مقدمــة

مقدمـة

القياس هو مفهوم أساسي في الرياضيات حيث نستطيع من خلاله تعيين مدى كبر أو صغر حجم مجموعة ما في فضاء قياس معيّن كما يسمح لنا بتعميم مفهوم التكامل إلى أقصى حدوده. لا يخفى على أحد بأنّ للتكامل دورًا مركزيًّا في عدّة ميادين من الرياضيات، فهو يعدّ من الركائز الأساسية التي بني عليها التحليل الرياضي. ونظرًا للأهمّية البالغة من وجهتي النظر التجريدي والعملي صار التكامل مقرّرًا رسميًّا لطلبة الجامعة حيث يُدرّس تكامل ريمان في السنة الأولى ويُدرّس تكامل لوبيغ في السنة الثانية أو الثالثة.

لقد ساهم الكثير من العلماء في تطوير النظرية العامة للمكاملة نذكر منهم كوشي، ريمان، لوبيغ، بوريل، إيغوروف، كانتور، دانيال، فاتو، فيتالي، ريس، هان، كراثيودوري، رادون، نيكوديم، فوبيني، طونيلي، وغيرهم من اللاحقين.

في الواقع يعتبر تكامل ريمان (Riemann) [جورج فردريك برنهارد: 1826-1866] الأكثر شيوعًا بين الطلبة، المهندسين، الفيزيائيين وغيرهم، كما نكاد نجزم أنّه التكامل الوحيد المستعمل في جلّ أعمالهم بالرغم من بعض سلبياته وذلك لبساطة تعريفه. ترجع في الواقع أصول مفهوم التكامل بعيدًا في الزّمن إلى فترة ارخميدس (Archimedes) [ارخميدس:287 ق.م-212 ق.م] وحتى قبل ذلك بكثير حيث استعملت المضلّعات لحساب بعض المساحات كما استعمله لاحقا نيوتن (Newton) [اسحاق نيوتن: 1642-1727] ولايبنتز (Leibniz) [غوتفريد لايبنتز:1646-1716] في أعمالهما. لقد جاء بطبيعة الحال تكامل ريمان الذي نعرفه اليوم ليعمّم تكامل كوشي (Cauchy) [بارون اغستين كوشي:1789-1857] المتداول في تلك الآونة.

ودأبت العادة أن يُدرّس تكامل ريمان خلال السنة الأولى من التعليم الجامعي، ولقد تعلّم الطالب أنّه عندما تكون الدالّة f المطلوب مكاملتها موجبة على الفترة $J=[a,b]$ فإنّ تكامل ريمان ما بين a و b هو المساحة الهندسية المحصورة ما بين منحنى الدّالة، محور الفواصل x والمستقيمين العموديين $x=a$ و $x=b$.

في الواقع يعتمد تعريف ريمان على تقسيم الفترة J إلى فترات جزئيّة $\left\{[x_i,x_{i+1}]\right\}_{i=0}^{n}$، حيث $x_0=a$ و $x_{n+1}=b$. وباعتبار نقطة اختيارية x_i^* من الفترة الجزئية $[x_i,x_{i+1}]$ نحصل على قيمة تقديريّة $f(x_i^*)$ للدّالّة $f(x)$ على $[x_i,x_{i+1}]$، ومن ثمّ نعبّر عن مساحة المستطيل الجزئي المحدد بـــ $x=x_i$، $x=x_{i+1}$، $y=0$ و $y=f(x_i^*)$ بالمقدار $f(x_i^*)(x_{i+1}-x_i)$. نسمّي مجموع هذه المساحات **بمجموع ريمان**، كما يمثّل هذا المجموع قيمة تقديريّة للمساحة المحصورة ما بين منحنى الدّالة، محور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$. تجدر الإشارة إلى أنّ هذه القيمة التقديرية تقترب أكثر فأكثر من المساحة المطلوبة كلما اقتربت **خطوة التقسيم** $\max_{0\le i\le n}|x_{i+1}-x_i|$ من الصفر.

