الباب الثالث

الشبكية المعكوسة

Reciprocal Lattice

تنبع أهمية الشبكية المعكوسة من كونها الأساس فى تحليل التركيب الدورى للبلورة، فهى على سبيل المثال تستخدم بصورة أساسية فى نظرية الحيود فى البللورات وفى النظرية الكمية للمعادن، كما أن العديد من الخصائص البللورية الهامة يتحتم لفحصها استخدام مفهوم الشبكية المعكوسة.

والشبكية المعكوسة للبلورة الأحادية المثالية (التى تتكرر بنيتها فى ثلاثة اتجاهات) تكون عبارة عن تنظيم لانهائى فى ثلاثة أبعاد، وتكون المسافات بينها متناسبة عكسيا مع المسافات بين المستويات فى الشبكية الأساسية. ومعنى ذلك أن المتجهات فى الفراغ الحقيقى لها أبعاد الطول (L) بينما يكون لها فى الفراغ المعكوس أبعاد مقلوب الطول (L^{-1}). وفى الواقع، فالشبكية المعكوسة تستمد مفهومها من أنه بدلا من وصف الموجة المتحركة خلال الشبكية البللورية بدلالة طولها الموجى (λ, m) يستخدم المتجه الموجى الذى قيمته $K = 2\pi/\lambda$, m^{-1}.

تعريف

إذا كانت لدينا مجموعة من النقط $\mathbf{R}= n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3$ تمثل شبكية برافى، فإنه يمكن لموجة مستوية عند اختيار معين لقيمة المتجه الموجى $k = K$ أن تأخذ دورية هذه الشبكية. تسمى مجموعة المتجهات K فى هذه الحالة بمتجهات الشبكية المعكوسة. وبطريقة أخرى، فإن مجموعة المتجهات K تمثل الشبكية المعكوسة إذا كانت الموجة المستوية $e^{iK.r}$ عندما $k = K$ تمتلك دورية شبكية برافى (شكل ١ – ٣)، وهذا يتحقق إذا كان لأى r وكل R من شبكية برافى يكون صحيحا أن:

$$e^{iK.r} = e^{iK(r+a1)} = \dots = e^{iK(r+R)}$$

$$e^{iK(r+R)} = e^{iK.r} \qquad (3-1)$$

وبقسمة الطرفين على $e^{iK.r}$ فإن:

$$e^{iK.R} = 1 \qquad (3-2)$$

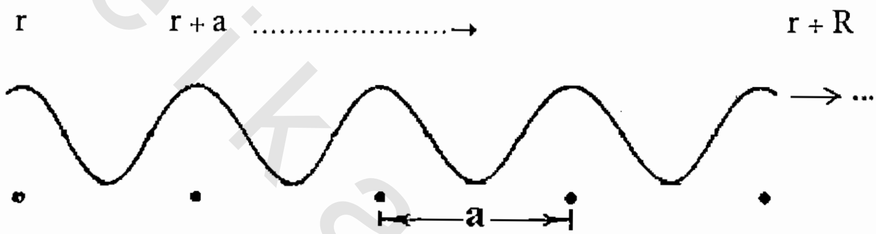
أى أن الشبكية المعكوسة تمثل بمجموعة المتجهات الموجية المعرفة بالعلاقة (٢ – ٣) لكل قيم R الخاصة بشبكية برافى الأصلية، والتى يمكن إعادة صياغتها بالصورة الآتية:

$$e^{iK.R} = \cos K.R + i \sin K.R = 1$$

ويتحقق ذلك فقط إذا كان:

$$K.R = 2\pi q \qquad (3-3)$$

حيث q عدد صحيح.



شكل (٣-١): الموجة المستوية $e^{iK.r}$ تمتلك دورية شبكية برافى عندما $k = K$

الشبكية المعكوسة نوع من أنواع شبكيات برافى

المتجـــه K (كأى متجه فراغى) يمكن كتابته فى صورة خطية بدلالة مركباته الثلاثة كالتالى:

$$\mathbf{K} = K_1\mathbf{b}_1 + K_2\mathbf{b}_2 + K_3\mathbf{b}_3 \qquad (3-4)$$

حيـــث b1، b2، b3 ثلاثـــة متجهـــات لا تقع كلها فى مســتوى واحد.فإذا كانت العوامـــل K1، K2، K3 تمثـــل أعدادا صحيحة، فإنه بواســـطة مجموعة المتجهات K يمكن الحصول على شـــبكية فى الفراغ المعكـــوس ذات عناصر متكافئة فراغيا من حيث الموضع والاتجاه، وبالتالى تحقق تعريف برافى للشبكية الفراغية.

