:\mathcal{P}(E)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ وفق العلاقة التالية:

$$(\forall A\subset E)\ ،\nu(A)=\mu(f(A)).$$

من أجل أي دالّة f يكون ν قياسًا موجبًا على $\mathcal{P}(E)$.

04 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و Λ عشيرة على E بحيث $\Lambda\subset\Sigma$.

1) أثبت أنّ $\mu_\Lambda:=\mu_{|\Lambda}:\Lambda\to[0,\infty]$ قياس موجب (يدعى قياس الأثر على Λ).

2) أثبت أنّ μ منته يستلزم أنّ μ_Λ منته. أوجد قياسًا σ-منتهيًا μ بحيث لا يكون الاقتصار μ_Λ قياسًا σ-منتهيًا.

05 ليكن $\mathcal{A}$ جبرًا على E و $\mu:\mathcal{A}\to[0,+\infty]$ قياسًا موجبًا. أثبت أنّه من أجل كلّ $\{A,B,C\}\subset\mathcal{A}$، العلاقة التالية محقّقة:

$$\begin{aligned}\mu(A\cup B\cup C)+\mu(A\cap B)+\mu(A\cap C)+\mu(B\cap C)\\ =\mu(A)+\mu(B)+\mu(C)+\mu(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

06 لتكن Σ عشيرة على E و $f:\Sigma\to[0,\infty[$ دالّة جمعيّة بحيث $f\left(\bigcap_{n\geq 1}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}f(E_n)$، من أجل كلّ متتالية $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ متـنـاقصة.

أثبت أنّ f قياس موجب على Σ.

بيّن أنّه بإمكاننا إضعاف هذا الشرط إلى اتّصال الدّالّة f عند $\varnothing$ فقط. (انظر التعريف الوارد في الفقرة ما قبل المبرهنة 13.3).

07 لتكن E مجموعة غير خالية و $\Gamma=\{A,B\}\subset\mathcal{P}(E)$

- أوجد $a_E(\Gamma)$.
- إذا فرضنا أنّ $A\cap B=\varnothing$، عيّن القياس الموجب (الوحيد) $\mu:a_E(\Gamma)\to\mathbb{N}$ المحقق للعلاقة :

$\mu(E)=7=3\mu(A)+2\mu(B)$.

08 لتكن E مجموعة غير منتهية. نعتبر الجبر التالي:

$\Sigma=\{A\subset E: |A|<\infty$ أو $|A^c|<\infty\}$.

أثبت أنّ الدّالة $\mu:\Sigma\to[0,\infty]$ المعرّفة بِ

$$\mu(A)=\begin{cases}0, & |A|<\infty\\ 1, & |A^c|<\infty\end{cases},\quad (\forall A\in\Sigma)$$

قياس موجب على Σ إذا وإذا فقط كانت E غير قابلة للعد تمامًا.

09 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس، $A\in\Sigma$ و $B\subset E$ بحيث $A\Delta B\in\Sigma$ و $\mu(A\Delta B)=0$. أثبت أنّ

$B\in\Sigma$ و $\mu(A\cap C)=\mu(B\cap C)$ من أجل كلّ C في Σ.

10 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس بحيث $\mu(\Sigma)\subset[0,\alpha]$ ، $(0<\alpha<\infty)$.

أحسُب $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1}A_n\right)$ و $\mu\left(\bigcap_{n\geq 1}A_n\right)$ من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ تحقّق $\mu(A_n)=\alpha$ ، $(\forall n\geq 1)$.

11 ليكن μ^* قياسًا خارجيًّا على E و $A\subset E$. أثبت أنّ القضايا التالية متكافئة:

أ) A مجموعة μ^*–قابلة للقياس.

ب) مهما يكن $\varepsilon>0$ توجد A_1 و A_2 μ^*–قابلتان للقياس، $A_1\subset A\subset A_2$ بحيث

$$\mu^*(A_2\setminus A_1)<\varepsilon .$$

ج) $\mu^*(P\cup Q)=\mu^*(P)+\mu^*(Q)$ ، من أجل كلّ $P\subset A$ و $Q\subset A^c$.

