الفصل الحادي عشر

مبرهنة رادون-نيكوديم

الفصل الحادي عشر
مبرهنة رادون-نيكوديم

سنعرّف في هذا الفصل القياس المؤشّر (ذا قيم حقيقية) وكذا القياس المركّب، وكمثال لقياس مؤشّر يمكن اعتبار فرق قياسين موجبين. سنتطرّق كذلك إلى مبرهنة جوردان التي تجيب عن مسألة كتابة قياس موشّر كفرق قياسين موجبين.
في الواقع المبرهنة الأساسيّة التي يدور حولها هذا الفصل هي مبرهنة رادون-نيكوديم والتي مفادها هو كتابة قياس موشّر ν على الشكل $\nu(A)=\int_A f d\mu$، $(\forall A\in\Sigma)$، من أجل دالة معيّنة قابلة للقياس f، ممّا يسمح لنا لاحقًا بتعريف مشتقّة قياس بالنّسبة لقياس آخر. وفي الختام نعرّف تكامل دالة قابلة للقياس وفق قياس مؤشّر أو قياس مركّب.

1- القياس المؤشّر والمركّب

لقد سبق لنا أن عرّفنا القياس الموجب ك دالة موجبة وبإمكاننا النظر إليه كتوزيع لكتلة ما على مجموعة E. نشير إلى أنّ التركيبة الخطيّة لقياسات موجبة بمعاملات حقيقية ليست بالضرورة قياسًا موجبًا، كما نعلم أنّه إذا كان (E,Σ,μ) فضاء قياس فإنّ الدالة $A\mapsto\nu(A)=\int_A f d\mu$ قياس موجب على Σ من أجل كلّ دالة موجبة وقابلة للقياس f. باستبدال الدالة f بدالة قابلة للمكاملة ذات إشارة اختياريّة فإنّ الدالة ν تأخذ قيمًا اختياريّة في المستقيم الموسّع مع إمكانية الاحتفاظ بالخصائص الأخرى للقياس الموجب (بالمعنى الواسع أي غير السالب). تؤدّي بنا كلّ هذه الملاحظات إلى تعريف قياسات جديدة ذات قيم حقيقيّة أو مركّبة. يمكننا بالمفهوم الفزيائي النظر إلى هذه الدوال كتوزيعات لشحنات كهربائيّة على جسم معيّن.

نفرض فيما يأتي أنّ (E,Σ) فضاء قابل للقياس اختياري.

تعريف 01.11: نسمّي قياسًا مؤشرًا على Σ كلّ دالة
$\nu:\Sigma\to\overline{\mathbb{R}}=[-\infty,+\infty]$ تتمتع بالشروط التالية:

أ) $Card\left(\nu(\Sigma)\cap\{-\infty,+\infty\}\right)\le 1$،

ب) $\nu(\varnothing)=0$،

ج) $\nu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)$، **من أجل كلّ متتالية** $\{E_n\}_{n\ge1}\subset\Sigma$ **ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى.**

إذا كان ν قياسًا مؤشرًا على Σ فنسمّي الثلاثية (E,Σ,ν) بفضاء قياس مؤشّر.

ملاحظة 02.11: 1) من الواضح أنّ كلّ قياس موجب على Σ هو قياس مؤشّر على Σ.

2) يُفهم من الشرط أ) أنّ ν لا يأخذ كلتا القيمتين $-\infty$ و $+\infty$ في آن واحد لتفادي حالة عدم التعيين.

3) ينبغي النظر إلى الشرط ج) كنهاية المجاميع الجزئية

$$S_N=\sum_{n=1}^{N}\nu(E_n)،$$

وأنّ هذه النهاية غير مرتبطة بكيفية ترتيب حدود السلسلة.

مثال 03.11: إذا كانت f دالة قابلة للقياس فإنّ $\nu(A)=\int_A fd\mu$، $(\forall A\in\Sigma)$، قياس مؤشّر. بالتأكيد، نستنتج من تعريف تكامل لوبيغ أنّ إحدى القيمتين $\int_A f^+d\mu$ أو $\int_A f^-d\mu$ منتهية فضلا على أنّ $\nu(\varnothing)=0$.

من السهل كذلك التحقق من صحة الشرط ج) في التعريف.

ملاحظة 04.11: نلفت انتباه القارىء إلى أنّ القياس المؤشّر يتمتع ببعض خواص القياسات الموجبة ومنها **مبرهنة التقارب المرجّح** بينما

يفقد خواصًا أخرى كخاصيّة الرتابة، أي أنّ الاحتواء $A\subset B$ لا يستلزم بالضرورة أنّ $\nu(A)\leq\nu(B)$. بالفعل، لتكن A و C مجموعتين منفصلتين قابلتين للقياس بحيث $\nu(A)>0$ و $\nu(C)<0$. بوضع $B=A\cup C$ نجد أنّ $A\subset B$ غير أنّ $\nu(B)=\nu(A)+\nu(C)<\nu(A)$. يمكن للقارىء أن يبيّن أنّ القياس المؤشّر ν رتيب إذا وإذا فقط كان قياسًا موجبًا.

قضية 05.11: ليكن ν قياسًا مؤشرًا على E. عندئذ

أ) إذا حقّق $A,B\in\Sigma$ الاحتواء $A\subset B$ و $|\nu(B)|<\infty$ فإنّ $|\nu(A)|<\infty$،

ب) $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)$، من أجل كلّ متتالية متزايدة $\{E_n\}_{n\geq1}\subset\Sigma$.

ج) $\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)$، من أجل كلّ متتالية متناقصة $\{E_n\}_{n\geq1}\subset\Sigma$، مع فرض وجود مؤشر $n_0\geq1$ بحيث $|\nu(E_{n_0})|<\infty$.

إثبات: أ) لدينا $B=A\cup(B\setminus A)$ ، ومنه

$$\nu(B)=\nu(A)+\nu(B\setminus A). \qquad (*)$$

نفرض أنّ $|\nu(B)|<\infty$. إذا كان أحد العنصرين $\nu(A)$ أو $\nu(B\setminus A)$ غير منته فإنّ المقدار $\nu(A)+\nu(B\setminus A)$ غير منته، أي $|\nu(B)|=\infty$، وهذا تناقض، إذن $|\nu(A)|<\infty$.

تجدر الإشارة إلى أنّه عندما يكون $\nu(A)$ منتهيًا فيمكننا نقله إلى الطرف الثاني للمعادلة (*) لنحصل على

$$\nu(B\setminus A)=\nu(B)-\nu(A). \qquad (**)$$

ب) بوضع $F_1=E_1,\ F_i=E_i\setminus E_{i-1},\ i=2,3,\ldots$ نحصل على متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى وقابلة للقياس بحيث

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i،$$

وعليه فإنّ

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)=\sum_{i\geq 1}\nu(F_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\nu(F_i)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\nu\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right)=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)$$

ج) بوضع $F_n=E_{n_0}\setminus E_{n_0+n}$، من أجل كلّ $n\geq 1$، نحصل على متتالية متزايدة $\{F_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$.

بملاحظة أنّ

$E_{n_0+n}\subset E_{n_0}$، $(\forall n\geq 1)$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\subset E_{n_0}$.

وبتطبيق الخاصية ب) نحصل بفضل العلاقة (**) على

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right)=\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E_{n_0}\setminus E_{n_0+n}\right)\right)=\nu\left(E_{n_0}\setminus\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}\right)$$
$$=\nu(E_{n_0})-\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\nu(F_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\nu\left(E_{n_0}\setminus E_{n_0+n}\right)=\nu(E_{n_0})-\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)$$

ومنه $\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)=\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}\right)=\nu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)$. ■

تعريف 06.11: نقول عن قياس مؤشّر ν على E إنّه منته إذا كان $|\nu(E)|<+\infty$، كما نقول عنه إنّه σ-منته إذا وجدت $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ بحيث $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ و $|\nu(E_n)|<+\infty$، $(\forall n\geq 1)$.

تعريف 07.11: نسمّي قياسًا مركّبًا كلّ دالة $\nu:\Sigma\to\mathbb{C}$ تحقق الخواص التالية:

أ) $\nu(\varnothing)=0$،

ب) $\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(E_n)$، **من أجل كلّ متتالية $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ ذات**

عناصر منفصلة مثنى مثنى بحيث

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\nu\left(E_n\right)\right|<\infty \text{ .}$$

مثال 08.11: إذا كان ν_1 و ν_2 قياسين مؤشّرين منتهيين على Σ فإنّ $\nu=\nu_1+i\nu_2$ قياس مركّب، حيث i العدد المركّب التخيّلي.

مثال 09.11: لتكن $f:E\to\mathbb{C}$ دالة قابلة للقياس، عندئذ الدالة $\nu:\Sigma\to\mathbb{C}$ المعرّفة بـ

$$\nu(A)=\int_A fd\mu \text{ ،} \quad (\forall A\in\Sigma) \text{ ،}$$

قياس مركّب على Σ مع الملاحظة أنّ

$$\nu(A)=\underbrace{\int_A \Re e(f)d\mu}_{\nu_1(A)}+i\underbrace{\int_A \Im m(f)d\mu}_{\nu_2(A)} \text{ ،}$$

حيث يمثّل ν_1 و ν_2 قياسين مؤشّرين.

2- تفكيك هان

نودّ في هذا المقطع إثبات تفكيك هان[1] [Hahn] الخاص بتجزئة المجموعة E إلى مجموعتين الأولى قياس مجموعاتها الجزئية موجبة والثانية قياس مجموعاتها الجزئية سالبة. لهذا نحتاج إلى مفهوم المجموعة الموجبة والمجموعة السالبة وفق قياس مؤشّر معيّن.

ليكن ν قياسًا مؤشرًا على (E,Σ).

تعريف 10.11: نقول عن مجموعة $F\in\Sigma$ إنّها موجبة وفق القياس المؤشر ν إذا كان $\nu(A)\geq 0$، لكلّ مجموعة جزئيّة $A\subset F$، كما نقول عن $F\in\Sigma$ إنّها سالبة وفق ν إذا كانت موجبة وفق القياس المؤشّر $(-\nu)$، أي أنّ $\nu(A)\leq 0$، لكلّ مجموعة جزئيّة $A\subset F$.

---

[1]) هانز هان [Hans Hahn] (1879-1934)

توطئة 11.11: لتكن $\{A_n\}_{n\ge 1}\subset\Sigma$. إذا كانت كلّ المجموعات A_n موجبة (على الترتيب، سالبة) وفق ν فإنّ المجموعة $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ موجبة (على الترتيب، سالبة) وفق ν.

إثبات: نفرض أنّ كلّ المجموعات A_n موجبة وفق ν. توجد بمقتضى مبرهنة الفصل متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\{B_n\}_{n\ge 1}\subset\Sigma$ تحقق $B_n\subset A_n$، $(\forall n\ge 1)$، و $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$.

لتكن C مجموعة جزئيّة من A، بما أنّ $C=\bigcup_{n=1}^{\infty}(C\cap B_n)$، عندئذ $\nu(C)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu(C\cap B_n)$. من الاحتواء $C\cap B_n\subset A_n$، $(\forall n\ge 1)$، نحصل على $\nu(C\cap B_n)\ge 0$، $(\forall n\ge 1)$، ومنه $\nu(C)\ge 0$. إذن، A مجموعة موجبة وفق ν. نحصل بنفس الكيفية على الشطر الثاني للتوطئة.■

توطئة 12.11: لتكن $A\in\Sigma$ بحيث $0<\nu(A)<\infty$، عندئذ توجد مجموعة موجبة $B\in\Sigma$ بحيث $B\subset A$ و $\nu(B)>0$.

