الفصل التاسع

قابلية الاشتقاق

الفصل التاسع
قابلية الاشتقاق

سوف نُعرّف في هذا الفصل قابليّة الاشتقاق لدى الدّوال العددية ونثبت أنّ مجموعة الدّوال مطلقة الاتّصال والدّوال ذات التغيّرات المحدودة هي إحدى المجموعات المهمّة التي تمتاز بهذه الخاصيّة. نقدّم هذه المفاهيم مع بعض الخصائص الهامة بغية إثبات المبرهنتين الأساسيتين للحساب (الأولى والثانية) في إطار تكامل لوبيغ.

1- الدّوال القابلة للاشتقاق

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و $\delta > 0$.

تعريف 01.09: نُعرّف المشتقة الدّنيا (على الترتيب، العليا) من اليمين عند النقطة x_0 لدالة عددية $f : [x_0, x_0+\delta[\to \overline{\mathbb{R}}$ بحيث $f(x_0) \in \mathbb{R}$ بـ

$$D_+ f(x_0) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}،$$

(على الترتيب،

$$(D^+ f(x_0) = \limsup_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}).$$

تعريف 02.09: نُعرّف المشتقة الدّنيا (على الترتيب، العليا) من اليسار عند النقطة x_0 لدالة عددية $f :]x_0-\delta, x_0] \to \overline{\mathbb{R}}$ بحيث $f(x_0) \in \mathbb{R}$ بـ

$$D_- f(x_0) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}،$$

(على الترتيب،

$\cdot f$

ملاحظة 03.09: 1) ينبغي للدّالة f أن تكون ذات قيمة منتهية عند النقطة x_0 في التعاريف السابقة حتى يكون لمشتقات ديني معنى.

2) على العموم تأخذ مشتقات ديني قيمها في المستقيم الحقيقي الموسّع $\overline{\mathbb{R}}$، ولدينا في كل الحالات

$$D_-f(x_0) \le D^-f(x_0) \quad \text{و} \quad D_+f(x_0) \le D^+f(x_0) \, .$$

تعريف 04.09: نقول عن دالة عددية f إنّها قابلة للاشتقاق من اليمين عند النقطة x_0 إذا كان $D^+f(x_0) = D_+f(x_0) \in \mathbb{R}$.
تسمّى هذه القيمة المشتركة بالمشتقة عن يمين x_0، ونرمز لها بـــ $f'_+(x_0)$.

تعريف 05.09: نقول عن دالة عددية f إنّها قابلة للاشتقاق من اليسار عند النقطة x_0 إذا كان $D^-f(x_0) = D_-f(x_0) \in \mathbb{R}$.
تسمّى هذه القيمة المشتركة بالمشتقة عن يسار x_0، ونرمز لها بـــ $f'_-(x_0)$.

تعريف 06.09: نقول عن دالة عددية f إنّها قابلة للاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كانت مشتقات "ديني" الأربع متساوية ومنتهية. تدعى قيمتهم المشتركة مشتقة f عند x_0، ونرمز لها بـــ $f'(x_0)$.

إذن، تكون الدّالة العددية f قابلة للاشتقاق عند x_0 إذا وإذا فقط حققت

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0) \in \mathbb{R} \, .$$

---

[1]) اوليس ديني [Ulisse Dini] (1845–1918)

ملاحظة 07.09: نقول عن f إنّها قابلة للاشتقاق على $[a,b]$ إذا كانت $f'_+(a)$ و $f'_-(b)$ موجودتين وكانت f قابلة للاشتقاق عند كلّ نقطة من الفترة المفتوحة $]a,b[$.

مثال 08.09 : نعتبر على $\mathbb{R}$ الدّالة $f(x)=|x|$. لدينا فورًا

$$D^+f(0)=D_+f(0)=1 \quad \text{و} \quad D^-f(0)=D_-f(0)=-1$$

ومنه f ليست قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0=0$.

مثال 09.09 : نعتبر على $[0,1]$ الدّالة $f(x)=1-\chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

- إذا كانت $x_0\in\mathbb{Q}$ فإنّ $f(x_0)=0$، وبالتالي

$$\liminf_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{|h|}=0\text{ ،}$$

$$\limsup_{\substack{h\to0\\h>0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{|h|}=+\infty\text{ ،}$$

$$\liminf_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}-\frac{1}{|h|}=-\infty$$

$$\text{و}\quad \limsup_{\substack{h\to0\\h<0}}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to0}-\frac{0}{|h|}=0\,.$$

إذن، إذا كانت $x_0\in\mathbb{Q}$ فإنّ

$$D^+f(x_0)=+\infty,\ D_+f(x_0)=0$$
$$\text{و}\quad D^-f(x_0)=0,\ D_-f(x_0)=-\infty\,.$$

وإذا كانت $x_0\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ فإنّنا نحصل بنفس الكيفية على

$$D^+f(x_0)=0,\ D_+f(x_0)=-\infty$$

$$\text{و}\quad D^-f(x_0)=+\infty,\ D_-f(x_0)=0\,.$$

قضية 10.09: كلّ دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة ما هي متّصلة عند هذه النقطة.

إثبات: لتكن f دالة قابلة للاشتقاق عند نقطة $x_0 \in \mathbb{R}$، عندئذ $f'_+(x_0)$ و $f'_-(x_0)$ موجودتان ومنتهيتان، وعليه فإنّ

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_+(x_0) \quad \text{و} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'_-(x_0)\text{،}$$

وبالتالي $f(x_0)=\lim_{h\to 0^-} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0^+} f(x_0+h)$ (وإلاّ صارت $f'_+(x_0)$ و $f'_-(x_0)$ غير منتهيتين).

إذن، f متّصلة عند النقطة x_0. ■

ملاحظة 11.09: توجد دوال متّصلة غير قابلة للاشتقاق، فعلى سبيل المثال الدّالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ المعرّفة بـــ $f(x)=|x|$ متّصلة عند كلّ نقطة من $\mathbb{R}$ بينما لا تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ (راجع **المثال 08.09**).

توجد هنالك عدّة أمثلة لدوال متّصلة على مجموعة تعريفها إلاّ أنّها ليست قابلة للاشتقاق عند أيّة نقطة منها، وأوّل هذه الأمثلة هي دالّة فايرشتراس[2] (Weierstrass) التالية

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos\left(a^n \pi x\right)$$

حيث $a\geq 1$ عدد طبيعي فردي، $0<b<1$ و $ab>1+\frac{3\pi}{2}$.

يعتمد إثبات المبرهنة التالية على مفهوم **تغطية فيتالي**[3] (Vitali) التي تنصّ على أنّ كلّ تغطية لمجموعة جزئية $A\subset\mathbb{R}$ ذات قياس خارجي (لوبيغ) منته تحتوي على متتالية من المجموعات المغلقة والمنفصلة مثنى مثنى حيث تغطي A كلّها ما عدا مجموعة مهملة.

---

[2]) كارل تيودور فايرشتراس [Karl Theodor Weierstrass] (1815–1897)

[3]) جيوسابي فيتالي [Giuseppe Vitali] (1875–1932)

تذكّرنا هذه النّتيجة بمبرهنة هاين[4]-بورال (Heine-Borel) التي تنصّ علىّ أنّ كلّ تغطية مفتوحة لمجموعة متراصة $K\subset\mathbb{R}^n$ تقبل تغطية جزئية مفتوحة منتهية غير أنّ هذه المجموعات ليست بالضرورة ذات عناصر منفصلة.

نعرّف "تغطيّة فيتالي" كالآتي:

تعريف 12.09: لتكن A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$. نسمّي الأسرة $\mathcal{N}$ المكوّنة من فترات جزئية مغلقة ومحدودة من $\mathbb{R}$ (مختلفة عن المجموعات أحاديّة العنصر) تغطيّة فيتالي لـــ A إذا وجدت من أجل كلّ $\varepsilon>0$ و $x\in A$ فترة $J\in\mathcal{N}$ بحيث $x\in J$ و $\ell(J)<\varepsilon$. ($\ell(J)$ طول الفترة J)

مثال 13.09: إذا كانت A مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ فإنّ الأسرة $\left\{\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right]:n\in\mathbb{N}^*,\ x\in A\right\}$ تغطيّة فيتالي لـــ A.

مبرهنة 14.09 [فيتالي]: لتكن $\mathcal{N}$ تغطيّة فيتالي لمجموعة جزئية اختياريّة $A\subset\mathbb{R}$. عندئذ توجد متتالية من الفترات المنفصلة مثنى مثنى $\{J_k\}_{k\geq1}\subset\mathcal{N}$ بحيث $m^*\left(A\setminus\bigcup\limits_{k\geq1}J_k\right)=0$، إضافة إلى هذا، إذا كان $m^*(A)<\infty$ فإنّه من أجل كلّ $\varepsilon>0$ توجد جملة جزئية منتهية من الفترات المنفصلة مثنى مثنى $\{J_k\}_{k=1}^{N}$ بحيث $m^*\left(A\setminus\bigcup\limits_{k=1}^{N}J_k\right)<\varepsilon$.

نشير إلى وجود مؤلفات كثيرة في علوم الرياضيات تستغني عن مفهوم تغطيّة فيتالي وتستعمل طرقا أخرى لإثبات بعض الخصائص.

مبرهنة 15.09 [لوبيغ]: لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة رتيبة، عندئذ f تقبل مشتقة منتهية تقريبًا أينما كانت على $[a,b]$.

[4] هاينريك ادوارد هاين [Heinrich Eduard Heine] (1821-1881)

إثبات: لنفرض أنّ f متزايدة على $[a,b]$ (وإلاّ فإنّنا نعتبر $-f$ عوض f). نقرّ أوّلا أنّ $A=\{x\in[a,b]:\ D^+f(x)>D_-f(x)\}$ مجموعة مهملة.

لدينا $A=\bigcup_{u,v\in\mathbb{Q}} A_{u,v}$، حيث

$$A_{u,v}=\{x\in[a,b]:\ D^+f(x)>u>v>D_-f(x)\}$$

يكفي إذن إثبات أنّ $A_{u,v}$ مجموعات مهملة.