العلاقة بين متجهات الشبكيتين الأساسية والمعكوسة

قاعدة ١: متجهات الشبكية المعكوسة b_i ترتبط مع المتجهات الأساسية a_j بالعلاقة التالية:

$$\mathbf{b}_i.\mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij} \;; \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \;; & i \neq j \\ 1 \;; & i = j \end{cases} \qquad (3-5)$$

$$\text{i.e} \quad \mathbf{b}_1.\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_2.\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_3.\mathbf{a}_3 = 2\pi$$

$$\& \quad \mathbf{b}_1.\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}_2.\mathbf{a}_3 = \ldots\ldots = 0$$

حيث i، j تأخذان قيما صحيحة من ١ إلى ٣، δij يعرف بعدد كرونكر (Cronker number). ويكفى لإثبات هذه القاعدة أن نبرهن أن العلاقة (٣ – ٥) تحقق التعريف (٣ – ٣).

$$\because \mathbf{K}.\ \mathbf{R} = (K_1\mathbf{b}_1 + K_2\mathbf{b}_2 + K_3\mathbf{b}_3).\ (n_1\mathbf{a}_1 + n_2\mathbf{a}_2 + n_3\mathbf{a}_3)$$

وباستخدام القاعدة ١ ، فإن:

$$\mathbf{K}.\ \mathbf{R} = 2\pi\ (K_1\mathbf{b}_1 + K_2\mathbf{b}_2 + K_3\mathbf{b}_3) = 2\pi q$$

حيــث ($k1n1 + K2n2 + K3n3$) تمثل عددا صحيحا، لذلك فإن العلاقة (٣ – ٥) تكون ناشئة أصلا من التعريف (٣ – ٣).

دعنا الآن نوجد علاقة بسيطة ومباشرة بين المتجهات a_j & b_i.

$$\because \mathbf{b}_1.\mathbf{a}_1 = 2\pi$$

$$= 2\pi \frac{\mathbf{a_1}.(\mathbf{a_2}\times\mathbf{a_3})}{\mathbf{a_1}.(\mathbf{a_2}\times\mathbf{a_3})} \qquad (3-6)$$

وكما هو واضح من العلاقة (٣ – ٥) أن:

$$\mathbf{b_i} : \begin{cases} \perp a_j & ; i \neq j \\ \angle a_j & ; i = j \end{cases}$$

فــإن $b1$ يكون عموديــا على كل من a2، a3، أى يكــون موازيا للمتجه ($a2\chi a3$) العمودى على مستويهما، وفى نفس الوقت b1 يتقاطع مع المتجه a1، نفرض أن الزاوية بينهما هى θ، لذلك يمكن إعادة كتابة العلاقة (٣ – ٦) كالآتى:

$$b_1 a_1 \cos\theta = 2\pi \frac{|a_2\times a_3| a_1 \cos\theta}{a_1.(a_2\times a_3)}$$

$$b_1 = 2\pi \frac{|a_2\times a_3|}{a_1.(a_2\times a_3)}$$

وبضرب طرفى العلاقة السابقة فى وحدة المتجه b_1 (فى اتجاه b_1) نحصل على:

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{a_2\times a_3}{a_1.(a_2\times a_3)}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\mathbf{b_2} = 2\pi \frac{a_3 \times a_1}{a_1.(a_2 \times a_3)}$$

$$\mathbf{b_3} = 2\pi \frac{a_1 \times a_2}{a_1.(a_2 \times a_3)}$$

حيث (a2xa3) a1 تمثل حجم الخلية الابتدائية «V» للشبكية الأساسية، (b2xb3) b1 تمثل حجمها «Vr» للشبكية المعكوسة، فإذا كانت الخليتان من النوع المكعبي فإنه يمكن إثبات أن حجميهما يرتبطان بالعلاقة $V_r = \frac{(2\pi)^3}{V}$.

قاعدة ٢: «معكوسة الشبكية المعكوسة هي نفس الشبكية الأصلية».