إثبات: لدينا أوّلاً بمقتضى القضيّة 05.11 $|\nu(C)|<+\infty$، لكلّ $C\subset A$. بوضع

$$n_1=\inf\left\{n\in\mathbb{N}^*:\exists C_1\subset A,\ C_1\in\Sigma,\ \nu(C_1)<-\tfrac{1}{n}\right\}$$

نرى أنّ n_1 موجود وإلاّ صارت المجموعة A موجبة، وبالتالي كلّ مجموعة جزئية منها تحقق الخاصيّة المطلوبة. لدينا من جهة أخرى
$\nu(A\setminus C_1)=\nu(A)-\nu(C_1)>0$،

إذا فرضنا أنّ $A\setminus C_1$ لا تقبل مجموعة جزئيّة ذات قياس سالب، فإنّ $A\setminus C_1$ هي المجموعة المطلوبة، وإلاّ نضع
$n_2=\inf\left\{n\in\mathbb{N}^*:\exists C_2\subset A\setminus C_1,\ C_2\in\Sigma,\ \nu(C_2)<-\tfrac{1}{n}\right\}$.

لدينا

$$\nu\left(A\setminus\left(C_1\cup C_2\right)\right)=\nu(A)-\nu(C_1)-\nu(C_2)>0$$

نستمرّ على هذا النحو إلى غاية تعذّر وجود عدد منته n_k فنأخذ عندئذ $B=A\setminus\bigcup_{i=1}^{k}C_i$ مع الملاحظة أنّ $\nu(B)>0$. وأمّا في حالة وجود عدد غير منته من n_k فنضع $B=A\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$. لدينا $\nu(B)>0$ وإلاّ وجدنا $\nu(A)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(C_i)<0$، وهذا تناقض.

من الواضح أنّ $\nu(A)=\nu(B)+\sum_{i=1}^{\infty}\nu(C_i)>0$ يستلزم أنّ $\sum_{i=1}^{\infty}\nu(C_i)\neq-\infty$، وبالتالي فإنّ السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n_k}$ متقاربة. يمكننا إذن اختيار k_0 كبيراً بالقدر الكافي بحيث $n_k\geq 2$، من أجل كلّ $k>k_0$. لتكن الآن $D\in\Sigma$ و $D\subset B$. نرى من خلال تعريف المجموعة B أنّ $D\subset A\setminus\bigcup_{i=1}^{k}C_i$ لكلّ $k>k_0$. في الأخير، نستنتج من تعريف n_k و C_k أنّ $n_k\to+\infty$ و $\nu(D)\geq-\frac{1}{n_k-1}$. إذن $\nu(D)\geq 0$، ومن ثمّ المجموعة B موجبة.■

نحن الآن بصدد تقديم وإثبات مبرهنة هان الخاصة بتجزئة المجموعة E إلى مجموعتين جزئيتين قابلتين للقياس إحداهما موجبة والآخرة سالبة، ولهذا نستعمل المصطلح "**تفكيك**" *(decomposition)* بدلاً من "**التجزئة**" *(partition)* التي لها مدلول آخر.

مبرهنة 13.11 [تفكيك هان]: تقبل المجموعة E تفكيكًا يتكوّن من مجموعتين جزئتين قابلتين للقياس ومنفصلتين إحداهما موجبة والآخرة سالبة.

إثبات: نفرض أنّ القياس المؤشر ν يأخذ قيمه في $]-\infty,+\infty]$ (في حالة أخذه لقيم في $[-\infty,+\infty[$ فنعتبر حينئذ $(-\nu)$ بدلاً من ν).
نضع

$$\alpha = sup\{\nu(A) : A\in\Sigma, A\subset E, \text{موجبة } A\}.$$

لدينا فوراً $\alpha \geq 0$. لتكن $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية من المجموعات الموجبة بحيث $\lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \alpha$. نستنتج من التوطئة 11.11 أنّ $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ هي بدورها موجبة.

واضح من خلال الخاصيّة ب) للقضيّة 05.11 (ومن كون A و A_k، $k = 1,2,...$ مجموعات موجبة) أنّ

$$\nu(A) = \lim_{n\to\infty} \nu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \alpha،$$

وبالتالي فإنّ $\nu(A) = \alpha$ لأنّ $\alpha \geq \nu(A)$ حسب تعريف α.

من جهة أخرى، إنّ المجموعة $B = A^c$ سالبة. بالتأكيد، لنفرض جدلاً وجود $F\in\Sigma$ بحيث $F\subset B$ و $\nu(F)>0$. لدينا $\nu(F)<\infty$ حسب تعريف القياس ν ممّا يسمح لنا بتطبيق التوطئة 12.11 للحصول على مجموعة موجبة $C\subset F$ بحيث $0<\nu(C)<\infty$. إذن $C\cup A$ هي بدورها مجموعة موجبة تحقق $\nu(C\cup A)>\alpha$، وهذا يتناقض مع تعريف α.■

ملاحظة 14.11: نشير إلى أنّ تفكيك هان ليس وحيدًا. بالفعل، إذا كان (A,B) تفكيكًا لــ E، حيث A مجموعة موجبة و B مجموعة سالبة، و $C\in\Sigma$، بحيث $\nu(C)=0$، فإنّ $(A\cup C, B\setminus C)$ هو كذلك تفكيك لــ E. يمكننا إضافة إلى A أية مجموعة C ذات مجموعات جزئية ν-مهملة.

في الواقع، يمثّل كلّ زوج (A',B') من المجموعات القابلة للقياس تفكيك هان لــ E إذا تحقق الاستلزام التالي:

$$C\subset(A\Delta A')\cup(B\Delta B'),\ \text{حيث}\ C\in\Sigma،\ \text{يستلزم أنّ}\ \nu(C)=0.$$

مبرهنة 15.11: ليكن (A_1,B_1) و (A_2,B_2) تفكيكي هان لــ E، عندئـذ $\nu(B\cap A_1)=\nu(B\cap A_2)$ و $\nu(B\cap B_1)=\nu(B\cap B_2)$، من أجل كلّ

$B \in \Sigma$.

إثبات: لدينا $\nu(B \cap A_1 \cap B_2) \geq 0$ لأنّ $B \cap A_1 \cap B_2 \subset A_1$،
و $\nu(B \cap A_1 \cap B_2) \leq 0$ لأنّ $E \cap A_1 \cap B_2 \subset B_2$، نستنتج فوراً أنّ $\nu(B \cap A_1 \cap B_2) = 0$ ، ومنه

$$\begin{aligned}\nu(B \cap A_1) = \nu(B \cap A_1 \cap E) &= \nu\big(B \cap A_1 \cap (A_2 \cup B_2)\big)\\ &= \nu(B \cap A_1 \cap A_2) + \nu(B \cap A_1 \cap B_2)\\ &= \nu(B \cap A_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

وبنفس الكيفية نحصل على $\nu(B \cap A_2) = \nu(B \cap A_2 \cap A_1)$،
وبالتالي $\nu(B \cap A_1) = \nu(B \cap A_2)$. نبيّن العلاقة المتبقية بنفس الطريقة.■

3- تفكيك جوردان

لقد فككنا فيما سبق E إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين قابلتين للقياس إحداهما موجبة والثانية سالبة. من المعلوم أنّ فرق قياسين موجبين (إذا كان أحدهما منتهيًا) هو قياس مؤشّر، والسؤال الطبيعي الذي قد يطرحه كلّ قارئ هو: هل باستطاعتنا كتابة كلّ قياس مؤشّر على هذا الشكل؟
والجواب عن هذا التساؤل تحمله مبرهنة **جوردان** لتفكيك قياس مؤشر التي سوف نتطرّق إليها لاحقًا.

ليكن ν قياسًا مؤشرًا على (E,Σ).

تعريف 16.11: ليكن (A,B) تفكيك هان لـ E. نسمّي تغـيّرًا موجبًا (سالبًا، كليًّا، على الترتيب) للقياس ν الدالة $\nu^+ : \Sigma \to [0,+\infty]$ ($\nu^- : \Sigma \to [0,+\infty]$، $|\nu| : \Sigma \to [0,+\infty]$، على الترتيب) المعرّفة بـ $\nu^+(C) = \nu(A \cap C)$ ($\nu^-(C) = -\nu(B \cap C)$، $|\nu|(C) = \nu^+(C) + \nu^-(C)$، عـلى الترتيب)، $(\forall C \in \Sigma)$.

ملاحظة 17.11: أ) لاحظ أنّ ν^+، ν^- و $|\nu|$ قياسات موجبة على Σ.

ب) بما أنّ A و B منفصلتان، فإنّ

$$\nu(C)=\nu(A\cap C)+\nu(B\cap C)=\nu^{+}(C)-\nu^{-}(C)\text{ ، }(\forall C\in\Sigma)\text{ ،}$$

تسمّى هذه الكتابة **بتفكيك جوردان للقياس المؤشر** ν.

ج) لدينا

$$\nu^{+}(B)=\nu(B\cap A)=0=-\nu(B\cap A)=\nu^{-}(A)\text{ ،}$$

وهذا ما يقودنا إلى التعريف التالي:

تعريف 18.11: نقول عن قياسين ν_1 و ν_2 إنّهما شاذّان تناظرياً أو أجنبيان إذا وُجِد تفكيك (A,B) لـ E بحيث $|\nu_1|(A)=|\nu_2|(B)=0$.

نرمز لهذه الخاصيّة بـ $\nu_1\perp\nu_2$.

ملاحظة 19.11: لدينا من أجل كلّ قياس مؤشّر ν الخاصية $\nu^{+}\perp\nu^{-}$، ونرى من التعريف **18.11** أنّ $\nu_1\perp\nu_2$ إذا وإذا فقط كان $\nu_2\perp\nu_1$.

مثال 20.11: نعتبر على الفضاء القابل للقياس $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ القياسين m (قياس لوبيغ) وقياس ديراك δ_0 عند $x_0=0$ المعرّف بـ

$$\delta_0(A)=\begin{cases}1, & 0\in A\\ 0, & 0\notin A\end{cases}\text{ ، }(\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))\,.$$

من السهل التأكد من أنّ $m\perp\delta_0$.

مثال 21.11: نعتبر على الفضاء القابل للقياس $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ القياسين m (قياس لوبيغ) والقياس ν المعرّف كالآتي:

$\nu(A)=Card(A\cap\mathbb{Z})$، إذا كانت $A\cap\mathbb{Z}$ منتهية، و $\nu(A)=\infty$، إذا كانت $A\cap\mathbb{Z}$ غير منتهية، ($\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة).

لدينا $m(\mathbb{Z})=0$ و $\nu(\mathbb{Z}^{c})=0$، أي أنّ $m\perp\nu$.

مثال 22.11: نعتبر على الفضاء القابل للقياس $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ القياسين μ و ν المعرّفين بـ

$\mu(A)=m(]-\infty,0]\cap A)$ ، (m قياس لوبيغ)،

و $\nu(A)=\int_{A\cap]0,\infty[}e^{-x}dm$ ، $(\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

لدينا $\mu(]0,\infty[)=0$ و $\nu(]-\infty,0])=0$ ، ومنه $\mu\perp\nu$.

مبرهنة 23.11 [تفكيك جوردان]: ليكن ν قياسًا مؤشرًا على (E,Σ). يوجد تفكيك وحيد لـــ ν ، $\nu=\nu^+-\nu^-$ ، حيث ν^+ و ν^- قياسان موجبان شاذّان تناظريّا.

إثبات: ليكن (A,B) تفكيك هان لـــ E. لقد رأينا أعلاه أنّ الدالّتين ν^+ و ν^- المعرّفتين بـــ

$$\nu^+(C)=\nu(A\cap C)\text{ ، }\nu^-(C)=-\nu(B\cap C)\text{ ، }(\forall C\in\Sigma)\text{ ، }\quad(\#)$$

قياسان موجبان بحيث $\nu^+\perp\nu^-$.

يبقى فقط إثبات وحدانية هذا التفكيك. لنفرض وجود تفكيك آخر (μ,λ) لـــ ν ، بحيث $\nu=\mu-\lambda$ و $\mu\perp\lambda$. لدينا إذن $\lambda(A)=\mu(B)=0$.