يتّضح من خلال التعريف الهندسي لتكامل ريمان أنّ مساحة المستطيل الجزئي تكون أكثر دقة كلّما كان الفرق بين $f(x_i^*)$ و $f(x)$ على $[x_i,x_{i+1}]$ أصغر، وهذا يذكّرنا بخاصية أساسية من خواص الدالة ألا وهي خاصيّة الاتصال.

يمكننا بفضل هذه الطريقة الهندسيّة حساب تكامل الكثير من الدّوال المعروفة مثل كثيرات الحدود، الدّوال المتصلة وغيرها.

قبل التعبير عن التّكامل بالطريقة الهندسية كان يُنظر إليه كعمليّة عكسيّة للاشتقاق ونذكر هنا "**النظريّة الأساسيّة للحساب**" التي تنصُّ على أنّ المكاملة والاشتقاق هما "تقريبًا" عمليتان عكسيتان تحت شروط معيّنة تخصّ الدّالّة ودالتها الأصلية، غير أنّه سرعان ما لوحظ أنّ بعض الدّوال المتقطّعة بقفزات منتهية لا يمكن لها أن تكون مشتقّة لدالّة معيّنة، وبالتّالي لا تقبل المكاملة بمفهوم ريمان.

والتساؤل الجدير بالطرح هو: ما مدى سعة هذا الصنف من الدّوال القابلة للمكاملة؟

نلاحظ على سبيل المثال أنّ كلّ الدّوال المتّصلة على فترة J أو التي تقبل عددا من التقطعات مكافئا لمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، وكذلك الدّوال ذات التّغيرات المحدودة، هي دوال قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان. وهنا يحقُّ للقارئ أن يتساءل عن لزوم هذه الشّروط من عدمها. في الحقيقة يؤدّي هذا السّؤال إلى مسألة أكثر دقة وهي كيفيّة "تمييز" الدّوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان .

على الرّغم من أنّ تكامل ريمان كاف في كثير من الأحيان إلاّ أنّ الدّوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان، باختصار (ر)-قابلة للمكاملة، هي قليلة جدًّا إذ أنّه من السّهل إيجاد دوال بسيطة غير قابلة للمكاملة، نذكر على سبيل المثال أنّ دالّة ديركليه (Dirichlet) [بيتر غوستاف ديركليه: 1805- 1859] التالية:

$$\psi(x)=\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) \ \text{،} \ \psi:[0,1]\to[0,1] \ \text{،}$$

حيث $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ الدالة المميّزة لمجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ في الفترة $[0,1]$، ليست قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان كما سنبيّنه لاحقا.

سوف نرى أنّ كلّ دالّة محدودة على فترة $J=[a,b]$ هي (ر)-قابلة للمكاملة على J إذا وإذا فقط كانت مجموعة نقاط تقطّعه مهملة بمفهوم لوبيغ (Lebesgue) [هنري ليون لوبيغ: 1875-1941]، بمعنى أنّ قياسها معدوم بمفهوم لوبيغ.

في الواقع، يعاب على تكامل ريمان لعدم تفاعله بصفة مقبولة مع النّهايات. فعلى سبيل المثال إذا ما أعطينا متتالية من الدّوال $\{f_n\}$ الـــ (ر)-قابلة للمكاملة فإنّ نهاية هذه المتتالية ليست بالضّرورة (ر)- قابلة للمكاملة. نذكر في هذا السياق أنّه من السّهل التّأكّد من أنّ كلّ عناصر المتتالية $\{f_n\}$:

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\{r_1,r_2,\dots r_n\}\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\{r_1,r_2,\dots r_n\}\end{cases}$$

، (حيث يمثّل $\{r_i\}_{i\geq 1}$ ترقيما للأعداد النسبية في الفترة $[0,1]$، أي $[0,1]\cap\mathbb{Q}=\{r_i\}_{i\geq 1}$)، هي دوال (ر)-قابلة للمكاملة غير أنّ نهايتها $\psi(x)$ (دالة ديركليه) المعرّفة أعلاه ليست كذلك كما سبق.

