الفصل الأول

قابلية القسمة
Divisibility

تتمتع مجموعة الأعداد الصحيحة بالعديد من الخصائص المهمة التي لها تطبيقات عديدة. ويسمى فرع الرياضيات الذي يهتم بدراسة هذه الخصائص ، نظرية الأعداد وهو من الموضوعات التي تحتاج إلى تهيئة واسعة ومع ذلك فإن متطلباتها المسبقة محدودة جداً. كما أن نظرية الأعداد من الموضوعات التي يجب الإلمام بأساسياتها في المسابقات الرياضية المختلفة. نقدم في هذا الكتاب المباديء الأساسية لنظرية الأعداد .

قابلية القسمة [*Divisibility*]

يقبل العدد الصحيح a القسمة على العدد الصحيح غير الصفري b ونرمز لذلك بالرمز $b \mid a$ إذا كان a مضاعفاً صحيحاً للعدد b ، أي إذا وجد عدد صحيح c يحقق $a = bc$. على سبيل المثال ، $3 \mid 18$ لأن $18 = 3 \times 6$ ، $-5 \mid 20$. لأن $4 \times (-5) = 20$. إذا لم يقبل العدد a القسمة على العدد b فإننا نرمز لذلك بالرمز $b \nmid a$. على سبيل المثال ، $3 \nmid 14$ و $-5 \nmid 22$.

ملحوظة

إذا كان $a \mid b$ فإننا نقول أيضاً إن b يقسم a (b *divides* a) أو إن b قاسم أو عامل (*divisor or factor*) للعدد a .

نسرد الآن بعض الخصائص الأساسية لعلاقة القسمة على الأعداد الصحيحة:

(١) إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$ فإن $a \mid c$.

فمثلاً $3 \mid 6$ و $6 \mid 18$ ، ولذا فإن $3 \mid 18$.

(٢) إذا كان $a \mid b$ و $c \mid d$ فإن $ac \mid bd$.

على سبيل المثال ، $5 \mid 10$ و $3 \mid 6$. ولذا فإن $15 = 5 \times 3$ يقسم $6 \times 10 = 60$.

(٣) $a \mid b$ إذا وفقط إذا كان $ma \mid mb$ حيث $m \neq 0$. فمثلاً ، $3 \mid 6$ إذا وفقط إذا كان $5 \times 3 \mid 5 \times 6$.

(٤) إذا كان $a \mid b$ و $b \neq 0$ فإن $|a| \leq |b|$. على سبيل المثال ، $-5 \mid 20$. ولذا فإن $5 \leq 20$.

(٥) $a \mid b$ و $b \mid a$ إذا وفقط إذا كان $a = \pm b$. فمثلاً، $2 \mid -2$ و $-2 \mid 2$ ومن ثم فإن $2 = -(-2)$.

(٦) إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$ فإن $a \mid (bx + cy)$ لجميع الأعداد الصحيحة x, y . على وجه الخصوص $a \mid (b + c)$ و $a \mid (b - c)$. فمثلاً، $3 \mid 6$ و $3 \mid 15$ ولذا فإن $3 \mid (2 \times 6 + 4 \times 15)$.

العدد الأولي (*prime number*) هو العدد الصحيح $p > 1$ الذي له قاسمان فقط هما 1 و p .

الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 15 هي 13 ، 11 ، 7 ، 5 ، 3 ، 2 .

ملحوظات

(١) لاحظ أن العدد 1 ليس أولياً وسنبين السبب وراء ذلك في الفصل الثاني عند دراسة الأعداد الأولية بشيء من التفصيل.

(٢) العدد الأولي الزوجي الوحيد هو العدد 2 وما عدا ذلك فجميع الأعداد الأولية الأخرى هي أعداد فردية.

نسرد الآن بعض اختبارات قابلية القسمة على بعض الأعداد الأولية الصغيرة:

(١) يقبل العدد n القسمة على العدد 2 إذا وفقط إذا كان العدد n زوجياً.

(٢) يقبل العدد n القسمة على العدد 3 إذا وفقط إذا قبل مجموع مراتب العدد n القسمة على العدد 3 . فمثلاً، مجموع مراتب العدد 576 هو $5+7+6=18$ وهذا المجموع يقبل القسمة على العدد 3 ، ولذا فالعدد 576 يقبل القسمة على العدد 3 .

(٣) يقبل العدد n القسمة على العدد 5 إذا وفقط إذا كانت مرتبة آحاده هي 0 أو 5 . فمثلاً، كل من العددين 375 و 370 يقبل القسمة على العدد 5 .

(٤) يقبل العدد n القسمة على 9 إذا وفقط إذا قبل مجموع مراتب العدد n القسمة على 9 .

(٥) يقبل العدد n القسمة على 10 إذا وفقط إذا كانت مرتبة آحاده تساوي صفراً.

(٦) يقبل العدد n القسمة على العدد 11 إذا وفقط إذا قبل المجموع التناوبي لمراتب العدد (تناوب إشارات المراتب موجب، سالب، موجب وهكذا) القسمة على العدد 11 .

فمثلا، المجموع التناوبي لمراتب العدد $n = 894325734$ هو

$$4-3+7-5+2-3+4-9+8=5$$

وبما أن العدد 5 لا يقبل القسمة على 11 فإن العدد n لا يقبل القسمة على 11 .

(٧) يقبل العدد n القسمة على العدد 2^k إذا قبل العدد المكون من أول k مرتبة من مراتب العدد n القسمة على 2^k . فمثلاً، يقبل العدد n القسمة على العدد $2^2=4$ إذا قبل العدد المكون من مرتبتي آحاد وعشرات العدد n القسمة على العدد 4 .

(٨) يقبل العدد n القسمة على العدد 5^k إذا قبل العدد المكون من أول k مرتبة من مراتب العدد n القسمة على 5^k .

مثال (١) أي من الأعداد 11 ، 10 ، 9 ، 8 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 يكون قاسماً للعدد $n = 894345354$ ؟

الحل

العدد زوجي، ومن ثم فهو يقبل القسمة على 2 .

مجموع مراتبه $45 = 4+5+3+5+4+3+4+9+8$.

وبما أن 45 يقبل القسمة على 3 وعلى 9 فالعدد يقبل القسمة على 3 وعلى 9 .

العدد لا يقبل القسمة على 4 (ومن ثم لا يقبل القسمة على 8) لأن 54 لا يقبل القسمة على 4 .

العدد لا يقبل القسمة على 5 لأن آحاده لا يساوي 0 أو 5 (ومن ثم فهو لا يقبل القسمة على 10) .

العدد يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 وعلى 3 .

المجموع التناوبي لمراتب العدد هو

$$4-5+3-5+4-3+4-9+8=1$$

وبما أن 1 لا يقبل القسمة على 11 فالعدد لا يقبل القسمة على 11 . ◆

مثال (٢) جد أصغر عدد صحيح موجب مكون من ثلاث مراتب ويقبل القسمة على كل من 5 ، 6 ، 8 ، 9 .

الحل

لكي يقبل العدد القسمة على 5 فيجب أن يكون أحد عوامله يساوي 5 . ولكي يقبل القسمة على 8 فيجب أن يكون أحد عوامله هو 8 . ولكي يقبل العدد القسمة على 9 فيجب أن يكون أحد عوامله هو 9 . وبما أن العدد يقبل القسمة على 8 فهو يقبل القسمة على 2 . كذلك هذا العدد يقبل القسمة على 3 لأنه يقبل القسمة على 9 . وبهذا فهو يقبل القسمة على 6. إذن، العدد هو $5\times 8\times 9=360$. ◆

مثال (٣) إذا قسمنا عدداً صحيحاً موجباً أصغر من 100 على العدد 3 يكون الباقي 2 وعند قسمته على العدد 4 يكون الباقي 3 وعند قسمته على العدد 5 يكون الباقي 4 . ما هو باقي قسمة العدد على 7 ؟

الحل

لنفرض أن العدد هو x . عندئذ، يقبل العدد $x+1$ القسمة على $60=5\times4\times3$. وبهذا نرى أن $x=59$ (لاحظ أن $x<100$) . ويكون باقي قسمة العدد 59 على 7 هو 3 . ◆

مثال (٤) ما باقي قسمة العدد 7300004003 على العدد 5 ؟

الحل

لاحظ أن $7300004003=7300004000+3$. وبما أن العدد 7300004000 يقبل القسمة على العدد 5 فإن باقي قسمة العدد 7300004003 على العدد 5 يساوي 3 . ◆

مثال (٥) جد جميع الأعداد $x739y$ المكونة من خمس مراتب والتي تقبل القسمة على 36 .

الحل

بما أن العدد $x739y$ يقبل القسمة على 36 فهو يقبل القسمة على كل من 4 و 9 . من ذلك نرى أن $9y$ يقبل القسمة على 4 . إذن، $y=2$ أو $y=6$.

أيضاً، المجموع $x+7+3+9+y=x+y+19$ يقبل القسمة على 9 . وبما أن x و y مرتبتان فإن $x+y=8$.

الآن، إذا كان $y=2$ فنرى أن $x=6$. وإذا كان $y=6$ فنرى أن $x=2$. من ذلك نرى أن لدينا عددين يحققان المطلوب هما 67392 و 27396 . ◆

مثال (٦) ما أصغر عدد صحيح يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 11 وتتكون جميع مراتبه من المرتبتين 1 أو 2 ؟

الحل

لاحظ أولاً أن العددين 1 و 2 لا يحققان المطلوب. ولكي يقبل العدد القسمة على 4 فيجب أن يكون زوجياً. العددان الزوجيان المكونان من مرتبتين هما 12 و 22 وكلاهما لا يحقق المطلوب. لأن 12 يقبل القسمة على 4 ولكنه لا يقبل القسمة على 11 و 22 يقبل القسمة على 11 ولكنه لا يقبل القسمة على 4 .

الأعداد المكونة من 3 مراتب هي 112 ، 122 ، 212 ، 222 . العددان 112 و 212 يقبلان القسمة على 4 ولكنهما لا يقبلان القسمة على 11 .

أما العددان 122 و 222 فلا يقبلان القسمة على العدد 4 . إذن، نحتاج إلى عدد مكون من 4 مراتب وهذه الأعداد هي

1112 ، 1212 ، 2112 ، 2212

والعدد الوحيد من بينها الذي يقبل القسمة على 4 و 11 هو 2112. ◆

إن احدى أهم الخواص الأساسية للأعداد الصحيحة هي خوارزمية القسمة وهي:

خوارزمية القسمة [*Division Algorithm*]

إذا كان a عدداً صحيحاً غير صفري وكان b عدداً صحيحاً فهناك عددان صحيحان وحيدان q و r يحققان

$$b = qa + r \text{ ،} \quad 0 \le r < |a| \text{ .}$$

يسمى العدد q خارج قسمة *(quotient)* العدد b على العدد a ويسمى العـــدد r باقي *(remainder)* القسمة.

مثال (٧) إذا كان n مربعاً كاملاً (أي، $n = a^2$) فأثبت أن باقي قسمة n على العدد 4 هو 0 أو 1 .

الحل

استناداً إلى خوارزمية القسمة نجد أن $a = 2q + r$ حيث $r = 0$ أو $r = 1$.

الآن، $n = a^2 = 4q^2 + 4qr + r^2 = 4(q^2 + qr) + r^2$.

وبما أن $r = 0$ أو $r = 1$ فإن $r^2 = 0$ أو $r^2 = 1$. وبهذا يكون $n = a^2 = 4k$ أو $n = a^2 = 4k + 1$. ◆

القاسم المشترك الأكبر [*Greatest Common Divisor*]

إذا كان a و b عددين صحيحين ليس كلاهما صفراً، فالقاسم المشترك الأكبر بينهما هو أكبر عدد صحيح موجب d يقسم كليهما. أي أن d يحقق:

(١) $d \mid a$ و $d \mid b$

(٢) إذا كان $c \mid a$ و $c \mid b$ فإن $c \le d$.

سنرمز للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b بالرمز $\gcd(a,b)$. الجدول التالي يبين لنا القاسم المشترك الأكبر لبعض الأزواج من الأعداد الصحيحة

a	b	$d = \gcd(a,b)$
4	5	1
9	15	3
8	32	8
15	35	5
20	30	10

إن مسألة إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين من المسائل المهمة ، احدى طرق حسابه تكون بإيجاد مجموعة قواسم كل من العددين ثم إيجاد الأعداد المشتركة بين المجموعتين ويكون القاسم المشترك الأكبر هو أكبر هذه الأعداد المشتركة. من الواضح أن هذه الطريقة ليست عملية خاصة عندما يكون العددان كبيرين . سنقدم طريقتين أكثر فعالية ، الأولى منهما تدعى خوارزمية إقليدس التي تعتمد على تكرار خطوات خوارزمية القسمة . أما الطريقة الثانية فتعتمد على المبرهنة الأساسية في الحساب والتي نؤجل نقاشها إلى الفصل الثاني من هذا الكتاب.

خوارزمية إقليدس تعتمد على الحقائق التالية:

(١) إذا كان $b = qa + r$ فإن $\gcd(a,b) = \gcd(a,r)$.

(٢) $\gcd(a,b) = \gcd(-a,b) = \gcd(a,-b) = \gcd(-a,-b)$.

(٣) $\gcd(a,0) = a$ عندما يكون $a > 0$.