من أجل كلّ $u,v\in\mathbb{Q}$ و $\varepsilon>0$ معطى توجد مفتوحة G بحيث $A_{u,v}\subset G$ و $m(G)<m^*(A_{u,v})+\varepsilon$ (لأنّ $m^*(A_{u,v})<(b-a)$).
ليكن $x\in A_{u,v}$، يوجد $h>0$ بحيث $[x-h,x]\subset G$، وبما أنّ $v>D_-f(x)$ فإنّ $f(x)-f(x-h)<vh$. نشير إلى أنّ أسرة كلّ هذه الفترات تمثّل تغطية فيتالي لـــ $A_{u,v}$.
تسمح لنا مبرهنة فيتالي باختيار جملة منتهية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $[x_1-h_1,x_1]$ ،...، $[x_N-h_N,x_N]$ تحقق $m^*(A_{u,v}\setminus G_N)<\varepsilon$ حيث $G_N=\bigcup_{i=1}^{N}[x_i-h_i,x_i]$. إضافة إلى هذا لدينا

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i)-f(x_i-h_i)\right]&<\sum_{i=1}^{N}v\,h_i\le v\,m(G)\\&<v\left[m^*(A_{u,v})+\varepsilon\right]\end{aligned}$$

لنعتبر الآن المجموعة $A_{u,v}\cap G_N$. لدينا العلاقة $D^+f(y)>u$ لكلّ y في هذه المجموعة. إذن يوجد $\eta>0$ يحقق $]y,y+\eta[\subset]x_i-h_i,x_i[$ بحيث $1\le i\le N$ و $\eta u<f(y+\eta)-f(y)$. تمثّل أسرة هذه الفترات كذلك تغطية فيتالي لـــ $A_{u,v}\cap G_N$. نستخلص من مبرهنة فيتالي وجود جملة منتهية من الفترات ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى
$]y_i,y_i+\eta_i[$، $i=1,\dots,M$، تحقق

$m^*((A_{u,v}\cap G_N)\setminus H_M)<\varepsilon$، حيث $H_M=\bigcup_{i=1}^{M}]y_i,y_i+\eta_i[$.

من الواضح أنّ

$$\sum_{i=1}^{N}\left[f(x_i)-f(x_i-h_i)\right]\geq\sum_{i=1}^{M}\left[f(y_i+\eta_i)-f(y_i)\right]$$
$$\geq\sum_{i=1}^{M}\eta_i u\geq u\,m^*\left[\left(A_{u,v}\cap G_N\right)\cap H_M\right]$$
$$>u\left[m^*\left(A_{u,v}\cap G_N\right)-\varepsilon\right]>u\left[m^*\left(A_{u,v}\right)-2\varepsilon\right]$$

إذن

$$v\left[m^*\left(A_{u,v}\right)+\varepsilon\right]>u\left[m^*\left(A_{u,v}\right)-2\varepsilon\right]،$$

وبالتالي فإنّ $v\,m^*\left(A_{u,v}\right)>u\,m^*\left(A_{u,v}\right)$ لكون ε اختياريًّا، ممّا يؤدّي إلى $m^*\left(A_{u,v}\right)=0$ لأنّ $u>v$.

يمكن الإثبات بطريقة مماثلة أنّ المجموعة

$$B=\left\{x\in[a,b]:\ D_+f(x)<D^-f(x)\right\}$$

هي كذلك مهملة.

نرى من التعاريف والملاحظات السابقة أنّه لم يبق إلاّ إثبات أنّ المجموعة $C=\left\{x\in[a,b]:\ f'(x)=+\infty\right\}$ مهملة. بالفعل، إذا كان $x\in C$ فإنّ $f'(x)=+\infty$، وبالتّالي فإنّه لكلّ $\sigma>0$ يوجد $h>0$ بحيث $[x,x+h]\subset]a,b[$ و $f(x+h)-f(x)>\sigma h$. تمثّل أسرة كلّ هذه الفترات تغطية فيتالي للمجموعة C.

إذن توجد حسب ميرهنة فيتالي أسرة قابلة للعد

$$[x_1,x_1+h_1],[x_2,x_2+h_2],\ldots$$

بحيث $m^*\left(C\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}[x_k,x_k+h_k]\right)\right)=0$.

لدينا إذن

$$m(C)\leq\sum_{k=1}^{\infty}m\left([x_k,x_k+h_k]\right)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k$$
$$\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(x+h_k)-f(x)}{\sigma}\leq\frac{f(b)-f(a)}{\sigma}$$

لأنّ f متزايدة، ومنه نستنتج أنّ $m(C)=0$ وذلك بجعل σ يؤول إلى ∞، وبهذا يكتمل الإثبات.■

ملاحظة 16.09: إذا علمنا أنّ الدوال الرتيبة هي من جهة متّصلة ما عدا

على مجموعة جزئية قابلة للعد من مجموعة تعريفها، ومن جهة أخرى توجد دوال متّصلة على مجموعة تعريفها غير قابلة للاشتقاق عند كلّ نقطة فإن مبرهنة لوبيغ السابقة تبدو غير متوقعة.

بإمكاننا استعمال مبرهنة 14.09 فيتالي لإثبات المبرهنة الآتية التي تعالج قضيّة الاشتقاق حدًّا بحدّ بالنسبة لسلسلة من الدوال المتزايدة.

مبرهنة 17.09 [فوبنيه]: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدوال الحقيقية المتزايدة على $[a,b]$ بحيث $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$ موجودة عند كلّ $x\in[a,b]$. عندئذ، الدّالة f قابلة للاشتقاق تقريبًا أينما كانت على $[a,b]$، ولدينا تقريبًا أينما كان على $[a,b]$،

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

ملاحظة 18.09: نعرّف اشتقاق الدوال المركّبة بنفس الكيفية وذلك بدراسة الجزئين الحقيقي والتخيّلي لهذه الدّوال.

2- الدّوال ذات التغيّرات المحدودة

نعلم بصفة عامّة أنّ عملية المكاملة ليست العمليّة العكسيّة للاشتقاق، وعليه فإنّه غير صحيح أنّ كلّ الدّوال هي دوال أصليّة لمشتقاتها. لحصر أسرة الدوال التي تمتاز بهذه الخاصّية نعتبر الدوال القابلة للاشتقاق تقريبًا أينما كانت (التي تتطابق مع تكامل مشتقّتها القابلة للجمع). رأينا أعلاه أنّ الدّوال الرتيبة هي قابلة للاشتقاق تقريبًا أينما كانت.

سوف نعرّف فيما يلي فضاء متّجهات تمتاز عناصره بخاصّية **التذبذب المنتهي** على كلّ تقسيم لفترة تعريفه، كما يكتب كلّ عنصر كفرق دالّتين رتيبتين متزايدتين. نقول عن هذه الدّوال إنّها **ذات تغيّرات محدودة**.

تعريف 19.09: ليكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ، نعرّف

$$V_a^b f=\sup_{P\in\mathcal{P}}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|\right\}،$$

حيث $\mathcal{P}$ أسرة كلّ التقسيمات $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_k<\ldots<x_n=b\}$ للفترة $[a,b]$.

نسمّى $V_a^b f$ التغيّر الكلّي لـ f على $[a,b]$، (نضع $V_a^a f=0$).

تعريف 20.09: نقول عن دالة f إنّها ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$ إذا كانت $V_a^b f<\infty$.

نرمز بـ $BV([a,b])$ لمجموعة كلّ الدوال ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$.

تعريف 21.09: إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث $f\in BV([a,b])$ لكلّ $a,b\in\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}} V_a^b f$ موجودة ومنتهية، فإنّنا نكتب $f\in BV(\mathbb{R})$ ، ولدينا

$$V_{-\infty}^{+\infty} f=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} V_a^b f.$$

مثال 22.09: كلّ دالة ثابتة على $[a,b]$ هي ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$، وتحقق $V_a^b f=0$، والعكس صحيح.

مثال 23.09: كل دالة رتيبة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ هي ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$، ولدينا $V_a^b f=\left|f(b)-f(a)\right|$.

ملاحظة 24.09: ليكن $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ تقسيما للفترة $[a,b]$ و $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. إذا كانت f رتيبة على كلّ فترة جزئية $[x_{i-1},x_i]$ ، $i=1,2,\ldots,n$، فإنّ f دالة ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$، ولدينا

$$V_a^b f=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|.$$

مثال 25.09: من السهل التأكد من أنّ دالّة "ديريكلي" :

$$f(x)=\chi_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}:[a,b]\to\mathbb{R}$$

ليست ذات تغيّرات محدودة على أيّة فترة $[a,b]$.

مثال 26.09: كلّ دالة ليبشترية f على $[a,b]$ (نسبة إلى ليبشيتز[5] (Lipschitz)) ، أي يوجد ثابت $M>0$ بحيث

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|,\quad (\forall x,y\in[a,b]),$$

هي ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$.

ملاحظة 27.09: بما أنّ الدوال ذات مشتقات أولى محدودة على $[a,b]$ دوال ليبشترية فإنّها ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$. كمثال لهذه الحالة نعتبر:

مثال 28.09: إنّ الدّالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\in]0,1]\\ 0, & x=0\end{cases},$$

متّصلة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,1[$ وذات مشتقة محدودة على $]0,1[$، وبالتالي فإنّها ذات تغيّرات محدودة على $[0,1]$.

هذا الآن مثال عن دالة قابلة للاشتقاق ولكن ليست ذات تغيّرات منتهية.

مثال 29.09: ليكن $g:[0,1]\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x\in]0,1]\\ 0, & x=0\end{cases},$$

عندئذ، g متّصلة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,1[$، غير أنّ g' ليست محدودة على $]0,1[$. هذا لا يستلزم مباشرة أنّ

[5] رودلف سجيسموند ليبشيتز [Rudolf Otto Sigismund Lipschitz] (1832–1903)

$g \notin BV[0,1]$ لكون g' غير محدودة، مع التذكير أنّ هذا شرط هو كاف فقط وليس لازما. بالفعل، باعتبار التقسيم $x_k = \frac{1}{\sqrt{(2k+1)\pi/2}}$

نرى أنّ

$$\sum_{k=1}^{n} \left|g(x_k) - g(x_{k-1})\right| \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} ،$$

وعليه فإنّ $g \notin BV[0,1]$.

مثال 30.09 : لتكن الدّالة

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad x_k = \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} .$$

لدينا $f(x_k) = \frac{(-1)^k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}$، ومنه $\left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| = \frac{2k}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}$.

بما أنّ $\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right) = k^2 - \frac{1}{4} < k^2$، عندئذ $\left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| > \frac{2}{k\pi}$، لكلّ $k = 1,2,\dots,n$، وبالتالي

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k\pi} < \sum_{k=1}^{n} \left|f(x_k) - f(x_{k-1})\right| .$$

لاحظ أنّ السلسلة $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ متباعدة، ومن ثمّ الدّالة f ليست ذات تغيّرات محدودة على $[0,1]$.

ملاحظة 31.09: تكون دالة مركّبة $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ذات تغيّرات محدودة إذا وإذا فقط كانت الدّالتان $\mathrm{Re} f$ و $\mathrm{Im} f$ ذوات تغيّرات محدودة.

قضية 32.09: كلّ دالة ذات تغيرات محدودة على فترة ما هي بالضرورة محدودة على هذه الفترة.