نشير إلى أنّ هذه القضيّة هي ذات أهميّة كبيرة في ميادين كثيرة ونخصّ بالذكر سلاسل فوريه (Fourier) [بارون ج. جوزيف فوريه: 1768-1830] حيث من اللّزوم تحقيــق هذه الخاصيّة حتى تكون المساواة التالية صحيحة:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \ .$$

ينبغي للقارئ أن يعلم أنّ التّقارب المنتظم هو عمليًّا شرط قويٌّ جدًّا وغير متوفّر في أغلب الأحيان. إضافة إلى هذا فإنّ تكامل ريمان هو

غير قادر على التفاعل مع المجاميع غير المنتهية للدّوال، أي أنّ هذا الطرح غير قادر على الإجابة عن التساؤلات التالية:

- هل مجموع سلسلة من الدّوال (ر)-**القابلة للمكاملة** هو دالّة (ر)-قابل **للمكاملة؟**
- هل بإمكاننا المكاملة حدًّا بحدٍّ في مثل هذه الحالة ومتى تتحقق المساواة التالية:

$$\int_a^b \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx = \sum_{n\geq 1}\int_a^b f_n(x)\,dx \quad ؟$$

هذه القضيّة هي في الواقع مرتبطة نوعًا ما بالقضيّة السّابقة. بالتأكيد، بإمكاننا إيجاد متتالية من الدّوال القابلة للمكاملة بحيث يكون مجموعهما غير المنتهي دالة غير قابلة للمكاملة كما يتّضح في المثال التالي:

نعتبر المتتالية $\{g_n\}_{n\geq 1}$ المعرّفة على الفترة $[0,1]$ بـــ

$$g_n(x)=\begin{cases}1, & x=r_n\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\{r_n\}\end{cases}, \quad (\forall n\geq 1), \quad (\{r_i\}_{i\geq 1} \text{ معرّفة أعلاه})$$

من الواضح أنّ كلّ مجموع جزئي لهذه العناصر هو دالة (ر)-قابلة **للمكاملة** بينما يتطابق مجموع السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ مع دالّة **ديركليه** وهي غير (ر)-**قابلة للمكاملة.**

من جهة أخرى، إذا كانت $f(x,y)$ دالّة معرّفة على المستطيل

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\leq x\leq b, c<y<d\},$$

بحيث التكاملان $\int_a^b f(x,y)\,dx$ و $\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$ موجودان من أجل كلّ نقطة $y\in]c,d[$، فإنّنا لا نحصل عمومًا على العلاقة:

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx.$$

تجدر الإشارة هنا إلى أنّ مسألة الاشتقاق داخل التّكامل هي كذلك مسألة ذات أهمّية كبيرة من الوجهتين النّظرية والتطبيقيّة فيُحبّذ عمليّا أثناء اشتقاق **تحويلة فوربيه** (Fourier) استعمال أضعف الشروط الممكنة للحصول على مثل هذه الخاصّية.

إضافة إلى كلّ هذه النقائص الصريحة لدى تكامل **ريمان**، فإنّه إذا ما زوّدنا فضاء الدوال الـ(ر)-**قابلة للمكاملة** على $J=[a,b]$ بالمعيار $\|f\|=\int_a^b |f(x)|\,dx$ فلا نحصل على فضاء تام.

للتغلّب على كلّ هذه النقائص قام عالم الرياضيات الفرنسي **لوبيغ** (Lebesgue) بتعريف جديد لمفهوم التّكامل وذلك في رسالته للدكتوراه سنة 1902. لقد سمحت أفكاره الجديدة بمكاملة عدد كبير من الدّوال مع المحافظة على قيمة التكامل عندما تكون الدّالة (ر)-**قابلة للمكاملة**.

لقد أفلح **لوبيغ** في تمييز الدّوال الـ(ر)-**قابلة للمكاملة** عن غيرها في مبرهنة ذات أهمّية بالغة والتي تنصّ على ما يلي: تكون دالة محدودة على $J=[a,b]$ (ر)-**قابلة للمكاملة** على J إذا وإذا فقط كانت مجموعة نقاط تقطعها مهملة بمفهوم **لوبيغ**.