خوارزمية إقليدس [*Euclidean Algorithm*]

لنفرض أن $a = r_0$ و $b = r_1$ عددان صحيحان حيث $a \geq b > 0$. عند استخدام خوارزمية القسمة بالتتابع نحصل على :

$$r_0 = q_1 r_1 + r_2 \quad ، \quad 0 \leq r_2 < r_1$$

$$r_1 = q_2 r_2 + r_3 \quad ، \quad 0 \leq r_3 < r_2$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = q_{n-2} r_{n-2} + r_{n-1} \quad ، \quad 0 \leq r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = q_{n-1} r_{n-1} + r_n \quad ، \quad 0 \leq r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = q_n r_n + 0$$

وعادة ما تسمى هذه المتطابقة "متطابقة بيزو".

لاحظ أنه لا بد من الحصول على باقٍ يساوي 0 بعد عدد منته من الخطوات لأن $a = r_0 > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$. ومن الحقائق السابقة نرى أن

$$\gcd(a,b) = \gcd(r_0, r_1) = \gcd(r_1, r_2) = \ldots = \gcd(r_{n-1}, r_n) = \gcd(r_n, 0) = r_n$$

مثال (٨) استخدم خوارزمية إقليدس لإيجاد القاسم المشترك الأكبر للعددين 45 و 75 .

الحل

بتنفيذ خطوات خوارزمية إقليدس نحصل على

$$75 = 1\times 45 + 30$$
$$45 = 1\times 30 + 15$$
$$30 = 2\times 15 + 0$$

وبهذا نرى استناداً إلى خوارزمية إقليدس أن $\gcd(45, 75) = 15$. ◆

ملحوظات

(١) إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ فنقول إن العددين a و b أوليان نسبياً *(relatively prime)* . على سبيل المثال ، العددان 9 ، 14 أوليان نسبياً لأن $\gcd(9, 14) = 1$.

(٢) لاحظ إمكانية استخدام خوارزمية إقليدس بخطوات إرجاعية لكتابة القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b كتركيب خطي لهما. أي إمكانية إيجاد عددين x و y بحيث يكون

$$\gcd(a, b) = ax + by$$

على سبيل المثال، وجدنا في المثال (٨) القاسم المشترك الأكبر للعددين 45 و 75. وباستخدام خطوات المثال إرجاعياً نحصل على

$$\begin{aligned} 15 &= 45 - 1\times 30 \\ &= 45 - 1(75 - 1\times 45) \\ &= 45\times 2 + 75\times(-1) \end{aligned}$$

وبهذا يكون $x = 2$ و $y = -1$.

(٣) يمكن استخدام خوارزمية إقليدس لحساب $\gcd(a,b)$ بـــالطرح المتكـــرر لأصغر العددين من العدد الأكبر ، فمثلاً يتم حساب $\gcd(45, 75)$ علـــى النحو التالي:

$$\begin{aligned}\gcd(45,75) &= \gcd(45,30)\\ &= \gcd(30,15)\\ &= \gcd(15,15)\\ &= 15\end{aligned}$$

وهذا يتفق مع ما وجدنا في المثال (٨) .

من الممكن إيجاد القاسم المشترك الأكبر لأكثر من عـــددين باســـتخدام خوارزمية إقليدس والحقيقة التالية :

$$\gcd(a_1,a_2, \dots , a_n) = \gcd(a_1,a_2, \dots ,a_{n-2}, \gcd(a_{n-1},a_n))$$

مثال (٩) احسب $\gcd(35, 45, 75)$.

الحل

وجدنا في المثال (٨) أن $\gcd(45, 75) = 15$. ولهذا نرى أن

$$\gcd(35, 45, 75) = \gcd(35, 15)$$

باستخدام خوارزمية إقليدس نجد أن

$$\begin{aligned}35 &= 2\times 15+5\\ 15 &= 3\times 5+0\end{aligned}$$

ولذا فإن $\gcd(35, 45, 75) = \gcd(35, 15) = 5$. ◆

المضاعف المشترك الأصغر [Least Common Multiple]

يرمز للمضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b بـــالرمز $lcm(a,b)$ ويُعرّف على أنه أصغر عدد صحيح موجب m يقبل القسمة على كل من العددين a و b . أي أن :

(١) $a \mid m$ و $a \mid m$.

(٢) إذا كان $a \mid n$ و $b \mid n$ حيث $n > 0$ فإن $m \le n$.

لحساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين نستخدم العلاقة المهمة التاليـــة بين القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين:

$$\gcd(a,b)\,.\,lcm(a,b) = ab \qquad (١)$$

مثال(١٠) وجدنا في المثال (٨) أن $\gcd(45,75) = 15$. وبهذا يكون

$$lcm(45,75) = \frac{45 \times 75}{15} = 225 \ . \qquad \blacklozenge$$

يمكن إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لأكثر من عددين باستخدام الحقيقة التالية :

$$lcm(a_1, a_2, \ldots, a_n) = lcm(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, lcm(a_{n-1}, a_n))$$

مثال (١١) لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 35 ، 45 ، 75 لاحـــظ أولاً أن $lcm(45,75) = 225$ (كما هو مبين في المثال (١٠)) . الآن

$$lcm(35,45,75) = lcm(35,225)$$

واستناداً إلى خوارزمية إقليدس نجد أن

$$225 = 6\times 35 + 15$$
$$35 \ = 2\times 15 + 5$$
$$15 \ = 3\times 5 + 0$$

ومن ذلك يكون $lcm(35, 225) = \frac{35\times 225}{5} = 1575$.

إذن، $lcm(35, 45, 75) = 1575$. ◆

تحذير

العلاقة (١) ليست صحيحة لأكثر من عددين ، فمثلاً $\gcd(6, 10, 15) = 1$ و $lcm(6, 10, 15) = 30$. ولكن

$$lcm(6, 10, 15)\gcd(6, 10, 15) = 30 \neq 6\times 10\times 15 = 900$$

نقدم الآن بعض الأمثلة ذات الطابع النظري التي تساعدنا على فهم أفضل لمفهومي القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر، كما أنها تساعدنا على حل بعض المسائل الحسابية .

مثال (١٢) افرض أن a و b عددان صحيحان ليس كلاهما صفراً. إذا وجد عددان صحيحان x و y يحققان $1 = ax + by$ فأثبت أن $\gcd(a,b) = 1$.

الحل

نفرض أن $1 = ax + by$ ونفرض لغرض الحصول على تناقض أن $\gcd(a,b) = d > 1$. عندئذ، $d \mid a$ و $d \mid b$. ومن ذلك نرى أن $d \mid (ax + by)$. أي أن $d \mid 1$ وهذا مستحيل. إذن، $d = 1$. ◆

مثال (١٣) إذا كان $\gcd(a,b) = 1$ وكان $a \mid c$ و $b \mid c$ فأثبت أن $ab \mid c$.

الحل

بما أن $\gcd(a,b)=1$ فيوجد عددان صحيحان x و y حيث $1=ax+by$. وبما أن $a \mid c$ و $b \mid c$ فيوجد عددان صحيحان r و s حيث $c=ar$ و $c=bs$. الآن

$$\begin{aligned} c=c\times 1 &= c(ax+by) \\ &= cax+cby \\ &= bsax+arby \\ &= ab(sx+ry) \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن $ab \mid c$. ◆

ملحوظة

لا يمكن الاستغناء عن الشرط $\gcd(a,b)=1$ في المثال (١٣) ، فمثلاً، $48 \mid 8$ و $48 \mid 12$ ولكن $8\times 12=96$ لا يقسم العدد 48 .

مثال (١٤) إذا كان $\gcd(a,b)=1$ وكان $a \mid bc$ فأثبت أن $a \mid c$.

الحل

بما أن $\gcd(a,b)=1$ فيوجد عددان صحيحان x و y حيث $1=ax+by$. بضرب طرفي المعادلة بالعدد c نرى أن $c=acx+bcy$. ولكن $a \mid ac$ و $a \mid bc$. وبهذا نجد أن $a \mid (acx+bcy)$. ومن ثم فإن $a \mid c$. ◆

ملحوظة

الشرط $\gcd(a,b)=1$ ضروري في المثال (١٤) . فمثلاً ، $12 \mid 9\times 8$ ولكن $12 \nmid 9$ و $12 \nmid 8$.

مثال (١٥) إذا كان $\gcd(a,b)=d$ فأثبت أن $\gcd\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$.

الحل

بما أن $\gcd(a,b)=d$ فيوجد عددان صحيحان x و y حيث $d=ax+by$. وبقسمة طرفي المعادلة على العدد d نرى أن $1=\frac{a}{d}x+\frac{b}{d}y$. وباستخدام المثال (١٢) نجد أن $\gcd\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$. ◆

مثال (١٦)

إذا كان $a \mid c$ و $b \mid c$ فأثبت أن $lcm(a,b) \mid c$.

الحل

لنفرض أن $m=lcm(a,b)$. بما أن $a \mid c$ و $b \mid c$ فيوجد عددان صحيحان x و y حيث $c=ax$ و $c=by$. الآن ، $m=\frac{ab}{d}$
حيث $d=\gcd(a,b)$. ولذا يوجد عددان صحيحان r و s يحققان $d=ar+bs$. من ذلك نجد أن

$$\begin{aligned}\frac{c}{m}&=\frac{cd}{ab}\\&=\frac{car+cbs}{ab}\\&=\left(\frac{c}{b}\right)r+\left(\frac{c}{a}\right)s\end{aligned}$$

وهذا عدد صحيح. إذن، $m \mid c$. ◆

مثال (١٧) [$RUMO$ 1995] إذا كان m و n عددين صحيحين موجبين يحققان

$$lcm(m,n)+\gcd(m,n)=m+n$$

فأثبت أن أحدهما يقبل القسمة على الآخر.

الحل

لنفرض أن $d = \gcd(m,n)$. عندئذ، يمكن إيجاد عددين صحيحين a و b بحيث يكون $m = ad$ ، $n = bd$, $\gcd(a,b) = 1$.

الآن،

$$lcm(m,n) = \frac{mn}{\gcd(m,n)} = \frac{(ad)(bd)}{d} = abd$$

وبالتعويض في المعادلة $lcm(m,n) + \gcd(m,n) = m + n$ نرى أن

$$abd + d = ad + bd$$

وهذه تكافيء المعادلة

$$(a-1)(b-1) = 0$$

إذن، $a = 1$ أو $b = 1$.

إذا كان $a = 1$ فإن $m = d$ و $n = bd = bm$. وبهذا نجد أن $m \mid n$.

أما إذا كان $b = 1$ فإن $n = d$ و $m = ad = an$ ويكون $n \mid m$ في هذه الحالة. ◆

تمثيل الأعداد [*Representation of Integers*]

من الممكن كتابة العدد الصحيح 876932 على الصورة

$$800000 + 70000 + 6000 + 900 + 30 + 2$$

والسبب الذي يسمح لنا بكتابة العدد بهذه الطريقة هو استخدامنا للنظام العشري لتمثيل الأعداد . أي استخدامنا لعشرة أرقام (تسمى مراتب، هي

$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$. كل من هذه المراتب عبارة عن قوة للعدد 10 (يعتمد على موقع المرتبة في العدد). ولهذا يمكن كتابة العدد 876982 على الصورة

$$8\times10^5+7\times10^4+6\times10^3+9\times10^2+8\times10+2\times10^0$$

ولكن هل النظام العشري هو النظام الوحيد لتمثيل الأعداد؟ الإجابة هي لا، حيث نعتقد أن استخدامنا للنظام العشري يرجع إلى أن عدد أصابع اليدين يساوي عشرة مما يسهل علينا الحساب، والجدير بالذكر أن النظام العددي لدى البابليين كان النظام الستيني (للأساس 60). كما أن النظام العددي الذي استخدمه المايانيون (شعوب عاشت في أمريكا الوسطى والمكسيك) هو النظام العشريني ، والحاسبات الآلية تستخدم النظام الثنائي . في الحقيقة، إن أي عدد صحيح أكبر من 1 يصلح لأن يكون أساساً لنظام عددي. فمثلاً يمكن كتابة العدد 76412 في النظام الثماني (للأساس 8) على النحو التالي:

$$7\times8^4+6\times8^3+4\times8^2+1\times8+2\times8^0$$

للتمييز بين الأساسات المختلفة للأعداد نقوم بكتابة أساس العدد كدليل للعدد، فمثلاً نكتب 76412_8 إذا كان الأساس هو 8 وهكذا. أما إذا كان الأساس هو 10 فنكتب 76412 عوضاً عن 76412_{10} وذلك للسهولة.

مثال (١٨) حول العدد 76412_8 إلى النظام العشري.

الحل

$$\begin{aligned}76412_8 &= 7\times8^4+6\times8^3+4\times8^2+1\times8+2\times8^0\\ &= 7\times4096+6\times512+4\times64+1\times8+2\\ &= 28672+3072+256+8+2\\ &= 32010\end{aligned}$$

وبهذا يكون $32010 = 76412_8$. ◆

مثال (١٩) حول العدد 76412_8 إلى النظام السداسي.

الحل

نقوم أولاً بتحويل العدد 76412_8 إلى النظام العشري لنجد أن $76412_8 = 32010$ (كما هو مبين في المثال (١٥). الآن ، بملاحظة أن

$6^2 = 36$ ، $6^3 = 216$ ، $6^4 = 1296$ ، $6^5 = 7776$ ، $6^6 = 46656$

نرى أن

$$\begin{aligned}
76412_8 &= 32010 = 31104 + 906 \\
&= 4 \times 6^5 + 4 \times 6^3 + 42 \\
&= 4 \times 6^5 + 4 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 6 \\
&= 4 \times 6^5 + 4 \times 6^3 + 1 \times 6^2 + 1 \times 6^1 + 0 \times 6^0 \\
&= 404110_6
\end{aligned}$$

وبهذا يكون $76412_8 = 404110_6$. ◆

ملحوظة

عند استخدامنا لنظام أساسه أكبر من 10 نحتاج إلى مراتب أكثر من المراتب العشرة الشائعة الاستخدام وهذا ليس بالأمر العسير حيث نقوم باستخدام رموز جديدة للمراتب الأكثر من عشرة، على سبيل المثال، مراتب النظام الستة عشري (أساس 16) الشائع الاستخدام هي :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$$

وهذا يعني أن $A_{16} = 10_{10}$ ، $B_{16} = 11_{10}$ ، $C_{16} = 12_{10}$ ، $D_{16} = 13_{10}$ ، $E_{16} = 14_{10}$ ، $F_{16} = 15_{10}$.