إثبات: لدينا $\left|f(x) - f(a)\right| \leq V_a^x f$، ومنه $\left|f(x)\right| \leq \left|f(a)\right| + V_a^b f$، $(\forall x \in [a,b])$. ■

مبرهنة 33.09: أ) إذا كانت $f \in BV[a,b]$ فإنّ $\alpha f \in BV[a,b]$، $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$، ولدينا

$$V_a^b(\alpha f) = |\alpha| V_a^b f \text{، } (\forall \alpha \in \mathbb{R})\text{،}$$

ب) إذا كانت $f,g \in BV[a,b]$ فإنّ $f+g \in BV[a,b]$، ولدينا

$$V_a^b(f+g) \le V_a^b f + V_a^b g\text{،}$$

ومن ثمّ فإنّ $BV[a,b]$ فضاء متّجهات على الحقل $\mathbb{R}$.

إثبات: تمرين.

مبرهنة 34.09: لتكن $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ و $a<c<b$، عندئذ

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f.$$

إثبات: نفرض أنّ c نقطة من التقسيم P:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c < \dots < x_n = b\}$$

(إن لم تنتم c إلى P فينبغي إضافتها). لدينا

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{m} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$
$$+ \sum_{k=m+1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

يكفي أخذ الحد الأعلى في الطرف الأيسر للمتباينة السابقة للحصول على

$$V_a^b(f) \le V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

من جهة أخرى، لدينا حسب تعريف الحد الأعلى، من أجل كلّ $\varepsilon > 0$

يوجد تقسيم $P_1 = \{a = x_{1,0} < x_{1,1} < \dots < x_{1,n} = c\}$ لـ $[a,c]$

ويوجد تقسيم $P_2 = \{c = x_{2,0} < x_{2,1} < \dots . < x_{2,m} = b\}$ لـ $[c,b]$

بحيث

$$V_a^c f - \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} |f(x_{1,k}) - f(x_{1,k-1})|$$

و $V_c^b f - \varepsilon/2 < \sum_{l=1}^{m} \left| f\left(x_{2,l}\right) - f\left(x_{2,l-1}\right) \right|$

بضم التقسيمين نحصل على تقسيم لـــ $[a,b]$ بحيث

$$\sum_{j=1}^{n+m} \left| f\left(x_j\right) - f\left(x_{j-1}\right) \right| = \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(x_{1,k}\right) - f\left(x_{1,k-1}\right) \right| + \sum_{l=1}^{m} \left| f\left(x_{2,l}\right) - f\left(x_{2,l-1}\right) \right| > V_a^c f + V_c^b f - \varepsilon,\ (\forall \varepsilon > 0)$$

ومنه $V_a^c f + V_c^b f \le V_a^b f$.■

مبرهنة 35.09: إذا كانت $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ دالة متّصلة بحيث $V_a^b f < \infty$، فإنّ $\varphi(x) = V_a^x f$ دالة متّصلة ومتزايدة.

إثبات: إذا كان $x < y$ فإنّ $V_a^y f = V_a^x f + V_x^y f$ حسب المبرهنة السابقة، وبما أنّ $V_x^y f \ge 0$ فإنّنا نحصل على $\varphi(x) = V_a^x f \le \varphi(y) = V_a^y f$، أي أنّ φ متزايدة.

لتكن $x_0 \in]a,b]$ ولنتثبت اتّصال φ عن يسار x_0. إنّ كون f متّصلة عند x_0 يستلزم أنّ

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \left| x - x_0 \right| < \delta \Rightarrow \left| f(x) - f\left(x_0\right) \right| < \varepsilon/2 .$$

(يمكننا إضافة الشرط $\delta < x_0 - a$ حتى يكون لـــ $f(x)$ معنًى)
يوجد إذن من أجل نفس العدد ε تقسيم P لـــ $[a,x_0]$ بحيث

$$V_a^{x_0} f - \varepsilon/2 < \sum_{k=1}^{n} \left| f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right) \right|،$$

ليكن $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ بحيث $x_{l-1} < x < x_l$ من أجل دليل l، $l < n$. لدينا

$$V_a^{x_0} f - \tfrac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{l-1} \left| f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right) \right| + \sum_{k=l+1}^{n} \left| f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right) \right| + \left| f(x) - f\left(x_{l-1}\right) \right| + \left| f(x) - f\left(x_l\right) \right|$$

(لأنّ $\left| f\left(x_l\right) - f\left(x_{l-1}\right) \right| \le \left| f\left(x_l\right) - f(x) \right| + \left| f(x) - f\left(x_{l-1}\right) \right|$)

من جهة أخرى، ينتج عن كون P تقسيما لـــ $[a,x_0]$ و $x<x_l$ أنّ لكلّ $l\leq k$ لدينا $x_k\in(x_0-\delta,x_0)$، وبالتالي

$$\sum_{k=l+1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|f(x_l)-f(x)|-|f(x)-f(x_0)| <(n-l+1)\varepsilon/2$$

لدينا $|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}$، أي $\varepsilon-|f(x)-f(x_0)|>\frac{\varepsilon}{2}$، وبالتالي

$$V_a^{x_0}f<\sum_{k=1}^{l-1}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|f(x)-f(x_{l-1})|+\varepsilon$$
$$-|f(x)-f(x_0)|+\sum_{k=l+1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|+|f(x_l)-f(x)|$$

ومنه $V_a^{x_0}f<V_a^{x}f+\varepsilon'$، حيث ε' عدد صغير بقدر كاف.

إذن $\varphi(x_0)-\varphi(x)<\varepsilon'$، من أجل كلّ $x\in]x_0-\delta,x_0[$. نبرهن بنفس الكيفية على اتّصال φ عن يمين النقطة x_0، ويكون الإثبات أسهل إذا تطابقت النقطة x_0 مع إحدى نقاط التقسيم.■

من الواضح أنّ فرق دالتين متزايدتين هي دالّة ذات تغيرات محدودة حيث تبيّن المبرهنة التالية أنّ النتيجة العكسية هي كذلك صحيحة .

مبرهنة 36.09 (تفكيك جوردان[6]): **تكتب كلّ دالة ذات تغيرات محدودة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ كفرق دالتين متزايدتين.**

إثبات: لدينا $f(x)=V_a^xf-\left(V_a^xf-f(x)\right)$، وبما أنّ V_a^xf متزايدة فيكفي إذن إثبات أنّ $V_a^xf-f(x)$ هي بدورها متزايدة. ليكن $x_1,x_2\in[a,b]$ بحيث $x_1<x_2$ عندئذ

$$\left[V_a^{x_2}f-f(x_2)\right]-\left[V_a^{x_1}f-f(x_1)\right]=V_{x_1}^{x_2}f-\left(f(x_2)-f(x_1)\right)\geq 0،$$

وهو المطلوب.■

[6] ماري انمـوند جوردان [Marie Ennemond Camille Jordan] (1838–1922)

مبرهنة 37.09 [لوبيغ]: تقبل كل دالة ذات تغيرات محدودة مشتقة منتهية تقريبًا أينما كانت على $[a,b]$.

إثبات: هذه نتيجة مباشرة للمبرهنتين 12.09 و36.09.■

تعريف 38.09: لتكن J فترة من $\mathbb{R}$ و $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset J$ متتالية من النقاط. نضع

$$(\forall n \geq 1) \quad ، f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n \\ c_n, & x = x_n \\ d_n, & x > x_n \end{cases}$$

حيث $\sum_{n\geq 1} c_n$ و $\sum_{n\geq 1} d_n$ سلسلتان متقاربتان، نسمّي الدّالة $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ بدالة القفزات *(jump function)*.

ملاحظة 39.09: باستعمال مبرهنة فوبنيه 17.09 والمبرهنة 15.09 نرى أنّ مشتقة كلّ دالة قفزات متزايدة (أي أنّ f_n متزايدة) معدومة تقريبًا أينما كانت على J.

تجدر الإشارة إلى وجود دوال متّصلة ومتزايدة تماما تقبل مشتقات معدومة تقريبًا أينما كانت (أنظر 51.09).

لقد لاحظ القارئ من خلال المبرهنة 36.09 أنّ خواص الدّوال الرتيبة تنعكس إيجابًا على الدّوال ذات التغيرات المحدودة، لذلك سوف نبدأ بدراسة الدّوال الرتيبة أوّلاً.

لتكن f دالّة رتيبة على فترة مفتوحة J من $\mathbb{R}$، ولتثبيت الأفكار نفرض أنّ f دالّة حقيقيّة متزايدة و $x_0 \in J$. إذا كان $x \to x_0^-$ فإنّ $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ موجودة في $\mathbb{R}$ لأنّ f متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $f(x_0)$.

بطريقة مماثلة نجد أنّ $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ موجودة في $\mathbb{R}$. إذن f متّصلة عند x_0 إذا وإذا فقط تساوت هاتان النّهايتان.

تبيّن النّتيجة التالية أنّه فضلاً على أنّ نقاط تقطّع دالّة رتيبة هي قفزات

فإنّها كذلك مجموعة قابلة للعد. تكمن أهميّة هذه النّتيجة فـي استعمالها لإثبات خاصّية تفكيك كلّ دالّة ذات تغيرات محدودة إلى مجموع دالّة متّصلة ودالّة قفزات.

توطئة 40.09 : إنّ مجموعة نقاط تقطع دالّة رتيبة هي مجموعة قابلة للعد.

إثبات: إذا كانت $\{x_k\}_{k=1}^{m}$ قفزات الدّالّة f فإنّ

$$\sum_{k=1}^{m}\left|f\left(x_k^+\right)-f\left(x_k^-\right)\right|\le\left|f(b)-f(a)\right| .$$

لتكن

$$E=\bigcup_{n\ge1}E_n=\bigcup_{n\ge1}\left\{x:\left|f\left(x^+\right)-f\left(x^-\right)\right|>\tfrac{1}{n}\right\} .$$

عندئذ تتطابق E مع مجموعة نقاط تقطّع f، ومن المتباينة السابقة نحصل على

$$Card\left(E_n\right)\le n\left|f(b)-f(a)\right| ،$$

وبالتالي فإنّ E مجموعة قابلة للعد.■

ملاحظة 41.09: حتّى يكون لـ $f\left(x^+\right)$ و $f\left(x^-\right)$ معنى فـي الإثبات السابق فبإمكاننا تمديد f على يمين b (وعلى يسار a) بثابت ملائم.

لازمة 42.09: إنّ مجموعة نقاط تقطع دالّة ذات تغيرات محدودة هي مجموعة قابلة للعد.

ملاحظة 43.09: لا ينبغي الخلط بين هذه اللاّزمة وما ينتج عن القضية **10.09** والمبرهنة **37.09**. أكيد أنّ القضية **10.09** والمبرهنة **37.09** تستلزمان أنّ f متّصلة تقريبًا أينما كانت غير أنّ هذا لا يعني على الإطلاق أنّ مجموعة نقاط تقطّع الدّالّة f مجموعة قابلة للعد (راجع مجموعة كانتور C_1).