رغم أنه يمكن إثبات هذه القاعدة في الحالة العامة، فإننا هنا سوف نكتفي بإثباتها في حالة الشبكية B. C. C كمثال.

تعطى متجهات الشبكية المعكوسة بدلالة المتجهات الأساسية للشبكية B. C. C كالآتي:

$$\mathbf{b_1} = 2\pi \frac{a_2 \times a_3}{a_1.(a_2 \times a_3)}$$

وبالتعويض عن متجهات الشبكية الأساسية من العلاقات (٢-٤) نجد أن:

$$\mathbf{b_1} = 2\pi \frac{(\frac{a}{2})^2[(\hat{x}+\hat{z}-\hat{y})\times(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z})]}{\left(\frac{a}{2}\right)^3(\hat{y}+\hat{z}-\hat{x}).[(\hat{x}+\hat{z}-\hat{y})\times(\hat{x}+\hat{y}-\hat{z}]}$$
$$= \frac{2\pi}{a}(\hat{y}+\hat{z})$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$\mathbf{b_2} = \frac{2\pi}{a}(\hat{x}+\hat{z})$$

$$\mathbf{b_3} = \frac{2\pi}{a}(\hat{x}+\hat{y})$$

أي أن الشبكية المعكوسة للشبكية B. C. C هي شبكية من النوع F. C. C.

فإذا كانت C١, C٢, C٣ هي متجهات معكوسة الشبكية المعكوسة فإنه يمكن إيجادها كالتالي:

$$C_1 = 2\pi \frac{b_2 \times b_3}{b_1.(b_2 \times b_3)}$$

$$= 2\pi \frac{(\frac{2\pi}{a})^2[(\hat{x}+\hat{z})\times(\hat{x}+\hat{y})]}{\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3(\hat{y}+\hat{z}).[(\hat{x}+\hat{z})\times(\hat{x}+\hat{y})]}$$

$$= \frac{a}{2}(\hat{y}+\hat{z}-\hat{x})$$

$$= \mathbf{a_1}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن:

$$C_2 = a_2 \qquad \& \qquad C_3 = a_3$$

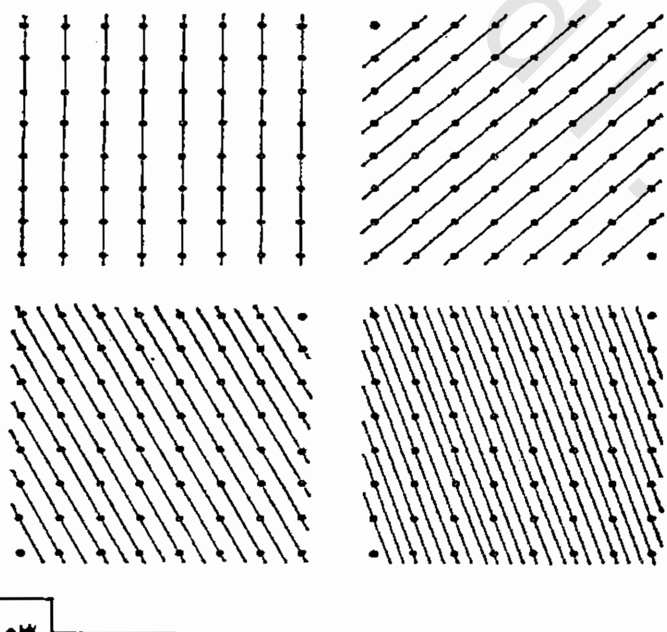
أى أن معكوسة الشبكية المعكوسة هى نفسها الشبكية الأصلية.

مناطق بريليون Brillouin zones

خلية ويجنر- زايتز للشبكية المعكوسة التى يمكن الحصول عليها بنفس الكيفية كما فى حالة شبكية برافى الأساسية تسمى منطقة بريليون الأولى، كما أن خلايا ويجنر- زايتز من الرتب الأعلى تعطى المناطق الأعلى لبريليون.