مثال (٢٠) حول العدد $DEF92_{16}$ إلى النظام العشري.

الحل

$$\begin{aligned} DEF92_{16} &= 13\times16^4+14\times16^3+15\times16^2+9\times16+2\times16^0 \\ &= 851968+57344+3840+144+2 \\ &= 913298 \end{aligned}$$

إذن، $DEF92_{16} = 913298$. ◆

مرتبة آحاد العدد [*The Units Digit*]

العديد من مسائل المسابقات تتضمن حساب مرتبة آحاد حاصل جمع أو حاصل ضرب أعداد . لإنجاز ذلك علينا ملاحظة ما يلي:

(١) مرتبة آحاد حاصل جمع عددين هي مرتبة آحاد حاصل جمع مرتبتي آحادهما. فمثلاً، مرتبة آحاد $51324736+345789$ هي 5 لأن $9+6=15$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي 5 .

(٢) مرتبة آحاد حاصل ضرب عددين هي مرتبة آحاد حاصل ضرب مرتبتي آحادهما. فمثلاً، مرتبة آحاد 51324786×345789 هي 4 لأن $9\times6=54$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي 4 .

(٣) مرتبة آحاد مربع عدد هي مرتبة آحاد مربع مرتبة آحاده، فمثلاً، مرتبة آحاد العدد 5723436^2 هي 6 لأن $6^2=36$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي 6 .

مثال (٢١) جد مرتبة آحاد العدد $7^{42}+19^{93}$.

الحل

لاحظ أن مرتبة آحاد العدد 19^{93} هي نفس مرتبة آحاد العدد 9^{93}. الآن، $81=9^2$ ومرتبة آحاده تساوي 1 . وبما أن $9^{93}=9^{92}\times 9=(9^2)^{46}\times 9$ فنرى أن مرتبة آحاد 9^{93} هي $9=9\times 1$.

أيضاً ، مرتبة أحاد $49=7^2$ هي 9 . مرتبة أحاد $7^4=7^2\times 7^2$ هي مرتبة آحاد $81=9\times 9$ وهي 1. وبما أن $7^{42}=(7^4)^{10}\times 7^2$ فإن مرتبة آحاد 7^{42} هي مرتبة آحاد $9=9\times 1$ وهي 9 .

إذن، مرتبة آحاد $7^{42}+19^{93}$ هي مرتبة آحاد $18=9+9$ وتساوي 8. ◆

مثال (٢٢)

ما المراتب من بين المراتب العشرة $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ التي يمكن أن تكون مرتبة آحاد مربع كامل؟

الحل

بتربيع المراتب نجد أن

$0^2=0$ ، $1^2=1$ ، $2^2=4$ ، $3^2=9$ ، $4^2=16$ ، $5^2=25$، $6^2=36$، $7^2=49$ ، $8^2=64$، $9^2=81$. ولذا فالمراتب 0 ، 1 ، 4 ، 5 ، 6 ، 9 يمكن أن تكون مرتبة آحاد مربع كامل. وأما المراتب 2 ، 3 ، 7 ، 8 فلا يمكن أن تكون مرتبةآحاد مربع كامل . ◆

مثال (٢٣) ما مرتبة آحاد العدد $13089^2+15785^2$ ؟

الحل

مرتبة أحاد 13089^2 هي مرتبة آحاد 9^2 وهي 1 ومرتبة آحاد 15785^2 هي مرتبة آحاد 5^2 وهي 5. إذن، مرتبة آحاد المجموع $13089^2+15785^2$ هي مرتبة آحاد $1+5=6$ وهي 6. ◆

مثال (٢٤) ما مرتبة آحاد العدد $(1+2+3+4+\ ...\ +50)^3$.

الحل

لاحظ أن $1+2+3+...+50=\frac{50\times51}{2}=25\times51$ ومرتبة آحاد هذا العدد هي 5 . من ذلك نرى أن مرتبة آحاد $(1+2+3+...+50)^3$ هي مرتبة آحاد $5^3=125$ وهي 5. ◆

لإيجاد مرتبة آحاد قوة عدد نحتاج إلى التجريب للحصول على نمط لقوى العدد.

مثال (٢٥) جد مرتبة آحاد 2009^{2012} .

الحل

لاحظ أن مرتبة آحاد 2009 هي 9 . مرتبة آحاد 2009^2 هي مرتبة آحاد $9^2=81$ وهي 1 . مرتبة آحاد 2009^3 هي مرتبة آحاد $9=9\times1$ وهي 9. مرتبة آحاد 2009^4 هي مرتبة آحاد $81=9\times9$ وهي 1.

من ذلك، نرى أن مرتبة آحاد القوى الزوجية للعدد 2009 هي 1 ومرتبة آحاد القوى الفردية هي 9. إذن، مرتبة آحاد 2009^{2012} هي 1. ◆

مثال (٢٦) ما مرتبة آحاد العدد 2008^{2011} ؟

الحل

مفتاح الحل هو البحث عن نمط لمراتب آحاد قوى العدد 2008. ولانجاز ذلك لاحظ أن

مرتبة آحاد 2008 هي 8

مرتبة آحاد 2008^2 هي 4

مرتبة آحاد 2008^3 هي 2

مرتبة آحاد 2008^4 هي 6

مرتبة آحاد 2008^5 هي 8

إذن، مراتب آحاد القوى هي متتابعة دورية ... $8, 4, 2, 6, 8,$ طول دورها يساوي 4.

الآن، $2008^{2011} = 2008^{2008+3}$

$$= (2008^4)^{502} \times 2008^3$$

مرتبة آحاد $2008^{4\times502}$ هي مرتبة آحاد 2008^4 وهي 6 ومرتبة آحاد 2008^3 هي 2.

إذن، مرتبة آحاد 2008^{2011} هي مرتبة آحاد $12 = 2\times 6$ وهي 2. ◆

مسائل محلولة

(١) القاسم المشترك الأكبر للعددين 252 و 198 هو:

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 18

(٢) ما هي العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟

(أ) يوجد عددان صحيحان a و b يحققان $a+b=500$ و $\gcd(a,b)=7$.

(ب) $\gcd(a,a+1)=1$ لكل عدد صحيح a .

(ج) $\gcd(a,a-2)=1$ لكل عدد صحيح فردي a .

(د) $2\mid(a^2+a)$ لكل صحيح موجب a .

(٣) إذا كان k عدداً صحيحاً موجباً فإن $\gcd(6k+5,7k+6)$ يساوي:

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 5 (د) 6

(٤) عدد الأعداد الصحيحة n في الفترة $500<n<2000$ التي تقبل القسمة على 21 هو:

(أ) 95 (ب) 72 (ج) 23 (د) 21

(٥) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 101 و 13 هو :

(أ) 1313 (ب) 1317 (ج) 1319 (د) 1323

(٦) إذا كان $\gcd(a,b)=1$ فما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a+b$ و $a-b$ ؟

(أ) 1 و 3 (ب) 1 و 2 (ج) 2 و 3 (د) 2 و 7

(٧) إذا كان x و y عددين صحيحين ، فما أصغر قيمة موجبة للكسر $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}$؟

(أ) $\frac{1}{30}$ (ب) $\frac{1}{36}$ (ج) $\frac{1}{90}$ (د) $\frac{1}{180}$.

(٨) إذا كان a عدداً فردياً فما قيمة $lcm(a,a+2)$ ؟

(أ) $a+2$ (ب) 1 (ج) $a(a+2)$ (د) $\frac{a(a+2)}{2}$

(٩) إذا كان $\gcd(b,c)=1$ وكان $m\,|\,b$ فإن $\gcd(m,c)$ يساوي

(أ) c (ب) m (ج) b (د) 1

(١٠) إذا كان n عدداً صحيحاً فما العبارات الخاطئة من بين العبارات التالية؟

(أ) $n^2=3k+2$ (ب) $n^2=3k$ أو $n^2=3k+1$

(ج) $n^2=4k+2$ (د) $n^2=4k$ أو $n^2=4k+1$

(١١)[$AHSME$ 1951] ما أكبر عـــدد صحيح من بين الأعداد التالية الذي يقسم العدد n^3-n لكل عدد صحيح n؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(١٢) [$AHSME$ 1951] يقبل العدد الصحيح الذي على الصورة $abcabc$ القسمة على

(أ) 7 و 11 فقط (ب) 11 و 13 فقط (ج) 1001 (د) 101

(١٣) [$AHSME$ 1976] إذا كانت بواقي قسمة كل من الأعداد 1059 ، 1417 ، 2312 على العدد d متساوية ولتكن r فما قيمة $d-r$؟

(أ) 15 (ب) 17 (ج) 19 (د) 23

(١٤) إذا كان x و y عددين صحيحين بحيث يقبل العدد $2x+3y$ القسمة على 17 فما العدد من بين الأعداد التالية الذي يقبل القسمة على 17؟

(أ) $2x+5y$ (ب) $9x+5y$

(ج) $9x+y$ (د) $3x+2y$

(١٥) [AIME 1986] ما أكبر عدد صحيح موجب n بحيث يقبل العدد n^3+100 القسمة على $n+10$ ؟

(أ) 870 (ب) 880 (ج) 890 (د) 900

(١٦) العدد الثماني المكافيء للعدد السداسي 3425_6 هو

(أ) 1453_8 (ب) 2453_8 (ج) 1463_8 (د) 2253_8

(١٧) [AHSME 1981] المرتبة الأخيرة (من اليسار) للعدد $x=12112211122211112222_3$ في النظام التساعي (للأساس 9) هي

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(١٨) [Mathcounts 1986] ما قيمة المرتبة A التي تجعل العدد $12A3B$ حيث $A\neq B$ يقبل القسمة على كل من 4 و 9 ؟

(أ) $A=3$ (ب) $A=2$ (ج) $A=1$ (د) $A=0$

(١٩) [Mandelbrot 3] ما أصغر عدد صحيح موجب أكبر من 1 الذي يكون باقي قسمته يساوي 1 عند قسمته على أي من الأعداد التي أكبر من 1 وأصغر من 10؟

(أ) 2520 (ب) 2521 (ج) 2522 (د) 2523

(٢٠) [$Mathcounts$ 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب n إذا قسم على 4 يبقى 2 وإذا قسم على 5 يبقى 3 وإذا قسم على 7 يبقى 5 ؟

(أ) 128 (ب) 130 (ج) 138 (د) 140

(٢١) [$AHSME$ 1967, $MA\Theta$ 2009] جمعنا العدد $2a3$ المكون من ثلاث مراتب مع العدد 326 فكان الناتج العدد المكون من ثلاث مراتب $5b9$. إذا قبل العدد $5b9$ القسمة على العدد 9 فما قيمة $a+b$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٢٢) [$Mathcounts$ 2010] إذا كان مجموع أول 20 عدد صحيح موجب زوجي يساوي مجموع أربعة أعداد زوجية متتالية . فما أكبر هذه الأعداد الأربعة المتتالية؟

(أ) 104 (ب) 106 (ج) 108 (د) 110

(٢٣) ما مجموع مراتب العدد العشري $8^{25}\times 5^{64}$ ؟

(أ) 6 (ب) 10 (ج) 14 (د) 18

(٢٤) [$Mathcounts$ 2010] إذا كان AB_9 هو تمثيل عدد للأساس 9 وكان BA_7 هو تمثيل هذا العدد للأساس 7 فما التمثيل العشري لهذا العدد؟

(أ) 31 (ب) 34 (ج) 62 (د) 86

(٢٥) [$AHSME$ 1967] لنفرض أن $12_b\times 51_b\times 16_b=(3146)_b$.

ولنفرض أن $s_b=12_b+15_b+16_b$. ما قيمة s_b؟

(أ) 38 (ب) 40 (ج) 42 (د) 44

(٢٦) [$AMC10A$ 2003] لنفرض أن $AMC10$ و $AMC12$ عدداً مكوناً من خمسة مراتب حيث $AMC10+AMC12=123422$.