اللاّزمة الآتية هي نتيجة مباشرة للتوطئة **40.09** ومبرهنة **لوبيغ** التي تميّز الدّوال (ر)-قابلة للمكاملة.

لازمة 44.09: كلّ دالّة ذات تغيرات محدودة على $J=[a,b]$ هي قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ و(ر)-قابلة للمكاملة على J.

مبرهنة 45.09 (التفكيك): إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ذات تغيرات محدودة فإنّها تكتب بصيغة وحيدة كمجموع دالّة متّصلة ودالّة ذات قفزات.

إثبات : نعلم من اللاّزمة 42.09 أنّ مجموعة قفزات f مجموعة قابلة للعد، نرمز لهذه المجموعة بـ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. نضع
$c_n=f(x_n)-f(x_n^-)$ و $d_n=f(x_n^+)-f(x_n^-)$.

ونعرّف الدّالّتين $s(x)=\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ و $g=f-s$. نلاحظ أوّلاً أنّ g دالّة متّصلة على المجموعة $[0,1]\setminus\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. لدينا من جهة أخرى

$$g(x_n^+)-g(x_n)=\left[f(x_n^+)-f(x_n)\right]-\left[s(x_n^+)-s(x_n)\right]=0$$

و

$$g(x_n)-g(x_n^-)=\left[f(x_n)-f(x_n^-)\right]-\left[s(x_n)-s(x_n^-)\right]=0$$

وهذا يثبت أنّ g متّصلة كذلك عند النقاط $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

نعلم من خلال نظرية تكامل ريمان أنّه إذا كانت f دالّة متّصلة على الفترة $[a,b]$، فإنّ تكاملها غير المحدّد $\int_a^x f(t)dt$ قابل للاشتقاق، ولدينا $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$، $\forall x\in[a,b]$. بالتأكيد، بما أنّ f متّصلة على الفترة المتراصة $[a,b]$ فهي محدودة و(ر)-قابلة للمكاملة.

بوضع $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ نحصل على

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt.$$

وبفضل مبرهنة القيمة الوسطى نجد

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt=f(x+\theta h)\text{، حيث } 0\leq\theta\leq 1.$$

أخيرًا، يستلزم اتّصال f أنّ $F'(x)=\lim_{h\to 0} f(x+\theta h)=f(x)$، من أجل كل $x\in[a,b]$. ■

سوف نعمّم فيما يلي هذه الخاصيّة إلى الدّوال القابلة للجمع حيث تبقى صحيحة من أجل كلّ x في $[a,b]$ تقريبًا. كما نحصل تقريبًا أينما كان على المساواة

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{[x,x+h]} f(t)dt=f(x).$$

هذا يؤكّد مقولة أنّ الاشتقاق هو عملية وسطيّة.

هناك نتيجة أخرى سنحصل عليها خلال في هذا المقطع ألا وهي خاصيّة التغيّرات المحدودة التي يتمتّع بها التكامل غير المحدّد لدالة قابلة للجمع.
قبل عرض وإثبات كلّ هذا سنبيّن بفضل مبرهنة التقارب المرجّح (الصيغة المتّصلة) أنّ F متّصلة.

بالتأكيد، إذا كانت f دالّة قابلة للجمع على $[a,b]$ فإنّ

$$F(x+h)-F(x)=\int_{[a,b]}\chi_{(x,x+h)}(t)f(t)dt,\ (\forall h>0),$$

و

$$F(x+h)-F(x)=-\int_{[a,b]}\chi_{(x+h,x)}(t)f(t)dt,\ (\forall h<0),$$

ومنه $\lim_{h\to 0}\left(F(x+h)-F(x)\right)=0$، حسب مبرهنة التقارب المرجّح.

مبرهنة 46.09: لتكن $f\in\mathcal{L}^1([a,b])$، عندئذ $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ **متّصلة بانتظام على $[a,b]$ كما أنّها ذات تغيرات محدودة على $[a,b]$.**

إثبات: لدينا بفضل مبرهنة الاتّصال المطلق للتكامل (أنظر **41.06**)،

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x_1,x_2\in[a,b],|x_2-x_1|<\delta\Rightarrow\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|<\varepsilon,$$

وبالتالي فإنّ

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0:|F(x_1)-F(x_2)|<\varepsilon$$

لكل $x_1,x_2 \in [a,b]$ يحققان $|x_2 - x_1| < \delta$، وهذا يثبت الاتّصال المنتظم لـــ F.

من جهة أخرى، إذا كان $P = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b\}$ تقسيما لـــ $[a,b]$ فإنّ

$$\sum_{k=1}^{n} |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt \right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|dt$$

ومنه $V_a^b F \leq \int_a^b |f(t)|dt < \infty$. إذن $F \in BV[a,b]$. ■

ملاحظة 47.09 : 1) بإمكاننا الحصول على الخاصية الثانية للتكامل غير المحدّد F في المبرهنة السابقة بسهولة من خلال العلاقة (أي أنّ F هي ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$).

$$F(x) = \int_a^x f^+(t)dt - \int_a^x f^-(t)dt .$$

(في الواقع لا يمثّل هذا التعبير التفكيك الوحيد لدالّة ذات تغيّرات محدودة كفرق دالّتين متزايدتين)، بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$V_a^b F = \int_a^b |f(t)|dt .$$

2) يتبيّن من المبرهنة السابقة ومن المبرهنة **37.09** أنّ F' موجودة تقريبًا أينما كانت على $[a,b]$.

3) تبقى المبرهنة صحيحة على فترات غير محدودة، وبالخصوص من أجل $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ و $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ (كما يمكن لـــ f أن تكون مركّبة).

مبرهنة 48.09: لتكن $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ دالّة متزايدة، عندئذ f' دالّة قابلة للقياس

و $$\int_a^b f'(t)dt \leq f(b) - f(a) .$$

من جهة أخرى، إذا كانت f ذات تغيرات محدودة فإنّ f' قابلة للجمع على $[a,b]$.

إثبات: نمدّد $f(x)$ على يمين b بالثابت $f(b)$ من أجل كلّ $b<x$.
لتكن $f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$، لكلّ $n\geq 1$ و $x\in[a,b]$. من الواضح أنّ f_n غير سالبة وأنّها قابلة للقياس من أجل كلّ $n\geq 1$. وبما أنّ f رتيبة فإنّ f' موجودة تقريبًا أينما كانت على $[a,b]$، فضلاً على أنّها غير سالبة كما أنّها قابلة للقياس كنهاية لدوال قابلة للقياس.
نستنتج من متباينة فاتو أنّ

$$\begin{aligned}\int_a^b f'dx&=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx\\&=\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_a^b n\left[f\left(x+\tfrac{1}{n}\right)-f(x)\right]dx\\&=\underline{\lim}_{n\to\infty}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx\right]\\&\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\left[n\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(b)dx-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(a)dx\right]=f(b)-f(a)\end{aligned}$$

أخيرًا، إذا فرضنا أنّ f دالّة ذات تغيّرات محدودة فإنّها تكتب على شكل $f=f_2-f_1$، حيث f_1 و f_2 دالّتان متزايدتان. يكفي إذن تطبيق الجزء الأوّل من المبرهنة على f_1 و f_2 للحصول على النتيجة المطلوبة.■

تُعرف المبرهنة المقبلة باسم "المبرهنة الأساسية الأولى للحساب"

مبرهنة 49.09: لتكن $f\in\mathfrak{L}^1([a,b])$ و $F(x)=\int_a^x f(t)dt$، عندئذ $F'(x)=f(x)$، تقريبًا أينما كان في $]a,b[$.

إثبات: نفرض أنّ المبرهنة محققة من أجل كل دالة محدودة f وغير سالبة. نعرّف المتتالية

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & f(x)\leq n\\ n, & f(x)>n\end{cases}.$$

لاحظ أنّ $f_n(x)\leq n$، لكلّ $x\in[a,b]$، وأنّ $f(x)-f_n(x)\geq 0$،

$G_n(x)=\int_a^x[f(t)-f_n(t)]dt$ ومنه، $(\forall n\geq 1)$ ، $(\forall x\in[a,b])$
متزايدة من أجل كلّ n، وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق تقريبًا أينما كانت في $[a,b]$، من أجل كلّ n.
بإمكاننا الآن كتابة $F(x)$ كمجموع دالتين قابلتين للاشتقاق كما يلي

$$F(x)=\int_a^x fdt=\int_a^x(f-f_n)dt+\int_a^x f_ndt$$
$$=G_n(x)+\int_a^x f_ndt$$

ومنه $F'(x)=G_n'(x)+\left(\int_a^x f_ndt\right)'$.

لدينا $F'(x)=G_n'(x)+f_n(x)\geq f_n(x)$، تقريبًا أينما كان، ومن أجل كلّ $n\geq 1$، بالإضافة إلى $\left(\int_a^x f_ndt\right)'=f_n(x)$، تقريبًا أينما كان، وعليه فإنّ $F'(x)\geq f(x)$، تقريبًا أينما كان. بمكاملة الطرفين نجد $\int_a^b F'dt\geq\int_a^b fdt$.

الآن، بتطبيق المبرهنة السابقة على F نحصل على

$$\int_a^b F'dt\leq F(b)-F(a)=\int_a^b fdt.$$

إذن $\int_a^b F'dt=\int_a^b fdt$، أي $\int_a^b(F'-f)dt=0$، مع الملاحظة أنّ $F'-f\geq 0$. نستنتج فورًا أنّ $F'(x)=f(x)$، تقريبًا أينما كان.

لنثبت فيما يلي النتيجة من أجل الدّوال المحدودة. نفرض أنّ $|f|\leq M$ على $[a,b]$، ونضع من أجل كلّ $n\geq 1$،

$$H_n(x)=n\left[F\left(x+\tfrac{1}{n}\right)-F(x)\right],\ (\forall x\in[a,b]).$$

لدينا $\lim_{n\to\infty}H_n(x)=F'(x)$، تقريبًا أينما كان، وأنّ

$$|H_n(x)|=n\left|\int_a^{x+\frac{1}{n}}fdt-\int_a^x fdt\right|=n\left|\int_x^{x+\frac{1}{n}}fdt\right|\leq M,$$
$$(\forall x\in[a,b]),\ (\forall n\geq 1).$$

نستنتج من مبرهنة التقارب المحدود أنّ

$$\int_a^x F'dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x H_n dt = \lim_{n\to\infty} n\left(\int_a^x F\left(t+\tfrac{1}{n}\right)dt - \int_a^x F(t)dt\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} Fdt - \int_a^x Fdt\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\int_x^{x+\frac{1}{n}} Fdt - \int_a^{a+\frac{1}{n}} Fdt\right)$$
$$= F(x) - F(a) = \int_a^x fdt$$

(مع التذكير أنّ F متّصلة).