ليكن $C\subset A$ قابل للقياس، عندئذ

$$\nu(C)=\mu(C)-\lambda(C)=\mu(C)\geq 0\text{ ،}$$

ومنه A مجموعة موجبة. لدينا من جهة أخرى، من أجل كلّ مجموعة جزئية قابلة للقياس $D\subset B$ ما يلي

$$\nu(B)=\mu(B)-\lambda(B)=-\lambda(B)\leq 0$$

ومنه B مجموعة سالبة.

لدينا لكلّ $C\in\Sigma$ ما يلي

$$\mu(C)=\mu(C\cap A)=\nu(C\cap A)=\nu^+(C)$$

$$\text{و }\lambda(C)=\lambda(C\cap B)=-\nu(C\cap B)=\nu^-(C)$$

وهكذا فإنّ كلّ تفكيك لـــ ν له نفس الصيغة المعطاة في التعريف 16.11.

نفرض الآن أنّ (A',B') و (A'',B'') تفكيكان هان لـــ E ، $\nu=\mu_1-\lambda_1$ (وفق (A',B')) و $\nu=\mu_2-\lambda_2$ (وفق (A'',B'')). نستنتج من المبرهنة 15.11 أنّ

$$\nu(C\cap A')=\nu(C\cap A'')\text{ و }\nu(C\cap B')=\nu(C\cap B'')\text{ ، }\forall C\in\Sigma\text{ ،}$$

وهذا يعني أنّ $\lambda_1=\lambda_2$ وَ $\mu_1=\mu_2$ ، ومنه وحدانية التفكيك.■

مثال 24.11: ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ دالة قابلة للقياس بحيث $\int_E f^+d\mu<\infty$ أو $\int_E f^-d\mu<\infty$. نعرّف القياس المؤشر $\nu(C)=\int_C fd\mu$ ، $(\forall C\in\Sigma)$. لدينا

$\nu^+(C)=\int_C f^+d\mu$ ، $\nu^-(C)=\int_C f^-d\mu$ و $|\nu|(C)=\int_C|f|d\mu$ ، $(\forall C\in\Sigma)$.

بتعريف المجموعتين $A=\{x:f(x)\geq 0\}$ و $B=A^c$ نحصل على تفكيك هان (A,B) لــ E وعلى تفكيك جوردان (ν^+,ν^-) للقياس ν.

ملاحظة 25.11: بالإضافة إلى وحدانية تفكيك جوردان (ν^+,ν^-) فإنّ هذا الأخير ليس مرتبطًا بتفكيك هان المرفق بالقياس المؤشّر ν.

ملاحظة 26.11: إذا كان القياس ν منتهيًا فإنّ

$$\nu^+=\tfrac{1}{2}(|\nu|+\nu) \quad \text{و} \quad \nu^-=\tfrac{1}{2}(|\nu|-\nu).$$

وإذا كان ν قياسًا مركّبًا فإنّ

$$\nu(C)=\nu_1^+(C)-\nu_1^-(C)+i\nu_2^+(C)-i\nu_2^-(C) \text{ ، } (\forall C\in\Sigma) \text{ ،}$$

سنحصل بفضل القضيّة التالية على صيغة للتغيّر الكلي لقياس مؤشّر شبيهة بتعريف التغيّر الكلي عند الدوال ألا وهي:

قضيّة 27.11: لدينا من أجل كلّ $C\in\Sigma$ ،

$$|\nu|(C)=sup\left\{\sum_{k=1}^{n}|\nu(C_k)| : \bigcup_{k=1}^{n}C_k=C,\{C_k\}_{k=1}^{n}\subset\Sigma, \right.$$
$$\left. \{C_k\}_{k=1}^{n} \text{ (منفصلة مثنى مثنى)} \right\}.$$

إثبات: نرمز بـ ω للطرف الأيمن من المساواة السابقة. لدينا بالتعريف

$$|\nu|(C)=\nu^{+}(C)+\nu^{-}(C)=|\nu(A\cap C)|+|\nu(B\cap C)|\leq\omega$$ ،
$(\forall C\in\Sigma)$ ،

حيث (A,B) تفكيك هان لــ E. من جهة أخرى، إذا كان $\bigcup_{k=1}^{n} C_k=C$ ، $\{C_k\}_{k=1}^{n}\subset\Sigma$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى، فإنّ

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}|\nu(C_k)| &= \sum_{k=1}^{n}|\nu^{+}(C_k)-\nu^{-}(C_k)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\nu^{+}(C_k)+\nu^{-}(C_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n}|\nu|(C_k)=|\nu|(C)\end{aligned}$$

وبأخذ الحد الأعلى على $\{C_k\}_{k=1}^{n}\subset\Sigma$ نحصل على المتباينة العكسيّة $\omega\leq|\nu|(C)$، ومنه المساواة المطلوبة.■

ملاحظة 28.11: نشير إلى أنّ التغيّر الكلّي $|\nu|$ هو قياس موجب على (E,Σ). من جهة أخرى، لا يمكن استعمال التعريف **16.11** لتعريف التغيّر الكلي لقياس مركّب ν بل نستعمل الحالة المركّبة للمساواة المذكورة في القضيّة **27.11** مع مراعاة تفكيك جوردان لــ ν المذكور في الملاحظة **26.11**.

تعريف 29.11: **ليكن μ و ν قياسين مؤشّرين على (E,Σ). نقول عن ν إنّه مطلق الاتصال بالنسبة إلى μ إذا صحّ الاستلزام التالي:**

$$(A\in\Sigma,\ |\mu|(A)=0)\Rightarrow\nu(A)=0.$$

نشير لهذه الخاصيّة بِ $\nu<<\mu$.

نقول عن μ و ν إنّهما متكافئان إذا حقّقا $\nu<<\mu$ و $\mu<<\nu$.

يمكننا التعبير على الاتّصال المطلق لقياسين مؤشّرين باستعمال الرمزين ε و δ كما هو الشأن في مبرهنة الاتّصال المطلق لتكامل لوبيغ (المبرهنة **41.6**).

قضية 30.11: ليكن μ و ν قياسين مؤشّرين. نفرض أنّ من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث

$\left(\forall C \in \Sigma, |\mu(C)| < \delta\right)$ يستلزم أنّ $|\nu|(C) < \varepsilon$،

عندئذ $\nu << \mu$.

إثبات: من أجل كلّ $\varepsilon = \frac{1}{n}$ يوجد $\delta_n > 0$ بحيث $\left(C \in \Sigma, |\mu(C)| < \delta_n\right)$ يستلزم أنّ $|\nu|(C) < \frac{1}{n}$. لتكن $C \in \Sigma$ بحيث $|\mu|(C) = 0$، عندئذ $|\mu|(C) = 0 < \delta_n$، وبالتالي $|\nu|(C) < \frac{1}{n}$. نستخلص من كون n اختياريّا أنّ $|\nu|(C) = 0$. إذن $\nu << \mu$.■

على العموم القضيّة العكسية غير صحيحة كما يتّضح في المثال التالي:

مثال 31.11: ليكن μ_c قياس العدّ على $\left(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)\right)$. نعرّف على $\left(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)\right)$ القياس الموجب μ بـ $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{n^2},\ A \subset \mathbb{N}^*$، مع مراعاة الاصطلاح $\sum_{n \in \varnothing} \frac{1}{n^2} = 0$.

يؤدّي الاستعمال المباشر للتعريف إلى أنّ $\mu_c << \mu$.

نفرض من جهة أخرى أنّ لكلّ $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $\left(A \in \Sigma, \mu(A) < \delta\right)$ يستلزم $\mu_c(A) < \varepsilon$. بما أنّ سلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ متقاربة فإنّه يوجد $N \geq 1$ بحيث $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \delta$. من الواضح أنّ المجموعة $A = \{N, N+1, \ldots\}$ تحقق $\mu(A) < \delta$ بينما $\mu_c(A) = +\infty$، وهذا تناقض.

ملاحظة 32.11: علينا توخي الحذر عند استعمال مفهوم الاتّصال المطلق حيث ينصّ التعريف على أنّه إذا انعدم التغيّر الكلّي $|\mu|$ من أجل مجموعة جزئية قابلة للقياس A فإنّ $\nu(A) = 0$، غير أنّ انعدام μ من

أجل مجموعة جزئية قابلة للقياس A لا يستلزم على العموم أنّ $\nu(A)=0$ كما يتبّن في المثال التالي:

نعرّف على الفضاء $([0,2],\mathcal{B}([0,2]))$ القياسين المؤشرين $\mu(A)=2m(A\cap[0,1])-m(A)$ و $\nu(A)=\int_A x\,dm$، $(A\in\mathcal{B}([0,2]))$، حيث m قياس لوبيغ.

من السهل التأكّد من أنّ $\nu<<\mu$، غير أنّ $\mu(A)=0$ لا يستلزم بالضرورة أنّ $\nu(A)=0$، خذ على سبيل المثال $A=[0,2]$، لدينا $\mu(A)=0$ بينما $\nu(A)=\int_0^2 x\,dx=2\neq 0$.

تضمن القضيّة التالية تكافؤ قياسين مؤشّرين عندما يكون ν منتهيًا، لدينا

قضية 33.11: **ليكن μ و ν قياسين مؤشّرين بحيث ν منته و $\nu<<\mu$، عندئذ μ و ν يحققان ما يلي:**
لكلّ $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $(A\in\Sigma,|\mu|(A)<\delta)$ يستلزم $|\nu|(A)<\varepsilon$.

إثبات: سوف نستدلّ بالتناقض. لنفرض العكس أي أنّه يوجد $\varepsilon>0$ بحيث من أجل كلّ $n\geq 1$ يوجد $E_n\in\Sigma$ بحيث $|\mu|(E_n)<\frac{1}{2^n}$، وأنّ $|\nu|(E_n)>\varepsilon$. عندئذ، $\lim\limits_{n\to\infty}|\mu|(E_n)=0$.
نعرّف الآن

$$A_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k \text{ و } A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}E_n.$$

من السهل التحقّق من أنّ $A\in\Sigma$ و $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$، وأنّ هذه الأخيرة متتالية متناقصة. لدينا كذلك

$$|\mu|(A_n)\leq\sum_{k=n}^{\infty}|\mu|(E_k)\leq\frac{1}{2^{n-1}},\quad(\forall n\geq 1),$$

وهذا يقتضي أن يكون $|\mu|(A)=0$. علاوة على هذا فإنّ $|\nu|$ منته لكون

ν منتهيًا. إذن

$$|\nu|(A)=\lim_{n\to\infty}|\nu|(A_n)\geq \lim_{n\to\infty}|\nu|(E_n)\geq\varepsilon$$ ،

وهذا يتناقض مع الفرضيّة $\nu<<\mu$.■

4- مبرهنة رادون-نيكوديم

لقد رأينا من قبل كيف نعرّف قياسًا موجبًا على (E,Σ,μ) باستعمال أي دالة موجبة وقابلة للقياس وذلك بوضع $\nu(A)=\int_A fd\mu$ ، $(A\in\Sigma)$. لاحظ كذلك أنّ $\mu(A)=0$ يستلزم أنّ $\nu(A)=0$، أي أنّ $\nu<<\mu$.

من الإنشغالات الرئيسة التي سنهتمّ بها في هذا المقطع هي الإجابة على السؤال التالي: متى يُكتب قياس مؤشّر ν على الشكل

$$\nu(A)=\int_A fd\mu ,\quad (A\in\Sigma)$$ ،

من أجل دالة معيّنة قابلة للقياس f؟

سنرى لاحقا أنّ الشرط الكافي لصحّة هذه التعبير هو الاتصال المطلق للقياس ν كما سيتّضح من خلال مبرهنة رادون[2]-نيكوديم[3] [Radon-Nikodym] **35.11**.

تنصُّ مبرهنة رادون-نيكوديم التالية والتي نحن بصدد تقديمها وإثباتها على أنّه إذا كان ν و μ قياسين σ-منتهيين بحيث يكون الأول مطلق الاتّصال بالنسبة إلى الثاني، عندئذ يكتب القياس ν كتكامل لدالة قابلة للقياس f وفق القياس μ. نذكر أنّ لهذه المبرهنة أهمّية بالغة في الرياضيات المالية والعديد من النّظريّات الأخرى.