ما قيمة $A+M+C$ ؟

(أ) 15 (ب) 14 (ج) 13 (د) 12

(٢٧) [$AMC10B$ 2006] ما مرتبة العشرات في المجموع

$$S=7!+8!+9!+\ldots+2006!$$

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(٢٨) [$AMC10A$ 2008] لنفرض أن $<n>$ هو مجموع القواسم الموجبة للعدد الصحيح الموجب n ما عدا العدد n . ما قيمة $<<<6>>>$ ؟

(أ) 6 (ب) 12 (ج) 24 (د) 32

(٢٩) [$AHSME$ 1971] العددان الواقعان بين 60 و 70 اللذان يقسمان العدد $2^{48}-1$ هما

(أ) 61 و 63 (ب) 61 و 65

(ج) 63 و 65 (د) 63 و 67

(٣٠) [$AHSME$ 1970] لنفرض أن بواقي قسمة كل من الأعداد 13511 ، 13903 ، 14589 على العدد m متساوية ويساوي كل منها r . ما أكبر عدد صحيح m يحقق ذلك؟

(أ) 28 (ب) 49 (ج) 98 (د) 108

(٣١) [$BritishJMC$ 1997] أي من الأعداد التالية ليس مضاعفاً للعدد 3 ؟

(أ) 234 (ب) 3456 (ج) 45678 (د) 567890

(٣٢) [$BritishJMC$ 1997] العدد المكون من أربع مراتب $86xy$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 3 ، 4 ، 5 . ما قيمة $x+y$ ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 7 (د) 9

(٣٣) [BritishJMC 1999] ما باقي قسمة العدد 7000010 على العدد 7 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٤) [BritishJMC 1999] إذا كان العدد المكون من 8 مراتب $1234x\,678$ يقبل القسمة على 11 فما قيمة المرتبة x؟

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 7 (د) 9

(٣٥) [BritishJMC 2000] العدد المكون من خمس مراتب $41\,d\,6d$ يقبل القسمة على 9 . ما مجموع مراتبه ؟

(أ) 18 (ب) 23 (ج) 25 (د) 27

(٣٦) ما مرتبة آحاد العدد 1436^{1433} ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٣٧) ما مرتبة آحاد العدد 2004^{2012} ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٣٨) ما مرتبة آحاد العدد 1432^{2011} ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٣٩) ما مرتبة آحاد حاصل الضرب $2007^{81} \times 2006^{201}$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 7

(٤٠) ما مرتبة آحاد المجموع $4^{n} + 4^{n+1}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 4

(٤١) [Hamilton 2006] ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب مراتبه مأخوذة من 0 أو 1 فقط ويقبل القسمة على 12 ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٤٢) [AHSME 1999] مجموع مراتب ناتج حاصل الضرب $2^{1999} \times 5^{2001}$ هو

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 7

(٤٣) [AMC10A 2008] إذا كان $k = 2008^2 + 2^{2008}$ فما مرتبة آحاد العدد $k^2 + 2^k$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٤٤) [$MA\Theta$ 2007] إذا كان العدد $6A6B$ يقبل القسمة على 72 فما حاصل ضرب جميع القيم الممكنة للمرتبة A ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 14 (د) 16

(٤٥) [AMC10B 2007] ليكن n أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 9 ويستخدم المرتبتين 4 و 9 فقط على أن يحتوي على كل منهما مرة واحدة على الأقل. ما المراتب الأربعة الأولى من اليمين للعدد n ؟

(أ) 4444 (ب) 4494 (ج) 4944 (د) 9944

(٤٦) [$MA\Theta$ 2009] ما باقي قسمة العدد $14418 \times 14416 \times 14414$ على العدد 14 ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

(٤٧) [Aust.MC 2003] ما أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يقبل العدد $10^n - 1$ القسمة على 63 ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9

(٤٨) العدد $2^{32}+1$ يقبل القسمة على

(أ) 97 (ب) 101 (ج) 257 (د) 641

(٤٩) إذا كانت a ، b ، c أعداداً صحيحة موجبة حيث $\gcd(a,b)=1$ و $a+b$ يقبل القسمة على c فإن $\gcd(a,c)$ يساوي

(أ) 1 (ب) 2 (ج) a (د) c

(٥٠) [Aust.MCΘ 2002] لنفرض أن N عدد مكون من مرتبتين وأن باقي قسمة 272758 على N يساوي 13 وأن باقي قسمة 273437 على N يساوي 17. ما مجموع مرتبتي N؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

(٥١) [MAΘ 2009] ما باقي قسمة $5^{32}+9^{83}$ على العدد 6؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٥٢) [AMC10B 2002] ليكن $25^{54}\times 64^{25}=N^2$ حيث N عدد صحيح موجب مجموع مراتب N يساوي

(أ) 7 (ب) 14 (ج) 21 (د) 28

(٥٣) [Aust.MC 2002] ليكن P عدداً مكوناً من 2002 مرتبة ويقبل القسمة على 18 . وليكن Q مجموع مراتب P و R مجموع مراتب Q و S مجموع مراتب R . العدد S يساوي

(أ) 9 (ب) 18 (ج) 180 (د) 2002

(٥٤) [AMC10B 2002] ليكن n عدداً صحيحاً موجباً حيث $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ عدد صحيح. أي من العبارات التالية خاطئة ؟

(أ) n يقبل القسمة على 2 (ب) n يقبل القسمة على 3

(ج) $n<21$ (د) $n>34$

(٥٥) [$Aust,MC$ 2001] لنفرض أن m عدد صحيح بحيث يكون القاسم المشترك الأكبر لكل زوج من الأعداد $24, 42, m$ متساوٍ والمضاعف المشترك الأصغر لكل زوج من الأعداد $6, 15, m$ متساوٍ. ما قيمة m؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 15 (د) 30

(٥٦)[$Aust.MC$ 2001] إذا كان باقي قسمة x على 12 يساوي باقي قسمة x على 9 ويساوي 2 ، وكان x يقبل القسمة على 7 فإن أصغر قيمة موجبة للعدد x تقع في الفترة

(أ) بين 50 و 60 (ب) بين 60 و 100

(ج) بين 100 و 150 (د) بين 150 و 200

(٥٧) [$Aust,\ MC$ 1997] أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يكون باقي قسمته على العدد 7 يساوي 4 وباقي قسمته على العدد 12 يساوي 5 يقع في الفترة :

(أ) بين 19 و 31 (ب) بين 32 و 42

(ج) بين 51 و 58 (د) بين 60 و 72

(٥٨) [$Aust.\ MC$ 1993] إذا قسمنا العدد الصحيح $x > 8$ على كل من 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، يكون الباقي 1 . ما أصغر قيمة للعدد x ؟

(أ) 840 (ب) 841 (ج) 1681 (د) 2522

(٥٩) [$Aust.MC$ 1986] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n بحيث يقبل العدد n^2+7 القسمة على العدد $n+3$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٦٠) [$Aust.MC$ 1982] إذا كان حاصل الجمع $5b2 + 3a6$ يقبل القسمة على 9 فما أكبر قيمة ممكنة لمجموع المرتبتين a و b ؟

(أ) 2 (ب) 9 (ج) 11 (د) 17

حلول المسائل

(١) القاسم المشترك الأكبر للعددين 252 و 198 هو:

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 18

الحل

الإجابة هي (د). لرؤية ذلك نستخدم خوارزمية إقليدس فنجد أن :

$$252 = 1\times 198 + 54$$
$$198 = 3\times 54 + 36$$
$$54 = 1\times 36 + 18$$
$$36 = 2\times 18 + 0$$

ومن ذلك يكون $\gcd(198, 252) = 18$.

(٢) ما العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟

(أ) يوجد عددان صحيحان a و b يحققان $a+b = 500$ و $\gcd(a,b) = 7$.

(ب) $\gcd(a, a+1) = 1$ لكل عدد صحيح a .

(ج) $\gcd(a, a-2) = 1$ لكل عدد صحيح فردي a .

(د) $2 \mid (a^2 + a)$ لكل صحيح موجب a .

الحل

العبارة الخاطئة هي (أ) لأنه لوكان $a+b = 500$ و $\gcd(a,b) = 7$ فإن $7 \mid b$ و $7 \mid a$ ومن ثم نرى أن $7 \mid (a+b)$. أي أن $7 \mid 500$ هذا مستحيل.

صواب (ب) نحصل عليه بملاحظة أن $1+a+(-a)=1$. لبرهان صواب (ج) ، نفرض أن $\gcd(a,a-2)=d$. عندئذ ، $d \mid a$ و $d \mid (a-2)$. إذن $d \mid 2$. وبهذا فإن $d=1$ أو $d=2$. وبما أن a فردي فنرى أن $d=1$. أما صواب الفقرة (د) نحصل عليه بملاحظة أن $a^2+a=a(a+1)$ حاصل ضرب عددين متتاليين ومن ثم فهو عدد زوجي يقبل القسمة على 2.

(٣) إذا كان k عدداً صحيحاً موجباً فإن $\gcd(6k+5, 7k+6)$ يساوي:

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 5 (د) 6

الحل

الاجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$1=6\times(7k+6)+(-7)\times(6k+5)$$

ولذا ، يكون $\gcd(6k+5, 7k+6)=1$.

(٤) عدد الأعداد الصحيحة n في الفترة $500<n<2000$ التي تقبل القسمة على 21 هو:

(أ) 95 (ب) 72 (ج) 23 (د) 21

الحل

الاجابة هي (ب): عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 500 وتقبل القسمة على العدد 21 هو $\left[\frac{500}{21}\right]=23$ حيث $[x]$ تعني أكبر عدد

صحيح لا يزيد عن x. بالمثل ، عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 2000 وتقبل القسمة على 21 هو $95 = \left[\frac{2000}{21}\right]$. إذن، عدد الأعداد الواقعة في الفترة $500 < n < 2000$ هو $72 = 23 - 95$.

(٥) المضاعف المشترك الأصغر للعددين 101 و 13 هو :

(أ) 1313 (ب) 1317 (ج) 1319 (د) 1323

الحل

الإجابة هي (أ): استناداً إلى خوارزمية إقليدس نجد أن

$$101 = 7\times13+10$$
$$13 = 1\times10+3$$
$$10 = 3\times3+1$$
$$3 = 1.3+0$$

ولذا فإن $\gcd(101, 13) = 1$. إذن، $lcm(101, 13) = \frac{101\times13}{1} = 1313$.

(٦) إذا كان $\gcd(a, b) = 1$ فما القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a+b$ و $a-b$ ؟

(أ) 1 و 3 (ب) 1 و 2 (ج) 2 و 3 (د) 2 و 7

الحل

الإجابة هي (ب) : لنفرض أن $\gcd(a+b, a-b) = d$. عندئذ ، $d \mid (a+b)$ و $d \mid (a-b)$. من ذلك نجد أن $d \mid (a+b+a-b)$ و $d \mid (a+b-a+b)$. أي أن، $d \mid 2a$ و $d \mid 2b$.

لاحظ أن العـــددين a و b لا يمكـــن أن يكونـــا زوجـــيين معـــاً لأن $\gcd(a,b)=1$.

إذا كان واحداً فقط من بين العددين a و b فردياً فإن كلاً من العـــددين $a+b$ و $a-b$ فردي. ومن ثم فإن d فردي.

إذن، $\gcd(d,2)=1$. وبهـــذا نجـــد أن $d \mid a$ و $d \mid b$. ولكـــن $\gcd(a,b)=1$. إذن، $d=1$ في هذه الحالة.

أما إذا كان العددان a و b فرديين فنرى أن $a-b$ و $a+b$ زوجيـــان. وبهذا فإن d زوجي وليكن $d=2e$. وبما أن $d \mid 2a$ و $d \mid 2b$ فنرى أن $e \mid a$ و $e \mid b$. أي أن $e=1$ ويكون $d=2$.

(٧) إذا كان x و y عددين صحيحين، فما أصغر قيمـــة موجبـــة للكســـر $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}$؟

(أ) $\frac{1}{30}$ (ب) $\frac{1}{36}$ (ج) $\frac{1}{90}$ (د) $\frac{1}{180}$.

الحل

الإجابـــة هـــي (د) : لنفـــرض أن $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}=z$. عندئـــذ، $36x+30y=(30\times 36)z$. لجعل z موجباً وأصغر ما يمكن فيكفي أن نجعل $36x+30y$ موجباً وأصغر ما يمكن، ولكن أصغر قيمـــة موجبـــة للمقدار $36x+30y$ هي $\gcd(36,30)=6$. إذن،

القيمة الصغرى الموجبة للمقدار $\frac{x}{30}+\frac{y}{36}$ هي $\frac{1}{180}=\frac{6}{30\times 36}$.

(٨) إذا كان a عدداً فردياً فما قيمة $lcm(a,a+2)$ ؟

(أ) $a+2$ (ب) 1 (ج) $a(a+2)$ (د) $\frac{a(a+2)}{2}$

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن a عدد فردي فإن $\gcd(a,a+2)=1$. وبهـــذا يكون $lcm(a,a+2)=\frac{a(a+2)}{1}=a(a+2)$.

(٩) إذا كان $\gcd(b,c)=1$ وكان $m\,|\,b$ فإن $\gcd(m,c)$ يساوي

(أ) c (ب) m (ج) b (د) 1

الحل

الإجابة هـــي (د) : لنفـــرض أن $d=\gcd(m,c)$. عندئـــذ ، $d\,|\,c$ و $d\,|\,m$. وبما أن $m\,|\,b$ فنرى أن $d\,|\,b$. إذن، $d=\gcd(b,c)=1$.

ويمكن حل هذا التمرين بطريقة أخرى على النحو التالي:

بما أن $\gcd(b,c)=1$ فيوجد عددان صحيحان r و s بحيـــث يكـــون $rb+sc=1$. وبمـــا أن $m\,|\,b$ فنـــرى أن $b=mk$. عندئـــذ، $(rk)m+sc=1$. إذن، $\gcd(m,c)=1$.

(١٠) إذا كان n عدداً صحيحاً فما العبارات الخاطئة من بين العبارات التالية؟

(أ) $n^2=3k+2$ (ب) $n^2=3k$ أو $n^2=3k+1$

(ج) $n^2=4k+2$ (د) $n^2=4k$ أو $n^2=4k+1$

الحل

العبارتان الخاطئتان هما (أ) و (ج) .

اســتناداً إلى خوارزميــة القســمة نجــد أن $n=3k$ أو $n=3k+1$ أو $n=3k+2$. إذا كان $n=3k$ فــإن $n^2=3(3k^2)$. أمــا إذا كــان $n=3k+1$ أو $n=3k+2$ فإن $n^2=3M+1$. إذن العبارة (أ) خاطئــة والعبارة (ب) صائبة.