إذن $\int_a^x (F'-f)dt = 0$ ، $(\forall x \in]a,b[)$، وبالتالي $F'(x) = f(x)$، تقريبًا أينما كانت.■

3- الدّوال مطلقة الاتّصال

نعلم من نظريّة تكامل ريمان أنّ
$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a) ،$$
من أجل كلّ دالّة f ذات مشتقة قابلة للجمع.

تعرف هذه النّتيجة في التحليل الرياضي تحت اسم "المبرهنة الأساسية للحساب".

يبيّن المثال التالي تطبيقا بسيطًا لهذه المبرهنة الأساسية للحساب:

مثال 50.09 : نعتبر الدّالة $F:[0,1] \to \mathbb{R}$ المعرّفة بـــ

$$F(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & x \in]0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

تساوي مشتقة F في الفترة $]0,1]$، $F'(x) = \cos\frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x}\sin\frac{\pi}{x}$، وبإمكاننا وضع $F'(0) = 0$. بما أنّ F' و $|F'|$ دالّتان متّصلتان على $]0,1]$ فهما إذن (ر)-قابلتان للمكاملة على كلّ فترة جزئية من $]0,1]$ بينما $|F'|$ ليست (ر)-قابلة للمكاملة على $[0,1]$.

بالتأكيد، نعتبر المتتاليتين $a_k = \frac{2}{2k+1}$ و $b_k = \frac{1}{k}$ ، $(\forall k \geq 1)$. نستنتج

من المبرهنة الأساسيّة للحساب أنّ

$$\left|F(b_k)-F(a_k)\right|=\left|\int_{a_k}^{b_k}F'(t)dt\right|\le\int_{a_k}^{b_k}\left|F'(t)\right|dt .$$

ومن جهة أخرى لدينا $\left|F(b_k)-F(a_k)\right|=\left|\frac{(-1)^k}{k}-0\right|=\frac{1}{k}$،

نحصل ممّا تقدّم على

$$\int_0^1\left|F'(t)\right|dt\ge\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}\left|F'(t)\right|dt\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\text{ ، }(\forall n\ge 1).$$

إذن $\int_0^1\left|F'(t)\right|dt=+\infty$.

نودّ الآن تعميم المبرهنة الأساسية للحساب إلى تكامل لوبيغ. المثال التالي يوضّح أنّ فرضيّة اتّصال الدّالة وقابليّة اشتقاقها تقريبًا أينما كانت ليست كافية للحصول على النتيجة المرضية.

مثال 51.09: (دالة كانتور أو دالة لوبيغ الشاذة)

لتكن C_1 مجموعة كانتور التي أنشأناها باقتطاع الفترات الأوسطية المفتوحة J_{n_k}. نعرّف الدّالة φ على $[0,1]$ بـــ

$$\varphi(0)=0 \text{ و } \varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{2^n}\text{ ، عندما } x\in C_1\text{ ،}$$

وتكتب في هذه الحالة على النّحو التالي $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x_n}{3^n}$ ، حيث $x_n\in\{0,1\}$.

نضع $\varphi(x)=\frac{2k-1}{2^n}$ ، عندما $x\in[0,1]\setminus C_1$ ، أي $x\in J_{n_k}$ من أجل دليل معيّن n_k .

لدينا $\varphi(C_1)=[0,1]$ ، وبالتالي $\varphi([0,1])=[0,1]$. بما أنّ φ متزايدة فهي لا تقبل إذن قفزات، وعليه فإنّها متّصلة على $[0,1]$.

أخيرًا، ينتج عن كون $m(C_1)=0$ (أي C_1 مجموعة مهملة) و $\varphi'(x)=0$ على $[0,1]\setminus C_1$ أنّ $\varphi'=0$ ، تقريبًا أينما كانت على $[0,1]$ ، و $\int_0^1\varphi'(x)dx=0$ بينما $\varphi(1)-\varphi(0)=1$.

سوف نبيّن لاحقًا أنّ سبب عدم صحّة المساواة

$$\int_0^1 \varphi'(x)\,dx = \varphi(1) - \varphi(0)$$

يعود إلى كون φ لا تتمتّع بخاصيّة أساسيّة ألا وهي خاصيّة **الاتصال المطلق** التي نحن بصدد تعريفها.

تعريف 52.09: لتكن (أو $\mathbb{C}$) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. نقول عن f إنّها **مُطلقة الاتّصال** على $[a,b]$ إذا وجد من أجل كلّ عدد $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ بحيث

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon \text{ ،}$$

من أجل كلّ جملة $\left\{\left]a_k,b_k\right[\right\}_{k=1}^{n}$ من الفترات الجزئيّة المنفصلة مثنى مثنى من $[a,b]$ التي تحقق $\sum_{k=1}^{n}\left|b_k-a_k\right|<\delta$.

ترميز: سوف نرمز بـــ $AC([a,b])$ لمجموعة كلّ الدوال مطلقة الاتّصال على الفترة $[a,b]$.

مثال 53.09: إنّ الدّالة $f(x)=x$ مطلقة الاتّصال وذات تغيّرات محدودة على كلّ فترة محدودة من $\mathbb{R}$ غير أنّها ليست ذات تغيّرات محدودة على $\mathbb{R}$ كلّها.

ملاحظة 54.09: بأخذ $n=1$ نرى أنّ كلّ دالّة مطلقة الاتّصال على $[a,b]$ هي متّصلة بانتظام على نفس الفترة.

مثال 55.09: إنّ كلّ كثير حدود هو دالّة مطلقة الاتّصال على كلّ فترة محدودة من $\mathbb{R}$ إلاّ أنّه ليس بالضرورة متّصلا بانتظام على $\mathbb{R}$ (يكفي اعتبار $f(x)=x^2$).

مثال 56.09: إنّ دالّة **كانتور** φ في **المثال 51.09** ليست مطلقة الاتّصال. بالتأكيد، نمدّد أوّلا φ بـــ 0 على يسار 0 وبـــ 1 على يمين

1. لتكن $C_1 \subset \bigcup_{k\geq 1}]a_k,b_k[$ أسرة من الفترات الجزئية المنفصلة مثنى مثنى بحيث يكون المقدار $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k-a_k|$ صغيرًا بقدر كاف. عندئذ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi(b_k)-\varphi(a_k)\right)=1 \text{ ،}$$

ومنه $\sum_{k=1}^{n}\left(\varphi(b_k)-\varphi(a_k)\right)\geq \frac{1}{2}$ ، من أجل عدد طبيعي n كبير بقدر كاف. وهكذا فإنّ الاتّصال المطلق هو أقوى من الاتّصال النقطي وكذا الاتّصال المنتظم.

تفيدنا القضيّة التالية بطريقةٍ عمليّةٍ لإنشاء دوال مطلقة الاتّصال. يمكن للقارئ مقارنة هذه النتيجة مع مبرهنة **46.09**.

قضيّة 57.09: إنّ التكامل $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ غير المحدّد لدالة قابلة للجمع $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ هو دالة مطلقة الاتّصال على $[a,b]$.

إثبات: إنّها في الواقع استنتاج مباشر من خاصيّة الاتّصال المطلق لتكامل لوبيغ. بالفعل، يوجد من أجل كلّ $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ بحيث $\int_A|f|dx<\varepsilon$ ، من أجل كلّ مجموعة جزئية قابلة للقياس $A\subset[a,b]$ تحقق $m(A)<\delta$.

لتكن $\{]a_k,b_k[\}_{k=1}^{n}$ جملة منتهية من الفترات الجزئية المنفصلة مثنى مثنى من $[a,b]$ بحيث $\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<\delta$. بوضع $A=\bigcup_{k=1}^{n}]a_k,b_k[$ نحصل على

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k)-F(a_k)|=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a_k}^{b_k}fdx\right|$$
$$\leq\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k}|f|dx=\int_A|f|dx<\varepsilon$$

ومنه الدّالة F مطلقة الاتّصال على $[a,b]$.■

سوف نثبت لاحقًا أنّ النتيجة العكسية صحيحة بمعنى أنّ كل دالّة مطلقة الاتصال هي تكامل غير محدّد لدالة معيّنة قابلة للجمع.

ملاحظة 58.09: يمكننا في التعريف السابق اعتبار متتالية من الفترات الجزئيّة بدلاً من جملة منتهية. بالتأكيد، إذا كانت $\{]a_k,b_k[\}_{k=1}^{\infty}$ متتالية من الفترات بحيث

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$ ، من أجل كلّ n،

عندئذ، بجعل $n\to\infty$ نحصل على

$$\sum_{K=1}^{\infty}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon .$$

مبرهنة 59.09: كلّ دالّة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مطلقة الاتّصال هي عنصر من $BV([a,b])$.

إثبات: بما أنّ f مطلقة الاتصال، عندئذ من أجل $\varepsilon=1$ يوجد $\delta>0$ بحيث

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<1$$ ، من أجل $$\sum_{k=1}^{n}|b_k-a_k|<\delta .$$

نثبّت عددا $\frac{b-a}{\delta}<m$ ونختار تقسيما منتظماً لـ $[a,b]$،

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b$$

بحيث $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{m}$، ثمّ نجزّئ كلّ فترة جزئية إلى

$$]x_{k-1},x_k[=\bigcup_{j=1}^{n_k}]\alpha_j,\beta_j[.$$

بما أنّ $x_k-x_{k-1}<\delta$، عندئذ

$$\sum_{j=1}^{n_k}|f(\beta_j)-f(\alpha_j)|<1 ،$$

ومنه $V_{x_{k-1}}^{x_k}f\le 1$، لكلّ $k\in\{1,\ldots,m\}$، وبالجمع نحصل على $V_a^b f\le m$.

مبرهنة 60.09: تكتب كل دالّة مطلقة الاتّصال $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ كفرق دالّتين موجبتين، متزايدتين ومطلقتي الاتّصال على $[a,b]$.

إثبات: نلاحظ أوّلاً أنّ f دالّة ذات تغيرات محدودة حسب المبرهنة 59.09، ولدينا حسب المبرهنة 36.09، $f=f_2-f_1$، حيث f_1 و f_2 دالّتان موجبتان ومتزايدتان.

لنثبت الآن أنّ الدّالتين f_1 و f_2 مطلقتا الاتّصال على $[a,b]$ مع التذكير أنّ $f_1(x)=V_a^x f-f(x)$ و $f_2(x)=V_a^x f$. يوجد من أجل كلّ $\varepsilon>0$ عدد $\delta>0$ بحيث $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|<\varepsilon$، من أجل كلّ جملة $\left\{]a_k,b_k[\right\}_{k=1}^{n}$ من الفترات الجزئية المنفصلة مثنى مثنى بحيث $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|b_k-a_k\right|<\delta$.