سوف نثبّت أولاً هذه المبرهنة من أجل قياسات موجبة منتهية، لدينا

---

[2]) جوهان اوغيست رادون [Johann Karl August Radon] (1887-1956)

[3]) اوطون مارسن نيكوديم [Otton Marcin Nikodym] (1887-1974)

مبرهنة 34.11 [رادون – نيكوديم]: ليكن μ و ν قياسين موجبين ومنتهيين على (E,Σ) بحيث $\nu << \mu$. عندئذ توجد دالة قابلة للقياس، منتهية، موجبة ووحيدة تقريبًا حيثما كانت f تحقق

$$\nu(A)=\int_A f d\mu \text{ ،} \quad (\forall A\in\Sigma).$$

إثبات: لتكن $\mathcal{H}$ مجموعة كلّ الدوال الموجبة القابلة للقياس f الـتي تحقق $\int_A f d\mu \le \nu(A)$ ، لكلّ $A\in\Sigma$. إنّ المجموعة $\mathcal{H}$ غير خالية لأنّ $f\equiv 0\in\mathcal{H}$.

نضع $M=\sup\left\{\int_E f d\mu : f\in\mathcal{H}\right\}$. نعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{H}$ التي تحقق $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu=M$ ، وليكن $g_n=\max(f_1,f_2,\dots,f_n)$ (لاحظ أنّ المتتالية $\{g_n\}_{n\ge 1}$ متزايدة). تقبل كلّ مجموعة جزئية $A\in\Sigma$ تجزئة $\{A_i\}_{i=1}^{n}\subset\Sigma$ بحيث $g_n=f_i$ على كلّ A_i ، $(i=1,\dots n)$. بالتأكيد، لنستدلّ بالاستقراء على n لإثبات هذه الخاصيّة. ليكن $g_2=\max(f_1,f_2)$ ، نضع

$$A_1=\{x\in A: f_1(x)\ge f_2(x)\} \text{ و } A_2=A\setminus A_1 .$$

من الواضح أنّ $A_1\cap A_2=\varnothing$ ، $A=A_1\cup A_2$ و $g_2=f_i$ على A_i ، $i=1,2$. نفرض الآن أنّ القضية صحيحة من أجل n ، وليكن $g_{n+1}=\max(g_n,f_{n+1})$ ، حيث $g_n=f_i$ على A_i ، من أجل $i=1,2,\dots,n$. بوضع $B_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ و $A_{n+1}=A\setminus B_n$ نستنتج ممّا سبق (أي من أجل $n=2$) أنّ $g_{n+1}=g_n$ على B_n و $g_{n+1}=f_{n+1}$ على A_{n+1}. إذن $\{A_i\}_{i=1}^{n+1}\subset\Sigma$ تجزئة لـــ A ، ولدينا $g_{n+1}=f_i$ على A_i ، من أجل $i=1,\dots,n+1$.

لندرس الآن المتتالية $\{g_n\}_{n\ge 1}$. لدينا

$$\int_A g_n d\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} g_n d\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_{A_i} f_i d\mu\le\sum_{i=1}^{n}\nu(A_i)=\nu(A) \text{ ،}$$
$$(\forall n\ge 1).$$

بوضع $\lim\limits_{n\to\infty} g_n=g$ نحصل بفضل مبرهنة التقارب الرتيب على

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_A g_n d\mu=\int_A g d\mu$ ،

وبالتالي فإنّ $\int_A g d\mu\le\nu(A)$. إذن $g\in\mathcal{H}$، ومن تعريف M نجد $\int_E g d\mu\le M$. نرى من جهة أخرى، من تعريف المتتالية $\{f_n\}_{n\ge1}$ والدالة g، أنّه لكلّ $\varepsilon>0$ توجد $f_n\in\mathcal{H}$ بحيث $\int_E f_n d\mu>M-\varepsilon$.
إذن $\int_E g d\mu>M-\varepsilon$ ، وبالتالي $\int_E g d\mu=M$.

بما أنّ ν قياس منته و $\int_E g d\mu\le\nu(E)$ فإنّ g قابلة للمكاملة، ومن ثمّ فإنّه منته تقريبًا أينما كان. لتكن الآن f دالة موجبة، منتهية وقابلة للقياس بحيث $f=g$ ، μ-تاك. نريد إثبات أنّ $\nu(A)=\int_A f d\mu$، لكلّ $A\in\Sigma$. من الواضح أنّ

$$\int_A f d\mu=\int_A g d\mu\le\nu(A) \text{ ، } (\forall A\in\Sigma).$$

لنفرض وجود $F\in\Sigma$ بحيث $\int_F f d\mu<\nu(F)$. ليكن $\varepsilon>0$ بحيث $\int_F f d\mu+\varepsilon<\nu(F)$ و $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{\mu(F)}$، عندئذ $\int_F (f+\varepsilon')d\mu<\nu(F)$.

لننظر الآن إلى $\nu'(A)=\nu(A)-\int_A (f+\varepsilon')d\mu$ كقياس مؤشّر على Σ . لدينا فوراً $\nu'(F)>0$.

توجد إذن بمقتضى التوطئة **12.11** مجموعة موجبة $C\in\Sigma$، $C\subset F$ بحيث $\nu'(C)>0$. لاحظ أنّ $\mu(C)>0$ لأنّ $\nu<<\mu$.

ليكن $h=f+\varepsilon'\chi_C$، لدينا لكلّ $A\in\Sigma$ ما يلي:

$$\int_A h d\mu=\int_{A\cap C}(f+\varepsilon')d\mu+\int_{A\cap C^c} f d\mu\le\nu(A\cap C)+\int_{A\cap C^c} f d\mu$$
$$\le\nu(A\cap C)+\nu\left(A\cap C^c\right)=\nu(A)$$

ومنه $h\in\mathcal{H}$. لدينا من ناحية أخرى

$$\int_E h d\mu=\int_C f d\mu+\int_C \varepsilon' d\mu+\int_{C^c} f d\mu$$
$$=\int_E f d\mu+\varepsilon'\mu(C)>\int_E f d\mu=M$$

وهذا يتناقض مع تعريف M . إذن $\int_A f d\mu=\nu(A)$ ، لكلّ $A\in\Sigma$.

بيان وحدانيّة الدالة f :

نفرض وجود دالة ثانية قابلة للقياس وموجبة g تحقق

$\int_A g d\mu = \nu(A)$ ، لكلّ $A \in \Sigma$ ،

عندئذ $\int_A (g-f) d\mu = 0$ ، لكلّ $A \in \Sigma$. نستنتج فوراً أنّ $f = g$ ، μ–تاك، وهو المطلوب.■

هذه الآن الصيغة الـــσ–منتهية لمبرهنة رادون–نيكوديم:

مبرهنة 35.11 [رادون–نيكوديم]: ليكن μ و ν قياسين مؤشّرين σ–منتهيين علــى (E,Σ) بحيث $\nu << \mu$. عندئذ توجد دالة قابلة للقياس f وحيدة تقريبًا حيثمًا كانت بحيث

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \text{ ،} \quad (\forall A \in \Sigma).$$

إثبات: لنفرض أولاً أنّ μ و ν **قياسان موجبان** σ–منتهيان، أي توجد متتاليتان $\{E_n\}_{n\geq 1}, \{F_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ بحيث $E = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ و $\mu(E_n) < \infty$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، $E = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ و $\nu(F_n) < \infty$ ، $(\forall n \geq 1)$. بدون المس بمبدأ التعميم نفرض أنّ المتتاليتين $\{E_n\}_{n\geq 1}$ و $\{F_n\}_{n\geq 1}$ ذوات عناصر منفصلة مثنى مثنى. لدينا إذن $E = \bigcup_{n,m=1}^{\infty} (E_n \cap F_m)$ ، وبإعادة تأشير العناصر $E_n \cap F_m$ نحصل على متتالية $\{G_k\}_{k\geq 1} \subset \Sigma$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى بحيث

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \text{ ،} \quad \mu(G_k) < \infty \text{ و } \nu(G_k) < \infty \text{ ،} \quad (\forall k \geq 1).$$

توجد حسب المبرهنة السابقة دوال موجبة قابلة للقياس f_k بحيث

$$\nu(A \cap G_k) = \int_{A\cap G_k} f_k d\mu \text{ ، لكلّ } A \in \Sigma.$$

نعرّف الدالة f بـــ $f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \chi_{G_k}$. نلاحظ فوراً أنّ f دالة قابلة للقياس، ولدينا لكلّ $A \in \Sigma$ ما يلي:

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A \cap G_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A\cap G_k} f_k d\mu = \int_A f d\mu.$$

لنفرض الآن أنّ ν قياس مؤشّر σ-منته. لدينا في هذه الحالة $\nu=\nu^{+}-\nu^{-}$، حيث ν^{+} و ν^{-} قياسان موجبان σ-منتهيان. يوجد ممّا سبق دالتان f_1 و f_2 موجبتان، منتهيتان وقابلتان للقياس بحيث تكون إحداهما على الأقل قابلة للجمع وتحققان

$$\nu^{+}(A)=\int_A f_1 d\mu \text{ و } \nu^{-}(A)=\int_A f_2 d\mu \text{ ، } (\forall A\in\Sigma)$$

بوضع $f=f_1-f_2$ نحصل على $\nu(A)=\int_A f d\mu$ ، $(\forall A\in\Sigma)$.

إذا كان μ قياسًا مؤشرًا σ-منتهيا فإنّ $\mu=\mu^{+}-\mu^{-}$ ، حيث μ^{+} و μ^{-} قياسان σ-منتهيان. نرى من خلال التمرين 02 أنّ μ^{+} و μ^{-} σ-منتهيين.

ليكن (A,B) تفكيك هان وفق القياس μ. لدينا إذن

$$\mu^{+}(C)=\mu(C\cap A) \text{ و } \mu^{-}(C)=-\mu(C\cap B) \text{ ، } (\forall C\in\Sigma)\text{،}$$

وبالتالي $\nu<<\mu^{+}$ و $\nu<<\mu^{-}$ على A و B، على الترتيب. يسمح لنا هذا بتطبيق ما تقدّم على A و B الحصول على دالتين قابلتين للقياس f_1 و f_2 بحيث

$$\nu(C\cap A)=\int_{C\cap A} f_1 d\mu^{+} \text{ و } \nu(C\cap B)=\int_{C\cap B} f_2 d\mu^{-} \text{ ، } (\forall C\in\Sigma).$$

من الواضح أنّ الدالة $f=f_1\chi_A-f_2\chi_B$ قابلة للقياس وتحقق $\nu(C)=\int_C f d\mu$ ، $(\forall C\in\Sigma)$.

نلاحظ أنّ الطرف الأيمن معرّف تعريفاً جيّدًا لكون ν قياسًا مؤشرًا.

أخيرًا، من السهل التأكد من أنّ كلّ دالتين f و g تحقّقان هذه العلاقة هما متساويتان μ^{+} و μ^{-}-تاك، وبالتالي متساويتان μ-تاك، وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة.■

تعريف 36.11: نسمّى الدالة f في مبرهنة رادون–نيكوديم بمشتقّة ν بالنّسبة إلى μ بمفهوم رادون–نيكوديم، ونرمز لها بـــ

$$f=\frac{d\nu}{d\mu} \text{ أو } d\nu=fd\mu.$$

هذه المشتقة وحيدة تقريبًا حيثما كانت، ولها خواص مشابهة للمشتقة العاديّة للدّوال الحقيقية كخاصيّة الخطيّة وخواص الإشتقاق المعروفة (راجع التمارين المقترحة). تمثّل f في نظريّة الإحصاء كثافة ν بالنّسبة للقياس μ. إذا كان μ قياس لوبيغ فنسمّي f **بدالّة الكثافة**، وعندما يكون μ قياس العدّ على مجموعة قابلة للعد فنسمّي حينئذ f **بدالّة التردّد** *(frequency function)* أو **دالّة الكتلة** *(mass function)* (لاحظ أنّ قياس العدّ على $\mathcal{P}(E)$ يكون σ-منتهيا إذا وإذا فقط كانت E قابلة للعد).

