# الفصل الثاني

# الجبور والعشائر

# الفصل الثاني
# الجبور والعشائر

## 1- الجبوروالعشائر

تعدّ الجبور والعشائر النواة الأولى للنظرية العامة للقياس والمكاملة حيث يمكننا تعريف مفهوم القياس الموجب على أسرة من مجموعات جزئية من مجموعة ما تتمتّع ببعض خواص الاستقرار كما يتّضح في التعريف الآتي:

**تعريف 01.2: لتكن $E$ مجموعة غير خالية. نقول عن أسرة غير خالية $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ إنّها جبر مجموعات أو جبر بول (نسبة للعالم الإنجليزي بول[1] (Boole) على $E$ إذا حققت الشرطين التاليين:**

**جب1) مهما يكن $A \in \mathcal{A}$ فإنّ $A^c \in \mathcal{A}$**، *(الاستقرار بالتتميم)*

**جب2) مهما يكن $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$ فإنّ $A \cup B \in \mathcal{A}$**، *(الاستقرار بالاتحاد)*.

هذه بعض الأمثلة:

**مثال 02.2:** لتكن $E$ مجموعة غير خالية، عندئذ الأسرة $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$ جبر على $E$. بالتأكيد، إذا كان $A \in \mathcal{A}$ فواضح أنّ $A^c \in \mathcal{A}$. من جهة أخرى، إذا كان $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$ فإنّ $A \cup B$ مجموعة جزئية من $E$،

---

[1]) جورج بول [George Boole] (1815-1861)

وبالتالي فإنّ $A\cup B\in\mathcal{A}$. إذن $\mathcal{A}$ جبر على $E$، وهو بطبيعة الحال أكبر جبر يمكننا تعريفه على $E$.

**مثال 03.2**: إنّ أسرة كلّ المجموعات في $\mathbb{R}$ التي تكتب على شكل اتحاد منته من الفترات من الشكل $]a,b]$، $]a,+\infty[$ و $]-\infty,b]$، ($a$، $b\in\mathbb{R}$) هي جبر على $\mathbb{R}$ مع الاصطلاح أنّ $]a,b]=\varnothing$ كلّما كان $a\geq b$.

**مثال 04.2**: إنّ الأسرة

$$\mathcal{A}=\left\{A\subset\mathbb{N}:\ |A|<\infty\ or\ \left|A^c\right|<\infty\right\}$$

(أسرة كلّ المجموعات الجزئية المنتهية أو ذات متمّمات منتهية في $\mathbb{N}$) جبر على $\mathbb{N}$. نلاحظ أوّلاً أنّ $\mathcal{A}\neq\varnothing$ لأنّ $\mathbb{N}\in\mathcal{A}$ لكون $|\mathbb{N}^c|=0$. لتكن $A\in\mathcal{A}$، عندئذ، إمّا $A$ منتهية وإمّا $A^c$ منتهية. إذا فرضنا أنّ $A$ منتهية، عندئذ $A=\left(A^c\right)^c$ منتهية، ومنه $A^c\in\mathcal{A}$. وإذا كانت $A^c$ منتهية فواضح أنّها عنصر من $\mathcal{A}$، وبه يتحقق الشرط جب1). فيما يخصّ الشرط جب2) نعتبر $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$. إذا كانت $A$ و $B$ منتهيتين فواضح أنّ اتحادهما منته، أمّا إذا كانت إحداهما غير منتهية، عندئذ تكون $A^c$ أو $B^c$ منتهية، وعليه فإنّ $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ منتهية. وهكذا فإنّ $A\cup B\in\mathcal{A}$، وبهذا تكون الأسرة $\mathcal{A}$ جبرًا على $\mathbb{N}$.

**ملاحظة 05.2**: إنّ أسرة كل الأقراص في المستوي $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ليست جبرًا لأنّ متممة قرص ليست قرصًا. وكذلك الأمر بالنسبة إلى أسرة كل المجموعات المفتوحة $\mathcal{T}$ في فضاء طبولوجي $E$ ليست على العموم جبرًا لأنّ متممة مجموعة مفتوحة هي مجموعة مغلقة وليست بالضرورة عنصرًا من $\mathcal{T}$.

**خواص عامة 06.2:** ليكن $\mathcal{A}$ جبرًا على $E$، عندئذ

1) المجموعتان $E$ و $\varnothing$ عنصران من $\mathcal{A}$،
2) مهما يكن $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$ فإنّ $A\cap B\in\mathcal{A}$،
3) مهما يكن $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$ فإنّ $A\setminus B\in\mathcal{A}$ و $A\Delta B\in\mathcal{A}$،
4) مهما يكن $A_1$، $A_2$، ...، $A_n$ في $\mathcal{A}$ ($n$ منته) فإنّ

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k\in\mathcal{A} \text{ و } \bigcap_{k=1}^{n} A_k\in\mathcal{A}.$$

**إثبات:** 1) بما أنّ $\mathcal{A}$ غير خالية، توجد عندئذ مجموعة جزئية $A\subset E$ بحيث $A\in\mathcal{A}$، ومنه $A^c\in\mathcal{A}$، وبالتالي فإنّ $E=A\cup A^c\in\mathcal{A}$. ينتج كذلك عن الشرط جب1) أنّ $E^c=\varnothing\in\mathcal{A}$.

2) ينتج عن انتماء $A$ و $B$ إلى $\mathcal{A}$ أنّ $A^c$ و $B^c$ ينتميان إلى $\mathcal{A}$، وبالتالي فإنّ

$$A\cap B=\left(A^c\cup B^c\right)^c\in\mathcal{A}.$$

3) لدينا $A\setminus B=A\cap B^c$، و بما أنّ $B^c\in\mathcal{A}$ فينتج عن 2) أنّ $A\setminus B\in\mathcal{A}$. نلاحظ من جهة أخرى أنّ الفرق التناظري $A\Delta B$ هو عبارة عن اتحاد المجوعتين الجزئيتين $A\setminus B$ و $B\setminus A$، وبالتالي فإنّ $A\Delta B\in\mathcal{A}$.

4) يكفي الاستدلال بالاستقراء على $n$. واضح مما سبق أنّ الخاصيّة محققة من أجل المجموعتين الجزئيتين $A_1$ و $A_2$، أي $n=2$. نفرض أنّها محققة من أجل $n-1$، أي أنّ $\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\in\mathcal{A}$ كلما كانت $A_1$، $A_2$، ...، $A_{n-1}$ عناصر من $\mathcal{A}$، عندئذ حسب مبدأ الاستقرار بالاتحاد فإنّ

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right)\cup A_n\in\mathcal{A}.$$

نلاحظ أخيرًا أنّ $\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n} {A_k}^c\right)^c$ ، وعليه فإنّه عنصر من الجبر $\mathcal{A}$. ■

**ملاحظة 07.2:** لتكن $E$ مجموعة غير خالية و $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ (غير خالية).
إنّ القضايا التالية متكافئة:

**أ)** الأسرة $\mathcal{A}$ جبر على $E$.
**ب)** الأسرة $\mathcal{A}$ مستقرة بالتتميم وبالتقاطع.
**ج)** $E \in \mathcal{A}$ و $A \setminus B \in \mathcal{A}$ مهما يكن $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$.

**الاستلزام أ) ⇐ ب):** إذا كانت الأسرة $\mathcal{A}$ جبرًا على $E$ فإنّها مستقرّة بالتتميم تعريفًا كما أنّها مستقرة بالتقاطع حسب الخاصية 2) السابقة.

**الاستلزام ب) ⇐ ج):** نفرض الآن $\mathcal{A}$ مستقرة بالتتميم وبالتقاطع. ينتج عن كون $\mathcal{A}$ غير خالية، وجود مجموعة جزئية $A \subset E$ بحيث $A \in \mathcal{A}$، ومنه $A^c \in \mathcal{A}$، إذن $E = A \cup A^c \in \mathcal{A}$. لدينا من جهة أخرى، $A \setminus B = A \cap B^c$، مهما يكن $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$. بما أنّ $\mathcal{A}$ مستقرة بالتتميم وبالتقاطع فإنّ $A \setminus B \in \mathcal{A}$.

لنثبت أخيرًا أنّ **ج)** يستلزم **أ)**. ليكن $A \in \mathcal{A}$، عندئذ $E \setminus A = A^c \in \mathcal{A}$، إذن $\mathcal{A}$ مستقرة بالتتميم. فيما يخصّ الاستقرار بالاتحاد يكفي الملاحظة أنّه مهما يكن $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$ فإنّ $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$، إذن $\mathcal{A}$ مستقرّة بالتقاطع. نستنتج من كون $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$، ومن الاستقرار بالتتميم وبالتقاطع أنّ $\mathcal{A}$ مستقرّة بالاتحاد، فهي إذن جبر على $E$. ■

**ملاحظة 08.2:** إنّ تقاطع جبرين على نفس المجموعة هو بدوره جبر (انظر القضية 18.2) بينما اتحادهما ليس بالضرورة جبرًا.

لنعتبر على سبيل المثال في $\mathbb{R}$ الجبرين:

$\mathcal{A}_1=\{\varnothing,\mathbb{R},\{0\},\{0\}^c\}$ و $\mathcal{A}_2=\{\varnothing,\mathbb{R},\{1\},\{1\}^c\}$.