ما نريد إثباته هو أنّ $\sum\limits_{k=1}^{n}\left|f_2(b_k)-f_2(a_k)\right|<\varepsilon$. لهذا الغرض نعتبر من أجل كلّ $k=1,\dots,n$ جملة منتهية من الفترات الجزئية من $]a_k,b_k[$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\left\{]c_{kl},d_{kl}[\right\}_{l=1}^{n_k}$. من الواضح أنّ

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{n_k}\left|d_{kl}-c_{kl}\right|\right)\le\sum_{k=1}^{n}\left|b_k-a_k\right|<\delta$$

ومنه

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_k}\left|f(d_{kl})-f(c_{kl})\right|<\varepsilon ،$$

إذن $\sum\limits_{k=1}^{n}V_{a_k}^{b_k}f\le\varepsilon$. وبما أنّ $f_2(x)=V_a^x f$، عندئذ

$$\sum_{k=1}^{n}\left|f_2(b_k)-f_2(a_k)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|V_a^{b_k}f-V_a^{a_k}f\right|=\sum_{k=1}^{n}V_{a_k}^{b_k}f\le\varepsilon .$$

وهكذا فإنّ f_2 مطلقة الاتّصال على $[a,b]$. من جهة أخرى، لـــدينا $f_1=f_2-f$، وبالتالي فهي بدورها مطلقة الاتّصال كفرق لدالّتين مطلقتي الاتّصال، وهو المطلوب.■

4- المبرهنة الأساسية الثانية للحساب

من المعلوم أنّ في إطار نظريّة تكامل ريمان المساواة

$$(*) \qquad f(x)=f(a)+\int_a^x f'(y)dy$$

صحيحة من أجل كلّ دالة متّصلة f ذات مشتقة متّصلة f'. يمكننا إذن نظريًّا إنشاء الدّالة f انطلاقا من مشتقتها f'. تسمّى هذه العلاقة **بالمبرهنة الأساسيّة الثانية للحساب.**

عمليًّا، نصادف بعض الصعوبات أثناء تعميم هذه المتطابقة إلى تكامل لوبيغ. ينبغي للدّالة أن تكون قابلة للاشتقاق مع وجود تكامل f' على $[a,b]$ مع صحّة المساواة.

يعبّر المثال التالي على هذه الحالة. لتكن $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ معرّفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2},\ x\in\,]0,1] \\ 0,\ x=0 \end{cases}،$$

إنّها قابلة للاشتقاق بينما مشتقتها f' ليست قابلة للجمع على $[0,1]$ (f' قابلة للجمع بمفهوم التكامل المعتلّ). رأينا سابقا أنّ دالّة لوبيغ متّصلة ومشتقتها قابلة للجمع بينما لا تحقق المساواة (*). هذا يعني أنّ اتّصال الدّالة وقابليّة اشتقاقها ليسا كافيين لصحة (*). نذكر أنّنا قد أثبتنا في المبرهنة **48.09** أنّ $\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)$ بالنسبة للدّوال المتزايدة غير أنّ المساواة ليست على العموم محققة (يكفي اعتبار دالّة لوبيغ).

لقد رأينا في القضيّة **57.09** أنّ الدّالة $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ مطلقة الاتّصال عندما $f\in\mathfrak{L}^1([a,b])$، وتؤكّد المبرهنة الأساسية الثانية للحساب، والتي نحن بصدد إثباتها، صحة النتيجة العكسية لـــ **57.09**، أي أنّ هذه الدّوال $F(x)$ هي الأمثلة الوحيدة (مع إمكانيّة إضافة ثابت) للدّوال المطلقة الاتّصال. نستطيع القول أنّ التكاملات غير المحدّدة للدوال الـــ(ل)-قابلة للجمع تشكل فضاءً جزئيًّا من فضاء الدّوال ذات التغيّرات المحدودة والتي هي مميّزة بخاصيّة الاتّصال المطلق.

قضية 61.09: لتكن $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مطلقة الاتّصال و $f'(x)=0$ ، تقريبًا

أينما كانت في $]a,b[$، عندئذ f ثابتة.

مبرهنة 62.09 (المبرهنة الأساسية الثانية للحساب): إذا كانت $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ مطلقة الاتّصال فإنّ $f'\in\mathcal{L}^1([a,b])$، ولدينا

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt \text{ ،} (\forall x\in[a,b]).$$

إثبات: نستنتج من المبرهنتين **59.09** و**48.09** أنّ f دالّة ذات تغيّرات محدودة، وأنّ $f'\in\mathcal{L}^1([a,b])$. نرى كذلك من القضيّة **57.09** أنّ $g(x)=\int_a^x f'(t)dt$ مطلقة الاتصال على $[a,b]$، و لدينا من المبرهنة **49.09**، $g'=f'$، تقريبًا أينما كان على $]a,b[$. نلاحظ أخيرًا أنّ الدّالة $h=f-g$ ثابتة. بالتأكيد، نستنتج هذا مباشرة من القضية **61.09**، لأنّ h مطلقة الاتّصال و $h'=0$، تقريبًا أينما كانت. إذن

$$f(x)-g(x)=h(x)=h(a)=f(a)-g(a)=f(a)$$

أي أنّ $f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt$. ■

ملاحظة 63.09 : تكون دالة $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ تكاملاً غير محدّد لدالة قابلة للجمع إذا وإذا فقط كانت f مطلقة الاتّصال.

بإمكاننا إثبات المبرهنة السابقة تحت الشروط التالية:

f متّصلة، قابلة للاشتقاق تقريبًا أينما كانت على $J=[a,b]$ و $f'\in\mathcal{L}^1(J)$.

في الواقع تبقى المبرهنة الأساسية الثانية للحساب صحيحة على $\mathbb{R}$، ولدينا

مبرهنة 64.09: تكون دالة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تكاملاً غير محدّد لدالة قابلة للجمع إذا وإذا فقط كانت ذات تغيّرات محدودة، مطلقة الاتّصال على كل فترة منتهية من $\mathbb{R}$، وأنّ

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 .$$

5- المكاملة بالتجزئة

سوف نعرض في هذا المقطع استنتاجين مباشرين من المبرهنتين الأساسيتين للحساب وهما عمليًّا ذوا أهميّة بالغة في التحليل الرياضي. تخصّ الأولى **المكاملة بالتجزئة** والثانية هي **صيغة تبديل المتغيّر أو المكاملة بالتعويض**.

هذه صيغة الخاصيّتين في إطار تكامل ريمان:

مبرهنة 65.09 : لتكن $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالّتين قابلتين للاشتقاق و $f',g'\in\mathcal{R}([a,b])$، عندئذ

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f'(x)g(x)dx \text{ .}$$

ترميز: سوف نستعمل الترميز التالي:

$$fg\big|_{x=a}^{x=b}:=f(b)g(b)-f(a)g(a) \text{ .}$$

مبرهنة 66.09: لتكن $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق بحيث $h'\in\mathcal{R}([a,b])$ و $f:h([a,b])\to\mathbb{R}$ دالّة متّصلة، عندئذ

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)dt=\int_{h(a)}^{h(b)}f(x)dx \text{ .}$$

نودّ فيما يلي تعميم هاتين المبرهنتين إلى تكامل لوبيغ، وقبل التّعرّض إلى هذا الموضوع نفيد القارئ بهذا المثال:

مثال 67.09: لتكن f دالّة لوبيغ المعرّفة في **51.09**. من المعلوم أنّ $f(0)=0$، $f(1)=1$ وأنّ لـ f مشتقّة معدومة تقريبًا أينما كانت على $[0,1]$. نعرّف g على $[0,1]$ بـ $g(x)=1-x$. لاحظ أنّ صيغة المكاملة بالتجزئة غير صحيحة في هذه الحالة.

مبرهنة 68.09: ليكن F و G تكاملين محدّدين لدالّتين قابلتين للجمع f و g على $[a,b]$، عندئذ

$$\int_a^x (Fg+fG)\,dt = FG\big|_a^x \text{ ، } (\forall x\in[a,b]).$$

إثبات: نفرض أنّ $F(x)=\int_a^x f(t)\,dm+c$ و $G(x)=\int_a^x g(t)\,dm+d$ حيث $f,g\in\mathfrak{L}^1([a,b])$ ، $c,d\in\mathbb{R}$ و $x\in[a,b]$ ، أو بعبارة أخرى، الدّالتان F و G مطلقتا الاتّصال. ينتج فورًا عن كون F و G محدودتين وعن المتباينة التالية

$$\left|F(b_k)G(b_k)-F(a_k)G(a_k)\right|\le\left|G(b_k)\right|\left|F(b_k)-F(a_k)\right| + \left|F(a_k)\right|\left|G(b_k)-G(a_k)\right|$$

أنّ FG دالّة مطلقة الاتّصال. من جهة أخرى، نستنتج من المبرهنة 49.09 أنّ F و G دالتين قابلتين للاشتقاق تقريبًا أينما كانتا على $[a,b]$ ، ولدينا تقريبًا أينما كان، $F'=f$ و $G'=g$. إذن $(FG)'=Fg+fG$ ، تقريبًا أينما كان.

أخيرًا، لدينا حسب المبرهنة الأساسية الثانية للحساب

$$\int_a^x (Fg+fG)\,dt=\int_a^x (FG)'(t)\,dt=F(x)G(x)-F(a)G(a) \text{ ، }$$

وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة.■

ملاحظة 69.09: تستعمل هذه المبرهنة بكثرة لحساب التكاملات من الشكل $\int_a^b fg'\,dx$.

مبرهنة 70.09 (المكاملة بالتجزئة): لتكن f و g دالّتين مطلقتي الاتّصال على $[a,b]$ ، عندئذ

$$\int_a^b fg'\,dx=fg\big|_a^b-\int_a^b f'g\,dx .$$

ملاحظة 71.09 : تبقى هذه المبرهنة صحيحة على $\mathbb{R}$ تحت فرضيات المبرهنة 64.09، لدينا إذن

$$\int_{\mathbb{R}} fg'\,dx=\lim_{x\to+\infty} f(x)\lim_{x\to+\infty} g(x)-\int_{\mathbb{R}} f'g\,dx .$$

نقدّم فيما يلي بعض الشروط الكافية لصحة تبديل المتغيّر داخل التكامل.

مبرهنة 72.09: لتكن $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للاشتقاق تقريبًا أينما كانت و $F:[c,d]\to\mathbb{R}$ دالّة مطلقة الاتّصال بحيث $\phi([a,b])\subset[c,d]$ و $F'(x)=f(x)$، تقريبًا أينما كانت على $[c,d]$. عندئذ، القضيتان التاليتان متكافئتان:

أ) $F\circ\phi$ دالّة مطلقة الاتّصال على $[a,b]$،

ب) $(f\circ\phi)\phi'\in\mathfrak{L}^1([a,b])$، ولدينا

$$\int_{\phi(u)}^{\phi(v)}f(x)dm=\int_u^v(f\circ\phi)(x)\phi'(x)dm \text{ ، } \forall u,v\in[a,b].$$

إذا كانت ϕ دالّة مطلقة الاتّصال على $[a,b]$ فتبقى هذه الصّيغة صحيحة تحت إحدى الشروط الإضافية التالية:

أ) الدّالة f قابلة للقياس ومحدودة على $[c,d]$.