ملاحظة 37.11: عمومًا الدالة f ليست قابلة للمكاملة، وفي حالة محدودية القياس ν و $f \geq 0$ تصبح f قابلة للمكاملة. سوف نرى لاحقًا أنّه لا يمكن لنا التخلي عن فرضيّة الـσ-انتهاء للحصول على خلاصة المبرهنة.

مثال 38.11: ليكن m قياس لوبيغ على $([0,1],\mathcal{B}[0,1])$ و μ_c قياس العدّ على نفس الفضاء. بما أنّ $[0,1]$ ليس اتحادًا قابلاً للعد لمجموعات منتهية فإنّ μ_c ليس σ-منتهيًا. لدينا $\mu_c(A)=0$ فقط عندما $A=\varnothing$، ومنه $m << \mu_c$.

لنفرض جدلا صحّة مبرهنة رادون-نيكوديم، توجد إذن دالة قابلة للقياس f بحيث $m(A)=\int_A f d\mu_c$، لكلّ $A \in \mathcal{B}([0,1])$. وبالخصوص فإنّ $f(a)=\int_{\{a\}} f d\mu_c = m(\{a\})=0$، $(\forall a \in [0,1])$، ومنه $f \equiv 0$.
إذن، $m(A)=0$، لكلّ $A \in \mathcal{B}([0,1])$، وهذا تناقض.

مثال 39.11: نعتبر الفضاء القابل للقياس $(E,\mathcal{P}(E))$، حيث $E=\{0,1\}$ ونعرّف على $(E,\mathcal{P}(E))$ القياسين μ و ν كالآتي

$$\mu(\{0\})=1 \text{، } \mu(\{1\})=+\infty \text{، } \nu(\{0\})=1 \text{ و } \nu(\{1\})=1 \text{،}$$
$$\mu(\varnothing)=\nu(\varnothing)=0 .$$

لدينا إذن $\mu << \nu$ و $\nu << \mu$، أي μ و ν متكافئان. من الواضح أنّ ν قياس منته وأنّ μ ليس قياسا σ-منتهيا. لنفرض وجود دالة قابلة

للقياس f تحقق $\nu(A)=\int_A fd\mu$، لكلّ $A\in\mathcal{P}(E)$. بأخذ $A=\{1\}$ نجد

$$\nu(\{1\})=\int_{\{1\}} fd\mu=f(1).\infty\neq 1،$$

وهذا تناقض. كذلك من السهل التأكد أنّه لا توجد دالة قابلة للقياس تحقق $\mu(A)=\int_A fd\nu$، لكلّ $A\in\mathcal{P}(E)$.

يثبت المثال التالي أنّ وحدانيّة مشتقة رادون-نيكوديم (تقريبًا أينما كان) ليست صحيحة إذا أسقطنا شرط الـσ-انتهاء لدى μ.

مثال 40.11 : لتكن $\Sigma=\{\varnothing,E\}$ و μ معرّفا بـ
$\mu(\varnothing)=0$ و $\mu(E)=+\infty$.

لاحظ أنّ μ ليس σ-منتهيا وأنّ كلّ دالة ثابتة $f=c>0$ هب عبارة عن مشتقة رادون-نيكوديم لـ ν بالنّسبة لـ μ. بالفعل، لدينا

$$\nu(\varnothing)=\int_\varnothing cd\mu=c\mu(\varnothing)=0 \text{ و } \nu(E)=\int_E cd\mu=c\mu(E)=+\infty.$$

نشير إلى أنّ هذه الدوال (الثابتة) ليست متساوية μ-تاك.

يتّضح من الأمثلة السابقة أنّ شرط الـσ-انتهاء هو شرط أساسيّ لوجود ووحدانيّة مشتقة رادون-نيكوديم ومع ذلك تبقى مبرهنة رادون-نيكوديم صحيحة في بعض الحالات عندما يكون القياسان μ و ν غير σ-منتهيين و f تأخذ قيمها في $\overline{\mathbb{R}}$. هذا ما سنكتشفه في المثال الآتي.

مثال 41.11: ليكن μ_c قياس العدّ على $([0,1],\mathcal{B}[0,1])$ و ν معرّفا كالآتي:

$$\nu(\varnothing)=0 \text{ و } \nu(A)=+\infty،\ \varnothing\neq A\in\mathcal{B}([0,1]).$$

من السهل التأكد من أنّ μ_c و ν ليسا σ-منتهيين ولدينا $\nu<<\mu_c$.
لاحظ أنّ $f\equiv\infty$ تمثّل مشتقة رادون-نيكوديم لـ ν بالنّسبة لـ μ_c.

ملاحظة 42.11: إنّ كتابة ν كتكامل لدالة قابلة للقياس f بالنّسبة للقياس

μ هي حالة خاصّة للمتطابقة $\int_E g d\nu = \int_E g f d\mu$ ، لكلّ $g \in L^1(E)$
(راجع التمرين 12 من الفصل السادس)

5 - تفكيك لوبيغ

سوف نتطرّق في هذا المقطع إلى تفكيك لوبيغ الذي يقرّ بإمكانية تطبيق مبرهنة رادون-نيكوديم على "جزء" من قياس مؤشّر ν في حالة عدم توفّر الشرط $\nu << \mu$.

مبرهنة 43.11 [تفكيك لوبيغ]: ليكن μ قياسًا موجبًا σ-منتهيًا على (E,Σ) و ν قياسًا مؤشرًا σ-منتهيًا. يوجد زوج وحيد متكوّن من قياسين مؤشّرين (ν_1,ν_2) بحيث

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \text{ مع } \nu_1 << \mu \text{ و } \nu_2 \perp \mu.$$

إثبات: نفرض أوّلًا أنّ ν قياس موجب و σ-منته، إذن $\mu+\nu$ قياس σ-منته وأنّ $\mu << \mu+\nu$. توجد حسب مبرهنة رادون-نيكوديم دالة موجبة وقابلة للقياس f تحقق $\mu(A) = \int_A f d\mu + \int_A f d\nu$ ، لكلّ $A \in \Sigma$. نعرّف المجموعتين

$$A = \{x : f(x) = 0\} \text{ ، } B = \{x : f(x) > 0\} \text{ ،}$$

والقياسين الموجبين

$$\nu_1(C) = \nu(C \cap B) \text{ و } \nu_2(C) = \nu(C \cap A) \text{ ، } (\forall C \in \Sigma).$$

بما أنّ $E = A \cup B$ مع $A \cap B = \varnothing$ ، عندئذ $\nu = \nu_1 + \nu_2$. لدينا كذلك

$$\mu(A) = \int_A f d\mu + \int_A f d\nu = 0 \text{ و } \nu_2(B) = \nu(B \cap A) = \nu(\varnothing) = 0 \text{ ،}$$

ومنه $\nu_2 \perp \mu$. لنثبت الآن أنّ $\nu_1 << \mu$. ليكن $C \in \Sigma$ بحيث $\mu(C) = 0$ ، عندئذ

$$\int_{C\cap B} f d\mu + \int_{C\cap B} f d\nu = 0 \text{ و } \mu(C \cap B) + \nu(C \cap B) = 0 \text{ ،}$$

نستنتج فوراً أنّ $\nu_1(C)=\nu(C\cap B)=0$.

إثبات وحدانيّة التفكيك: نفرض وجود تفكيكين $\nu=\nu_1+\nu_2=\lambda_1+\lambda_2$ بحيث

$\nu_1\ll\mu$، $\lambda_1\ll\mu$، $\nu_2\perp\mu$ و $\lambda_2\perp\mu$.

ليكن $C\in\Sigma$ بحيث $\mu(C)=0$ و $\nu_2\left(C^c\right)=0$ و $D\in\Sigma$ بحيث $\mu(D)=0$ و $\lambda_2\left(D^c\right)=0$. لدينا من أجل كلّ $S\in\Sigma$،

$$\nu_2(S)=\nu_2\big(S\cap(C\cup D)\big)+\nu_2\left(S\cap(C\cup D)^c\right)$$

مع التذكير أنّ

$S\cap(C\cup D)\subset C\cup D$، $\nu_1\ll\mu$ و $\lambda_1\ll\mu$،

فإنّنا نحصل على $\mu\big(S\cap(C\cup D)\big)=0$، وبالتالي

$\nu_1\big(S\cap(C\cup D)\big)=\lambda_1\big(S\cap(C\cup D)\big)=0$.

إذن

$$\nu\big(S\cap(C\cup D)\big)=\nu_2\big(S\cap(C\cup D)\big)=\lambda_2\big(S\cap(C\cup D)\big)،$$

مع العلم $\nu_2\left(S\cap\left(C^c\cap D^c\right)\right)\le\nu_2\left(C^c\right)=0$.

لدينا كذلك $\lambda_2\left(S\cap\left(C^c\cap D^c\right)\right)=0$. نرى ممّا سبق أنّ

$$\nu_2(S)=\lambda_2\big(S\cap(C\cup D)\big)+\lambda_2\left(S\cap\left(C\cup D^c\right)\right)=\lambda_2(S)$$

لكلّ $S\in\Sigma$، ولدينا من جهة أخرى $\nu_1(S)=\lambda_1(S)$، لكلّ $S\in\Sigma$.

نحصل على نفس النتيجة في الحالة العامّة عندما يكون ν قياسًا مؤشرًا σ-منتهيا وذلك باستعمال التفكيك $\nu=\nu^+-\nu^-$، وهو المطلوب.■

ترميز: يُرمز في بعض المؤلفات لتفكيك لوبيغ للقياس ν بـ(ν_a,ν_s)

حيث يمثّل ν_a (أي ν_1) القياس مطلق الاتّصال بالنسبة إلى μ (المؤشر a هو أول حرف من *absolutely continuous*) وَ ν_s (أي ν_2) القياس الشاذ **تناظريًا** مع μ (المؤشر s هو أول حرف من *singular*).

ملاحظة 44.11: تبقى مبرهنة **التفكيك** (لوبيغ) صحيحة من أجل قياس مركّب ν، فيكفي الرجوع إلى القياسات الحقيقيّة لتفكيك الجزء الصحيح والجزء التخيّلي لهذا القياس.

مثال 45.11: ليكن $E=\mathbb{R}$ و $\mu:\mathcal{L}\to[0,+\infty]$ معرّفا بـــ

$$\mu(A)=m(A\cap[0,2]),\ (\forall A\in\mathcal{L})،$$

و ν معرّفا بـــ

$$\nu(A)=m(A\cap[1,3]),\ (\forall A\in\mathcal{L}).$$

لدينا

$$\nu(A)=m(A\cap[1,2])+m(A\cap[2,3])،$$

وبوضع $\nu_a(A)=m(A\cap[1,2])$ و $\nu_s(A)=m(A\cap[2,3])$، نرى أنّ $\nu=\nu_a+\nu_s$.

بما أنّ $\nu_s([0,2])=\mu([0,2]^c)=0$ مع الملاحظة أنّ $([0,2],[0,2]^c)$ تفكيك هان لـــ $\mathbb{R}$، عندئذ $\nu_s\perp\mu$. من جهة أخرى، من السهل التأكّد من أنّ $\nu_a<<\mu$، وعليه فإنّ (ν_a,ν_s) هو **تفكيك لوبيغ للقياس** ν.

يبيّن المثال التالي أنّه لا يمكننا الاستغناء على فرضيّة الـــ σ-انتهاء.