أيضاً، باستخدام خوارزمية القسمة نرى أن $n=2k$ أو $n=2k+1$. إذا كان $n=2k$ فــإن $n^2=2(2k^2)$. أمــا إذا كــان $n=2k+1$ فــإن $n^2=4M+1$ إذن العبارة (ج) خاطئة والعبارة (د) صائبة.

(١١) [AHSME 1951] ما أكبر عدد صحيح من بين الأعداد التالية الذي يقسم العدد n^3-n لكل عدد صحيح n؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج)4 (د) 6

الحل

الاجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن

$$n^3-n=(n-1)n(n+1)$$

وهذا حاصل ضرب ثلاثة أعداد متتالية . بما أن حاصل ضرب أي عــددين متتاليين يقبل القسمة على 2 وأن حاصل ضرب ثلاثة أعداد متتالية يقبــل القسمة على 3 نرى أن n^3-n يقبل القسمة على $lcm(2,3)=6$.

(١٢) [$AHSME$ 1951] يقبل العدد الصحيح الذي على الصورة $abcabc$ القسمة على

(أ) 7 و 11 فقط (ب) 11 و 13 فقط (ج) 1001 (د) 101

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$$\begin{aligned} abcabc &= abc \times 10^3 + abc \\ &= abc(10^3+1) \\ &= abc \times 1001 \end{aligned}$$

(١٣) [$AHSME$ 1976] إذا كانت بواقي قسمة كل من الأعداد 1059 ، 1417 ، 2312 على العدد d متساوية ولتكن r فما قيمة $d-r$؟

(أ) 15 (ب) 17 (ج) 19 (د) 23

الحل

الإجابة هي (أ) : بقسمة كل من الأعداد 1059 ، 1417 ، 2312 على d نستطيع إيجاد q_1 ، q_2 ، q_3 بحيث يكون

$$1059 = q_1 d + r$$
$$1417 = q_2 d + r$$
$$2312 = q_3 d + r$$

من ذلك نجد أن

$$1417 - 1059 = 358 = (q_2 - q_1)d$$
$$2312 - 1417 = 895 = (q_3 - q_2)d$$

وبهـذا نـرى أن $d \mid 358$ و $d \mid 895$. ولكـن $358 = 2\times 179$ و $895 = 5\times 179$، إذن $d = 179$. وباستخدام خوارزمية القسمة نرى أن

$$1059 = 5\times 179 + 164$$

إذن، $r = 164$. وبهذا يكون $d - r = 179 - 164 = 15$.

(١٤) إذا كان x و y عددين صحيحين بحيث يقبل العدد $2x + 3y$ القسمة على 17 فما العدد من بين الأعداد التالية الذي يقبل القسمة على 17؟

(أ) $2x + 5y$ (ب) $9x + 5y$

(ج) $9x + y$ (د) $3x + 2y$

الحل

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن

$$9x + 5y = 17x + 17y - 4(2x + 3y)$$

وبما أن $17 \mid (17x + 17y)$ و $17 \mid (2x + 3y)$ نرى أن $17 \mid (9x + 5y)$.

(١٥) [AIME 1986] ما أكبر عدد صحيح موجب n بحيـث يقبـل العـدد $n^3 + 100$ القسمة على $n + 10$ ؟

(أ) 870 (ب) 880 (ج) 890 (د) 900

الحل

الإجابة هي (ج) : باستخدام خوارزمية القسمة نجد أن

$$n^3 + 100 = (n + 10)(n^2 - 10n + 100) - 900$$

الآن، إذا كان $(n + 10) \mid (n^3 + 100)$ فإن $(n + 10) \mid 900$.

وبما أن n أكبر ما يمكن عندما يكون $n+10$ أكبر ما يمكن وأن أكبر قاسم للعدد 900 هو 900 فنرى أن $n+10=900$. أي أن $n=890$.

(١٦) العدد الثماني المكافيء للعدد السداسي 3425_6 هو

(أ) 1453_8 (ب) 2453_8 (ج) 1463_8 (د) 2253_8

الحل

الإجابة هي (أ) : بتحويل العدد 3425_6 إلى النظام العشري نجد أن

$$\begin{aligned} 3425_6 &= 3\times 6^3 + 4\times 6^2 + 2\times 6 + 5 \\ &= 684 + 144 + 12 + 5 \\ &= 809 \end{aligned}$$

نقوم الآن بتحويل العدد العشري 809 إلى مكافئة في النظام الثماني فنرى بملاحظة أن $8^2 = 64$ و $8^3 = 512$ أن.

$$\begin{aligned} 809 &= 512 + 297 = 8^3 + 4\times 64 + 43 \\ &= 8^3 + 4\times 8^2 + 5\times 8 + 3 \\ &= 1453_8 \end{aligned}$$

إذن، $3425_6 = 809 = 1453_8$.

(١٧) [AHSME 1981] المرتبة الأخيرة (من اليسار) للعدد $x = 12112211122211112222_3$ في النظام التساعي (للأساس 9) هي

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$\begin{aligned} x &= (12)(11)(22)(11)(12)(22)(11)(11)(22)(22) \\ &= (1\times 3+2)\times 3^{18} + (1\times 3+1).3^{16} + (2\times 3+2)\times 3^{14} \\ &\quad + (1\times 3+1)\times 3^{12} + (1\times 3+2)\times 3^{10} + (2\times 3+2)\times 3^{8} \\ &\quad + (1\times 3+1)\times 3^{6} + (1\times 3+1)\times 3^{4} + (2\times 3+2)\times 3^{2} + (2\times 3+2) \\ &= 5\times 9^9 + 4\times 9^8 + 8\times 9^7 + 4\times 9^6 + 5\times 10^5 \\ &\quad + 8\times 9^4 + 4\times 9^3 + 4\times 9^2 + 8\times 9^1 + 8 \\ &= 5484584488_9 \end{aligned}$$

ولذا فالمرتبة الأخيرة تساوي 5 .

(١٨) [Mathcounts 1986] ما قيمـــة المرتبة A التي تجعل العدد $12A3B$ حيث $A \neq B$ يقبل القسمة على كل من 4 و 9 ؟
(أ) $A=6$ (ب) $A=2$ (ج) $A=1$ (د) $A=0$

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد $12A3B$ يقبل القسمة على 9 فمجمـــوع المراتب يقبل القسمة على 9 . إذن، $A+B+6$ يقبل القسمة على 9. وبمـــا أن هذا المجموع لا يساوي صفراً ولا يمكن أن يكون أكبر من 24 فنـــرى أن $a+b+6=9$ أو $A+B+6=18$. أي أن، $A+B=3$ أو $A+B=12$. وبما أن العدد $12A3B$ يقبل القسمة على 4 فإن العدد $3B$ يقبل القســـمة على 4 . وبهذا يكون $B=2$ أو $B=6$.

إذا كان $B=6$ و $A+B=3$ فإن $A=-3$ وهذا مستحيل.

إذا كان $B=6$ و $A+B=12$ فإن $A=6$ وهذا مستحيل أيضاً لأن $A \neq B$. إذن، $B=2$. ومن ثم $A=1$ أو $A=10$. وبما أن $A=10$ مرفوض فنجد أن $A=1$.

(١٩) [Mandelbrot 3] ما أصغر عدد صحيح موجب أكبر من 1 الذي يكون باقي قسمته يساوي 1 عند قسمته على أي من الأعداد التي أكبر من 1 وأصغر من 10؟

(أ) 2520 (ب) 2521 (ج) 2522 (د) 2523

الحل

الإجابة هي (ب): لنفرض أن n هو العدد المطلوب. عندئذ، يقبل العدد $n-1$ القسمة على كل من الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9.
وبما أن العدد الذي يقبل القسمة على 9 يقبل القسمة أيضاً على 3، والعدد الذي يقبل القسمة على 8 يقبل أيضا القسمة على 2 و 4. والعدد الذي يقبل القسمة على 2 و 3 يقبل القسمة على $6=2\times3$.
إذن ، يكفي أن يقبل العدد $n-1$ القسمة على كل من الأعداد 5 ، 7 ، 8 ، 9. أصغر عدد صحيح موجب يحقق ذلك هو $5\times7\times8\times9$.
إذن، $n-1=2520$ ومن ثم فإن $n=2521$.

(٢٠) [Mathcounts 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب n إذا قسم على 4 يبقى 2 وإذا قسم على 5 يبقى 3 وإذا قسم على 7 يبقى 5 ؟

(أ) 128 (ب) 130 (ج) 138 (د) 140

الحل

الإجابة هي (ج) : لنفرض أن العدد المطلوب هـو n . عندئـذ، $n+2$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 4 و 5 و 7 . أصغر عـدد صـحيح يحقق ذلـك هـو $140 = 7\times5\times4$. إذن، $n+2=140$ وبهـذا يكـون $n=138$.

(٢١) [*AHSME* 1967, *MAΘ* 2009] جمعنا العدد $2a3$ المكون من ثلاث مراتب مع العدد 326 فكان الناتج العدد المكون من ثلاث مراتب $5b9$. إذا قبل العدد $5b9$ القسمة على العدد 9 فما قيمة $a+b$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد $5b9$ يقبل القسمة على العـدد 9 وأن $0\le b\le 9$ فنجد أن

$$\frac{5b9}{9}=\frac{5\times100+b\times10+9}{9}$$
$$=10\frac{(50+b)}{9}+1$$

يجب أن يكون عدداً صحيحاً . إذن، $\frac{50+b}{9}$ عدد صحيح. ومن ذلـك نجد أن $b=4$. الآن

$$2a3=5b9-326=549-326=223$$

وبهذا يكون $a=2$ وبالتالي فإن $a+b=2+4=6$.

حل آخر:

بما أن $5b9$ يقبل القسمة على العدد 9 فإن $5+b+9$ يقبل القسمة على العدد 9. وبهذا نجد أن $b=4$. الآن ، نكمل الحل بصورة مشابهة للحل الأول.

(٢٢) [*Mathcounts* 2010] إذا كان مجموع أول 20 عدد صحيح موجب زوجي يساوي مجموع أربعة أعداد زوجية متتالية . فما أكبر هذه الأعداد الأربعة المتتالية؟

(أ) 104 (ب) 106 (ج) 108 (د) 110

الحل

الإجابة هي (ج) لاحظ أولاً أن

$$2+4+6+\ ...\ +38+40=420$$

لنفرض أن x هو أصغر الأعداد الزوجية المتتالية الأربعة . عندئذ،

$$x+(x+2)+(x+4)+(x+6)=420$$

ومن ذلك نجد أن $4x=408$. وبهذا يكون $x=102$. إذن، أكبر هذه الأعداد هو $x+6=108$.

(٢٣) ما مجموع مراتب العدد العشري $8^{25}\times 5^{64}$ ؟

(أ) 6 (ب) 10 (ج) 14 (د) 18

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$$5^{64} \times 8^{25} = 5^{64} \times 2^{75} = 10^{64} \times 2^{11}$$

وبما أن العدد 10^{64} لا يؤثر على مجموع مراتب العدد فنرى أن مجموع مراتب العدد المطلوب يساوي مجموع مراتب العدد $2^{11} = 2048$. إذن، المجموع المطلوب هو $2+0+4+8=14$.

(٢٤) [Mathcounts 2010] إذا كان AB_9 هو تمثيل عدد للأساس 9 وكان BA_7 هو تمثيل هذا العدد للأساس 7 فما التمثيل العشري لهذا العدد؟

(أ) 31 (ب) 34 (ج) 62 (د) 86

الحل

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$AB_9 = (A \times 9 + B)_{10}$$
$$BA_7 = (B \times 7 + A)_{10}$$

من ذلك نجد أن $9A + B = 7B + A$. أي أن $A = \frac{3}{4}B$. وبهذا يكون $B = 4$ و $A = 3$.

الآن، $34_9 = 3 \times 9 + 4 = 31$

$$43_7 = 4 \times 7 + 3 = 31$$

إذن، التمثيل العشري للعدد هو 31 .

(٢٥) [AHSME 1967] لنفرض أن $12_b \times 15_b \times 16_b = (3146)_b$.

ولنفرض أن $s_b = 12_b + 15_b + 16_b$. ما قيمة s_b؟

(أ) 38 (ب) 40 (ج) 42 (د) 44

الحل

الإجابة هي (د) : بما أن $12_b \times 15_b \times 16_b = (3146)_b$ فنرى أن

$$(b+2)(b+5)(b+6) = 3b^3 + b^2 + 4b + 6$$
$$b^3 + 13b^2 + 52b + 60 = 3b^3 + b^2 + 4b + 6$$
$$2b^3 - 12b^2 - 48b - 54 = 0$$
$$b^3 - 6b^2 - 24b - 27 = 0$$
$$(b-9)(b^2 + 3b + 3) = 0$$

وبما أن $b > 1$ فإن $b^2 + 3b + 3 \neq 0$ ويكون $b = 9$. إذن ،

$$s_b = (b+2) + (b+5) + (b+6) = 3b + 13 = 3b + b + 4$$
$$= 4b + 4 = (44)_b + (44)_9$$

(٢٦) [$AMC10A$ 2003] لنفرض أن كلاً من $AMC10$ و $AMC12$ عدد مكون من خمسة مراتب حيث $AMC10 + AMC12 = 123422$.

ما قيمة $A + M + C$ ؟

(أ) 15 (ب) 14 (ج) 13 (د) 12

الحل

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن

$$AMC10 + AMC12 = 123422$$
$$AMC00 + AMC00 = 123400$$

ولذا فإن $AMC + AMC = 1234$. أي أن $AMC = \frac{1234}{2} = 617$.