لدينا $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2=\{\varnothing,\mathbb{R},\{0\},\{0\}^c,\{1\},\{1\}^c\}$،

نلاحظ أنّ العنصرين $\{0\}$ و $\{1\}$ ينتميان إلى $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ بينما اتحادهما ليس كذلك. إذن $\mathcal{A}_1\cup\mathcal{A}_2$ ليس جبرًا على $\mathbb{R}$ .

**تعريف 09.2: لتكن $E$ مجموعة غير خالية. نقول عن أسرة غير خالية $\Sigma\subset\mathcal{P}(E)$ إنّها عشيرة أو $\sigma$-جبر على $E$ إذا حققت الشرطين التاليين:**

**عش1) مهما يكن $A\in\Sigma$ فإنّ $A^c\in\Sigma$**، *(الاستقرار بالتتميم)*

**عش2) مهما تكن المتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ فإنّ $\bigcup_{n\geq 1}A_n\in\Sigma$**، *(خاصية التجميع القابل للعد)*.

**إذا كانت $\Sigma$ عشيرة على $E$ نسمّي الثنائية $(E,\Sigma)$ بالفضاء القابل للقياس *(measurable space)*، ويدعى كلّ عنصر من $\Sigma$ مجموعة قابلة للقياس *(measurable set)* في $E$.**

هذه بعض الأمثلة عن العشائر:

**مثال 10.2:** إذا كانت $E$ مجموعة غير خالية فإنّ الأسرة $\Sigma=\mathcal{P}(E)$ عشيرة على $E$، وهي أكبر عشيرة يمكن تعريفها على $E$ بينما $\Sigma=\{\varnothing,E\}$ هي أصغر عشيرة على $E$.

**مثال 11.2:** إنّ الأسرة

$$\Sigma=\{A\subset\mathbb{R}:\ |A|\leq\omega_0 \text{ أو } |A^c|\leq\omega_0\}$$

(أسرة كلّ المجموعات الجزئية القابلة للعد أو ذات متمّمات قابلة للعد في $\mathbb{R}$) عشيرة على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أوّلا أنّ $\Sigma$ غير خالية لاحتوائها على المجموعة الخالية. لتكن الآن $A\in\Sigma$، عندئذ، إمّا $A$ مجموعة جزئية قابلة للعد وإمّا $A^c$ قابلة

للعد. نلاحظ أنه لدينا في الحالة الأولى $A = \left(A^c\right)^c$ قابلة للعد ، ومنه $A^c \in \Sigma$. ولدينا في الحالة الثانية $A^c$ مجموعة جزئية قابلة للعد لذا فهي عنصر من $\Sigma$. إذن، الشرط عش1) محقق.

فيما يخصّ الشرط عش2) نعتبر متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$. إذا كانت كل العناصر $A_n$ قابلة للعد فواضح أنّ اتحادها مجموعة قابلة للعد، وبالتالي يكون عنصرًا من $\Sigma$. أمّا إذا وجد مؤشر $n_0$ بحيث $A_{n_0}$ غير قابلة للعد، عندئذ تكون $A_{n_0}^c$ مجموعة قابلة للعد، وبما أنّ $\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n\right)^c = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n^c \subset A_{n_0}^c$، فإنّ المجموعة $\left(\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n\right)^c$ هي قابلة للعد، ومنه $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \Sigma$. إذن $\Sigma$ عشيرة على $\mathbb{R}$.

**ملاحظة 12.2:** واضح أنّ كلّ عشيرة هي جبر بينما العكس غير صحيح لأنّ الجبر لا يحقق على العموم خاصيّة التجميع القابل للعد.

**مثال مضاد 13.2:** إنّ الجبر المعرّف في المثال **03.2** ليس عشيرة لأنّه لدينا على سبيل المثال $\bigcup\limits_{n\geq 1} \left]-\infty, \frac{n}{n+1}\right] = \left]-\infty, 1\right[$، وهذه المجموعة ليست عنصرًا من تلك الأسرة.

**ملاحظة 14.2:** نستطيع في حالة العشيرة تعويض المتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ بأسرة قابلة للعد $\{A_r\}_{r\in D} \subset \Sigma$، حيث $D$ مجموعة قابلة للعد، بينما لا يُسمح على الإطلاق تعويض المتتالية بأسرة $\{A_i\}_{i\in I} \subset \Sigma$، حيث $I$ مجموعة غير قابلة للعد، لأنّ في مثل هذه الحالة الاتحاد $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ليس بالضرورة عنصرًا من $\Sigma$.

**قضية 15.2:** ليكن $(E,\Sigma)$ فضاءً قابلاً للقياس و $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$، عنـدئذ

أ) $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n \in \Sigma$،

ب) $\underline{\lim} A_n \in \Sigma$،

ت) $\overline{\lim} A_n \in \Sigma$.

**إثبات** : أ) لدينا حسب قانون دو مورجن $\bigcap_{n\geq 1} A_n=\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^{\,c}\right)^c$، وبما أنّ $A_n^{\,c}\in\Sigma$، $(\forall n\geq 1)$، فينتج عن عش1) و عش2) أنّ $\bigcap_{n\geq 1} A_n\in\Sigma$.

ب) لدينا $\underline{lim}\, A_n=\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k$، وبما أنّ حسب أ) $\bigcap_{k\geq n} A_k\in\Sigma$، مهما يكن $n\leq k$، و $\Sigma$ عشيرة، عندئذ $\underline{lim}\, A_n\in\Sigma$.

ت) لدينا $\overline{lim}\, A_n=\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k$. ينتج فورًا عن خاصيّة التجميع القابل للعد وَ أ) أنّ $\overline{lim}\, A_n\in\Sigma$. ■

**ملاحظة 16.2**: إنّ عدد عناصر كل جبر (أو عشيرة) منته هو من الشكل $2^p$ حيث $p\in\mathbb{N}^*$. وإذا كان $\mathcal{A}$ جبرًا (أو عشيرة) على مجموعة منتهية $E\neq\varnothing$ فإنّ $|\mathcal{A}|=2^p$، من أجل $p\in\mathbb{N}$ بحيث $1\leq p\leq |E|$.

إنّ القضيّة التالية أساسيّة وذات أهميّة بالغة نظرًا لاستعمالها في العديد من القضايا التي يتطلب فيها فصل عناصر أسرة ما.

**قضية 17.2 (خاصيّة الفصل): ليكن $\mathcal{A}$ جبرًا على مجموعة $E$ و $\{A_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{A}$، حيث $n\in\overline{\mathbb{N}}$. توجد جملة $\{B_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{A}$ بحيث**

**1) $B_i\cap B_j=\varnothing$، مهما يكن $i$ و $j$ بحيث $i\neq j$.**

**2) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i=\bigcup_{i=1}^{k} A_i$، مهما يكن $k$ بحيث $1\leq k\leq n$**

**(على العموم هذا الاتحاد لا ينتمي إلى الجبر $\mathcal{A}$ عندما يكون $n=\infty$).**

**إثبات** : 1) نعرّف عناصر الجملة $\{B_i\}_{i=1}^n$ كالآتي:

$B_1=A_1$ و $B_i=\bigcap_{j=1}^{i-1}\left(A_i\setminus A_j\right)$، من أجل $2\leq i\leq n$.

من الواضح أنّ $\{B_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{A}$ وأنّ $B_i\subset A_i$ مهما يكن $i$ بحيث $1\leq i\leq n$.

لإثبات الفصل نعتبر مؤشرين مختلفين $i\neq j$. نفرض على سبيل المثال أنّ $i<j$. لدينا إذن

$$B_i \cap B_j \subset A_i \cap B_j = A_i \cap \left[\bigcap_{k=1}^{j-1} (A_j \setminus A_k)\right]$$
$$\subset A_i \cap (A_j \setminus A_i) = \varnothing$$

وبهذا يتم إثبات فصل عناصر الجملة $\{B_i\}_{i=1}^{n}$.

2) نعتبر أوّلاً الحالة المنتهية $n$ منته: ينتج فورًا عن الاحتواء $B_i \subset A_i$، $(1 \le i \le k \le n)$، أنّ $\bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. لإثبات الاحتواء الثاني نعتبر $a \in \bigcup_{i=1}^{k} A_i$، يوجد مؤشر $i_0$ بحيث $a \in A_{i_0}$. نضع $i^* = min\{i_0 : a \in A_{i_0}\}$.