لقد ساهم المفهوم الجديد للمكاملة على تفادي العديد من النقائص والشبهات التي تراكمت حول تكامل **ريمان** حيث عجز هذا الأخير عن الإجابة عنها. لقد سمح تكامل **لوبيغ** بالتعامل مع نهايات وسلاسل الدّوال تحت رمز التّكامل بكيفيّة عملية غاية في الدقة. إضافة إلى هذا فإنّه في حالة قابلية المكاملة لدالّة ما بالمفهومين فإنّ التّكاملين متساويان.

وهكذا فإنّ كلّ دالّة قابلة للمكاملة بمفهوم **ريمان** على J هي بالضّرورة قابلة للمكاملة بمفهوم **لوبيغ** وهذا يجعل مجموعة الدّوال الـ(ر)-قابلة للمكاملة مجموعة جزئيّة من مجموعة الدّوال الـ(ل)-**قابلة للمكاملة** (أي **القابلة للمكاملة** بمفهوم **لوبيغ**).

بما أنّ المكاملة بمفهوم **لوبيغ** لا تقتصر فقط على الدوال المعرّفة على $\mathbb{R}^n$ أو أجزاء منها، بل تتعدّاها إلى مجموعات تجريدية بحتة، فقد عمد **لوبيغ** إلى توظيف نظريّة القياس التي قد بدأها **بوريل** (Borel) [**اميل فيلكس بوريل**: 1871– 1956] من قبل، وقام بتجزئة مجموعة المستقر للدلة f، وذلك عكس ما يفعله **ريمان** عند مكاملته لدالة معيّنة.

وخلاصة القول، كما قال أحدهم عن الفرق بين الرّؤيتين للتكامل هو: أنّ حساب **ريمان** يوافق كيفية عدّ بائع الخضروات للمال الذي حصل عليه آخر النهار فهو يعدّ كلّ شيء بدون تمييز بين مختلف الفئات، أمّا حساب **لوبيغ** فهو يوافق عدّ المحاسب، حيث يرتّب الحصيلة وفق الفئات المتشابهة أوّلا، ثمّ يعدّ كلّ فئة على حدة، وفي الأخير يقوم بالجمع.

يتناول هذا المؤلّف نظريتَيْ **القياس والمكاملة** حيث يضمّ المفاهيم الأساسية لهاتين النّظرتين وبإمكانه أن يكون كتابا مقرّرًا لطلبة البكالوريوس أو طلبة الدّراسات العليا كما يمكن لطلبة الهندسة والفيزياء الذين يتعاملون مع هذه المفاهيم أن يستفيدوا منه كثيرًا. لقد بذلنا

مجهودًا كبيرًا لجعله في متناول القارئ من غير اللّجوء إلى مدرّس خصوصي بشرط أن يكون لديه خلفية جيّدة في الحساب المتقدّم.
لقد نمت البذور الأولى لهذا الكتاب من خلال المقرّرات التي دَرَسناها كطلبة وكذلك التي علّمناها لطلبتنا لسنوات طويلة **بجامعة باجي مختار، عنابة، الجزائر**، وكذا **جامعة الملك فهد للبترول والمعادن، المملكة العربية السعودية**. لقد تطلّب إعداد هذا المؤلّف العديد من المفاهيم الأساسية من الجبر والتحليل كالعمليّات على المجموعات والدّوال، التقارب، الاتصال الخ. ولتسهيل استرجاع هذه المفاهيم لدى القارئ جمعنا هذه المواضيع في الفصل الأوّل حتى نوفّر عنه مشقّة البحث عن هذه المفردات، إضافة إلى هذا فقد قمنا بتخصيص فصل كامل للتذكير بتكامل **ريمان** وخصائصه الأساسية بغية مقارنته بتكامل **لوبيغ** في ما بعد.
هناك طريقتان لتقديم نظرية القياس والمكاملة، أولاهما: البدء بنظرية القياس ثمّ نظرية المكاملة، وتعرف هذه الطريقة باسم "طريقة **كاراثيودوري** (Carathéodory)" أمّا الثانية: فنفعل العكس، وتعرف باسم "طريقة **دانيال** (Daniell)".
في الواقع للطّريقتين محاسن ومساوئ ولكلتيهما أنصار ومدافعون. فأنصار الطّريقة الأولى هم الاحتماليون الذين يقولون إنّ هذه الطّريقة أسهل للقارئ فهماً وإنّها متماسكة وملموسة أكثر من الثانية. وأمّا أنصار الطّريقة الثانية وهم التحليليون فهم يعيبون على الطّريقة الأولى بأنّها تنقص من شأن تكامل **ريمان** ولا تستعمله إلاّ حين المقارنة بتكامل **لوبيغ** كما أنّها تبدأ بأمور تجريدية بحتة كالعشيرة والقياس الموجب، أمّا طريقة **دانيال** فإنّها تشجّع القارئ على التفكير بمنطق الدّاليات الخطّية *(linear functionals)*.
فيما يخصّنا فلقد اخترنا طريقة **كرائيودوري** لتقديم مفهوم التكامل لكونها أكثر بيداغوجيّة وأسهل للمبتدئين، ضف إلى ذلك فإنّها تصلح للمختصّ في التحليل الدّالي وغيره من المجالات الأخرى دون إقصاء للاحتماليين.
لقد اجتهدنا في استعمال مصطلحات علمية توفيقية وبسيطة راجين من الله عزّ وجلّ أن يتقبّل منا هذا العمل وينفع به أبنائنا وبناتنا الطلبة حيثما وجدوا ... وما توفيقنا إلاّ بالله.
وأخيرًا هذا ما وفقنا الله إليه، ولقد حَرصنا أشدّ الحرص على تجنّب الأخطاء مهما كان مصدرها، وكذا القضايا المبهمة أو المضلّلة، غير أنّنا ندرك أنّ العمل البشري لا بدّ أن يعتريه النقص والزلل، لذا نرجو