المستويات الذرية Atomic planes

المستوى الذرى هو أى مستوى يربط بين ثلاث نقط غير واقعة على خط مستقيم واحد فى شبكية برافى الأساسية، وتسمى مجموعة المستويات المتوازية والتى تشمل كل نقط الشبكية الفراغية بعائلة المستويات الذرية، كما يعتبر كل مستوى ذرى عضوا فى عائلة معينة للمستويات الذرية (شكل ٣ - ٢). واتفق على تعريف المستوى بالأعداد $hk\ell$ وهى أصغر الأعداد الصحيحة لمقلوبات الأجزاء المقطوعة بواسطة المستوى من المحاور الأساسية.



شكل (٣-٢) : عائلات من المستويات الذرية

قاعدة(٣): مجموعة المتجهات K لمعكوسة الشبكية التى ينتمى إليها المستوى الذرى $(hk\ell)$ تعطى بالعلاقة $K = \ell b_3 + kb_2 + hb_1$، حيث (h, k, ℓ) هى أصغر الأجزاء المقطوعة من المحاور.

البرهان: بما أن المستوى $(hk\ell)$ هو المستوى الذى يقطع المحاور فى الأجزاء $\frac{1}{h}\mathbf{a}_1$ ، $\frac{1}{k}\mathbf{a}_2$ ، $\frac{1}{\ell}\mathbf{a}_3$، لذلك فإن مجموعة متجهات الشبكية الأساسية التى ينتمى لها هذا المستوى تكون كالتالى:

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{h}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{\ell}\mathbf{a}_3$$

$$\because \ \mathbf{K}.\mathfrak{R} = 2\pi q$$

$$\therefore \ (k_1\mathbf{b}_1 + k_2\mathbf{b}_2 + k_3\mathbf{b}_3).\left(\frac{1}{h}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{a}_2 + \frac{1}{\ell}\mathbf{a}_3\right) = 2\pi q$$

$$2\pi\left[k_1\left(\frac{1}{h}\right) + k_2\left(\frac{1}{k}\right) + k_3\left(\frac{1}{\ell}\right)\right] = 2\pi q$$

حيث q أى عدد صحيح.

وتتحقق العلاقة السابقة عندما تأخذ كل من k_1, k_2, k_3 إحدى القيم التالية:

$$k_1 = h, 2h, 3h, \ldots\ldots$$

$$k_2 = k, 2k, 3k, \ldots\ldots$$

$$k_3 = \ell, 2\ell, 3\ell, \ldots\ldots$$

ولوصف الشبكية تؤخذ عادة أصغر القيم، أى أن:

$$k_1 = h \qquad ; k_2 = k \qquad ; k_3 = \ell$$

وبالتالى فإن مجموعة المتجهات K تأخذ الصورة التالية:

$$\mathbf{K} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + \ell\mathbf{b}_3$$

نظرية: «لكل عائلة من المستويات الذرية التى يبعد كل عضو فيها عن المجاور له بمسافة d توجد شبكية معكوسة المتجه الأساسى لها K عمودى على هذه المستويات وأقصر طول له يساوى $\frac{2\pi}{d}$».

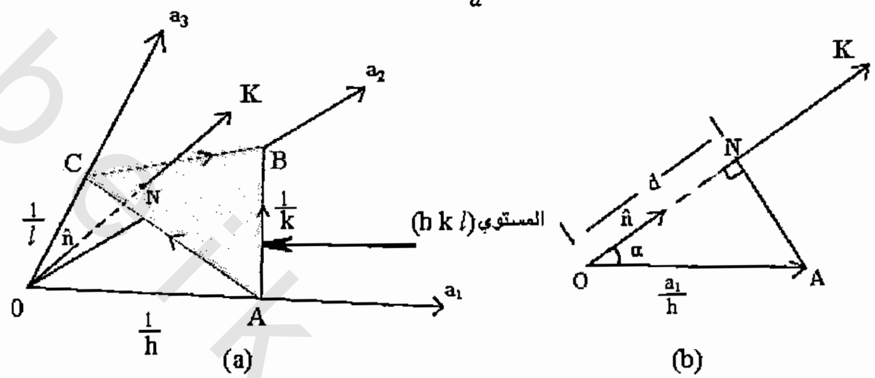
البرهان: نعتبر عائلة المستويات الذرية الذى يمثل المستوى $(hk\ell)$ أحد أعضائها، حيث يبعد مسافة d عن المستوى المجاور الذى اختيرت عليه نقطة الأصل 0 شكل (٣-a.٣)، وبما أن هذا المستوى يقطع الأجزاء $\frac{1}{h}, \frac{1}{k}, \frac{1}{\ell}$ (مقدرة بطول ضلع الخلية الابتدائية) من المحاور البللورية على الترتيب، فإن متجه الشبكية المعكوسة K لهذه

الشبكية يكون هو $\mathbf{K}= h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + \ell\mathbf{b}_3$.