إذا كان $i^* = 1$ فإنّ $a \in A_1 = B_1 \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i$.

إذا كان $2 \le i^*$ فإنّ $a \notin A_j$، من أجل $1 \le j \le i^* - 1$، وعليه فإنّ

$$a \in A_{i^*} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i^*-1} A_j\right) = \bigcap_{j=1}^{i^*-1} (A_{i^*} \setminus A_j) = B_{i^*} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_i،$$

إذن $\bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$، وبالتالي 2) محققة.

لنعتبر الآن الحالة غير المنتهية $n = \infty$: لنستدلّ بالاستقراء على $k$، إنّ المساواة محققة من أجل $k = 2$. نفرض أنّها محققة من أجل $k$، ولنبرهن على صحّتها من أجل $k + 1$. لدينا مما سبق ما يلي

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cup B_{k+1} = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup \left(A_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)$$
$$= \bigcup_{i=1}^{k+1} A_i$$

وعليه فإنّها محققة من أجل $k + 1$. إذن 2) محققة مهما يكن $k \in \overline{\mathbb{N}}$. ■

## 2- توليد الجبور والعشائر

لتكن $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ أسرة من الجبور (على الترتيب، العشائر) على

مجموعة $E$. سوف نبرهن من جهة على أنّ تقاطع عناصر كل هذه الجبور (على الترتيب، العشائر) هي جبر (على الترتيب، عشيرة) على نفس المجموعة $E$، ومن جهة أخرى، بتطبيق هذه النتيجة على الجبور (على الترتيب، العشائر) الفوقية الحاوية لأسرة $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$ سوف نحصل على أصغر جبر (على الترتيب، عشيرة) على $E$ يحوي $\mathcal{C}$.

لنستهلّ بهذه القضية:

**قضيّة 18.2: لتكن $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ أسرة من الجبور (على الترتيب، العشائر) على مجموعة $E$، عندئذ الأسرة $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ جبر (على الترتيب، عشيرة) على $E$.**

**إثبات:** نضع $\mathcal{A}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$. واضح أنّ المجموعة الخالية $\varnothing\in\mathcal{A}$، وبالتالي $\mathcal{A}\neq\varnothing$. ليكن $B\in\mathcal{A}$، عندئذ $B\in\mathcal{A}_i$، مهما يكن $i\in I$، ومنه $B^c\in\mathcal{A}_i$، مهما يكن $i\in I$، وذلك بفضل الشرط جب1). إذن $B^c\in\mathcal{A}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$.

نفرض أوّلاً أنّ $\mathcal{A}_i$ جبراء، مهما يكن $i\in I$. ليكن $A$ و $B$ في $\mathcal{A}$، عندئذ $A$ و $B$ ينتميان إلى $\mathcal{A}_i$، مهما يكن $i\in I$، ومنه $A\cup B\in\mathcal{A}_i$، مهما يكن $i\in I$، وعليه فإنّ $A\cup B\in\mathcal{A}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$، وهكذا فإنّ $\mathcal{A}$ جبر على $E$.

نفرض الآن أنّ $\mathcal{A}_i$ عشيرة، مهما يكن $i\in I$. لتكن $\{B_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{A}$، عندئذ $\{B_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{A}_i$، مهما يكن $i\in I$، وعليه فإنّ $\bigcup_{n\geq1}B_n\in\mathcal{A}_i$، مهما يكن $i\in I$، وذلك بفضل خاصيّة التجميع القابل للعد. إذن $\bigcup_{n\geq1}B_n\in\mathcal{A}$، وبالتالي $\mathcal{A}$ عشيرة على $E$.■

**مبرهنة 19.2: لتكن $E$ مجموعة غير خالية و $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$ (غير خالية). عندئذ، يوجد جبر أصغر (على الترتيب، عشيرة صغرى) على $E$ يحوي $\mathcal{C}$.**

**إثبات:** لتكن $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$ أسرة كلّ الجبور (على الترتيب، العشائر) على $E$ الحاوية للأسرة $\mathcal{C}$. ينتج عن القضية السابقة أنّ الأسرة $\mathcal{A}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$

جبر (على الترتيب، عشيرة) على $E$، ولدينا $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$.
نفرض وجود جبر (على الترتيب، عشيرة) $\mathcal{B}$ على $E$ بحيث $\mathcal{C}\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$، عندئذ

$$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}=\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i\subset\mathcal{B}$$

(لأنّ $\mathcal{B}$ هو أحد عناصر الأسرة $(\{\mathcal{A}_i\}_{i\in I}$).
إذن $\mathcal{B}=\mathcal{A}$، وبالتالي $\mathcal{A}$ هو أصغر جبر (على الترتيب، أصغر عشيرة) على $E$ تحوي الأسرة $\mathcal{C}$.■

**تعريف 20.2: لتكن أسرة غير خالية $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$. نسمي أصغر جبر (على الترتيب، أصغرعشيرة) على $E$ يحوي الأسرة $\mathcal{C}$ بالجبر المولّد (على الترتيب، العشيرة المولّدة) بـ $\mathcal{C}$، ونرمز له بـ $a_E(\mathcal{C})$(على الترتيب، $\sigma_E(\mathcal{C})$).**

**ملاحظة 21.2:**

1) عند انتفاء اللّبس فسنكتب باختصار $a(\mathcal{C})$ (على الترتيب، $\sigma(\mathcal{C})$) عوض $a_E(\mathcal{C})$ (على الترتيب، $\sigma_E(\mathcal{C})$).
2) إذا كان $\mathcal{C}$ جبرًا (على الترتيب، عشيرة) على $E$، فإنّ $a_E(\mathcal{C})=\mathcal{C}$ (على الترتيب، $\sigma_E(\mathcal{C})=\mathcal{C}$).

**مثال 22.2:** لتكن $E$ مجموعة غير خالية، $A\subset E$ مجموعة جزئية غير خالية و $\mathcal{C}=\{A\}$، عندئذ $a_E(\mathcal{C})=\sigma_E(\mathcal{C})=\{\varnothing,E,A,A^c\}$.

**مثال 23.2:** لتكن $E=[0,2]$ و $\mathcal{C}=\{\{0\},]1,2[\}$، عندئذ

$$a_E(\mathcal{C})=\sigma_E(\mathcal{C})=\{\varnothing,E,\{0\},]0,2],]1,2[,[0,1]\cup\{2\},\\ \{0\}\cup]1,2[,]0,1]\cup\{2\}\}$$

**مثال 24.2:** لتكن $E$ مجموعة غير منتهية. نعتبر الجبر
$$\mathcal{A}=\{A\subset E:\ |A|<\infty \text{ أو } |A^c|<\infty\}$$
(انظر تمرين رقم 2، إنّه ليس عشيرة لأنّ $E$ غير منتهية).

لنثبت أنّ $\Sigma=\sigma(\mathcal{A})$، حيث $\Sigma$ العشيرة المعرّفة على مجموعة غير منتهية $E$ بـ

$$.\Sigma=\{A\subset E:\ |A|\le\omega_0 \text{ أو } |A^c|\le\omega_0\}$$

بالفعل، بما أنّ $\Sigma$ عشيرة تحوي الأسرة $\mathcal{A}$ فإنّ $\sigma(\mathcal{A})\subset\Sigma$.
عكسيًّا، ليكن $A\in\Sigma$. إذا كانت $A$ قابلة للعد فإنّ $A=\bigcup_{n\ge1}\{a_n\}$، ومنه $A\in\sigma(\mathcal{A})$. إذا كانت $A^c$ قابلة للعد فإنّ $A^c=\bigcup_{n\ge1}\{b_n\}$، وبالتالي $A^c\in\sigma(\mathcal{A})$، ومنه $A\in\sigma(\mathcal{A})$. إذن $\sigma(\mathcal{A})\subset\Sigma$، وبه تتحقق المساواة.

**مبرهنة 25.2:** لتكن $f$ دالّة من $E$ نحو $F$، $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(F)$ و $\mathcal{C}_2\subset\mathcal{P}(E)$، $\mathcal{C}_1$ بحيث $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{C}_2$، عندئذ

1) $\mathcal{C}_1\subset a(\mathcal{C}_1)\subset a(\mathcal{C}_2)$ و $\mathcal{C}_1\subset\sigma(\mathcal{C}_1)\subset\sigma(\mathcal{C}_2)$.
2) $\sigma_E(f^{-1}(\mathcal{C}))=f^{-1}(\sigma_F(\mathcal{C}))$.

**إثبات:** 1) لدينا من خلال التعريف $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{C}_2\subset a(\mathcal{C}_2)$، وبما أنّ $a(\mathcal{C}_2)$ جبر على $E$ يحوي $\mathcal{C}_1$ فإنّه حتمًا يحوي الجبر المولّد بـ $\mathcal{C}_1$ ألا وهو $a(\mathcal{C}_1)$. إذن $\mathcal{C}_1\subset a(\mathcal{C}_1)\subset a(\mathcal{C}_2)$.
وبنفس الاستدلال نحصل على $\mathcal{C}_1\subset\sigma(\mathcal{C}_1)\subset\sigma(\mathcal{C}_2)$.