مثال 46.11: نعتبر قياس لوبيغ m وقياس العدّ μ_c على $([0,1],\mathcal{B}[0,1])$، مع الملاحظة أنّ هذا الأخير ليس σ-منتهيًا. نفرض أنّ $\mu_c=\mu_a+\mu_s$، حيث $\mu_a<<m$ و $\mu_s\perp m$. يوجد إذن تفكيك (A,B) لـــ$[0,1]$ بحيث $m(A)=0$ و $|\mu_s|(B)=0$.

ليكن $x\in B$، عندئذ $\mu_s(\{x\})=0$، وبما أنّ $\mu_a(\{x\})=0$ (لأنّ $m(\{x\})=0$)، فهذا يستلزم أنّ

$$\mu_c(\{x\})=1=\mu_a(\{x\})+\mu_s(\{x\})=0،$$

وهذا تناقض.

6- التكامل بالنّسبة لقياس مؤشّرٍ أو مركّب

تعميما لتعريف التكامل بالنّسبة إلى قياس موجب سوف نعرّف فيما يلي التكامل بالنّسبة إلى قياس مؤشّر وكذلك التكامل بالنّسبة إلى قياس مركّب.

تعريف 47.11: ليكن μ قياسًا مؤشرًا و $f : E \to \mathbb{R}$ دالة حقيقيّة بحيث $f \in \mathcal{L}^1\left(E,\Sigma,\mu^+\right)$ و $f \in \mathcal{L}^1\left(E,\Sigma,\mu^-\right)$. نعرّف تكامل f على مجموعة جزئية $A \in \Sigma$ وفق القياس μ بـ

$$\int_A f d\mu = \int_A f d\mu^+ - \int_A f d\mu^- .$$

(بطبيعة الحال يمكننا التخلي عن فرضية القابليّة للمكاملة لدى الدالة f إذا تجنّبنا حالات عدم التعيين $\pm\infty \mp\infty$)

تعريف 48.11: ليكن $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ قياسًا مركّبًا و $f : E \to \mathbb{R}$ دالة حقيقيّة بحيث $f \in \mathcal{L}^1\left(E,\Sigma,\mu_2^{\pm}\right)$ و $f \in \mathcal{L}^1\left(E,\Sigma,\mu_1^{\pm}\right)$. نعرّف تكامل f على مجموعة جزئية $A \in \Sigma$ وفق القياس المركّب μ بـ

$$\int_A f d\mu = \int_A f d\mu_1 + i\int_A f d\mu_2 .$$

يتّضح من خلال هذين التعريفين أنّ دراسة التكامل بالنّسبة إلى قياس مؤشّر، أو بالنّسبة إلى قياس مركّب، تعود أساسًا إلى دراسة القياسات الموجبة. من جهة أخرى، إذا كانت الدالة f مركّبة فيكفي كتابتها على الشكل $f = f_1 + if_2$ ثمّ نستعمل أحد التعريفين السابقين لحساب التكامل وفق القياس المؤشّر أو المركّب.

مسألة محلولة

ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس و $f \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$ بحيث يكون التكامل $\int_E f\,d\mu$ معرّفا تعريفا جيّدا.

1) أثبت أنّ الدالة $\mu_f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ المعرّفة بـ $\mu_f(A) = \int_A f\,d\mu$ ، $(\forall A \in \Sigma)$، قياس مؤشّر.

2) عيّن المجموعات الموجبة و السالبة وفق القياس المؤشّر μ_f.

3) أوجد تفكيك هان للمجموعة E وفق القياس المؤشّر μ_f.

4) إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ ، برهن على أنّ $|\mu_f| = \mu_{|f|}$.

الحل:

1) ينتج عن تعريف التكامل $\int_E f\,d\mu$ أنّ

$$\min\left(\int_E f^+\,d\mu, \int_E f^-\,d\mu\right) < \infty$$ ،

و منه فإنّ $\left|\mu_f(\Sigma) \cap \{-\infty,+\infty\}\right| \le 1$.

من الواضح أنّ $\mu_f(\varnothing) = \int_\varnothing f^+ d\mu - \int_\varnothing f^- d\mu = 0$. لتكن $\{A_n\}_{n\ge1} \subset \Sigma$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى، لدينا عندئذ حسب نتيجة لنظرية التقارب الرتيب:

$$\begin{aligned}\mu_f\left(\bigcup_{n\ge1} A_n\right) &= \int_{\bigcup_{n\ge1} A_n} f^+ d\mu - \int_{\bigcup_{n\ge1} A_n} f^- d\mu \\ &= \sum_{n\ge1} \int_{A_n} f^+ d\mu - \sum_{n\ge1} \int_{A_n} f^- d\mu \\ &= \sum_{n\ge1} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n\ge1} \mu_f(A_n)\end{aligned}$$

وهكذا فإنّ μ_f قياس مؤشّر على Σ.

2) نضع $E^+=\{x\in E: f(x)\geq 0\}$ و $E^-=\{x\in E: f(x)<0\}$.
تكون مجموعة $A\in\Sigma$ موجبة بالنسبة إلى μ_f إذا تَحققت $0\leq \mu_f(A\cap S)$، $(\forall S\in\Sigma)$. نحصل بالخصوص، عندما $S=E^-$، على

$$0\leq \mu_f\left(A\cap E^-\right)=\int_{A\cap E^-} f\,d\mu\leq 0،$$

وبالتالي فإنّ $\mu_f\left(A\cap E^-\right)=0$.

عكسيًّا، نفرض أنّ $\mu_f\left(A\cap E^-\right)=0$، عندئذ $\mu_f\left(A\cap S\cap E^-\right)=0$، $(\forall S\in\Sigma)$، وعليه فإنّ

$$\mu_f(A\cap S)=\mu_f\left(A\cap S\cap E^+\right)+\mu_f\left(A\cap S\cap E^-\right)$$
$$=\mu_f\left(A\cap S\cap E^+\right)=\int_{A\cap S\cap E^+} f\,d\mu\geq 0$$

$(\forall S\in\Sigma)$، وهذا يثبت أنّ A مجموعة موجبة بالنسبة إلى μ_f.

إذن ، الشرط اللازم والكافي لمجموعة $A\in\Sigma$ كي تكون موجبة بالنسبة إلى μ_f هو $\mu_f\left(A\cap E^-\right)=0$.
وبالكيفية ذاتها تكون مجموعة $B\in\Sigma$ سالبة بالنسبة إلى μ_f إذا وإذا فقط حققت $\mu_f\left(B\cap E^+\right)=0$.

3) نشير أوّلاً إلى أنّ المجموعتين E^+ و E^- قابلتان للقياس وتحققان:

$$E=E^+\cup E^-،\qquad E^+\cap E^-=\varnothing،$$

و منه $\mu_f\left(E^+\cap E^-\right)=0$.

إذن المجموعة E^+ (E^-، على الترتيب) موجبة (سالبة، على الترتيب) بالنسبة إلى القياس μ_f وذلك حسب الجزء السابق، وعليه فإنّ الزوج $\left(E^+,E^-\right)$ هو تفكيك هان للمجموعة E بالنسبة إلى القياس μ_f.

4) لدينا

$$\left|\mu_f(A)\right|=\left|\int_A f\,d\mu\right|\leq \int_A |f|\,d\mu=\mu_{|f|}(A)<\infty،\quad (\forall A\in\Sigma)،$$

لكون $f \in \mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$.

نعرّف تفكيك جوردن $\left(\mu_f^+,\mu_f^-\right)$ للقياس μ_f كالآتي:

$$\mu_f^+(A)=\mu_f\left(A\cap E^+\right)=\int_{A\cap E^+} f\,d\mu=\int_A f^+\,d\mu \text{ ،}$$
$$\mu_f^-(A)=-\mu_f\left(A\cap E^-\right)=-\int_{A\cap E^-} f\,d\mu=\int_A f^-\,d\mu \text{ ،}$$

$(\forall A\in\Sigma)$.

من الوضح أنّ

$$\left|\mu_f\right|(A)=\int_A f^+\,d\mu+\int_A f^-\,d\mu=\int_A\left(f^+ + f^-\right)d\mu$$
$$=\int_A|f|\,d\mu=\mu_{|f|}(A)$$

$(\forall A\in\Sigma)$، وهذا يثبت أنّ $\left|\mu_f\right|=\mu_{|f|}$.

تمارين مقترحة

01 ليكن ν قياسًا مؤشرًا على فضاء قابل للقياس (E,Σ). و $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى. أثبت أنّ

$$\nu\left(\bigcup_{n\geq 1}E_n\right)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\sum_{n\geq 1}\left|\nu\left(E_n\right)\right|<\infty .$$

02 ليكن (E,Σ,ν) فضاء قياس مؤشّرًا. أثبت أنّ القضايا التالية متكافئة

أ) ν قياس σ–منته.

ب) ν^+ و ν^- قياسان σ–منتهيان.

ج) $|\nu|$ قياس σ–منته.

03 أوجد مثالاً عن دالة تحقق خاصيّة التجميع المنتهي على جبر $\mathcal{A}$ بحيث لا يوجد تفكيك هان.

04 نعرف ν على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ كالآتي $\nu(A)=\sum_{n\in A} a_n$ حيث $\{a_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}$.

أ) أثبت أنّ ν قياس مؤشّر إذا وإذا فقط كانت السلسلة $\sum_{n\geq 1} a_n$ متقاربة مطلقًا.

ب) أوجد تفكيك هان لـــ ν.

ج) أثبت أنّ هذا التفكيك وحيد إذا كان $a_n\neq 0$ من أجل كلّ n.

05 ليكن (E,Σ,ν) فضاء قياس مؤشّرًا.

أ) أثبت أنّ $|\nu(A)|\leq|\nu|(A)$، لكلّ $A\in\Sigma$.

ب) أثبت أنّه إذا كان λ قياسًا موجبًا يحقق $|\nu(A)|\leq\lambda(A)$، لكلّ $A\in\Sigma$، فإنّ $|\nu|(A)\leq\lambda(A)$، لكلّ $A\in\Sigma$، أي أنّ التغيّر الكلي $|\nu|$ هو أصغر قياس موجب يحقّق المتباينة في أ).

06 ليكن μ و ν قياسين مركّبين على (E,Σ). أثبت أنّ $|\mu+\nu|\leq|\mu|+|\nu|$.

07 ليكن μ و ν قياسين مؤشّرين على (E,Σ). أثبت أنّ القضايا الآتية متكافئة

أ) $\nu<<\mu$ ب) $|\nu|<<|\mu|$

ج) $\nu^+<<\mu$ و $\nu^-<<\mu$.

08 لتكن μ_1، μ_2 و μ_3 ثلاثة قياسات موجبة على فضاء قابل للقياس (E,Σ).

أثبت الخواص التالية:

1) $\mu_1\perp\mu_3$ و $\mu_2\perp\mu_3$ يستلزمان $(\mu_1+\mu_2)\perp\mu_3$.

2) $\mu_1<<\mu_2$ و $\mu_1\perp\mu_2$ يستلزمان $\mu_1=0$.

3) $\mu_1\leq\mu_2$ تستلزم $\mu_1<<\mu_2$.

09 ليكن μ قياسًا موجبًا على (E,Σ) و ν قياسًا مؤشرًا على (E,Σ). أثبت أنّ $|\nu|\leq\mu$ إذا وإذا فقط $\nu\leq\mu$ و $-\nu\leq\mu$.

10 ليكن (E,Σ,ν) فضاء قياس مؤشّرًا. أثبت أنّه لكلّ $A\in\Sigma$ لدينا

أ) $\nu^{+}(A)=sup\{\nu(B):B\subset A, B\in\Sigma\}$

ب) $\nu^{-}(A)=sup\{-\nu(B):B\subset A, B\in\Sigma\}$.

11 ليكن μ، ν و λ ثلاثة قياسات على (E,Σ). أثبت أنّه إذا كان $\mu\perp\nu$ و $\lambda\perp\nu$ فإنّ $(\lambda+\mu)\perp\nu$.

12 ليكن $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ ترقيما للأعداد النسبية في $[0,1]$. نعرّف $\nu(A)=\sum_{\{i:r_i\in A\}}\left(-\frac{1}{2}\right)^{i}$ لكلّ مجموعة جزئيّة (ل)-قابلة للقياس A في $[0,1]$.