والمطلوب الآن إثبات:

أولا: أن المتجه K عمودى على المستوى ($hk\ell$)، ويكفى لذلك إثبات أن K عمودى على أى مستقيمين فى هذا المستوى.

ثانيا: أن أقصر طول للمتجه K هو $K = \frac{2\pi}{d}$.



شكل (٣-٣): علاقة متجه الشبكية المعكوسة K بعائلة المستويات الذرية ($hk\ell$)

من الشكل (٣-٣.a) يتضح أن:

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AO} + \mathbf{OC} = -\mathbf{OA} + \mathbf{OC}$$
$$= -\frac{1}{h}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{\ell}\mathbf{a}_3$$

$$\& \qquad \mathbf{AB} = \mathbf{AO} + \mathbf{OB} = -\mathbf{OA} + \mathbf{OB}$$
$$= -\frac{1}{h}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{a}_2$$

$$\because \quad \mathbf{AC}.\mathbf{K} = \left(-\frac{1}{h}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{\ell}\mathbf{a}_3\right).(h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + \ell\mathbf{b}_3)$$
$$= -\frac{2\pi h}{h} + \frac{2\pi\ell}{\ell} = 0$$

$$\mathbf{AB}.\mathbf{K} = \left(-\frac{1}{h}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{k}\mathbf{a}_2\right).(h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + \ell\mathbf{b}_3)$$
$$= -\frac{2\pi h}{h} + \frac{2\pi k}{k} = 0$$

أى أن K عمودى على المستوى ($hk\ell$) وهو المطلوب أولا.

وباعتبار شكل (٣-٣.b) فإن:

$$\mathbf{K}.\mathbf{OA} = K(OA)\cos\alpha = Kd$$
$$\mathbf{K}.\mathbf{OA} = (h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + \ell\mathbf{b}_3).\left(\frac{1}{h}\mathbf{a}_1\right) = 2\pi$$

$$i.e \qquad K = \frac{2\pi}{d}$$

وهو المطلوب ثانيا.

وصف المستوى البللورى بواسطة معاملات ميللر Miller indices

مما سبق يتضح مايلى:

١- المســتوى الذى يقطع الأجزاء $\frac{1}{h},\frac{1}{k},\frac{1}{\ell}$ مقدرة بدلالة ثابت الشــبكية المكعبة (a) يرمز له بالرمز $(hk\ell)$ حيث h, K, ℓ تسمى معاملات ميللر.

٢- المستوى الذرى $(hk\ell)$ يكون عموديا على متجه الشبكية المعكوسة $K= h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + \ell\mathbf{b}_3$، حيث من تعريف الشــبكية المعكوســة لابد أن تكون كل من h, K, ℓ أعدادا صحيحة.

٣- معامــلات ميللر يمكن تعيينها بأخذ مقلوب الأجزاء المقطوعة من المحاور بواســطة المســتوى ثم تحويلهــا إلى أعداد صحيحة، فمثلا إذا كانــت القيم المقطوعة (بدلالة ثابت الشــبكية) بواســطة مســتوى معين من المحــاور x, y, z هــى ٢، ١، ٤ على الترتيب، فإنه يمكن إيجاد معاملات ميللر التى يعرف بها هذا المستوى كالتالى:

الأجزاء المقطوعة بدلالة ثابت الشبكية هى	4،1،2
مقلوب هذه القيم	¼ ،1، ½
أقل أعداد صحيحة نحصل عليها بالضرب × 4	1،4،2
أى أن المستوى الذى يعرف بمعاملات ميللر $(hk\ell)$ ≡	(142)

ملحوظات:

١- معاملات ميللر تستخدم فقط فى حالة المحاور المتعامدة.

٢- المستوى الذى يقطع محورا ما فى ∞ يكون معامل ميللر له يساوى صفرا.

٣- معاملات ميللر $(hk\ell)$ تصف مستوى واحد أو عائلة من المستويات المتوازية.