2) من السّهل التأكّد من أنّ الصورة العكسية $f^{-1}(\sigma_F(\mathcal{C}))$ للعشيرة $\sigma_F(\mathcal{C})$ هي عشيرة على $E$ تحوي $f^{-1}(\mathcal{C})$، وعليه فإنّ

$$.f^{-1}(\mathcal{C})\subset\sigma_E(f^{-1}(\mathcal{C}))\subset f^{-1}(\sigma_F(\mathcal{C})) \qquad (1)$$

لإثبات الاحتواء الثاني نعرّف الأسرة التالية

$$\Sigma=\left\{B\in\sigma_F(\mathcal{C}):f^{-1}(B)\in\sigma_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)\right\}.$$

من الواضح أنّ $F\in\Sigma$، ومنه $\Sigma$ غير خالية. ليكن $B\in\Sigma$، عندئذ $B\in\sigma_F(\mathcal{C})$ و $f^{-1}(B)\in\sigma_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$.

ينتج عن الانتماء $\left(f^{-1}(B)\right)^c=f^{-1}(B^c)\in\sigma_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$، أنّ $B^c\in\Sigma$. وباعتبار متتالية $\{B_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$، نحصل على

$B_n\in\sigma_F(\mathcal{C})$ و $f^{-1}(B_n)\in\sigma_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$، $(\forall n\geq 1)$،
ومنه $\bigcup_{n\geq 1}B_n\in\sigma_F(\mathcal{C})$ و $\bigcup_{n\geq 1}f^{-1}(B_n)\in\sigma_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$.
إذن $\bigcup_{n\geq 1}B_n\in\Sigma$، وعليه فإنّ $\Sigma$ عشيرة على $F$.

من جهة أخرى، نستنتج من الاحتواء المزدوج $\mathcal{C}\subset\Sigma\subset\sigma_F(\mathcal{C})$، أنّ $\Sigma=\sigma_F(\mathcal{C})$، وهذا يستلزم أنّ $f^{-1}(B)\in\sigma_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$، مهما يكن $B\in\sigma_F(\mathcal{C})$، أي

$$f^{-1}\left(\sigma_F(\mathcal{C})\right)\subset\sigma_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right).\qquad(2)$$

من الاحتواءين (1) و(2) نحصل على المساواة المطلوبة في 2).■

تكمن الأهمّيّة العمليّة للخاصيّة الثانية لهذه المبرهنة في كيفية إيجاد العشيرة المولدة بالأسرة $f^{-1}(\mathcal{C})$ عن طريق العشيرة المولدة بـــ $\mathcal{C}$. في الواقع تتطابق العشيرة المولدة بالأسرة $f^{-1}(\mathcal{C})$ مع الصورة العكسية للعشيرة المولدة بـــ $\mathcal{C}$، أي بإمكاننا إتمام $\mathcal{C}$ إلى $\sigma_F(\mathcal{C})$ ثمّ أخذ الصورة العكسيّة لهذه العشيرة أو أخذ الصورة العكسيّة لـــ $\mathcal{C}$ ثمّ إتمامها إلى العشيرة $f^{-1}\left(\sigma_F(\mathcal{C})\right)$.

## 3- العشائر والمجموعات البوريلية

نتطرّق فيما يــلي إلى مــفهوم **العشيرة البوريلية** ( نسبة إلـــى عـــالم

الرياضيات الفرنسي بوريل[2] (Borel) التي نصادفها في الكثير من التطبيقات. يتعلق هذا المفهوم بالطبولوجيا التي نزوّد بها المجموعة المرجعية $E$.

نبدأ بهذا التعريف:

**تعريف 26.2: ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا. نسمّي عشيرة بوريلية على $(E,\mathcal{T})$ العشيرة المولدة بأسرة المجموعات المفتوحة $\mathcal{T}$، ونرمز لها بـ $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$، $\mathcal{B}(E,\mathcal{T})$ (أو $\mathcal{B}(E)$ إن لم يكن هناك أيّ لبس)، أي**

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E) := \sigma_E(\mathcal{T}).$$

**يدعى كل عنصر من $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$ مجموعة بوريلية في $E$.**

يتّضح من هذا التعريف أنّ العشيرة البوريليّة على $E$ تحوي بالإضافة إلى المجموعات المفتوحة كلّ المجموعات المغلقة في $E$، وكذا كلّ المجموعات من النمط $F_\sigma$ و $G_\delta$.

لدينا المبرهنة التالية:

**مبرهنة 27.2: ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا و $\mathcal{T}' \subset \mathcal{P}(E)$ معرّفة بـ**

$$\mathcal{T}' = \{A \subset E : A^c \in \mathcal{T}\}$$

**(أسرة كل المجموعات المغلقة في $E$). عندئذ**

$$\sigma_E(\mathcal{T}') = \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E).$$

**إثبات**: ليكن $A \in \mathcal{T}'$، عندئذ $A^c \in \mathcal{T}$، ومنه $A^c \in \mathcal{T} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$، وبالتالي $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$ (لأنها عشيرة). إذن $\mathcal{T}' \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$، وعليه فإنّ $\sigma_E(\mathcal{T}') \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$.

فيما يخصّ الاحتواء العكسي، نعتبر $A \in \mathcal{T}$، عندئذ $A^c \in \mathcal{T}'$، وعليه فإنّ $A^c \in \mathcal{T}' \subset \sigma_E(\mathcal{T}')$، وبالتالي $A \in \sigma_E(\mathcal{T}')$ (لأنها عشيرة). إذن $\mathcal{T} \subset \sigma_E(\mathcal{T}')$، ومن ثمّ فإنّ

---

[2] اميل بوريل [Emile Borel] (1871–1956)

$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E) \subset \sigma_E(\mathcal{T}')$.

وبهذا نحصل على المساواة.■

## 4- الصفوف الرتيبة

**تعريف 28.2:** لتكن $E$ مجموعة غير خالية. نقول عن أسرة غير خالية $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(E)$ إنها صف رتيب على $E$ إذا حققت الشرطين التاليين:

ص1) من أجل كلّ متتالية متزايدة $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ فإنّ $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$،

ص2) من أجل كلّ متتالية متناقصة $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ فإنّ $\bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}$.

**مثال 29.2:** كلّ عشيرة هي صف رتيب على نفس المجموعة $E$، والعكس ليس بالضرورة صحيحا.

**قضية 30.2:** 1) لتكن $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ أسرة من الصفوف الرتيبة على نفس المجموعة $E$، عندئذ $\bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$ صف رتيب على $E$.

2) لتكن $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$، يوجد من ضمن الصفوف الرتيبة على $E$ الحاوية لـ $\mathcal{C}$ صف رتيب أصغر(على $E$) يحوي $\mathcal{C}$، يُسمّى بالصف الرتيب المولّد بـ $\mathcal{C}$، ونرمز له بـ $\mathcal{M}_E(\mathcal{C})$.

**إثبات:** نضع $\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$. لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ متتالية متزايدة، عندئذ $(\forall i \in I)$، $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}_i$، ومنه $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}_i$، $(\forall i \in I)$، لأنّ $\mathcal{M}_i$ صف رتيب، وعليه فإنّ $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}$. ومن جهة أخرى، من أجل كلّ متتالية متناقصة $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ فإنّ $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}_i$، $(\forall i \in I)$، ومنه $\bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}_i$، $(\forall i \in I)$، وعليه فإنّ $\bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}$.

إذن $\mathcal{M}$ صف رتيب على $E$.

2) ينتج عن الجزء السابق 1) أنّ تقاطع كلّ الصفوف الرتيبة على $E$ الحاوية للأسرة $\mathcal{C}$ هو بدوره صف رتيب على $E$ يحوي $\mathcal{C}$. نفرض وجود صف رتيب $\mathcal{C}_0$ على $E$ يحوي $\mathcal{C}$ ويحقق

$$\mathcal{C}\subset\mathcal{C}_0 \subsetneq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}_\lambda ،$$

حيث $\{\mathcal{M}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ أسرة كلّ الصفوف الرتيبة على $E$ الحاوية للأسرة $\mathcal{C}$. بما أنّ $\mathcal{C}_0\in\{\mathcal{M}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ عندئذ $\mathcal{C}_0 \subsetneq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}_\lambda\subset\mathcal{C}_0$، وهذا تناقض. إذن أصغر صف رتيب على $E$ يحوي $\mathcal{C}$ هو بالضبط $\mathcal{M}_E(\mathcal{C}):=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{M}_\lambda$، وهو المطلوب.■

سنبيّن في المبرهنة التالية أنّ الصفّ الرتيب المولّد بجبر $\mathcal{A}$ على $E$ هو بالضبط العشيرة المولّدة بـ $\mathcal{A}$. لدينا

**مبرهنة 31.2:** ليكن $\mathcal{A}$ جبرًا على مجموعة $E$. عندئذ

$$\mathcal{M}_E(\mathcal{A})=\sigma_E(\mathcal{A}) ،$$

**وبالخصوص فإنّ $\sigma_E(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}$، من أجل كلّ صف رتيب $\mathcal{M}$ على $E$ يحوي $\mathcal{A}$.**

**إثبات** : لدينا فورًا الاحتواء $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})\subset\sigma_E(\mathcal{A})$ لأنّ كلّ عشيرة هي صف رتيب وأنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ هو أصغر صف رتيب يحوي $\mathcal{A}$. فيما يخص الاحتواء العكسي فيكفي إثبات أنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ جبر للحصول على الاحتواء المطلوب.