وبما أن A ، M ، C مراتب عدد فنرى أن $C = 7$، $M = 1$، $A = 6$.

إذن، $A + M + C = 6 + 1 + 7 = 14$.

(٢٧) [$AMC10B$ 2006] ما مرتبة العشرات في المجموع

$$S = 7!+8!+9!+\ldots+2006!$$

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أولاً أن العدد $n!$ يقبل القسمة على العدد 100 لكل $n \geq 10$. وبهذا فمرتبتا الآحاد والعشرات في المجموع

$$10!+11!+\ldots+2006!$$

هما 00 . الآن ، $7!+8!+9! = 5040+40320+362880 = 408240$

وبهذا، فمرتبة عشرات هذا المجموع (ومن ثم المجموع S) هي 4 .

(٢٨) [$AMC10A$ 2008] لنفرض أن $< n >$ هو مجموع القواسم الموجبة للعـــدد الصحيح الموجب n ما عدا العدد n . ما قيمة $<<<6>>>$ ؟

(أ) 6 (ب) 12 (ج) 24 (د) 32

الحل

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$<6> = 1+2+3 = 6$$
$$<<6>> = <6> = 6$$
$$<<<6>>> = <6> = 6$$

(٢٩) [$AHSME$ 1971] العددان الواقعان بين 60 و 70 اللذان يقسـمان العـدد $2^{48}-1$ هما

(أ) 61 و 63 (ب) 61 و 65

(ج) 63 و 65 (د) 63 و 67

الحل

الإجابة هي (ج) : بتحليل العدد $2^{48}-1$ نجد أن

$$\begin{aligned}2^{48}-1 &= (2^{24}-1)(2^{24}+1)\\ &= (2^{12}-1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)\\ &= (2^{6}-1)(2^{6}+1)(2^{12}+1)(2^{24}+1)\\ &= 63\times 65\,(2^{12}+1)(2^{24}+1)\end{aligned}$$

إذن، العددان هما 63 و 65 .

(٣٠) [1970 *AHSME*] لنفرض أن بواقي قسمة كل من الأعداد 13511 ، 13903 ، 14589 على العدد m متساوية ويساوي كل منها r . ما أكبر عدد صحيح m يحقق ذلك؟

(أ) 28 (ب) 49 (ج) 98 (د) 108

الحل

الإجابة هي (ج) : لنفرض أن r هو باقي قسمة كل من الأعداد a، b ، c على العدد m . عندئذ، استناداً على خوارزمية القسمة نستطيع إيجاد أعداد q_1 ، q_2 ، q_3 حيث

$$a = q_1 m + r$$
$$b = q_2 m + r$$
$$c = q_3 m + r$$

ومن ذلك نجد أن

$$a-b=(q_1-q_2)m$$
$$a-c=(q_1-q_3)m$$
$$b-c=(q_2-q_3)m$$

الآن ، كل من الفروقات $a-b$ ، $a-c$ ، $b-c$ يقبل القسمة على العدد m . وبما أن $(a-b)-(a-c)+(b-c)=0$ فإن أي قاسم مشترك لأي فرقين يجب أن يقسم الفرق الثالث. وبهذا يكون القاسم المشترك الأكبر لأي فرقين هو أكبر عدد صحيح يحقق شروط المسألة.

عندما يكون $a=13903$ ، $b=13511$ ، $c=14589$ نحصل على الفرقين

$$13903-13511=392$$
$$14589-13903=686$$

وباستخدام خوارزمية إقليدس نجد أن

$$686=1\times392+294$$
$$392=1\times294+98$$
$$294=3\times98+0$$

إذن، $m=\gcd(392,686)=98$.

(٣١) [BritishJMC 1997] أي من الأعداد التالية ليس مضاعفاً للعدد 3 ؟

(أ) 234 (ب) 3456 (ج) 45678 (د) 567890

الحل

الإجابة هي (د) : مجموع مراتب الأعداد هي

$2+3+4=9$ ، $3+4+5+6=18$ ، $4+5+6+7+8=30$ ، $5+6+7+8+9+0=35$. ولذا فالعدد الوحيد الذي لا يقبل القسمة على 3 هو 567890 .

(٣٢) [BritishJMC 1997] العدد المكون من أربع مراتب $86xy$ يقبل القسمة على كل من الأعداد 3 ، 4 ، 5 . ما قيمة $x+y$ ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 7 (د) 9

الحل

الإجابة هي (أ) : لكي يقبل العدد القسمة على 4 يجب أن يكون y عدداً زوجياً. ولكي يقبل العدد القسمة على 5 يجب أن يكون $y=0$ أو $y=5$. إذن $y=0$. لكي يقبل العدد القسمة على 3 يجب أن يقبل مجموع المراتب $8+6+x+0=14+x$ القسمة على العدد 3. إذن، $x=1$ أو $x=4$ أو $x=7$. ونحصل على الأعداد 8610 ، 8640 ، 8670. والعدد الوحيد من بينها الذي يقبل القسمة على 4 هو 8640 . إذن، $x+y=4+0=4$.

(٣٣) [BritishJMC 1999] ما باقي قسمة العدد 7000010 على العدد 7 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$3 + 7000007 = 7000010$ وأن العدد 7000007 يقبل القسمة على 7 .

إذن، الباقي هو 3 .

(٣٤) [BritishJMC 1999] إذا كان العدد المكون من 8 مراتب $1234x\,678$ يقبل القسمة على 11 فما قيمة المرتبة x؟
(أ) 1 (ب) 3 (ج) 7 (د) 9

الحل

الإجابة هي (د) : لكي يقبل العدد القسمة على 11 فيجب أن يقبل المجموع التناوبي $8-7+6-x+4-3+2-1=9-x$ القسمة على العدد 11. ولذا فإن $x=9$ (لاحظ أن x مرتبة).

(٣٥) [BritishJMC 2000] العدد المكون من خمس مراتب $d\,6d\,41$ يقبل القسمة على 9 . ما مجموع مراتبه ؟
(أ) 18 (ب) 23 (ج) 25 (د) 27

الحل

الإجابة هي (د) : لكي يقبل العدد $d\,6d\,41$ القسمة على العدد 9 فيجب أن يقبل المجموع $2d+11$ القسمة على العدد 9. إذن،

$2d+11=18$ أو $2d+11=27$.

إذا كان $2d+11=18$ فإن $d=3.5$ وهذا مستحيل لأن d مرتبة. إذن، $2d+11=27$ ، والعدد هو 86841. ومن ثم فإن مجموع مراتبه هو

$8+6+8+4+1=27$.

(٣٦) ما مرتبة آحاد العدد 1436^{1433} ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د)8

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن مرتبة آحاد 1436 هي 6 .

مرتبة آحاد 1436^2 هي مرتبة أحاد 6^2 وهي 6. مرتبة آحاد 1436^3 هي مرتبة آحاد 6×6 وهي 6 وهكذا. إذن، مرتبة آحاد أي قوة للعدد 1436 هي نفس مرتبة آحاد 1436 وهي 6.

(٣٧) ما مرتبة آحاد العدد 2004^{2012} ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

مرتبة آحاد 2004 هي 4.

مرتبة آحاد 2004^2 هي مرتبة آحاد 4^2 وهي 6.

مرتبة آحاد 2004^3 هي مرتبة آحاد 4×6 وهي 4.

مرتبة آحاد 2004^4 هي مرتبة آحاد 4×4 وهي 6.

من ذلك نجد أن مرتبة آحاد القوى الفردية للعدد 2004 هي 4 والقوى الزوجية هي 6 .

(٣٨) ما مرتبة آحاد العدد 1432^{2011} ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

مرتبة آحاد 1432 هي 2 .

مرتبة آحاد 1432^2 هي مرتبة آحاد 2×2 وهي 4 .

مرتبة آحاد 1432^3 هي مرتبة آحاد 2×4 وهي 8 .

مرتبة آحاد 1432^4 هي مرتبة آحاد 2×8 وهي 6 .

مرتبة آحاد 1432^5 هي مرتبة آحاد 2×6 وهي 2 .

إذن، مراتب آحاد قوى العدد 1432 هي متتابعة دورية $2, 4, 8, 6, 2, ...$ طول دورها يساوي 4 . وبما أن $1432^{2011} = 1432^{4\times502} \times 1432^3$ وأن مرتبة آحاد 1432^{2008} هي نفس مرتبة آحاد 1432^4 وهي 6 وأن مرتبة آحاد 1432^3 هي 8 . فإننا نخلص إلى أن مرتبة آحاد 1432^{2011} هي مرتبة آحاد 6×8 وهي 8 .

(٣٩) ما مرتبة آحاد حاصل الضرب $2007^{81} \times 2006^{201}$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 7

الحل

الإجابة هي (أ) : مرتبة آحاد 2006^{201} هي 6 لأن مرتبة آحاد أي قوة لعدد مرتبة آحاده 6 هي 6 . ولايجاد مرتبة آحاد 2007^{81} لاحظ أن مرتبة آحاد 2007 هي 7 .

مرتبة آحاد 2007^2 هي مرتبة آحاد 7×7 وهي 9.

مرتبة آحاد 2007^3 هي مرتبة آحاد 7×9 وهي 3.

مرتبة آحاد 2007^4 هي مرتبة آحاد 7×3 وهي 1.

مرتبة آحاد 2007^5 هي مرتبة آحاد 7×1 وهي 7.

إذن، مرتبة آحاد قوى العدد 2007 هي متتابعة دورية $7, 9, 3, 1, 7, \ldots$ طول دورتها 4. فمن ذلك نرى أن مرتبة آحاد $2007\times2007^{4\times20}=2007^{81}$ هي مرتبة آحاد 7×1 وهي 7. ومن ثم مرتبة آحاد $2007^{81}\times2006^{201}$ هي مرتبة آحاد 7×6 وهي 2.

(٤٠) ما مرتبة آحاد المجموع 4^n+4^{n+1} ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 4

الحل

الإجابة هي (أ) :

لاحظ أولاً أن مرتبة آحاد 4^n هي 6 إذا كان n زوجياً وهي 4 إذا كان n فردياً. ولذا مرتبة آحاد 4^n+4^{n+1} هي مرتبة آحاد $6+4$ (أو مرتبة آحاد $4+6$) وهي 0.

(٤١) [*Hamilton* 2006] ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب مراتبه مأخوذة من 0 أو 1 فقط ويقبل القسمة على 12 ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل

الإجابة هي (ب): يحتوي العدد على 3 مراتب 1 على الأقل لأن مجموع المراتب يجب أن يقبل القسمة على 3 . وبما أن العدد يقبل القسمة على 4 فمرتبتي الآحاد والعشرات هي 00 . إذن، أصغر هذه الأعداد هو 11100 ومجموع مراتبه هو $1+1+1+0+0=3$.

(٤٢) [$AHSME\ \ 1999$] مجموع مراتب ناتج حاصل الضرب $2^{1999}\times 5^{2001}$ هو (أ) 2 (ب) 4 (ج) 5 (د) 7

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$2^{1999}\times 5^{2001}=2^{1999}\times 5^{1999}\times 5^{2}=25\times 10^{1999}$$

إذن ، العدد هو $25000\ldots000$ حيث عدد الأصفار يساوي 1999.

وبهذا يكون مجموع مراتبه يساوي $2+5=7$.

(٤٣) [$AMC10A\ \ \ 2008$] إذا كان $k=2008^{2}+2^{2008}$ فما مرتبة آحاد العدد $k^{2}+2^{k}$ ؟ (أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

الحل

الإجابة هي (ج) : مرتبة آحاد 2008^{2} هي مرتبة آحاد $8^{2}=64$ وهي 4 .

مراتب آحاد قوى العدد 2 متتالية دورية طول دورها 4 وهي

$$2, 4, 8, 6, 2, \ldots$$

ولذا فمرتبة آحاد 2^{2008} هي مرتبة آحاد 2^4 وهي 6. إذن، مرتبة آحاد k هي مرتبة آحاد $10 = 6 + 4$ وهي 0. وبهذا فمرتبة آحاد k^2 هي 0. الآن ، k هو مضاعف للعدد 4 ولذا فمرتبة آحاد 2^k هي مرتبة آحاد 2^4 وهي 6. من ذلك نرى أن مرتبة آحاد $k^2 + 2^k$ هي مرتبة آحاد $6 = 6 + 0$ وهي 6.

(٤٤) [$MA\Theta$ 2007] إذا كان العدد $6A6B$ يقبل القسمة على 72 فما حاصل ضرب جميع القيم الممكنة للمرتبة A؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 14 (د) 16

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن $6A6B$ يقبل القسمة على 4 فإن العدد $6B$ يقبل القسمة على 4. وبهذا فإن $B = 0, 4, 8$. وبما أن $6A6B$ يقبل القسمة على 9 فإن مجموع المراتب $6 + A + 6 + B = A + B + 12$ يقبل القسمة على 9. إذا كان $B = 0$ فإن $A + 12$ يقبل القسمة على 9. وبهذا فإن $A = 6$ ويكون العدد $6A6B = 6660$ وهذا مرفوض لأنه لا يقبل القمسة على 72 . أما إذا كان $B = 4$ فإن $A + 16$ يقبل القسمة على 9. وبهذا فإن $A = 2$ ويكون العدد 6264 وهذا العدد يقبل القسمة على 72. وأخيراً ، إذا كان $B = 8$ فإن $A + 20$ يقبل القسمة على 9 وبهذا فإن $A = 7$ ونحصل على العدد 6768 وهذا أيضاً يقبل القسمة على 72. إذن، $A = 2$ أو $A = 7$ وحاصل ضربهما هو $14 = 2 \times 7$.