ممّن يقف على هفوة فيه أو خطأ، أن يراسلنا عن طريق البريد الإلكتروني المذكور أسفله، وإنّنا سنتقبّل بصدر رحب كلّ تصويب أو اقتراح وسنأخذه بعين الاعتبار في الطبعة المقبلة إن شاء الله.

سوف ننشر هذه التصويبات والتحسينات على الموقع

http://faculty.kfupm.edu.sa/math/tatarn/

وفي الختام، نودّ تقديم شكرنا الخالص لجامعة الملك فهد للبترول والمعادن لتمويل هذا المشروع النبيل، كما نشكر أعضاء لجنة التحكيم الذين أفادونا بنصائح وملاحظات قيّمة ساعدتنا على تدارك بعض النقائص والهفوات.

المؤلفـــان:

أ. د./ نصر الدين تطار وَ أ. د./ السعيد مزوزي

mazouzi2b11@gmail.com ، tatarn@kfupm.edu.sa

الرموز والاختصارات المستعملة في هذا الكتاب

- $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية
- $\mathbb{N}^*:=\mathbb{N}\setminus\{0\}$ و $\overline{\mathbb{N}}:=\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$
- $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة
- $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبيّة
- $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية
- $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ المستقيم الحقيقي الموسّع
- $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركّبة
- $Re\,z$ الجزء الحقيقي للعدد المركّب z و $Im\,z$ الجزء التّخيّلي لـــ z
- $\mathcal{P}(E)$ أسرة كلّ المجموعات الجزئية للمجموعة E
- $|A|$ أو $\text{card}(A)$ أصلي المجموعة A
- (E,Σ) فضاء قابل للقياس (Σ عشيرة على E)
- (E,Σ,μ) فضاء قياس، Σ عشيرة على E و μ قياس موجب على Σ
- $a_E(\mathcal{C})$ (على الترتيب، $\sigma_E(\mathcal{C})$) الجبر (على الترتيب، العشيرة) على E المولّد (ة) بالمجموعة $\mathcal{C}$
- $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$ العشيرة البوريلية على E المولّدة بالطبولوجيا $\mathcal{T}$
- μ-تاك، تقريبا أينما (حيثما) كان، ($\mu-a.e.$)
- $\mathcal{L}$ عشيرة لوبيغ على $\mathbb{R}$
- m (أو λ) لوبيغ على $\mathbb{R}$
- m^* قياس لوبيغ الخارجي على $\mathbb{R}$
- μ، ν،... قياسات موجبة
- μ_c قياس العدّ
- μ^*، ν^*،... قياسات خارجية