لنثبت أنّ هذه الأخيرة هي فعلا جبر على $E$. نعرّف الأسرة

$$\mathcal{M}_0=\{A\in\mathcal{M}_E(\mathcal{A}): A^c\in\mathcal{M}_E(\mathcal{A})\} ،$$

لدينا فورًا $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}_0\subset\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$. إذا استطعنا إثبات أنّ $\mathcal{M}_0$ صف رتيب على $E$ فإننا نحصل آليًا على الاحتواء $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})\subset\mathcal{M}_0$، وبالتالي $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})=\mathcal{M}_0$، وهذا يثبت أنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ مستقرة بالتتميم.

لتكن $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{M}_0$ متتالية متزايدة، عندئذ $A_n\in\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$، $(\forall n\geq 1)$، ومنه $\bigcup_{n\geq 1}A_n\in\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$. وبما أنّ $\{A_n{}^c\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{M}_0$

وهي متناقصة، عندئذ $\bigcap_{n\geq 1} A_n{}^c = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)^c \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$، وعليه فإنّ $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{M}_0$ . بنفس الكيفية نحصل على انتماء تقاطع متتالية متناقصة $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}_0$ إلى $\mathcal{M}_0$.

إذن $\mathcal{M}_0$ صف رتيب على $E$، وبالتالي $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$.
نعرّف من أجل كلّ $A \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ الأسرة

$$\mathcal{E}_A = \{B \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A}) : A \cup B \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})\}.$$

لدينا فورًا $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_A \subset \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$. لنثبت أنّ $\mathcal{E}_A$ صف رتيب على $E$. بالتأكيد، لتكن $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}_A$ متزايدة، عندئذ $A \cup B_n \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$، $(\forall n \geq 1)$، وعليه فإنّ

$$\bigcup_{n\geq 1} (A \cup B_n) = A \cup \left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A}).$$

إذن $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{E}_A$.

نحصل على نتيجة مماثلة من أجل المتتاليات المتناقصة في $\mathcal{E}_A$، وعليه فإنّ $\mathcal{E}_A$ صف رتيب على $E$، ومن ثمّ فإنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{A}) = \mathcal{E}_A$. بما أنّ $A$ اختياري فإنّ

$$\mathcal{M}_E(\mathcal{A}) = \mathcal{E}_C = \mathcal{E}_D \text{، من أجل كلّ } C, D \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})\text{،}$$

ومنه $C \cup D \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$. إذن $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ هي جبر على $E$ .
لنعتبر الآن متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$، ونعرّف المتتالية المتزايدة $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ كالآتي: $B_n = \bigcup_{k\geq 1}^{n} A_k$ من أجل $n \geq 1$. لدينا $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ لأنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ صف رتيب، وعليه فإنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{A})$ عشيرة على $E$ تحوي $\mathcal{A}$، وبالتالي

$$\sigma_E(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_E(\mathcal{A}).$$

نستنتج مما سبق أنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{A}) = \sigma_E(\mathcal{A})$.

لإثبات الشرط المتبقي من المبرهنة تكفي الملاحظة أنّ

$$\sigma_E(\mathcal{A}) = \mathcal{M}_E(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}\text{،}$$

وذلك من أجل كلّ صف رتيب $\mathcal{M}$ على $E$ يحوي $\mathcal{A}$، وهو المطلوب.■

تهتمّ النتيجة التالية بتوليد الصف الرتيب عن طريق الصورة العكسية لأسرة معيّنة. لدينا

**مبرهنة 32.2:** لتكن $f$ دالّة من $E$ نحو $F$، $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(F)$ و $\mathcal{C}_2\subset\mathcal{P}(E)$، $\mathcal{C}_1$، بحيث $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{C}_2$، عندئذ

1) $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{M}_E(\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{M}_E(\mathcal{C}_2)$.

2) $\mathcal{M}_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)=f^{-1}(\mathcal{M}_F(\mathcal{C}))$.

**إثبات :** 1) من الواضح أنّ $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{C}_2\subset\mathcal{M}_E(\mathcal{C}_2)$، وبما أنّ $\mathcal{M}_E(\mathcal{C}_2)$ صف رتيب على $E$ يحوي $\mathcal{C}_1$ فإنّه حتمًا يحوي الصف الرتيب المولّد بـ $\mathcal{C}_1$ ألا وهو $\mathcal{M}_E(\mathcal{C}_1)$. إذن $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{M}_E(\mathcal{C}_1)\subset\mathcal{M}_E(\mathcal{C}_2)$.

2) ينتج عن كون $\mathcal{M}_F(\mathcal{C})$ صفًا رتيبًا على $F$ أنّ صورته العكسية

$f^{-1}(\mathcal{M}_F(\mathcal{C}))$ صف رتيب على $E$ يحوي $f^{-1}(\mathcal{C})$. نستنتج فورًا أنّ

$$\mathcal{M}_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)\subset f^{-1}(\mathcal{M}_F(\mathcal{C})). \qquad (3)$$

فيما يخص الاحتواء العكسي، نعرّف الأسرة التالية:

$$\Psi=\left\{B\in\mathcal{M}_F(\mathcal{C}):f^{-1}(B)\in\mathcal{M}_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)\right\}.$$

لدينا من أجل كلّ $B\in\mathcal{C}\subset\mathcal{M}_F(\mathcal{C})$ ما يلي

$$f^{-1}(B)\in f^{-1}(\mathcal{C})\subset\mathcal{M}_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right),$$

وعليه فإنّ $\mathcal{C}\subset\Psi$.

لتكن الآن $\{B_n\}_{n\geq 1}\subset\Psi$ متتالية متزايدة، عندئذ $\{B_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{M}_F(\mathcal{C})$ و $f^{-1}(B_n)\in\mathcal{M}_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right)$، $(\forall n\geq 1)$. ينتج عن كون $\mathcal{M}_F(\mathcal{C})$ صفًا رتيبًا و $\{B\}_{n\geq 1}$، $\left\{f^{-1}(B_n)\right\}_{n\geq 1}$ متتاليتين متزايدتين أنّ

$$\bigcup_{n\geq 1}B_n\in\mathcal{M}_F(\mathcal{C}) \text{ و } f^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1}B_n\right)=\bigcup_{n\geq 1}f^{-1}(B_n)\in\mathcal{M}_E\left(f^{-1}(\mathcal{C})\right),$$

$(\forall n \geq 1)$، وعليه فإنّ $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \Psi$ .
نحصل على نتيجة مماثلة من أجل المتتاليات المتناقصة في $\Psi$. إذن $\Psi$ صف رتيب على $F$ يحقق الاحتواء المزدوج $\mathcal{C} \subset \Psi \subset \mathcal{M}_F(\mathcal{C})$، ومنه نستنتج أنّ $\Psi = \mathcal{M}_F(\mathcal{C})$. هذا يعني أنّ

$f^{-1}(B) \in \mathcal{M}_E(f^{-1}(\mathcal{C}))$، مهما يكن $B \in \mathcal{M}_F(\mathcal{C})$، أي

$$f^{-1}(\mathcal{M}_F(\mathcal{C})) \subset \mathcal{M}_E(f^{-1}(\mathcal{C})) . \qquad (4)$$

من الاحتواءين (3) و(4) نحصل على المساواة المطلوبة.■

## 5- مفهوم أثر الجبر والعشيرة

لتكن $E$ مجموعة غير خالية و $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ أسرة غير خالية. نعرّف

أثر *(trace)* الأسرة $\mathcal{C}$ على مجموعة جزئية $A$ غير خالية من $E$ كالآتي

$$A \cap \mathcal{C} = \{B \cap A : B \in \mathcal{C}\} .$$

بإدراج التباين القانوني *(canonical imbedding)* $j : A \to E$ المعرّف بـِ $j(x) = x$، $(\forall x \in A)$، نحصل على

$$j^{-1}(B) = \{x \in A : j(x) \in B\} = \{x \in A : j(x) = x \in B\}$$
$$= A \cap B$$