(٤٥) [$AMC10B$ 2007] ليكن n أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 9 ويستخدم المرتبتين 4 و 9 فقط على أن يحتوي على كل منهما مرة واحدة على الأقل. ما المراتب الأربعة الاولى من اليمين للعدد n ؟

(أ) 4444 (ب) 4494 (ج) 4944 (د) 9944

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد يقبل القسمة على 4 فمرتبتا آحاده وعشراته هما 44 . وبما أنه يقبل القسمة على 9 فمجموع مراتبه يقبل القسمة على 9 . ولذا فمجموع مراتب المئات فصاعداً يجب أن يزيد بمقدار 1 عن مضاعف العدد 9 . وللحصول على أصغر هذه الأعداد نحتاج إلى 7 أربعات و 9 واحدة.

أي أن أصغر هذه الأعداد هو 4444444944 . وبهذا فالمراتب الأربعة الأولى هي 4944 .

(٤٦) [$MA\Theta$ 2009] ما باقي قسمة العدد $14418\times14416\times14414$ على العدد 14 ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$\frac{14414}{14}=\frac{7207}{7}$$
$$\frac{14416}{14}=\frac{7208}{7}$$
$$\frac{14418}{14}=\frac{7209}{7}$$

الآن ، باقي قسمة 7207 على 7 هو 4 و باقي قسمة 7208 على 7 هو 5 و باقي قسمة 7209 على 7 هو 6 .

إذن ، باقي قسمة العدد $14418\times14416\times14414$ على 14 هو باقي قسمة العدد $6\times5\times4$ على 14 وهذا الباقي يساوي 8 .

(٤٧) [*Aust.MC* 2003] ما أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يقبل العدد 10^n-1 القسمة على 63؟ (أ) 5 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9

الحل

الإجابة هي (ب) : لاحظ أولاً أن $63=7\times9$ وأن $10^n-1=999...9$ يقبل القسمة على العدد 9 . ولذا يكفي أن نجد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يقبل العدد 10^n-1 القسمة على 7 . وبتجريب الأعداد المعطاة نرى أن $10^5-1=99999$ لا يقبل القسمة على العدد 7 ولكن $10^6-1=999999=7\times142857$ يقبل القسمة على العدد 7. ولذا فإن أصغر عدد هو $n=6$.

(٤٨) العدد $2^{32}+1$ يقبل القسمة على

(أ) 97 (ب) 101 (ج) 257 (د) 641

الحل

الإجابة هي (د): لاحظ أولاً أن $641 = 2^4 + 5^4 = 5\times 2^7 + 1$

من ذلك نرى أن

$$\begin{aligned} 2^{32} &= 2^4 \times 2^{28} \\ &= (641-5^4)\times 2^{28} \\ &= 641\times 2^{28} - 5^4 \times 2^{28} \\ &= 641\times 2^{28} - (5\times 2^7)^4 \\ &= 641\times 2^{28} - (641-1)^4 \end{aligned}$$

ولكن المقدار $(641-1)^4 = 641m + 1$ حيث m عدد صحيح. إذن

$$\begin{aligned} 2^{32} &= 641\times 2^{28} - 641m - 1 \\ &= 641(2^{28}-m) - 1 \end{aligned}$$

وبهذا نجد أن 641 يقسم $2^{32}+1$.

(٤٩) إذا كانت a ، b ، c أعداداً صحيحة موجبة حيث $\gcd(a,b)=1$ و $a+b$ يقبل القسمة على c فإن $\gcd(a,c)$ يساوي

(أ) 1 (ب) 2 (ج) a (د) c

الحل

الاجابة هي (أ) : لنفرض أن $\gcd(a,c)=d$ عندئذ، $d \mid c$ و $d \mid a$. وبما أن $c \mid (a+b)$ فإن $d \mid (a+b)$ و $d \mid a$. إذن، $d \mid b$. وبما أن $\gcd(a,b)=1$ فنجد أن $d=1$.

(٥٠) [AustMC 2002] لنفرض أن N عدد مكون من مرتبتين وأن باقي قسمة 272758 على N يساوي 13 وأن باقي قسمة 273437 على N يساوي 17. ما مجموع مرتبتي N؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

الحل

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن

$$272758 - 13 = 272745 = k_1 N \qquad (١)$$

$$273437 - 17 = 273420 = k_2 N \qquad (٢)$$

حيث k_1 و k_2 عددان صحيحان . بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن $675 = (k_2 - k_1)N$. ولكن $k_2 N = 273420 = 675 \times 405 + 45$.
إذن، 45 مضاعف للعدد N . وبما أن $N > 15$ فنرى أن $N = 45$.

(٥١) [$MA\Theta$ 2009] ما باقي قسمة $5^{32} + 9^{83}$ على العدد 6؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

باقي قسمة 9 على 6 هو 3 . باقي قسمة 9^2 على 6 هو 3 .
باقي قسمة 9^3 على 6 وهو 3 . من ذلك نرى أن باقي قسمة 9^{83} على 6 هو 3 .

أيضاً ، باقي قسمة 5 على 6 هو 5 . باقي قسمة 5^2 على 6 هو 1 .
باقي قسمة 5^3 على 6 هو 5 . باقي قسمة 5^4 على 6 هو 1 .
إذن، باقي قسمة 5^{32} على 6 هو 1 . وبهذا يكون باقي قسمة $9^{83}+5^{32}$ على 6 هو $3+1=4$.

(٥٢) [AMC10B 2002] ليكن $25^{64}\times 64^{25}=N^2$ حيث N عدد صحيح موجب. مجموع مراتب N يساوي

(أ) 7 (ب) 14 (ج) 21 (د) 28

الحل

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن $N^2=\left(5^{64}\times 8^{25}\right)^2$. ومن ذلك نرى أن $N=5^{64}\times 8^{25}=5^{64}\times 2^{75}=2^{11}\times 10^{64}=2048\times 10^{64}$.
إذن، مجموع مراتب N هو $2+0+4+8=14$.

(٥٣) [Aust.MC 2002] ليكن P عدداً مكوناً من 2002 مرتبة ويقبل القسمة على 18 . وليكن Q مجموع مراتب P و R مجموع مراتب Q و S مجموع مراتب R . العدد S يساوي

(أ) 9 (ب) 18 (ج) 180 (د) 2002

الحل

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن $Q\le 9\times 2002=18018$.
من ذلك نرى أن عدد مراتب Q لا يزيد عن 5 .
الآن ، $R\le 9\times 5=45$. إذن ، عدد مراتب R لا يزيد عن 2 وأن $R\le 45$. إذن، مجموع مراتب R لا يزيد عن $3+9=12$. وبهذا نجد أن

$12 \le S$ ويقبل القسمة على 9 لأن كل من P ، Q ، R يقبل القسمة على 9. إذن، $S = 9$.

(٥٤) [$AMC10B$ 2002] ليكن n عدداً صحيحاً موجباً حيث $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ عدد صحيح. أي من العبارات التالية خاطئة ؟

(أ) n يقبل القسمة على 2 (ب) n يقبل القسمة على 3

(ج) $n < 21$ (د) $n > 34$

الحل

الإجابة هي (ج): بما أن $\frac{41}{42} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ فإن $0 < \frac{41}{42}+\frac{1}{n} < \frac{41}{42}+\frac{1}{1} < 2$

إذن، $\frac{41}{42}+\frac{1}{n} = 1$. وبهذا فإن $n = 42$.

(٥٥) [$Aust.MC$ 2001] لنفرض أن m عدد صحيح بحيث يكون القاسم المشترك الأكبر لكل زوج من الأعداد $24, 42, m$ متساوٍ والمضاعف المشترك الأصغر لكل زوج من الأعداد $6, 15, m$ متساوٍ. ما قيمة m ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 15 (د) 30

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن $\gcd(24, 42) = 6$. ولذا فإن $\gcd(24, m) = 6$.

من ذلك نجد أن 6 يقسم m . أيضاً، $lcm(6,15) = 30$. ومنه فإن $lcm(6, m) = 30$. وبهذا فإن m يقسم 30 . إذن، $m = 30$.

(٥٦)[*Aust.MC* 2001] إذا كان باقي قسمة x على 12 يساوي باقي قسمة x على 9 ويساوي 2 ، وكان x يقبل القسمة على 7 فإن أصغر قيمة موجبة للعدد x تقع في الفترة

(أ) بين 50 و 60 (ب) بين 60 و 100

(ج) 100 و 150 (د) بين 150 و 200

الحل

الإجابة هي (د) : بما أن $x-2$ يقبل القسمة على 9 و 12 فهو يقبل القسمة على المضاعف المشترك الأصغر لهما. أي يقبل القسمة على 36 . من ذلك نرى أن x يزيد عن مضاعفات 36 بمقدار 2 . أي أن القيم الممكنة للعدد x هي $38, 74, 100, 146, 182, 218, \ldots$.

ولكن أصغر عدد يقبل القسمة على 7 من بين هذه الأعداد هو 182.

إذن، الاجابة هي (د).

(٥٧) [*Aust.MC* 1997] أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يكون باقي قسمته على العدد 7 يساوي 4 وباقي قسمته على العدد 12 يساوي 5 يقع في الفترة :

(أ) بين 19 و 31 (ب) بين 32 و 42

(ج) بين 51 و 58 (د) بين 60 و 72

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن

$$n = 12k + 5 = 7k + 5(k+1)$$

فإن باقي قسمة n على 7 يساوي باقي قسمة $5(k+1)$ على 7. الآن، بالتجريب نجد أن أصغر عدد صحيح k بحيث يكون باقي قسمة $5(k+1)$ على 7 يساوي 4 هو العدد $k=4$. إذن، $n = 12\times 4 + 5 = 53$.

(٥٨) [$Aust.MC$ 1993] إذا قسمنا العدد الصحيح $x > 8$ على كل من 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، يكون الباقي 1 . ما أصغر قيمة للعدد x ؟

(أ) 840 (ب) 841 (ج) 1681 (د) 2522

الحل

الإجابة هي (ب) : لاحظ أن العدد $x-1$ يقبل القسمة على كل من 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 . ولذا فهو يقبل القسمة على المضاعف المشترك الأصغر وهو $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$.

إذن، أصغر قيمة للعدد x هي $841 = 1 + 840$.

(٥٩) [$Aust.MC$ 1986] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n بحيث يقبل العدد n^2+7 القسمة على العدد $n+3$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$\begin{aligned} n^2+7 &= (n+3)^2 - 6n - 2 \\ &= (n+3)^2 - 6(n+3) + 16 \end{aligned}$$

وبهذا فإن n^2+7 يقبل القسمة على $n+3$ إذا وفقط إذا قبل العدد 16 القسمة على $n+3$. من ذلك نجد أن $n=1$ أو $n=5$ أو $n=13$. ومن ثم فعدد هذه الأعداد يساوي 3.

حل آخر :

بمـــــــا أن $(n+3)\,|\,(n^2+3n)$ و $(n+3)\,|\,(n^2+7)$ فـــــــإن $(n+3)\,|\,(3n-7)$. أيضاً ، $(n+3)\,|\,(3n+9)$. إذن، $16\,|\,(n+3)$. وبهذا يكون $n=1$ أو $n=5$ أو $n=13$.

(٦٠) [$Aust.MC$ 1982] إذا كان حاصل الجمع $6a3+2b5$ يقبل القسمة على 9 فما أكبر قيمة لمجموع المرتبتين a و b ؟ (أ) 2 (ب) 9 (ج) 11 (د) 17

الحل

الإجابة هي (ج) :

$$6a3+2b5=600+10a+3+200+10b+5$$
$$=9(89+a+b)+(a+b+7)$$

بما أن $0\le a\le 9$ و $0\le b\le 9$ فإن $0\le a+b\le 18$. وبمـــا أن $a+b+7$ يقبل القسمة على 9 فإن $a+b=2$ أو $a+b=11$. إذن، أعلى قيمة هي 11 .

مسائل غير محلولة

(١) ما قيمة $\gcd(1769, 2378)$ ؟

(أ) 23 (ب) 25 (ج) 27 (د) 29

(٢) إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فما القاسم المشترك الأكبر للعددين $12n+1$ و $30n+2$ ؟

(أ) 1 (ب) 3 (ج) $6n+1$ (د) $12n+1$

(٣) ما قيمة $lcm(117, 165)$ ؟

(أ) 6430 (ب) 6435 (ج) 6440 (د) 6445

(٤) إذا كان $\gcd(a,b)=1$ وكان $c\,|(a+b)$ فإن:

(أ) $\gcd(a,c)\neq\gcd(b,c)$.