أ) أثبت أنّ ν قياس مؤشّر على $([0,1],[0,1]\cap\mathcal{L})$. ($\mathcal{L}$ عشيرة لوبيغ على $\mathbb{R}$)

ب) أوجد تفكيك هان لـ ν. ج) أوجد تفكيك جوردان لـ ν.

13 لتكن $\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ

$$\xi(x)=\begin{cases}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2}}, & x\in[n,n+1[,\ n\geq 1\\ 0, & x<1\end{cases}$$ و $\nu(A)=\int_A\xi dm$ و $A\in\mathcal{L}$.

أثبت أنّ ما يلي

أ) $\nu<<m$. ب) أوجد تفكيك هان. ج) أوجد تفكيك جوردان

14 نعتبر $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ والقياسين المعرّفين كالآتي $\mu(\varnothing)=0$، $\mu(A)=\sum_{n\in A}2^{n}$ و $\nu(\varnothing)=0$، $\nu(A)=\sum_{n\in A}\frac{1}{2^{n}}$ على $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

أ) هل $\mu<<\nu$ أو $\nu<<\mu$؟

ب) هل الخاصيّة:

لكلّ $\varepsilon>0$ يوجد $\delta>0$ بحيث $\nu(A)<\varepsilon$ كلما $\mu(A)<\delta$، $A\in\Sigma$ صحيحة؟ وماذا تقول عن صحّتها عند تبديل μ و ν؟

أجب على نفس السؤالين بالنّسبة لقياس لوبيغ m و $\nu(A)=\int_A e^{-|x|}dm$، لكلّ $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

15 ليكن μ، ν و λ ثلاثة قياسات σ-منتهية على (E,Σ). أثبت أنّ

أ) إذا كان $\mu<<\nu$ و $\nu<<\lambda$ فإنّ $\mu<<\lambda$ ولدينا $\frac{d\mu}{d\lambda}=\frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\lambda}$، λ-تاك.

ب) إذا كان $\mu \equiv \nu$ (أي $\nu << \mu$ و $\mu << \nu$) فإنّ $1 = \frac{d\mu}{d\nu}\frac{d\nu}{d\mu}$ ، μ–تاك.

ج) إذا كان $\mu << \nu$ و $\lambda << \nu$ فإنّ $(\lambda + \mu) << \nu$ و $\frac{d(\lambda+\mu)}{d\nu} = \frac{d\lambda}{d\nu} + \frac{d\mu}{d\nu}$، ν–تاك.

16 لتكن E مجموعة غير قابلة للعد. نعرّف على $(E,\mathcal{P}(E))$ القياس الموجب μ بـ $\mu(A)=0$ ، إذا كانت A قابلة للعد، و $\mu(A)=+\infty$ ، إذا كانت A غير

قابلة للعد. ليكن ν قياسًا موجبًا آخرًا على $(E,\mathcal{P}(E))$ معرّفا بـ $\nu(A)=0$،

إذا كانت A قابلة للعد، و $\nu(A)=1$، إذا كانت A غير قابلة للعد.

أ) أثبت أنّ $\mu \equiv \nu$

ب) أوجد $\frac{d\mu}{d\nu}$ كدالة موجبة قابلة للقياس ذات قيم في نصف المستقيم الموسّع $\overline{\mathbb{R}^+}$.

ج) أثبت أنّ $\frac{d\nu}{d\mu}$ غير موجودة.

17 أثبت أنّ $\left|\frac{d\nu}{d\mu}\right| = \frac{d|\nu|}{d\mu}$ من أجل كلّ قياس مؤشّر منته أو مركّب ν.

18 ليكن $A,B \in \mathcal{L}$، نعرّف على $\mathcal{L}$ القياس الموجب $\mu(C) = 2m(A\cap C) + m(B\cap C)$، لكلّ $C \in \mathcal{L}$.

أ) أثبت أنّ $\mu << m$

ب) أوجد مشتقة رادون – نيكوديم $\frac{d\mu}{dm}$.

19 لتكن E مجموعة قابلة للعد و $\nu = \delta_{(a)} - 3\delta_{(b)}$ (حيث $\delta_{(x)}$ قياس ديراك عند $x \in E$) مع $a \neq b$.

1) أثبت أنّ القياسين $\nu, \mu_c : \mathcal{P}(E) \to]-\infty,\infty[$ هما σ–منتهيان و $\nu << \mu_c$ (حيث μ_c يرمز إلى قياس العدّ).

2) أحسب $\frac{d\nu}{d\mu_c}$.

3) ليكن $c \in E$ بحيث $c \neq a,b$، أثبت أنّه لا توجد دالة $f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{P}(E))$ بحيث

$.(\forall A\subset E),\ \ \nu(A)=\int_A f\, d\delta_{(c)}$

20 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس بحيث $\mu(E)=1$. نعرّف
$\nu(A)=\int_A fd\mu$ و $\nu_n(A)=\int_A f_n d\mu$، $(\forall A\in\Sigma)$ و $(\forall n\geq 1)$،
حيث f_n و f دوال قابلة للقياس و $\nu_n(E)=\nu(E)$، $(\forall n\geq 1)$.
أثبت أنّ $f_n\to f$، μ-تاك يستلزم أنّ
$\lim_{n\to\infty}\sup_{A\in\Sigma}|\nu_n(A)-\nu(A)|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n-f|d\mu=0$.

21 نعتبر الفضاء $(\mathbb{R},\mathcal{L},m)$ وقياس العدّ μ_c. نعرّف على $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ القياس المؤشّر ν بـ
$\nu(A)=\mu_c(A\cap\{0\})-m(A\cap[0,1])+\int_A\frac{dx}{1+x^2}$، لكلّ $A\in\mathcal{L}$.

أ) أوجد تفكيك هان لـ $\mathbb{R}$ بالنّسبة لـ ν.

ب) أوجد تفكيك جوردان لـ ν.

ج) أوجد تفكيك لوبيغ لـ $|\nu|$ بالنّسبة لـ μ.

د) أوجد مشتقة رادون-نيكوديم للجزء "ذي الاتّصال المطلق" لـ $|\nu|$ بالنّسبة لـ m.

22 ليكن μ و ν قياسين σ-منتهيين على (E,Σ). أثبت أنّه إذا كان $\mu-\nu$ قياسا بحيث $\nu<<\mu-\nu$ فإنّ $\nu<<\mu$ و $\mu\left(\left\{x\in E:\frac{d\nu}{d\mu}(x)=1\right\}\right)=0$.

23 نعرّف على $(\mathbb{R},\mathcal{L})$ القياسين الموجبين μ و ν كالآتي:
$\mu(A)=\int_A e^{-x^2}dm$ و $\nu(A)=\int_{A\cap\{x:|x|\leq 1\}}e^{-x^2}dm$، لكلّ $A\in\mathcal{L}$.

أ) أثبت أنّ $\nu<<\mu<<m$.

ب) أثبت أنّ $m<<\mu$، ثمّ أوجد $\frac{dm}{d\mu}$.

ج) أثبت أنّ العلاقة $\mu<<\nu$ غير صحيحة.

د) أوجد تفكيك لوبيغ لـ μ بالنّسبة إلى ν.

المراجع

المراجع

[1] أحمد، ص.، دعبول ، م. وحمصي، إ.، معجم الرياضيات المعاصرة، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1986.

[2] Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O., *Principles of Real Analysis*, Academic Press, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, Toronto, 2nd Ed., 1990.

[3] Arino, O., Delode, C. and Genet, J., *Mesure et Intégration, Exercices et Problèmes avec solutions*, Vuibert, Paris, 1976.

[4] Ash, R. B., *Measure, Integration and Functional Analysis*, Academic Press, N.Y. and London 1972.

[5] Bartle, R. G., *The elements of integration*, John Wiley & Sons, 1966.

[6] Bartle, R. G., *A modern theory of integration*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 32, AMS, Providence Rhode Island, 2001.

[7] Berberian, S. K., *Fundamentals of Real Analysis*, Springer, 1999.

[8] Boccara, N., *Analyse Fonctionnelle*, Ellipse, 1994.

[9] Bogachev, V. I., Measure theory Vol I, Springer, 2007.

[10] Bouziad, A. and Calbrix, J., *Théorie de la mesure et de l'intégration*, Publ. Univ., Rouen N°135, 1993.

[11] Burk, F., *Lebesgue Measure and Integration, An*

Introduction, John Wiley and Sons, Inc., N.Y., 1998.

[12] **Capinski, M. and Kopp, E.,** *Measure, integral and probability*, Springer-Verlag, 2004.

[13] **Caren, B. D.,** *Lebesgue measure and integral*, Pitman Pub. Inc., Boston 1982.

[14] **De Barra, G.,** *Measure theory and Integration*, Ellis Horwood Ltd., N.Y., 1981.

[15] **Dieudonné, J.,** *Eléments d'analyse*, **T1**, Gauthier-Villars, 1969.

[16] **Dubdey, R. M.,** *Real Analysis and Probability*, Cambridge Univ. Press, 2004.

[17] **Evans, L. C. and Gariepy, R. F.,** *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, 1992.

[18] **Folland, G. B.,** *Real analysis, modern techniques and their applications*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1999.

[19] **Friedman, A.,** *Foundations of modern analysis*, Dover Publ., N.Y., 1982.

[20] **Genet, J.,** *Mesure et Intégration, Théorie élémentaire*, Vuibert, Paris, ,1976.

[21] **Godement, R.,** *Analysis II , Differential and Integral Calculus, Fourier Series, Holomorphic functions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005.

[22] **Gordon, R. A.**, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock*, AMS, USA, 1994.

[23] **Halmos, P. R.,** *Measure theory*, Graduate Texts in

Mathematics vol. 18, Springer-Verlag, N.Y., 1974.

[24] Hewitt, E. and Stromberg, K., *Real and Abstract Analysis*, Graduate Texts in Mathematics vol. 25, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1965.

[25] Jean, R., *Mesure et Intégration,* Presses Univ. Quebec, 1980.

[26] Kelley, J. L., *General Topology,* Springer, N.Y.,1975.

[27] Khan, A-R., *Introduction to Lebesgue Integration,* Limi Kitab Khana, Lahore, Pakistan, 1993.

[28] Kingman, J. F. C. and Taylor, S. J., *Introduction to Measure and Probability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.

[29] Kolmogorov, A .N. and Fomin, S. V., *Measure, Lebesgue Integrals and Hilbert Spaces*, Academic Press, N.Y., London, 1961.

[30] Kolmogorov, A. N. and Fomin S. V., *Introductory real analysis,* Dover Publ., New York, 1970.

[31] Krishna B., Athreya and Soumendra N. L., *Measure Theory and Probability Theory*, Springer Science & Business Media, LLC, N.Y., 2006.

[32] Lang, S., *Real analysis*, 2nd Ed., Addison-Wesley Pub. Comp., 1983.

[33] Marle, C. M., *Mesures et Probabilités,* Hermann, Paris, 1974.

[34] Munroe, M. E., *Measure and Integration*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 2nd edition, Addison-Wesley Pub. Co., Ontario, 1971.

[35] **Nielsen, O. A.**, *An Introduction to Integration and Measure Theory*, Canadian Math .Soc. Series of Monographs and Advanced Texts, A Wiley-Intersciences Pub., John Wiley and Sons, N.Y., 1997.

[36] **Pap, P. (Editor)**, *Handbook of measure theory*, Elsevier, 2002.

[37] **Priestley, H. A.**, *Introduction to Integration*, Clarendon Press Oxford, N.Y., 1997.

[38] **Rana, I. K.**, *An Introduction to Measure and Integration*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 45, Second edition, AMS, Providence, Rhode Island 2002.

[39] **Royden, H. L.**, *Real Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 3rd Ed., 1988.

[40] **Rudin, W.**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, N.Y., 1974.