من أجل كلّ $B \subset E$، وعليه فإنّ

$$j^{-1}(\mathcal{C}) = \{j^{-1}(B) : B \in \mathcal{C}\} = \{A \cap B : B \in \mathcal{C}\}$$
$$= A \cap \mathcal{C}$$

**مثال 33.2:** نعتبر على المجموعة $E = \{a,b,c,d\}$ الأسرة

$$\mathcal{C} = \{\varnothing, E, \{a\}, \{a,b\}, \{b,c,d\}, \{c,d\}, \{b\}, \{a,c,d\}\} .$$

لنعيّن أثر هذه الأسرة على المجموعة الجزئية $A = \{a,b,d\}$. لدينا

$$A \cap \mathcal{C} = \{\varnothing, A, \{a\}, \{a,b\}, \{b,d\}, \{d\}, \{b\}, \{a,d\}\} .$$

**ملاحظة 34.2:** نشير إلى أنّه إذا كانت $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$ جبرًا (على الترتيب، عشيرة) على $E$، فإنّ أثر $\mathcal{C}$ على مجموعة جزئية $A\subset E$ هو جبر (على الترتيب، عشيرة) على $A$، يدعى الجبر المُستخلص (على الترتيب، العشيرة المُستخلصة) من $\mathcal{C}$ على $A$.

**قضية 35.2:** لتكن $E$ مجموعة غير خالية، $A\subset E$ و $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E)$، عندئذ $\sigma_A(A\cap\mathcal{C})=A\cap\sigma_E(\mathcal{C})$.

**إثبات :** لدينا بمقتضى المبرهنة 25.2 ما يلي

$$\begin{aligned}\sigma_A(A\cap\mathcal{C})&=\sigma_A\left(j^{-1}(\mathcal{C})\right)=j^{-1}\left(\sigma_E(\mathcal{C})\right)\\&=A\cap\sigma_E(\mathcal{C})\end{aligned}$$

وهو المطلوب.■

**لازمة 36.2:** ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا و $A\subset E$، عندئذ $A\cap\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)=\mathcal{B}_{A\cap\mathcal{T}}(A)$.

**إثبات :** لدينا من التعريف ما يلي
$\sigma_E(\mathcal{T})=\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$ و $\sigma_A(A\cap\mathcal{T})=\mathcal{B}_{A\cap\mathcal{T}}(A)$.

نستنتج فورًا من القضية السابقة أنّ $\mathcal{B}_{A\cap\mathcal{T}}(A)=A\cap\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$. ■

نقدّم فيما يلي بعض النتائج الخاصة بتوليد العشيرة البوريلية بأسرتي المجموعات من نمط $F_\sigma$ و $G_\delta$ في فضاء طبولوجي $(E,\mathcal{T})$. لهذا الغرض نرمز بـ $\mathcal{F}^\sigma$ (على الترتيب، $\mathcal{G}^\delta$) لأسرة كلّ المجموعات من نمط $F_\sigma$ (على الترتيب، $G_\delta$) في $(E,\mathcal{T})$. لدينا النتيجة التالية:

**مبرهنة 37.2:** ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا، عندئذ

$$\sigma_E\left(\mathcal{F}^\sigma\right)=\sigma_E\left(\mathcal{G}^\delta\right)=\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E).$$

**إثبات:** واضح أنّ $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$ لكون $\mathcal{F}^{\sigma} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$ عشيرة على $E$، ومنه $\sigma_E(\mathcal{F}^{\sigma}) \subset \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$.

عكسيًّا، ليكن $V \in \mathcal{T}$، عندئذ $V^c \in \mathcal{F}^{\sigma} \subset \sigma_E(\mathcal{F}^{\sigma})$، ومنه أسرة كلّ المجموعات المغلقة $\mathcal{T}'$ في $E$ محتواة في $\sigma_E(\mathcal{F}^{\sigma})$. إذن

$$\sigma_E(\mathcal{T}') = \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E) \subset \sigma_E(\mathcal{F}^{\sigma})،$$

وعليه فإنّ $\sigma_E(\mathcal{F}^{\sigma}) = \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$.

فيما يخصّ الأسرة $\mathcal{G}^{\delta}$ لدينا فورًا الاحتواء $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}^{\delta}$ لكون كلّ مجموعة مفتوحة هي من نمط $G_{\delta}$، نستنتج إذن أنّ $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E) \subset \sigma_E(\mathcal{G}^{\delta})$. من جهة أخرى، من أجل كلّ $K \in \mathcal{T}'$ فإنّ $K^c \in \mathcal{T} \subset \mathcal{G}^{\delta} \subset \sigma_E(\mathcal{G}^{\delta})$، وبالتالي $K \in \sigma_E(\mathcal{G}^{\delta})$.
إذن $\mathcal{T}' \subset \sigma_E(\mathcal{G}^{\delta})$، ومنه

$$\sigma_E(\mathcal{T}') = \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E) \subset \sigma_E(\mathcal{G}^{\delta}).$$

وهكذا فإنّ $\sigma_E(\mathcal{G}^{\delta}) = \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$.■

## 6- العشائر البوريلية على $\mathbb{R}$ و $\overline{\mathbb{R}}$

نظرًا لأهميتهما العمليّة سوف نهتم بتوليد العشيرتين $\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \mathcal{B}_{\mathcal{T}_0}(\mathbb{R})$ و $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) := \mathcal{B}_{\overline{\mathcal{T}}_0}(\overline{\mathbb{R}})$ بطرق متنوّعة بغية استعمالهما في الوقت المناسب، حيث نرمز بـ $\mathcal{T}_0$ للطبولوجيا الاعتيادية على $\mathbb{R}$.

لنبدأ بالمبرهنة التالية:

**مبرهنة 38.2:** لدينا $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_k)$، لكلّ $k$ : $1 \leq k \leq 8$، حيث

1) $\mathcal{I}_1 = \{]a,b[ : a, b \in \mathbb{R}\}$، 2) $\mathcal{I}_2 = \{[a,b[ : a, b \in \mathbb{R}\}$،

3) $\mathcal{I}_3=\{]a,b]: a,\, b\in\mathbb{R}\}$، 4) $\mathcal{I}_4=\{[a,b]: a,\, b\in\mathbb{R}\}$،

5) $\mathcal{I}_5=\{]-\infty,\, a[: a\in\mathbb{R}\}$، 6) $\mathcal{I}_6=\{]-\infty,a]: a\in\mathbb{R}\}$،

7) $\mathcal{I}_7=\{]a,\, +\infty[: a\in\mathbb{R}\}$، 8) $\mathcal{I}_8=\{[a,\, +\infty[: a\in\mathbb{R}\}$.

**إثبات :** 1) من الواضح أنّ $\mathcal{I}_1\subset\mathcal{T}_0$، ومنه $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. من جهة أخرى، تكتب كلّ مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}$ على شكل اتحاد قابل للعد لفترات مفتوحة ( مبرهنة كانتور). إذن $V=\bigcup_{n\geq 1}]a_n,\, b_n[$، حيث $\{]a_n,\, b_n[\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{I}_1\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)$، وعليه فإنّ $V\in\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)$، وبالتالي $\mathcal{T}_0\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)$. نستنتج فورًا أنّ $\mathcal{B}(\mathbb{R})\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)$، وهكذا فإنّ $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) يكتب كلّ عنصر من $\mathcal{I}_2$ كالآتي:

$$[a,\, b[=\bigcap_{n\geq 1}]a-1/n\,,\, b[$$ ،

ومنه $[a,\, b[\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$، وبالتالي $\mathcal{I}_2\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. إذن $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_2)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. لدينا من جهة أخرى،

$$]a,\, b[=\bigcup_{n\geq 1}[a+1/n\,,\, b[$$ ،

ومنه $]a,\, b[\in\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_2)$، وعليه فإنّ $\mathcal{I}_1\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_2)$. إذن،

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_2)$$ ،

وبهذا تتحقق المساواة $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_2)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

4) يكتب كلّ عنصر من $\mathcal{I}_4$ على الشكل التالي:

$$[a,\, b]=\bigcap_{n\geq 1}]a-1/n\,,\, b+1/n[$$ ،

فهو إذن عنصر من $\mathcal{B}(\mathbb{R})$، ومنه $\mathcal{I}_4\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. إذن، $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_4)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. لدينا من جهة ثانية،

$$]a,\, b[=\bigcup_{n\geq 1}[a+1/n\,,\, b-1/n]$$ ،

ومنه $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_4) \supset \mathcal{I}_1$، وبالتالي $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_1)\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_4)$.
نستنتج ممّا سبق أنّ $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_4)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

5) لدينا $\mathcal{I}_7\subset\mathcal{T}_0$، ومنه $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_7)\subset\mathcal{B}(\mathbb{R})$. نلاحظ من جهة أخرى أنّ

$$]a, b]=]a,+\infty[\setminus]b,+\infty[\text{ ، } (\forall a, b\in\mathbb{R}: a<b)\text{ ،}$$