ب) الدّالة f قابلة للجمع على $[c,d]$ و $(f\circ\phi)\phi'$ قابلة للجمع على $[a,b]$.

ج) الدّالة f قابلة للجمع على $[c,d]$ و ϕ رتيبة.

مثال 73.09 : لنحسب التكامل $\mathrm{I}=\int_0^{\pi^2/4}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$، لدينا $\left|\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ مع الملاحظة أنّ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ قابلة للجمع على الفترة $\left[0,\pi^2/4\right]$. بوضع $\phi(x)=\sqrt{x}$ نجد أنّ $\phi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$، ومنه $\mathrm{I}=2\int_0^{\pi/2}\sin y\, dy=2$.

كتطبيق آخر للمبرهنتين الأساسيتين للحساب مع استعمال خاصية الاشتقاق داخل التكامل يمكننا إثبات ما يسمّى بصيغة لايبنيتز[7] (Leibniz).

مبرهنة 74.09 (صيغة لايبنيتز): لتكن J و J' فترتين اختياريّتين من $\mathbb{R}$

[7]) جوتفراد ولهالم لايبنيتز [Gottfried Wilhelm Leibniz] (1646-1716)

و $f:J\times J'\to\mathbb{R}$ دالّة متّصلة على $J\times J'$ بحيث مشتقتها الجزئيّة $\frac{\partial f}{\partial x}$ (بالنسبة للمتغيّر الأول) متّصلة على $J\times J'$. نفرض أنّ $u,v:J\to J'$ دالّتان قابلتان للاشتقاق على J . عندئذ

$$G(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(x,y)dy$$

دالّة قابلة للاشتقاق على J، ولدينا

$$G'(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy+f\big(x,v(x)\big)v'(x)-f\big(x,u(x)\big)u'(x).$$

6- مبرهنة القيمة الوسطى

من المعلوم أنّه إذا كانت f (ر)-قابلة للمكاملة على $[a,b]$ و $m\le f(x)\le M$ لكلّ $x\in[a,b]$ فإنّ

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)،$$

وإذا كانت f دالّة متّصلة على $[a,b]$ فإنّ

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)\text{ ، من أجل نقطة } c \text{ من } [a,b].$$

هذا يعني هندسيّا أنّه إذا كان $f\ge 0$ فإنّ المساحة المحصورة ما بين محور الفواصل، منحنى f والمستقيمين العموديين $x=a$ و $x=b$ تساوي مساحة المستطيل المحصور ما بين محور الفواصل، $x=a$ و $x=b$ والمستقيم الأفقي $y=f(c)$.

إذا كتبنا هذه العلاقة كالآتي $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$ فهذا يعني أنّ $f(c)$ تمثّل قيمة وسطى للدّالّة f على $[a,b]$.

نشير إلى أنّ القيمة الوسطى لا تعني بالضرورة شيئًا معيّنًا بالنسبة للدّوال الــ(ل)-قابلة للمكاملة.

هذه الآن صيغة مبرهنة القيمة الوسطى في إطار تكامل لوبيغ:

مبرهنة 75.09 (المبرهنة الأولى للقيمة الوسطى): لتكن f دالة موجبة و(ل)-قابلة للمكاملة على $[a,b]$ و g دالّة متّصلة على $[a,b]$، عندئذ توجد $c\in[a,b]$ بحيث

$$(**) \quad . \int_a^b f(x)g(x)dx = g(c)\int_a^b f(x)dx$$

إثبات: نضع $\alpha = \int_a^b f(x)dx$. لدينا

$$\min_{x\in[a,b]} g(x)\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \max_{x\in[a,b]} g(x)\int_a^b f(x)dx$$

$$.\alpha \min_{x\in[a,b]} g(x) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le \alpha \max_{x\in[a,b]} g(x)$$

إذا كان $\alpha = 0$ فإنّ $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ ، وبالتالي المتطابقة (**) صحيحة.

نفرض إذن أنّ $\alpha \neq 0$، عندئذ

$$\min_{x\in[a,b]} g(x) \le \frac{1}{\alpha}\int_a^b f(x)g(x)dx \le \max_{x\in[a,b]} g(x)$$

وبما أنّ g دالّة متّصلة توجد عندئذ حسب مبرهنة القيمة الوسطى $c\in[a,b]$ بحيث $\frac{1}{\alpha}\int_a^b f(x)g(x)dx = g(c)$ ، وبهذا تتحقق العلاقة (**).■

ملاحظة 76.09: نسمّى $g(c)$ في العلاقة (**) **بالـ f-وسط g على الفترة** $[a,b]$. كما نشير إلى أنّ فرضية اتّصال g أساسية في المبرهنة السابقة لضمان وجود القيمة الوسطى كما يتبيّن في المثال التالي:

مثال 77.09: نعتبر الدّالة الثابتة $f \equiv 1$ على $[-1,1]$ والدّالة $g(x) = -\chi_{[-1,0]}(x) + \chi_{]0,1]}(x)$. من السهل التأكد من أنّ

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0 \text{ و } \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 ،$$

وبالتالي لا وجود للقيمة الوسطى c.

تطبيق 78.09: إذا كان لدينا جسمًا متجانسًا ممدّدًا على محور الفواصل من a إلى b فإنّ مركز ثقل هذا الجسم هو $\frac{a+b}{2}$.

وفي حالة ما إذا كان الجسم غير متجانس و $\gamma(x)$ هي كثافته الخطية عند كلّ نقطة x فإنّ الكتلة الكليّة M تساوي $\int_a^b \gamma(x)dx$، وتعطى الكثافة المرجّحة المتوسطة x_c بالعلاقة التالية

$$x_c = \frac{1}{M}\int_a^b x\gamma(x)dx \,.$$

هنالك صيغة أخرى تسمّى **بالمبرهنة الثانية للقيمة الوسطى** وتستعمل أحيانًا في بعض التطبيقات:

مبرهنة 79.09 : لتكن f و g دالّتين متّصلتي الاشتقاق على $[a,b]$. إذا كانت g متزايدة، توجد عندئذ $\xi \in [a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx \,.$$

إثبات: لاحظ أوّلاً أنّ المبرهنة بديهية عندما تكون الدّالة g ثابتة. نضع $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. نستنتج من **مبرهنة المكاملة بالتجزئة** أنّ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = Fg\big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

وبما أنّ $g' \geq 0$ فإنّه بإمكاننا كتابة

$$\min_{x\in[a,b]} F(x)\int_a^b g'(x)dx \leq \int_a^b F(x)g'(x)dx \leq \max_{x\in[a,b]} F(x)\int_a^b g'(x)dx$$

ينتج عن مبرهنة القيمة الوسطى وجود $\xi \in [a,b]$ بحيث

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi)\int_a^b g'(x)dx = F(\xi)\left[g(b)-g(a)\right] ،$$

وبالتالي فإنّ

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\left[F(b)-F(\xi)\right] + g(a)\left[F(\xi)-F(a)\right] ،$$

وهو المطلوب.■

في الواقع هذه المبرهنة صحيحة تحت شروط أضعف بكثير من الشروط المعطاة في المبرهنة السابقة. لدينا

مبرهنة 80.09: لتكن f قابلة للجمع على $]a,b[$ و g دالّة محدودة ومتزايدة

على $]a,b[$، توجد عندئذ $\xi\in[a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a^+)\int_a^\xi f(x)dx + g(b^-)\int_\xi^b f(x)dx \text{ .}$$

إثبات: تمرين.

إنّ فرضية الرتابة بالنسبة للدّالة g في المبرهنة هي أساسية كما يؤكّده المثال التالي:

مثال 81.09 : لتكن $f(x)\equiv g(x):=x^2-1$ على $[-1,1]$. لدينا $g(-1)=g(1)=0$ و $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx=\frac{16}{15}$.

مسألة محلولة

لتكن $f:J=[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة معطاة. و D مجموعة جزئية من J .

1) نفرض أنّ f قابلة للاشتقاق عند كلّ نقطة من D ويوجد ثابت $C>0$ بحيث $|f'(x)|\le C$ ، $(\forall x\in D)$.

أثبت المتباينة التالية: $m^*(f(D))\le C\,m^*(D)$.

2) استنتج من 1) أنّه إذا كانت f قابلة للقياس و قابلة للاشتقاق عند كلّ نقطة من مجموعة قابلة للقياس $A\in J\cap\mathcal{L}$ فإنّ

$m^*(f(A))\le\int_A|f'|dx$.

3) أحسب $m^*(f(A))$ من أجل f قابلة للاشتقاق تقريبًا أينما كان على J و $A=\{x\in J: f'(x)=0\}$.

الحل:

1) نعرّف من أجل كلّ $\varepsilon>0$ و $n\in\mathbb{N}^*$ المجموعة

$$D_n=\left\{x\in D: |f(x)-f(t)|\le(C+\varepsilon)|x-t|,\ \forall t\in J: |x-t|\le\tfrac{1}{n}\right\}\text{ ،}$$

من الواضح أنّ المتتالية $\{D_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة وتحقق $D=\bigcup_{n\geq 1} D_n$. ينتج عن تعريف $m^*(D)$ أنّ من أجل كلّ $\varepsilon>0$ و $n\in\mathbb{N}^*$ توجد تغطية لـ D_n بفترات مفتوحة $\{J_k^n\}_{k\geq 1}\subset J$ بحيث

$D_n\subset\bigcup_{k\geq 1} J_k^n$، $\sum_{k\geq 1}\ell\left(J_k^n\right)\leq m^*(D_n)+\varepsilon$ و $\ell\left(J_k^n\right)\leq\frac{1}{n}$، $(\forall k\geq 1)$.

لدينا من أجل كلّ $x,t\in D_n\cap J_k^n$ ما يلي

$$|f(x)-f(t)|\leq(C+\varepsilon)|x-t|\leq(C+\varepsilon)\ell\left(J_k^n\right),$$

ومنه

$$m^*\left(f\left(D_n\cap J_k^n\right)\right)\leq(C+\varepsilon)\ell\left(J_k^n\right),\ (\forall k\geq 1).$$

ينتج عن التجميع الجزئي القابل للعدد لـ m^* أنّ

$$\begin{aligned}m^*\left(f(D_n)\right)&=m^*\left(f\left(D_n\cap\left[\bigcup_{k\geq 1}J_k^n\right]\right)\right)=m^*\left(\bigcup_{k\geq 1}f\left(D_n\cap J_k^n\right)\right)\\&\leq\sum_{k\geq 1}m^*\left(f\left(D_n\cap J_k^n\right)\right)\leq\sum_{k\geq 1}(C+\varepsilon)\ell\left(J_k^n\right)\\&\leq(C+\varepsilon)\left(m^*(D_n)+\varepsilon\right)\end{aligned}$$

بتطبيق التمرين 14 السؤال 3) من الفصل الثالث نجد

$$\begin{aligned}m^*\left(f(D)\right)&=m^*\left(\bigcup_{n\geq 1}f(D_n)\right)=\lim_{n\to\infty}m^*\left(f(D_n)\right)\\&\leq(C+\varepsilon)\lim_{n\to\infty}\left(m^*(D_n)+\varepsilon\right)\leq(C+\varepsilon)\left(m^*(D)+\varepsilon\right)\end{aligned}$$

إذن

$$m^*\left(f(D)\right)\leq C\,m^*(D),$$

لكون ε اختياريًّا.