[41] **Strooke, D. W.**, *A Concise Introduction to the Theory of Integration*, 3rd Ed., Birkhauser, N.Y., 1999.

[42] **Wheeden, R.L. and Zygmund, A.**, *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc. N.Y., 1977.

[43] **Weir A. J.**, *Lebesgue Integration and Measure*, Cambridge University Press, London 1973.

[44] Wise, G. and Hall, E. B., *Counter Examples in Probability and Real Analysis*, Oxford University Press, N.Y., Oxford, 1993.

[45] Yeh, J., Real Analysis: *Theory of Measure and Integration*, 2nd Ed., World Scientific Pub. Co. Pte. Ltd, New Jersey, 2006.

المصطلحات العلمية

المصطلحات العامة

ملاحظة: هذه المصطلحات مرتبة حسب المفردات العربية.

إنجليزية	فرنسية	عربية
Continuity	Continuité	اتصال
Absolute continuity	Continuité absolue	اتصال مطلق
Trace of an algebra	Trace d'une algèbre	أثر جبر
Probability	Probabilité	احتمال
Measurability test	Critère de mesurabilité	اختيار قابلية القياس
Induction	Récurrence	استقراء
Family	Famille	أسرة
Cardinal	Cardinal	أصلي
Closure	Adhérence, fermeture	إغلاقة
Convolution	Convolution	إلتفاف
Finiteness	Finitude	انتهاء (من منته)
Shift function	Translatée d'une fonction	انزياح دالة
Reflexive	Réflexif	انعكاسي
Separated, Hausdorff	Séparé	انفصالي
μ -a.e.	μ -p.p.	μ −تأك
Integral divergence	Divergence d'une intégrale	تباعد التكامل
Series divergence	Divergence d'une série	تباعد سلسلة
Canonical imbedding	Injection canonique	تباين قانوني
Change of variable	Changement de variable	تبديل المتغيّر
Converges almost surely to	Converge presque sûrement vers	تتقارب بالتأكيد تقريبا إلى
Converges in measure to	Converge en mesure vers	تتقارب بالقياس إلى
Converges in mean	Converge en moyenne	تتقارب بالوسط

Converges in mean square	Converge en moyenne quadratique	تتقارب بالوسط التربيعي
Converges uniformly to	Converge uniformément vers	تتقارب بانتظام إلى
Converges weakly to	Converge faiblement vers	تتقارب بِضعف إلى
Converges μ -a.e to	Converge μ - p.p vers	تتقارب μ -تأك إلى
Converges absolutely to	Converge absolument vers	تتقارب مطلقا إلى
Completion of a measure space	Complétion d'un espace mesuré	تتميم فضاء قياس
Countable subadditivity	Sous-additivité dénombrable	التجميع الجزئي القابل للعد
Countable additivity	Additivité dénombrable	التجميع القابل للعد
Convexity	Convexité	تحدّب
Connectedness	Connexité	ترابط
Compactness	Compacité	تراص
Total variation of a function	Variation totale d'une fonction	تغيّر كلي لدالة
Total variation of a signed measure	Variation totale d'une mesure signée	تغيّر كليّ لقياس مؤشر
Diffeomorphism	Difféomorphisme	تفاكل
Bijective	Bijectif	تقابلي
Mean convergence of order p	Convergence en moyenne d'ordre p	تقارب بالوسط من المرتبة p
Pointwise convergence	Convergence simple	تقارب بسيط
Weak convergence	Convergence faible	تقارب ضعيف
Subdivision	Subdivision	تقسيم
Improper Riemann integral	Intégrale impropre de Riemann	تكامل ريمان المُعتل
Riemann-Stieltjes integral	Intégrale de Riemann-Stieltjes	تكامل ريمان – ستلجس
Indefinite integral	Intégrale indéfinie	تكامل غير محدّد
Lebesgue integral	Intégrale de Lebesgue	تكامل لوبيغ
Double integral	Intégrale double	تكامل مزدوج
Iterated integral	Intégrale itérée	تكامل مكرّر
Extension	Prolongement	تمديد
Converges to	Converge vers	تنتهي إلى، تتقارب إلى

Generated algebra by	Algèbre engendrée par	جبر مُوَلّد بـ
σ – algebra	Tribu, σ – algèbre	σ –جبر، عشيرة
additive	additif	جمعي
σ -additive	σ -additif	σ – جمعي
Neighborhood	Voisinage	جوار
Support of a function	Support d'une fonction	حامل الدالة
Lower bound	Borne inférieure	حد أدنى
Upper bound	Borne supérieure	حد أعلى
Essential upper bound	Borne supérieure essentielle	الحد الأعلى الأساسي
Event	Evenement	حدث
Terms of a series	Termes d'une série	حدود سلسلة
Countable additivity property	Propriété d'additivité dénombrable	خاصية التجميع القابل للعد
Choice function	Fonction de choix	دالة الاختيار
Projection mapping	Projection (appl.)	دالة الإسقاط
Simple function	Fonction simple	دالة بسيطة
Borel mapping	Fonction borélienne	دالة بوريلية
Step function	Fonction étagée	دالة درجية
Integrable p^{th} power function	Fonction de puissance p intégrable	دالة ذات أس p قابلة للمكاملة
Extended real-valued mapping	Fonction numérique	دالة عددية
Summable mapping	Fonction sommable	دالة قابلة للجمع
Measurable mapping	Fonction mesurable	دالة قابلة للقياس
Integrable mapping	Fonction intégrable	دالة قابلة للمكاملة
Continuous function	Fonction continue	دالة متصلة
Convex mapping	Fonction convexe	دالة محدَبة
Essentially bounded mapping	Fonction essentiellement bornée	دالة محدودة أساسيًا
Dominating mapping	Fonction majorante	دالة مُرجِّحة
Characteristic function (indicator function)	Fonction caractéristique (indicatrice d'un ensemble)	دالة مميّزة، دالة وصفية
Regularized function	Fonction régularisée	دالة مُنتظمة

Function of bounded variation	Fonction à variation bornée	دالة ذات تغيّر محدود
Functional (a -)	Fonctionnelle (une -)	دالي
Monotone	Monotone	رتيب
Pseudometric	Pseudo-métrique	شبه متريّة
Domination condition	Condition de domination	شرط الترجيح
Linear form	Forme linéaire	شكل خطي
Invariant	Invariant	صامد
Equivalence class	Classe d'équivalence	صف تكافؤ
Monotone class	Classe monotone	صف رتيب
Generated monotone class by	Classe monotone engendrée par	صف رتيب مولد بـ
Translation invariance	Invariance par translation	الصمود بالانزياح
Usual topology	Topologie usuelle	طبولوجيا اعتيادية
Modulus	Module	طويلة
Rational number	Nombre rationnel	عدد نسبي
Conjugate exponents	Exposants conjugués	عددان (أسّان) مترافقان
Indetermination	Indétermination	عدم التعيين
Borel $\sigma-$algebra	Tribu borélienne	عشيرة بوريلية
Onto, surjective	Surjectif	غامر
1) Disjontification 2) Separability	1) Disjontification 2) Séparabilité	1) فصل 2) قابلية الفصل
Probabilized space	Espace probabilisé	فضاء احتمال
Probabilizable space	Espace probabilisable	فضاء احتمالي
Measurable subspace	Sous-espace mesurable	فضاء جزئي قابل للقياس
Dense subspace	Sous-espace dense	فضاء جزئي كثيف
Separable space	Espace séparable	فضاء قابل للفصل
Measurable space	Espace mesurable	فضاء قابل للقياس
Measure space	Espace mesuré	فضاء قياس
Product measure space	Espace mesuré produit	فضاء قياس الضرب
Vector space	Espace vectoriel	فضاء متجهات
Normed space	Espace normé	فضاء مُعيّر
Hausdorff space	Espace séparé	فضاء انفصالي
Differentiable	Dérivable	قابلة للاشتقاق

Countable, numerable	Dénombrable	قابل للعد
Strictly countable	Strictement dénombrable	قابل للعد تماما
Separable	Séparable	قابل للفصل
Integrable	Intégrable	قابلة للمكاملة
Summability, integrability	Sommabilité, intégrabilité	قابلية الجمع، قابليّة المكاملة
Countability	Dénombrabilité	قابلية العد
Separability	Séparabilité	قابلية الفصل
Measurability	Mesurabilité	قابلية القياس
Integrability, summability	Intégrabilité, sommabilité	قابليّة المكاملة، قابليّة الجمع
Power	Puissance	قدرة
Power of the continuum	Puissance du continu	قدرة المستمر
Product measure	Mesure produit	قياس الضرب
Counting measure	Mesure de comptage, - de dénombrement	قياس العد
Outer measure	Mesure extérieure	قياس خارجي
Surface measure	Mesure de surface	قياس سطحي
Signed measure	Mesure signée	قياس مؤشر
Completed measure	Mesure complétée	قياس مُـتـمّ
Concentrated measure on	Mesure concentrée en	قياس مُركــز على
Regular measure	Mesure régulière	قياس منتظم
Degenerate measure	Mesure dégénérée	قياس مُنحل
Strange measures	Mesures étrangères	قياسان أجنبيان
Mutually singular measures	Mesures symétriquement singulières	قياسان شاذان تناظريا
Cluster value	Valeur d'adhérence	قيمة لاصقة
Completion theorem	Théorème de complétion	مبرهنة التتميم
Monotone convergence theorem	Théorème de la convergence monotone	مبرهنة التقارب الرتيب
Dominated convergence theorem	Théorème de la convergence dominée	مبرهنة التقارب المرجّح
Approximation theorem	Th. d'approximation	مبرهنة التقريب

Mean value theorem	Théorème de la moyenne	مبرهنة القيمة الوسطى
Inequality	Inégalité	متباينة
Cauchy sequence in measure	Suite de Cauchy en mesure	متتالية كوشية بالقياس
Regularizing sequence	Suite régularisante	متتالية مُنظمة
Connected	Connexe	مترابط
Compact	Compact	متراص
Increasing	Croissant (adj.)	متزايد
Equivalent	Equipotent	متساوي القدرة، متكافئ
Continuous	Continu	متصل
Continuously differentiable	Continûment dérivable	متصل الاشتقاق
Random variable	Variable aléatoire	متغيّر عشوائي
Isometrically isomorphic	Isométriquement isomorphe	متقايس
Decreasing	Décroissant	متناقص
Pairwise	Deux à deux	مثنى مثنى
Elementary set	Ensemble élémentaire	مجموعة أوليّة
Subset	Partie, sous-ensemble	مجموعة جزئية
Perfect subset	Partie parfaite	مجموعة جزئية كاملة
Measurable set	Ensemble mesurable	مجموعة قابلة للقياس
Set of measure zero, negligible set, null -	Ensemble négligeable	مجموعة مهملة
μ-null set	Ensemble μ-négligeable	مجموعة μ –مهملة
Directed set	Ensemble dirigé	مجموعة موجهة
a.e. bounded	Borné *p.p*	محدود-تأك
Boundedness	Bornitude	محدودية (من محدود)
Measure finiteness	Finitude de la mesure	محدودية القياس
Conjugate	Conjugué	مرافق
Totally ordered	Totalement ordonné	مُرتـبة كليا
Stable under complementation	Stable par complémentation	مستقر بالتتميم
Axiom of choice	Axiome du choix	مُسلّمة الاختيار
Absolutely continuous	Absolûment continu	مُطلقة الاتّصال
Coefficient	Coefficient	مُعامل

Norm	Norme	معيار
Normed	Normé	مُعيّر
x -section of f	Section de f suivant x	مقطع f وفق x
Integration by parts	Intégration p. parties	المكاملة بالتجزئة
Integration by iteration	Intégration par itération	المكاملة بالتكرار، – بالتتالى
Of type	De type	من نمط
Finite	Fini	منته
Disjoint	Disjoints	منفصلان، غير متقاطعين
Discontinuity points	Points de discontinuité	نقاط التقطع
Lower limit Upper limit	Limite inférieure Limite supérieure	نهاية دنيا نهاية عليا