(ب) $\gcd(b,c)=1$ و $\gcd(a,c)=2$

(ج) $\gcd(a,c)=1$ و $\gcd(b,c)=1$

(د) $\gcd(b,c)=\gcd(a,c)=1$

(٥) ما القاسم المشترك الأكبر للعددين $n!+1$ و $(n+1)!+1$ ؟

(أ) $n!$ (ب) $n!+1$ (ج) $(n+1)!$ (د) 1

(٦) إذا كان a عدداً صحيحاً زوجياً فما قيمة $lcm(a, a+2)$ ؟

(أ) $a(a+2)$ (ب) $\frac{1}{2}a(a+2)$ (ج) a (د) $a+2$

(٧) [HMMT 2002] ما $\gcd(2002+2,\ 2002^2+2,\ 2002^3+2)$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(٨) ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية:

(أ) n^3-n يقبل القسمة على 3 لكل عدد صحيح n

(ب) n^4-n يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح n

(ج) n^6-n يقبل القسمة على 6 لكل عدد صحيح n

(د) n^8-n يقبل القسمة على 8 لكل عدد صحيح n

(٩) لكل عدد صحيح n ، يقبل العدد n^5-5n^3+4n القسمة على:

(أ) 79 (ب) 81 (ج) 93 (د) 120

(١٠) [Mathcounts 1986] ما مرتبة آحاد العدد $3^{1986}-2^{1986}$؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

(١١) [Mathcounts 1991] إذا كان باقي قسمة العدد n على 5 يساوي 1 فما باقي قسمة العدد $3n$ على 5 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٢) [Mathcounts 1986] إذا كان $n=1111111111_2$ فما عدد مراتب $(3n)_2$ ؟

(أ) 12 (ب) 14 (ج) 20 (د) 30

(١٣) [AHSME 1954] إذا طرحنا العدد 8 من القاسم المشترك الأكبر للعددين 132 و 6432 فما العدد المتبقي؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(١٤) [AHSME 1956] إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فالعـــدد $n^2(n^2-1)$ يقبل دائما القسمة على :

(أ) 12 (ب) 24 (ج) $12-n$ (د) 12 و 24 .

(١٥) [AHSME 1957] العدد العشري المكافيء للعدد الثنائي 10011_2 هو

(أ)7 (ب) 11 (ج) 19 (د) 40

(١٦) [AHSME 1957] ليكن $x=ab$ عدداً مكوناً من مرتبتين عشريتين. العدد $x^2-(ba)^2$ لا يمكن أن يقبل القسمة على

(أ) 9 (ب) حاصل ضرب المرتبتين a و b

(ج) 11 (د) حاصل جمع أو فرق المرتبتين a و b

(١٧) [AHSME 1957] ليكن N عـــدداً مكونـــاً مـــن مـــرتبتين عشـــريتين وليكن M العدد الذي نحصل عليه من N بتبديل موقعي المرتبتين. إذا كان $M-N$ مكعباً فإنه

(أ) لا يمكن أن تكون مرتبة آحاد N تساوي 5

(ب)من الممكن أن تساوي مرتبة آحاد N أي مرتبة ما عدا المرتبة 5

(ج) توجد 7 قيم للعدد N

(د) توجد 10 قيم للعدد N

(١٨) [Mathcounts 2009] كم عدد القواسم الصحيحة الموجبة للعدد 196؟

(أ) 10 (ب) 9 (ج) 8 (د) 7

(١٩) [Mathcounts 2010] ما مجموع مراتب آحاد الأعداد بين 0 و 50 الـــتي تقبل القسمة على العدد 3 ؟

(أ) 33 (ب) 45 (ج) 60 (د) 78

(٢٠) [AHSME 1960] لنفرض أن m و n عددان صحيحان فرديان حيث $n < m$. ما أكبر قاسم للعدد $m^2 - n^2$ من بين الأعداد التالية؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٢١) ما قيم باقي قسمة مربع عدد صحيح على العدد 6؟

(أ) 0,1 فقط (ب) 0, 2 (ج) 0,1,3 (د) 0,1, 3, 4

(٢٢) [ASMHE 1966] عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 1000 ولا تقبل القسمة على أي من العددين 5 و 7 يساوي :

(أ) 688 (ب) 686 (ج) 684 (د) 658

(٢٣) إذا قبل كل من العددين $a+2$ و $b-12$ القسمة على العدد 10 فيقبل العدد $a+b$ القسمة على:

(أ) 2 فقط (ب) 5 فقط (ج) 10 (د) 7

(٢٤) ما هي العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟

(أ) يقبل العدد $121^{13} - 101^{4}$ القسمة على العدد 2

(ب) $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$

(ج) يقبل العدد $326^2 - 325^2$ القسمة على العدد 3

(د) يقبل العدد 65314638792 القسمة على العدد 24

(٢٥) [AHSME 1968] ليكن P هو حاصل ضرب أي ثلاثة أعداد صحيحة موجبة فردية متتالية. أكبر عدد صحيح يقسم P هو

(أ) 15 (ب) 6 (ج) 5 (د) 3

(٢٦) ليكن n عدداً صحيحاً موجباً حيث $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$ عدد صحيح. ما العبارة الخاطئة من بين العبارات التالية ؟

(أ) يقبل n القسمة على العدد 2

(ب) يقبل n القسمة على العدد 3

(ج) يقبل n القسمة على العدد 7

(د) العدد n أكبر من العدد 84

(٢٧) [$AMC8$ 2007] ليكن $\boxed{n}$ هو مجموع القواسم الموجبة للعدد الموجب n . ما قيمة $\boxed{\boxed{11}}$ ؟

(أ) 13 (ب) 20 (ج) 24 (د) 28

(٢٨) [$AMC10$ 2000] لتكن I ، M ، O ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة حيث $I \times M \times O = 2001$. ما هي أعلى قيمة ممكنة للمجموع $I+M+O$؟

(أ) 671 (ب) 111 (ج) 99 (د) 24

(٢٩) إذا كان n عدداً صحيحاً زوجياً فإن العدد $n(n+1)(n+2)$ يقبل القسمة على

(أ) 2 فقط (ب) 3 فقط (ج) 8 فقط (د) 24

(٣٠) [$AMC10$ 2000] متتالية فيبوناتشي $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. حدها الأول والثاني يساوي 1 وكل حد بعد ذلك هو مجموع الحدين السابقين له . ما المرتبة من بين المراتب العشرة التي تكون آخر من يظهر كمرتبة آحاد عدد فيبوناتشي ؟

(أ) 0 (ب) 4 (ج) 6 (د) 7

(٣١) [AMC10 2001] ليكن $S(n)$ و $P(n)$ هو مجموع وحاصل ضرب مراتب العدد الصحيح n على التوالي. إذا كان N عدداً مكوناً من مرتبتين حيث $N = P(N)+S(N)$ فما مرتبة آحاد N؟

(أ) 9 (ب) 8 (ج) 6 (د) 3

(٣٢) إذا كان $b+c=9$ فما هو باقي قسمة $b\times10^5+c\times10^3$ على العدد 9؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٣٣) ما العبارة الخاطئة من العبارات التالية ؟

(أ) إذا كان $n=4k+1$ عدداً صحيحاً موجباً فإن n^2-1 يقبل القسمة على العدد 8 .

(ب) n^3-1 يقبل القسمة على n^2+n+1 لكل عدد صحيح موجب n .

(ج) $nm+n+m+1$ يقبل القسمة على $n+1$ لكل عددين صحيحين موجبين n و m .

(د) n^2-2 يقبل القسمة على العدد 3 لكل عدد صحيح n .

(٣٤) [AMC10 2001] لنفرض أن n هو حاصل ضرب ثلاثة أعداد صحيحة متتالية وأن n يقبل القسمة على العدد 7 . ما العدد من بين الأعداد التالية الذي يمكن أن لا يقبل n القسمة عليه؟.

(أ) 6 (ب) 21 (ج) 28 (د) 42

(٣٥) [AMC12A 2008] لنفرض أن $\frac{2x}{3}-\frac{x}{6}$ عدد صحيح. ما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية؟

(أ) x عدد صحيح سالب.

(ب) x عدد زوجي ولكنه ليس بالضرورة مضاعفاً للعدد 3 .

(ج) x مضاعف للعدد 3 ولكنه ليس بالضرورة زوجياً.

(د) يجب أن يكون x مضاعفاً للعدد 12.

(٣٦) [$AMC12B$ 2010] ليكن n هو أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على 20 بحيث يكون n^2 مكعباً و n^3 مربعاً. ما عدد مراتب n؟

(أ) 8 (ب) 7 (ج) 6 (د) 5

(٣٧) لنفرض أن العدد الصحيح n يقبل القسمة على كل من الأعداد 3 و 5 و 12 . العدد الصحيح الذي يلي n ويقبل القسمة على الأعداد 3 ، 5 ، 12 هو

(أ) $n+3$ (ب) $n+5$ (ج) $n+12$ (د) $n+60$

(٣٨)إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً ، فما العبارة الصائبة من بين العبارات التالية؟

(أ) $\gcd(2n,3n)=n$ و $\gcd(n,2n+1)=1$

(ب) $\gcd(2n,3n)=1$ و $\gcd(n,2n+1)=n$

(ج) $\gcd(2n,3n)=\gcd(n,2n+1)=1$

(د) $\gcd(2n,3n)=\gcd(n,2n+1)=n$

(٣٩) [$AHSME$ 1978] لنفرض أن $S=1!+2!+3!+\ldots+99!$. ما مرتبة آحاد العدد S ؟

(أ) 9 (ب) 8 (ج) 5 (د) 3

(٤٠) [$AHSME \quad 1969$] إذا كان $N = 11000_2$ فما هي قيمة العدد $N-1$ للأساس 2؟

(أ) 10001 (ب) 10011 (ج) 10111 (د) 10110

(٤١) [$British\ JMC$ 2003] ثلاثة من بين الأعداد الأربعة التالية لها نفس الباقي عند قسمتها على العدد 9 وأما الرابع فباقي قسمته على 9 فهو مختلف. ما هذا العدد؟

(أ) 257 (ب) 554 (ج) 725 (د) 861

(٤٢) أي من الأعداد التالية ليس مضاعفاً للعدد 4 ؟

(أ) 192 (ب) 212 (ج) 318 (د) 424

(٤٣) ما أصغر عدد صحيح موجب مكون من ست مراتب ويقبل القسمة على كل من 8 و 9 ؟

(أ) 100008 (ب) 100006 (ج) 800001 (د) 100016

(٤٤) ما باقي قسمة العدد 123456789 على العدد 11 ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٤٥) ما مرتبة آحاد العدد 1435^{1433} ؟

(أ) 0 (ب) 3 (ج) 5 (د) 9

(٤٦) ما مرتبة آحاد العدد 1433^{1435} ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

(٤٧) ما مرتبة آحاد حاصل الضرب $1477^{1435} \times 1433^{1435}$ ؟

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 6 (د) 7

(٤٨) ما مرتبة آحاد $(1436^2+2014^2)^2$ ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٤٩) ما مرتبة آحاد المجموع $7^{203}+7^{202}+7^{201}+7^{200}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 7

(٥٠) ما مرتبة آحاد $6^{n+3}+6^{n+1}+6^n$ ؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 8 (د) 9

(٥١) [$AMC10$ 2001] لنفرض أن n حاصل ضرب ثلاث أعداد صحيحة متتالية وأن n يقبل القسمة على العدد 7. أي من الاعداد التالية يمكن أن لا يقسم n؟

(أ) 6 (ب) 14 (ج) 21 (د) 2

(٥٢) [$MA\Theta$ 2009] يقبل العدد $2^{48}-1$ القسمة بالضبط على عددين بين 60 و 70. ما مجموع هذين العددين ؟

(أ) 125 (ب) 126 (ج) 127 (د) 128

(٥٣) [British SMC 2001] واحد فقط من بين الأعداد التالية يقبل القسمة على العدد 11. ما هو ؟

(أ) 10^7-11 (ب) 10^7-1 (ج) 10^7+1 (د) 10^7+11

(٥٤) [Aust.MC 2001] أكبر عدد صحيح مكون من مرتبتين بحيث يمكن كتابته كمجموع مربعين مختلفين هو

(أ) 96 (ب) 97 (ج) 98 (د) 99

(٥٥) [$MA\Theta$ 2011] ما عدد أزواج المراتب (A,B) بحيث يقبل العدد $123A782B$ القسمة على كل من 2 و 3؟

(أ) 14 (ب) 16 (ج) 18 (د) 20

(٥٦) [Maclaurin 2006] ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على 35 وجميع مراتبه متساوية؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 30 (د) 35

(٥٧) [$MA\Theta$ 2009] قسمنا العدد 100 على شكل مجموع عددين أحدهما يقبل القسمة على 7 والآخر يقبل القسمة على 11. ما حاصل ضرب هذين العددين؟

(أ) 2448 (ب) 2464 (ج) 2664 (د) 2848

(٥٨) [Aust.MC 1995] ما مرتبة آحاد المجموع $7^{13}+3^{17}$ ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 3 (د) 7

(٥٩) [Aust. MC 1978] إذا كان $x=(n+1)(n+2)(n+3)$ حيث n عدد صحيح موجب. فما العدد من بين الأعداد التالية الذي ربما لا يقسم العدد x ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 6

(٦٠) [British SMC 2002] ما باقي قسمة حاصل الضرب 123456789×987654321 على العدد 6؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

إجابات المسائل غير المحلولة

رقم السؤال	الإجابة	رقم السؤال	الإجابة	رقم السؤال	الإجابة	رقم السؤال	الإجابة
١	د	٢	أ	٣	ب	٤	د
٥	د	٦	ب	٧	د	٨	أ
٩	د	١٠	ب	١١	ج	١٢	أ
١٣	ب	١٤	أ	١٥	ج	١٦	ب
١٧	ج	١٨	ب	١٩	د	٢٠	د
٢١	د	٢٢	ب	٢٣	ج	٢٤	ب
٢٥	د	٢٦	د	٢٧	د	٢٨	أ
٢٩	د	٣٠	ج	٣١	أ	٣٢	أ
٣٣	د	٣٤	ج	٣٥	ب	٣٦	ب
٣٧	د	٣٨	أ	٣٩	د	٤٠	ج
٤١	د	٤٢	ج	٤٣	أ	٤٤	ج
٤٥	ج	٤٦	د	٤٧	أ	٤٨	ب
٤٩	أ	٥٠	ب	٥١	د	٥٢	د
٥٣	ج	٥٤	ب	٥٥	ب	٥٦	ج
٥٧	ب	٥٨	أ	٥٩	ج	٦٠	ج