٤- إذا قطع مستوى أحد المحاور عند قيمة سالبة، فإن معامل ميللر له سيكون سالبا، وتوضع علامة السالبية فوق المعامل.

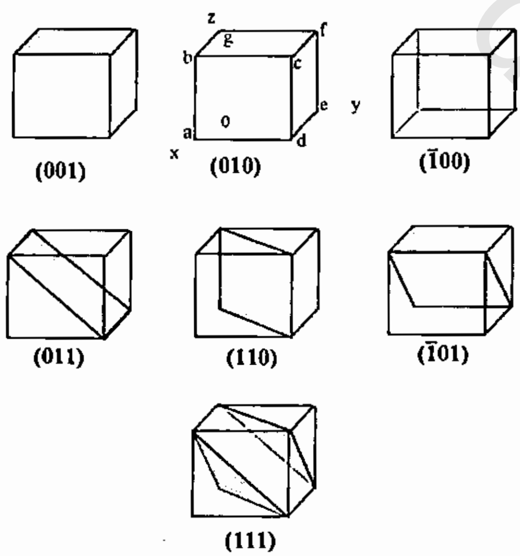
شــكل (٣-٤) يبين بعض الأمثلة للمستويات فى بللورة مكعبة، كما تعطى معاملات ميللر لبعض أوجه الشبكية البللورية المكعبة فى الجدول التالى:

وجه المكعب	abcd	cdef	bcfg
الأجزاء المقطوعة مقدرة بدلالة ثابت الشبكية من المحاورx،y،z	1،∞ ،∞	∞،1،∞	∞ ، ∞ ،1

مقلوب هذه الأجزاء	1،0،0	0،1،0	0،0،1
أقل أعداد صحيحة	1،0،0	0،1،0	0،0،1
تعريف المستوى	(100)	(010)	(001)

٥- الأوجه oefg ، oabg ، oade تقطع أجزاء من المحاور مقاديرها هى (∞،∞،0) & (∞، 0،∞) & (0،∞ ، ∞) على الترتيب، أى أن كلا منها يقطع جزء مقداره الصفر من المحور العمودى عليه، والذى يكون معامل ميللر له يساوى ∞ (وهى كمية غير معينة)، لذلك لتعريف أى مستوى من هذه المستويات نتصور أننا حركنا المستوى الموازى له فى الاتجاه السالب للمحور العمودى بمسافة تساوى البعد بين هذين المستويين، أو نتصور أننا نقلنا نقطة الأصل إلى المستوى الموازى له حيث تصبح الأجزاء المقطوعة بواسطة هذه المستويات هى: ($\bar{1}$ ، ∞، ∞) & (∞، $\bar{1}$،∞) & (∞ ، ∞ ، $\bar{1}$) وبالتالى يمكن تعريفها بالمعاملات $(\bar{1}00)$، $(0\bar{1}0)$، $(00\bar{1})$ على الترتيب.

٦- المستويات المتكافئة من حيث التماثل يمكن تعريفها بالصورة $\{hk\ell\}$، لذلك يمكن التعبيرعن أوجه المكعب الستة بالدلالة $\{100\}$.



شكل (٣-٤): بعض المستويات فى البللورة المكعبة

٧- اتجاه المستوى البللورى يحدد باتجاه العمودى عليه. ويستخدم الرمز $(hk\ell)$ للدلالة على هذا الاتجاه، فمثلا الصورة $\{100\}$ تدل على اتجاه المستوى (100) أى اتجاه العمودى عليه، وهو اتجاه المحور x شكل (٣- ٤).

المسافة بين المستويين الذريين المتجاورين بدلالة معاملات ميللر

بالرجوع إلى شكل (a 3-3)، نجد أن:

$$\mathbf{K}.\ \mathbf{a1} = 2\pi\ (h\mathbf{b}_1 + K\mathbf{b}_2 + \ell\mathbf{b}_3).$$

$$a1\ = 2\pi q$$

$$= K\hat{\mathbf{n}}.\mathbf{a}_1 = K(\mathbf{a}_1.\hat{\mathbf{n}}) = \frac{2\pi}{d}(\mathbf{a}_1.\hat{\mathbf{n}})$$

$$\text{i.e}\quad 2\pi h = \frac{2\pi}{d}(\mathbf{a}_1.\hat{\mathbf{n}})$$

$$\therefore\qquad d = \frac{\mathbf{a}_1.\hat{\mathbf{n}}}{h}$$

حيث $\hat{\mathbf{n}}$ وحدة متجه فى اتجاه K.