- $\mathcal{B}_{\mu^*}$ عشيرة المجموعات الجزئية الـ μ^*-قابلة للقياس
- λ_n قياس لوبيغ على $\mathbb{R}^n$
- f^+ الجزء الموجب للدالة f
- f^- الجزء السالب للدالة f
- $\mathcal{R}(J)$ مجموعة الدّوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على الفترة J
- **(ر)-قابل للمكاملة:** نسمّي كلّ عنصر من $\mathcal{R}(J)$ دالّة (ر)-قابلة للمكاملة
- $\mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ أو $\mathfrak{L}^1(E)$ مجموعة الدّوال القابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ على المجموعة E
- **(ل)-قابل للمكاملة:** نسمّي كلّ عنصر من $\mathfrak{L}^1(E)$ دالّة (ل)-قابلة للمكاملة
- $\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ فضاء (لوبيغ) الدّوال ذات الأس p قابلة للمكاملة على E وفق القياس الموجب μ
- N_p نصف المعيار المعرّف على $\mathfrak{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ بِ

$$N_p(f)=\sqrt[p]{\int_E|f|^p\,d\mu}$$

- $\mathfrak{L}^\infty(E,\Sigma,\mu)$ فضاء الدّوال المحدودة أساسيًا على E
- N_∞ نصف المعيار المعرّف على $\mathfrak{L}^\infty(E,\Sigma,\mu)$ بِ

$$N_\infty(f)=\inf_{\substack{A\in\Sigma\\ \mu(A)=0}}\ \sup_{x\notin A}|f(x)|$$

- $\mathrm{L}^p(E,\Sigma,\mu)$، $(1\le p<\infty)$ فضاء صفوف تكافؤ الدّوال ذات أسّ p قابلة للمكاملة على E
- $\|\ \|_p$ المعيار المعرّف على $\mathrm{L}^p(E,\Sigma,\mu)$ بِ $\|f\|_p=\sqrt[p]{\int_E|f|^p\,d\mu}$
- $\mathrm{L}^\infty(E,\Sigma,\mu)$ فضاء صفوف تكافؤ الدّوال المحدودة أساسيًا على E
- $\|\ \|_\infty$ معيار الفضاء $\mathrm{L}^\infty(E,\Sigma,\mu)$
- $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ **فضاء الدّوال العدديّة القابلة للقياس** على E

- $\mathfrak{M}^{+}(E,\Sigma)$ مجموعة الدّوال العدديّة الموجبة القابلة للقياس على (E,Σ)
- $\mathfrak{M}_{fin}(E,\Sigma)$ مجموعة الدّوال العددية المنتهية القابلة للقياس على (E,Σ)
- $\mathbb{S}(E,\Sigma)$ مجموعة الدّوال البسيطة القابلة للقياس على (E,Σ)
- $\mathbb{S}^{+}(E,\Sigma)$ مجموعة الدّوال البسيطة الموجبة القابلة للقياس على (E,Σ)
- $f_n \xrightarrow{u} f$ أي f_n تؤول إلى f بانتظام
- $f_n \xrightarrow{s} f$ أي f_n تؤول إلى f ببساطة (نقطيّا)
- $\mu \otimes \nu$ قياس الضرب (ضرب القياسين μ و ν)
- $(E \times F, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ فضاء قياس الضرب
- $V_a^b(f)$ التغيّر الكلّي لِـ f على الفترة $[a,b]$
- $\mu << \nu$ القياس μ مطلق الاتّصال بالنسبة إلى القياس ν
- $\mu \perp \nu$ القياسان μ و ν شاذّان تناظريّا (أو μ و ν قياسان أجنبيان)
- $|\mu|$ التغيّر الكلّي للقياس المؤشر μ
- $BV([a,b])$ مجموعة الدّوال ذات تغيّرات محدودة على $[a,b]$
- $V_a^b f$ التغيّر الكلي لــ f على $[a,b]$
- $AC([a,b])$ مجموعة الدّوال مطلقة الاتّصال على $[a,b]$