ومنه $\mathcal{I}_3\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_7)$، وبالتالي، $\mathcal{B}(\mathbb{R})=\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_3)\subset\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_7)$.
إذن $\sigma_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_7)=\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

نبرهن بنفس الكيفية على باقي القضايا.■

**ملاحظة 39.2**: إنّنا نحصل على نفس النتيجة إذا ما عوّضنا $a$ و $b$ في $\mathbb{R}$ بـِ $a$ و $b$ في $\mathbb{Q}$.

**مبرهنة 40.2**: لدينا $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_k)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ و $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}'_k)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$، لكلّ $k$ : $1\le k\le 4$، حيث

1) $\mathcal{F}_1=\{]a,+\infty]: a\in\mathbb{R}\}$، 2) $\mathcal{F}'_1=\{]r,+\infty]: r\in\mathbb{Q}\}$،

3) $\mathcal{F}_2=\{[a,+\infty]: a\in\mathbb{R}\}$، 4) $\mathcal{F}'_2=\{[r,+\infty]: r\in\mathbb{Q}\}$،

5) $\mathcal{F}_3=\{]-\infty, a[: a\in\mathbb{R}\}$، 6) $\mathcal{F}'_3=\{]-\infty, r[: r\in\mathbb{Q}\}$،

7) $\mathcal{F}_4=\{[-\infty,a]: a\in\mathbb{R}\}$، 8) $\mathcal{F}'_4=\{[-\infty,r]: r\in\mathbb{Q}\}$.

**إثبات** : 1) سوف نثبت فقط أنّ $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ و $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}'_1)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. البقية يبرهن عليها بنفس الكيفية. لتكن $\overline{\mathcal{T}}_0$ الطبولوجيا الاعتيادية على $\overline{\mathbb{R}}$، وليكن $A=]a,+\infty]\in\mathcal{F}_1$. لدينا فورًا $A\in\overline{\mathcal{T}}_0$، ومنه $\mathcal{F}_1\subset\overline{\mathcal{T}}_0$. إذن $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)\subset\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{\mathcal{T}}_0)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

عكسيًّا، لتكن $V$ مفتوحة في $\overline{\mathbb{R}}$، عندئذ تكتب $V$ على شكل اتحاد عناصر من قاعدة الطبولوجيا $\overline{\mathcal{T}}_0$، أي $V=V_1\cup V_2\cup V_3$، حيث

$$V_1=\{\ [-\infty,a[ \text{ أو } \varnothing\ \}\text{ ، } V_2=\{\ V_0\in\mathcal{T}_0 \text{ أو } \varnothing\ \}\text{ ،}$$

$V_3=\{\varnothing$ أو $]a,+\infty]\}$، حيث $a\in\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كلّ عدد حقيقي $a$ ما يلي:

$$\bigcap_{n\geq 1}]a-1/n,+\infty]=[a,+\infty]\in\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)\text{،}$$

ومنه $[-\infty,a[=[a,+\infty]^c\in\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)$.

من جهة أخرى، تكتب كلّ فترة منتهية $]a,b[\subset\mathbb{R}$، $(a<b)$، على الشكل $]a,b[=]a,+\infty]\cap[-\infty,b[$، فهي إذن عنصر من $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)$. وعليه فإنّ كلّ مفتوحة من $\mathcal{T}_0$ تنتمي إلى $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)$، وهكذا فإنّ $V\in\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)$، وبالتالي، $\overline{\mathcal{T}}_0\subset\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)$.

إذن $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\subset\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)$، وبهذا الاحتواء الثاني نحصل على المساواة

$$\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\text{.}$$

لإثبات أنّ $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}'_1)=\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$، نعتبر عنصرًا $A=]r,+\infty]\in\mathcal{F}'_1$. لدينا فورًا $A\in\overline{\mathcal{T}}_0$، ومنه $\mathcal{F}'_1\subset\overline{\mathcal{T}}_0$. إذن $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}'_1)\subset\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

عكسيًّا، ليكن $a$ عددًا حقيقيًا ولتكن $\{r_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{Q}$ متتالية متزايدة تنتهي إلى $a$، عندما $n$ يؤول إلى $\infty$، عندئذ

$$\bigcup_{n\geq 1}]r_n,+\infty]=]a,+\infty]\in\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}'_1)\text{،}$$

ومنه $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})=\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}_1)\subset\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\mathcal{F}'_1)$، وبهذا تتحقق المساواة المطلوبة.■

**ملاحظة 41.2:** يكتب كلّ عنصر من $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ على الشكل $A\cup B$، حيث $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ و $B\in\{\varnothing,\{-\infty\},\{+\infty\},\{-\infty,+\infty\}\}$.

# مسألة محلولة

ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيّا بحيث أنّ تقاطع كلّ مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين هو مفتوحة غير خالية. نعتبر الأسرة

$\Sigma=\{A\subset E:\exists V(\neq\varnothing)\in\mathcal{T}:V\subset A$ أو $V\subset A^c\}$.

1) بيّن أنّ $\Sigma$ جبر على $E$.

2) نعرّف على $E$ الأسرة $\mathcal{C}=\{A\subset E:\exists V(\neq\varnothing)\in\mathcal{T}:V\subset A\}$.

أ- أثبت أنّ $a(\mathcal{C})=\Sigma$.

ب- أوجد فضاءً طبولوجيّا $(E,\mathcal{T})$ بحيث لا تكون $\Sigma$ عشيرة على $E$.

## الحل:

1) لدينا $E\in\mathcal{T}$ مع $E\subset E$، ومنه $E\in\Sigma$. إذن $\Sigma\neq\varnothing$.

**الاستقراربالتتميم:** ليكن $A\in\Sigma$. إذا وُجد $V\in\mathcal{T}$ (غير خال) بحيث $V\subset A$، عندئذ $V\subset(A^c)^c=A$، ومنه $A^c\in\Sigma$. أما إذا وُجد $V\in\mathcal{T}$ (غير خال) بحيث $V\subset A^c$، فواضح أنّ $A^c\in\Sigma$. وهكذا فإنّه في كلتا الحالتين $A^c\in\Sigma$.

**الاستقرار بالاتحاد:** ليكن الآن $A$ و $B$ في $\Sigma$. إذا احتوت إحدى المجموعتين الجزئيتين على مفتوحة غير خالية $W\in\mathcal{T}$ فإنّ $W\subset A\cup B$، وبالتالي $A\cup B\in\Sigma$. أمّا إذا وُجد $V_1$ و $V_2$ في $\mathcal{T}$ (غير خاليين) بحيث $V_1\subset A^c$ و $V_2\subset B^c$، فإنّ $V_1\cap V_2\subset A^c\cap B^c=(A\cup B)^c$، ومنه $(A\cup B)^c\in\Sigma$. ينتج عن الاستقرار بالتتميم أنّ $A\cup B\in\Sigma$.

إذن، الأسرة $\Sigma$ جبر على المجموعة $E$.

2) أ) من الاحتواء $\mathcal{C}\subset\Sigma$ نحصل فورًا على $a(\mathcal{C})\subset\Sigma$.

عكسيًّا، ليكن $A \in \Sigma$. إذا وجدت مفتوحة غير خالية $V \in \mathcal{T}$ بحيث $V \subset A$، عندئذ $A \in \mathcal{C} \subset a(\mathcal{C})$. أمّا إذا وجدت مفتوحة غير خالية $V \in \mathcal{T}$ بحيث $V \subset A^c$، عندئذ $A^c \in \mathcal{C} \subset a(\mathcal{C})$، وبالتالي $A \in a(\mathcal{C})$ (لأنها جبر). إذن، $\Sigma \subset a(\mathcal{C})$، وعليه فإنّ $a(\mathcal{C}) = \Sigma$.

ب) نعتبر على المجموعة $E = \mathbb{N}^*$ الطبولوجيا

$$\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{C_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}, n = 1, 2, \dots\}.$$

لتكن $\{A_n\}_{n \geq 1}$ متتالية بحيث $A_n = \{2n\}$، $(\forall n \geq 1)$. من الواضح أنّ $A_n$ لا ينتمي إلى $\mathcal{T}$، $(\forall n \geq 1)$، بينما $A_n{}^c \in \Sigma$ لأنّ

$$\{2n+1, 2n+2, \dots\} \subset A_n{}^c \text{ و } \{2n+1, 2n+2, \dots\} \in \mathcal{T}.$$

ومنه $A_n \in \Sigma$، $(\forall n \geq 1)$. لدينا

$$\bigcup_{n \geq 1} A_n = \{2, 4, 6, \dots\} \text{ و } \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)^c = \{1, 3, 5, \dots\}،$$

وكلاهما لا ينتمي إلى الجبر $\Sigma$، وبالتالي $\Sigma$ ليست عشيرة على $\mathbb{N}^*$.