2) ليكن $\varepsilon>0$، نعرّف من أجل كلّ $n\in\mathbb{N}^*$ المجموعة

$$B_n=\left\{x\in A:\varepsilon(n-1)\leq\left|f'(x)\right|<\varepsilon n\right\}.$$

بما أنّ f' دالة قابلة للقياس على A، عندئذ B_n هي مجموعة جزئية قابلة للقياس. من السهل التأكّد من أنّ $B_i\cap B_j=\varnothing$، $(\forall i\neq j)$، وأنّ $A=\bigcup_{n\geq 1}B_n$. نستنتج من السؤال السابق أنّ

$$m^*\left(f(A)\right) \le \sum_{n\ge1} m^*\left(f(B_n)\right) \le \sum_{n\ge1} (\varepsilon n) m(B_n)$$
$$= \sum_{n\ge1} \int_{B_n} (\varepsilon n) dx \le \sum_{n\ge1} \int_{B_n} (|f'|+\varepsilon) dx$$
$$= \int_A (|f'|+\varepsilon) dx = \int_A |f'| dx + \varepsilon m(A)$$

وعليه فإنّ $m^*\left(f(A)\right) \le \int_A |f'| dx$ لكون ε اختياريًّا.

3) ينتج عن كون f' دالة قابلة للقياس أنّ A مجموعة جزئية قابلة للقياس. نستنتج فورًا من السؤال 2) أنّ

$$0 \le m^*\left(f(A)\right) \le \int_A |f'| dx = 0،$$

إذن $m^*\left(f(A)\right) = 0$، أي أنّ $f(A)$ مجموعة مهملة بمفهوم لوبيغ.

تمارين مقترحة

01 لتكن $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$. أثبت أنّ

أ) $D^+(f-g)(x) \ge D^+f(x) - D^+g(x)$، من أجل كلّ $x \in [a,b[$ حيث تكون $D^+f(x)$ منتهية،

ب) $D^-(f-g)(x) \ge D^-f(x) - D^-g(x)$، من أجل كلّ $x \in]a,b]$ حيث تكون $D^-f(x)$ منتهية.

02 لتكن $F,G:[a,b] \to \mathbb{R}$، حيث يمثّل G التكامل غير المحدّد لدالة قابلة للجمع ومحدودة g. أثبت أنّ

أ) $D^+(F-G)(x) \ge D^+F(x) - D^+G(x)$، من أجل كلّ $x \in [a,b[$،

ب) $D^-(F-G)(x) \ge D^-F(x) - D^-G(x)$، من أجل كلّ $x \in]a,b]$.

03 لتكن $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. من أجل كلّ $x_0 \in [a,b]$ نعرّف

$$(\underline{D}f)(x_0) = \liminf_{h\to0,\, h\ne0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$(\overline{D}f)(x_0) = \limsup_{h\to0,\, h\ne0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

أثبت أنّ من أجل كلّ $x \in]a,b[$ فإنّ

أ) $(\underline{D}f)(x) = min\{(D_-f)(x),(D_+f)(x)\}$

ب) $(\overline{D}f)(x) = max\{(D^-f)(x),(D^+f)(x)\}$

وبالنسبة لـــ $x=a$ و $x=b$ فإنّ

ج) $(\underline{D}f)(a) = (D_+f)(a)$ ، $(\underline{D}f)(b) = (D_-f)(b)$

د) $(\overline{D}f)(a) = (D^+f)(a)$ ، $(\overline{D}f)(b) = (D^-f)(b)$.

04 لتكن $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ، $\underline{D}$ و $\overline{D}$ معرّفين كما في التمرين السابق. أثبت أنّ

$\underline{D}(f-g)(x) \geq \underline{D}f(x) - \overline{D}g(x)$ ، لكلّ $x\in[a,b]$ بحيث يكون الطرف الأيمن معرّفا تعريفا جيّدا.

05 لتكن $f,g \in BV([a,b])$ و $k\in\mathbb{R}$ أثبت أنّ

أ) $kf \in BV([a,b])$ ، ولدينا $V_a^b(k\varphi) = |k| V_a^b(f)$ ،

ب) $f\pm g \in BV([a,b])$ و $V_a^b(f\pm g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$ ،

ج) $fg \in BV([a,b])$ ،

و) $V_a^b(fg) \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} |g(x)| V_a^b(f) + \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| V_a^b(g)$ ،

د) إذا كان $|f(x)| \geq c > 0$ لكلّ $x\in[a,b]$ فإنّ

$$\frac{1}{f} \in BV([a,b]) \text{ و } V_a^b(1/f) \leq \frac{1}{c^2} V_a^b(f)$$

06 أثبت أنّ الدّالة $f(x) = x\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0$ ليست ذات تغيّرات محدودة على أية فترة تحوي 0.

07 لتكن $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالّة بحيث $\varphi\in BV([a,b])$. أثبت أنّ

أ) $|\varphi| \in BV([a,b])$ ،

ب) $V_a^b(|\varphi|) \leq V_a^b(\varphi)$ ،

ج) $\frac{1}{b-a}\int_a^b |\varphi| dx \le |\varphi(a)| + V_a^b(|\varphi|)$ ،

08 لتكن $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ دالة متصلة و $|\varphi|\in BV([a,b])$. أثبت أنّ $\varphi\in BV([a,b])$.

09 لتكن الدّالة

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\in \left]0,\frac{2}{\pi}\right] \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

أثبت أنّ $f\notin BV\left(\left[0,\frac{2}{\pi}\right]\right)$.

10 أثبت أنّ $BV([a,b])$ هو فضاء بناخ بالنسبة للمعيار $\|f\|_{BV}=|f(a)|+V_a^b(f)$.

11 لتكن الدّالة

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

أثبت أنّ $f\notin BV([0,\pi])$.

12 لتكن $\{\varphi_n\}_{n\ge 1}\subset BV([a,b])$ بحيث $\varphi_n \xrightarrow{s} \varphi$.

أ) أوجد مثالاً يثبت أنّ φ ليست بالضرورة عنصرًا من $BV([a,b])$.

ب) نفرض وجود $M>0$ بحيث $V_a^b(\varphi_n)\le M$ ، $(\forall n\ge 1)$. أثبت أنّ $\varphi\in BV([a,b])$.

13 أثبت أنّ دالة مركّبة $f\in BV([a,b])$ إذا وإذا فقط كان $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f\in BV([a,b])$.

14 لتكن $f,g\in AC([a,b])$ (أي f و g دالّتان مطلقتا الاتّصال على $[a,b]$).

أثبت أنّ $f+g$ ، fg و f/g (عندما $g(x)\neq 0$ ، $(\forall x\in[a,b])$) عناصر من $AC([a,b])$.

15 لتكن f دالة قابلة للاشتقاق ذات مشتقة محدودة على الفترة $[a,b]$. أثبت أنّ $f \in AC([a,b])$.

16 أثبت أنّه إذا كانت f دالة ليبشيتزية فإنّ $f \in AC([a,b])$.

17 لتكن $f \in BV([a,b])$. أثبت أنّ $f \in AC([a,b])$ إذا وإذا فقط كان $V_a^x \in AC([a,b])$.

18 لتكن f دالة متّصلة و $f \in BV([a,b])$ بحيث $f \in C([c,b])$ من أجل كلّ $c \in]a,b[$.
أثبت أنّ $f \in AC([a,b])$.

19 أوجد مثالاً يثبت أنّ $f,g \in AC$ لا يستلزم بالضرورة أنّ $g \circ f \in AC$.

20 لتكن $f \in AC([a,b])$ و g ليبشيتزية على $[c,d]$ بحيث $g([c,d]) \subset [a,b]$. أثبت أنّ $f \circ g \in AC([c,d])$.

21 لتكن

$$f(x)=\begin{cases} x^{\alpha} \sin\frac{1}{x^{\beta}}, & x \in]0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

أثبت أنّ $f \in AC([0,1])$ إذا وإذا فقط $\beta < \alpha$.

22 لتكن $f \in AC([a,b])$ و $E \subset [a,b]$ مجموعة جزئية مهملة. أثبت أنّ $f(E) \subset \mathbb{R}$ مجموعة جزئية مهملة.

23 أثبت أنّ كلّ دالة محدّبة $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هي مطلقة الاتّصال على كلّ فترة $[a,b]$.

24 لتكن $f \in AC([a,b])$ و g متزايدة على $[c,d]$ بحيث $g([c,d]) \subset [a,b]$. أثبت أنّ $f \circ g \in AC([c,d])$.

25 أثبت أنّ الدّالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin^2\frac{1}{x}, & x \in]0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

مطلقة الاتّصال على $[0,1]$.

26 أثبت أنّ $h\in AC([a,b])$ يستلزم أنّ $V_a^b(h)=\int_a^b|h'(x)|dx$

27 أثبت أنّ الدّالة

$$g(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x},\ x\in]0,1] \\ 0,\ x=0 \end{cases}$$

ليست مطلقة الاتصال على $[0,1]$.

28 لتكن $f\in BV([a,b])$ تحقق $V_a^b(f)=\int_a^b|f'(x)|dx$. أثبت أنّ $f\in AC([a,b])$.

29 لتكن $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}\subset AC([a,b])$ بحيث $\varphi_n \xrightarrow{s} \varphi$.

أ) أثبت أنّ φ ليست بالضرورة عنصرًا من $AC([a,b])$ حتى في حالة التقارب المنتظم،

ب) أثبت أنّ $\lim\limits_{m,n\to\infty} V_a^b(\varphi_m-\varphi_n)=0$ يستلزم أنّ $\varphi\in AC([a,b])$.

30 لتكن f و g دالتين متّصلتي الاشتقاق على $[a,b]$ و g موجبة ورتيبة على $[a,b]$. أثبت وجود $\eta\in[a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_\eta^b f(x)dx\ .$$

31 لتكن $f\in AC([a,b])$ موجبة ومتناقصة و g دالة قابلة لمكاملة على $[a,b]$. أثبت وجود $\gamma\in[a,b]$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(a)\int_a^\gamma g(x)dx\ .$$