وبالمثل يمكن إثبات أن :

$$d = \frac{\mathbf{a}_2.\hat{\mathbf{n}}}{k}\qquad ;\qquad d = \frac{\mathbf{a}_3.\hat{\mathbf{n}}}{\ell}$$

فإذا كان K يصنع الزوايا α، β، γ مع المحاور a_3، a_2، a_1 على الترتيب، فإن:

$$d = \frac{a_1\cos\alpha}{h} = \frac{a_2\cos\beta}{k} = \frac{a_3\cos\gamma}{\ell}$$

$$\text{i.e}\quad \left(\frac{hd}{a_1}\right)^2 = \cos^2\alpha\quad ,\left(\frac{kd}{a_2}\right)^2 = \cos^2\beta\quad ;\ \left(\frac{\ell d}{a_3}\right)^2 = \cos^2\gamma$$

فإذا كانت الشبكية من النوع المكعب، فإن $|a_1| = |a_2| = |a_3| = a$ وبالتالى نجد أن:

$$\left(\frac{hd}{a}\right)^2 + \left(\frac{kd}{a}\right)^2 + \left(\frac{\ell d}{a}\right)^2 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$$

$$\therefore\quad \frac{d^2}{a^2}(h^2 + k^2 + \ell^2) = 1$$

$$\therefore\quad d = \frac{a}{\sqrt{(h^2+k^2+\ell^2)}}$$

المسافة البينية لبعض النظم البللورية

باعتبار أن المحاور الأساسية لهذه الأنظمة هى a ، b ، c فإنه يمكن تلخيص علاقة المسافات البينية بمعاملات ميللر لبعض الأنظمة البللورية كالتالى:

١. النظام المعينى القائم:

$$\frac{1}{d_{hk\ell}^2}=\frac{h^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}+\frac{\ell^2}{c^2}$$

٢. النظام الرباعى القائم:

$$\frac{1}{d_{hk\ell}^2}=\frac{h^2+k^2}{a^2}+\frac{\ell^2}{c^2}$$

٣. النظام السداسى:

$$\frac{1}{d_{hk\ell}^2}=\frac{4}{3}\left(\frac{h^2+hk+k^2}{a^2}\right)+\frac{\ell^2}{c^2}$$

الزاوية بين مستويين بللوريين

لإيجاد الزاوية بين المستويين (h_1, k_1, ℓ_1) ، (h_2, k_2, ℓ_2) نوجد الزاوية بين العمودين عليهما. لنفرض أن العمودى على المستوى الأول هو:

$$\mathbf{A}=h_1\hat{\boldsymbol{u}}+k_1\hat{\boldsymbol{v}}+\ell_1\hat{\mathbf{w}}$$

والعمودى على المستوى الثانى هو:

$$\mathbf{B}=h_2\hat{\boldsymbol{u}}+k_2\hat{\boldsymbol{v}}+\ell_2\hat{\mathbf{w}}$$

حيث $\hat{\mathbf{w}},\hat{\boldsymbol{v}},\hat{\boldsymbol{u}}$ هى وحدات لثلاثة متجهات لا تقع كلها فى مستوى واحد.

$$\therefore\quad \mathbf{A}.\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{\mathbf{A}.\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=\frac{h_1h_2(\hat{\boldsymbol{u}}.\hat{\boldsymbol{u}})+k_1k_2(\hat{\boldsymbol{v}}.\hat{\boldsymbol{v}})+\ell_1\ell_2(\hat{\mathbf{w}}.\hat{\mathbf{w}})}{\sqrt{h_1^2+k_1^2+\ell_1^2}\sqrt{h_2^2+k_2^2+\ell_2^2}}$$

$$\hat{\boldsymbol{u}}.\hat{\boldsymbol{u}}=\hat{\boldsymbol{v}}.\hat{\boldsymbol{v}}=\hat{\mathbf{w}}.\hat{\mathbf{w}}=1$$

حيث:

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{h_1h_2+k_1k_2+\ell_1\ell_2}{\sqrt{(h_1^2+k_1^2+\ell_1^2)(h_2^2+k_2^2+\ell_2^2)}}$$