12 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًّا و $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ بحيث $\mu\left(\bigcup_{n\geq 1}A_n\right)<\infty$. أثبت أنّ من أجل كلّ $\varepsilon>0$ يوجد مؤشر $n_0\geq 1$:

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 1}A_n\right)<(1+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n_0}\mu(A_k) .$$

13 ليكن Σ جبرًا على $E\neq\varnothing$ و μ قياسًا موجبًا على Σ. نعرّف الدالّة $\nu:\mathcal{P}(E)\to[0,\infty]$ بِ

$$\nu(A)=inf\{\mu(B),\,B\in\Sigma_A\}$$

حيثّ $\Sigma_A=\{B\in\Sigma : A\subset B\}$ ، من أجل كلّ $A\subset E$.

1) أثبت أنّ $\forall A\in\Sigma,\ \nu(A)=\mu(A)$.

2) بيّن أنّ $\forall A\subset E,\ \mu^*(A)\leq\nu(A)$. ($\mu^*$ القياس الخارجي الممدّد لِ μ)

3) أعط مثالاً عن قياس موجب μ بحيث $\nu \neq \mu^*$ و ν لا يحقق خاصية التجميع الجزئي القابل للعد.

4) أثبت أنّ $\nu = \mu^*$ عندما تكون Σ عشيرة على E.

14 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريًّا.

1) أثبت أنّه من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ لدينا $\mu\left(\underline{\lim} A_n\right) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n)$.

2) أثبت أنّ من أجل كلّ $A \subset E$ توجد $\tilde{A} \in \Sigma$ ، $A \subset \tilde{A}$ بحيث $\mu^*(A) = \mu(\tilde{A})$. (حيث μ^* القياس الخارجي الممدّد لِـ μ)

3) استنتج ممّا سبق أنّ

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n).$$

من أجل كلّ متتالية متزايدة $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(E)$.

4) أثبت أنّ $\overline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \mu\left(\overline{\lim} A_n\right)$ من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ بحيث $\mu\left(\bigcup_{n\geq n_0} A_n\right) < \infty$ من أجل مؤشر $n_0 \geq 1$.

5) أثبت أنّ $\mu\left(\overline{\lim} A_n\right) = 0$ من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ بحيث $\sum_{n\geq 1} \mu(A_n) = S < \infty$.

15 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منته، μ^* القياس الخارجي المولّد بـ μ و $A \subset E$. أثبت أنّ A مجموعة μ^*-قابلة للقياس إذا وإذا فقط

$$\mu^*(E) = \mu^*(A) + \mu^*\left(A^c\right).$$

16 لتكن E مجموعة غير خالية، $D \subset E$ مجموعة جزئية غير خالية و $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$. نعرّف الدالّة $\mu^* : \Sigma \to [0,\infty]$ بـ

$$(\forall A \in \Sigma),\ \mu^*(A) = \begin{cases} 1, & A \cap D \neq \varnothing \\ 0, & A \cap D = \varnothing \end{cases}.$$

1) بيّن أنّ μ^* قياس خارجي عـلى E عندما $\Sigma = \mathcal{P}(E)$، ثمّ عـيّن أسرة المجموعات الجزئية الـ μ^*-قابلة للقياس Σ_{μ^*}.

2) عيّن أكبر عشيرة Σ^* على E بحيث يكون μ^* قياسًا موجبًا عليها.

3) من أجل أيّ مجموعة جزئية D يكون μ^* قياسًا موجبًا على كلّ عشيرة $\Sigma \subset \mathcal{P}(E)$ ؟

17 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و μ^* القياس المولّد بـــ μ. أثبت أنّ القضايا التالية متكافئة:

أ) A مجموعة μ^*-قابلة للقياس.

ب) $\mu(S) = \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$، لكلّ $S \in \Sigma$ بحيث $\mu(S) < \infty$.

ج) $\mu(S) \geq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$، لكلّ $S \in \Sigma$ بحيث $\mu(S) < \infty$.

د) $\mu^*(S) \geq \mu^*(S \cap A) + \mu^*(S \cap A^c)$، لكلّ $A \subset E$.

18 نفرض وجود قياس موجب $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ يحقّق الشرطين:

أ) $\mu([0,1]) = 1$،

ب) $\forall a > 0, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \mu(a+A) = \mu^2(A)$.

أحسب $\mu\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right)$ من أجل كلّ $n \geq 1$. استنتج أنّه لا يمكن لـ μ أن يكون قياسًا موجبًا على $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

19 ليكن $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\nu)$ فضاء قياس بحيث

1) $\nu([0,1[) = \varepsilon$ (حيث $\varepsilon > 0$ مثبّت)

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad \nu(x+A) = \nu(A)$.