# تمارين مقترحة

**01** لتكن $E = \{a, b, c, d, e\}$. تَـعرّف على الجبور والطبولوجيات من ضـــمن الأسر التّالية:

$$\Sigma_1 = \{\varnothing, E, \{a, c\}, \{e\}\}$$
$$\Sigma_2 = \{E, \{a\}, \{b, c\}, \{c, d, e\}, \{a, d, e\}\}$$
$$\Sigma_3 = \{\varnothing, E, \{a, b\}, \{c, d, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c\}\}$$
$$\Sigma_4 = \{\varnothing, E, \{a, b, c\}, \{d, e\}\}$$
$$\Sigma_5 = \{\varnothing, E, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

**02** نعتبر على مجموعة غير خالية $E$ الأسرة التالية

$$\Sigma = \{A \subset E : |A| < \infty \text{ أو } |A^c| < \infty\}.$$

أ. أثبت أنّ $\Sigma$ جبر على $E$.

ب. أثبت أنّ $\Sigma$ عشيرة على $E$ إذا وإذا فقط كانت $E$ منتهية.

**03** 1) هل الأسرة $\{]a,b[, a<b, a,b\in\mathbb{R}\}$ جبر على $\mathbb{R}$؟

2) هل أسرة كلّ المستقيمات في المستوي جبر على هذا المستوي؟

**04** ليكن $\Sigma$ جبرًا على $E$ بحيث أنّه من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ متزايدة (على الترتيب، متناقصة) لدينا

$$\bigcup_{n\geq 1}A_n\in\Sigma \text{ (على الترتيب، } \bigcap_{n\geq 1}A_n\in\Sigma\text{).}$$

بيّن أنّ $\Sigma$ عشيرة على $E$.

**05** أثبت أنّ كلّ جبر $\mathcal{A}$ على مجموعة $E$ بحيث $\bigcup_{n\geq 1}A_n\in\mathcal{A}$، من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{A}$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى فهو عشيرة على $E$.

**06** لتكن $f:E\to F$ دالّة معطاة و $\Sigma$ عشيرة على $E$. أثبت أنّ الأسرة

$$\Pi=\{B\subset F:\ f^{-1}(B)\in\Sigma\}$$

عشيرة على $F$.

**07** لتكن $\Sigma$ عشيرة على مجموعة $F$ و $f:E\to F$ دالّة تقابليّة. أثبت أنّ الأسرة

$$\Lambda=\{A\subset E:f(A)\in\Sigma\}$$

عشيرة على $E$.

**08** أثبت أنّ كل جبر منته على مجموعة $E$ هو عشيرة على نفس المجموعة.

**09** لتكن $A\subset E$ مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة $E$ و $\Sigma_0$ عشيرة على $A$. هل الأسرة $\Sigma=\{B\subset E:A\cap B\in\Sigma_0\}$ عشيرة على $E$؟

**10** لتكن $E$ مجموعة غير خالية و $\Sigma\subset\mathcal{P}(E)$ بحيث

أ) $A\cap B^c\in\Sigma$، من أجل كلّ $A$ و $B$ في $\Sigma$.

ب) $\bigcup_{n\geq 1}A_n\in\Sigma$، من أجل كلّ متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى. هل الأسرة $\Sigma$ عشيرة على $E$؟

**11** لتكن $E=[-1,1]$. أوجد الجبر المولد بالأسر التالية:

1) $\Gamma_1=\{\{-1\},\{1\}\}$.

2) $\Gamma_2=\{[-1,0[\,,\,]-1/2\,,1]\}$.

**12** لتكن $E=\{1,2,3,5,7\}$.

أ) عيّن العشيرة المولّدة بالأسرة $\Gamma$ في الحالات التالية:

$$\Gamma=\Gamma_1=\{\{1,2,3\},\{3,5,7\}\}$$
$$\Gamma=\Gamma_2=\{\{1\},\{1,2\},\{1,3,5\}\}$$
$$\Gamma=\Gamma_3=\{\{1,2,3\}\}$$
$$\Gamma=\Gamma_4=\{\{3,5,7\}\}$$

ب) قارن $\sigma(\Gamma_3)\cup\sigma(\Gamma_4)$ بِ $\sigma(\Gamma_1)$. ماذا تستنتج من ذلك؟

**13** لتكن $E$ مجموعة غير خالية و $\mathcal{C}_1$، $\mathcal{C}_2\subset\mathcal{P}(E)$. أثبت التكافؤ التالي:
$\sigma(\mathcal{C}_1)=\sigma(\mathcal{C}_2)\Leftrightarrow \mathcal{C}_1\subset\sigma(\mathcal{C}_2)$ و $\mathcal{C}_2\subset\sigma(\mathcal{C}_1)$.

**14** لتكن $E$ مجموعة غير منتهية، إذا رمزنا بـ $\mathcal{C}_n$ لأسرة كلّ المجموعات الجزئية من $E$ المتكونّة من $n$ عنصرًا، $(n\geq 1)$، أثبت أنّ

$a(\mathcal{C}_n)=\{A\subset E: |A|<\infty \text{ or } |A^c|<\infty\}$، $(\forall n\geq 1)$.

**15** لتكن $E=\{a,b,c,d\}$ و $\Gamma=\{\{a,b\},\{b,c,d\},\{d\}\}$.

1. عيّن الطبولوجيا $\mathcal{T}$ المولّدة بـ $\Gamma$.
2. أوجد العشيرة البوريلية $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$.
3. هل توجد في $E$ مجموعات غير بوريلية؟

**16)** 1) ليكن $E=\mathbb{Q}$ وَ $\Sigma=\{A\subset\mathbb{Q}:\ |A|<\infty$ أو $|A^c|<\infty\}$.

بيّن أنّ الجبر $\Sigma$ ليس عشيرة على $\mathbb{Q}$.

2) ليكن $E=\mathbb{R}$ وَ $\Sigma=\{A\subset\mathbb{R}:\ |A|\leq\omega_0$ أو $|A^c|\leq\omega_0\}$.

بيّن أنّ العشيرة $\Sigma$ ليست طبولوجيا على $\mathbb{R}$.

3) لتكن $E$ مجموعة غير خالية، أثبت أنّ كلّ جبر منته على $E$ هو طبولوجيا.

4) لتكن $E=\{a,b,c,d\}$ وَ
$\Sigma=\{\varnothing,E,\{c\},\{b,c\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$،

بيّن أنّ الطبولوجيا $\Sigma$ ليست جبرًا على $E$.

**17** لتكن $E$ مجموعة اختيارية و $\Sigma$ أسرة من مجموعات جزئية من $E$.
برهن أنّه من أجل كلّ عنصر $A$ من $\sigma(\Sigma)$ توجد أسرة قابلة للعد $\Sigma_0$ محتواة في $\Sigma$ بحيث $A\in\sigma(\Sigma_0)$.

**18** نعتبر على الفترة $J=]0,1[$ الأسرتين:
$\Gamma=\{[a,b]:0<a\leq b<1\}$ و $\Gamma'=\{[a,b]:0<a\leq b<1,\ a,b\in\mathbb{Q}\}$.
أثبت أنّ $\sigma(\Gamma)=\sigma(\Gamma')=\mathcal{B}(J)$.

**19** ليكن $\Sigma$ صفًا رتيبًا على $E$ يحوي $\varnothing$ وعنصرًا غير خال $A$. بيّن أنّ الأسرة $\Psi=\{B\subset E:A\cup B,\ A\setminus B,\ B\setminus A\in\Sigma\}$ صفّ رتيب على $E$.

**20** لتكن $E$ مجموعة غير خالية و $\Sigma$ أسرة من مجموعات جزئية من $E$ بحيث

أ) $\forall A,B\in\Sigma\Rightarrow A\cap B\in\Sigma$.

أأ) $\forall A\in\Sigma,\exists A_1,A_2,\ldots,A_n\in\Sigma:A^c=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$.

أثبت أنّ $a(\Sigma)=\left\{\bigcup_{i\in I}A_i,\ \{A_i\}_{i\in I}\subset\Sigma,\ |I|<+\infty\right\}$.

**21** ليكن $\Sigma$ جبرًا منتهيا على مجموعة $E$. نضع من أجل كلّ $a\in E$
$A_a=\bigcap\{A\in\Sigma:\ a\in A\}$.

1) أثبت أنّ من أجل كلّ $a$ و $b$ في $E$ فإنّ $A_a\cap A_b=\varnothing$ أو $A_a\equiv A_b$.

2) استنتج وجود تجزئة منتهية $\mathrm{P}$ لـ $E$ بحيث $\Sigma=a_E(\mathrm{P})$.

3) بيّن أنّ $|\Sigma|=2^{|\mathrm{P}|}$.