أ. أثبت أنّ $\forall x \in \mathbb{R}, \nu(\{x\}) = 0$.

ب. أثبت أنّ $\nu([0,r[) = \varepsilon r$ من أجل كلّ عدد نسبي موجب $r > 0$.

ت. استنتج أنّ $\nu([a,b[) = \nu(]a,b]) = \varepsilon(b-a)$ من أجل كلّ عددين حقيقيين a و b بحيث $a < b$.

ث. قارن القياس ν مع قياس بوريل λ على $\mathbb{R}$.

20 لتكن $A\in\mathcal{L}$ بحيث $0<m(A)<\infty$. نعرّف الدالّة $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ بِ
$f(x)=m(A\cap]-x,x[)$.

1) أثبت أنّ f متّصلة وأنّ $f(\mathbb{R}^+)$ يساوي $[0,m(A)]$ أو $[0,m(A)[$.

2) أثبت أنّ من أجل كلّ $c>0$ توجد $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{L}$، $A_n\subset A$، $(\forall n\geq 1)$ بحيث $\sum_{n\geq 1}m(A_n)=cm(A)$.

21 لتكن $J=[0,1]$ و N_p، $(1\leq p\leq 8)$، مجموعة كلّ الأعداد $x\in J$ التي لا تحوي الرقم p في كتابتها العشرية.

1) أثبت أنّ $N_p\in\mathcal{L}$، ثمّ أحسب $m(N_p)$.

2) أثبت أنّ N_p ليست قابلة للعد.

22 1) أثبت أنّ كلّ مجموعة مفتوحة (غير خالية) من $\mathbb{R}$ تحوي مجموعة غير قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ.

2) أثبت أنّ كلّ مجموعة جزئية قابلة للقياس من مجموعة غير قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ هي مجموعة مهملة.

3) استنتج ممّا سبق أنّ كلّ مجموعة جزئية $A\subset\mathbb{R}$ تحقق $m^*(A)\neq 0$ تحوي مجموعة غير قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ.

23 لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من $\mathbb{R}$ بحيث

$$0<d(A,B)=\inf\{|a-b|,a\in A,b\in B\}.$$

أثبت أن

$$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B).$$

24 لتكن E مجموعة اختيارية وَ $\Sigma=\mathcal{P}(E)$. أثبت أنّ كـلّ قيـاس موجب μ على Σ هـو قياس تام.

25 ليكن Σ جبرًا على E و $S\in\Sigma$. أوجد شرطًا لازمًا وكافيًا على S و Σ حتى تكون الدالّة $\omega:\Sigma\to\overline{\mathbb{R}}_+$ المعرّفة بِ

$$\omega(A)=\begin{cases}c, & A\cap S\neq\varnothing\\ 0, & A\cap S=\varnothing\end{cases}$$

قياسًا موجبًا على Σ. (حيث c عدد موجب تمامًا)

26 ليكن $\mu^*:\mathcal{P}(E)\to\overline{\mathbb{R}}_+$ قياسًا خارجيًا.

1) أثبت المتباينة التالية:

$$\left|\mu^*(A)-\mu^*(B)\right|\leq\mu^*(A\Delta B)\text{،}$$

لكلّ A ،$B\subset E$ بحيث $\mu^*(A)<\infty$ أو $\mu^*(B)<\infty$.

2) ليكن A ،$B\subset E$ بحيث B مجموعة μ^*–قابلة للقياس، $B\subset A$ و $\mu^*(A)=\mu^*(B)<\infty$. (*)

- أثبت أنّ A مجموعة μ^*–قابلة للقياس.

3) أعط مثالاً عن قياس خارجي ومجموعتين جزئيتين A ،$B\subset E$ تبيّن فيه أنّ شرط المحدودية (*) ضروري حتى تكون A مجموعة μ^*–قابلة للقياس.

27 ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا و S مجموعة جزئية كثيفة في E. إذا كان μ قياسًا موجبًا على $\mathcal{B}(E)$ و $\{E_k\}_{k=1}^{n}\subset\mathcal{P}(E)$ تغطية منتهية لـ S، أثبت أنّ

$$\mu(E)\leq\sum_{k=1}^{n}\mu\left(\overline{E_k}\right).$$