الفصل الخامس

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

(٥.١) المتتابعات [Sequences]

إن إحدى المهارات الرياضية هي اكتشاف نمطاً معيناً لمجموعة أعداد ثم وصف هذا النمط. تسمى مجموعة من الأعداد التي تتبع نمط معين، متتابعة (أو متتالية) من الأعداد، كما تسمى عناصر المتتابعة بحدود (terms) المتتابعة. فمثلاً،

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

متتابعة حدها الأول هو 3، حدها الثاني هو 7، حدها الثالث هو 11 وهكذا. من الممكن وصف هذه المتتابعة على النحو التالي:

" الحد الأول للمتابعة هو 3 وكل حد من حدودها التي تلي يزيد بمقدار 4 عن الحد السابق له" وبهذا يكون الحد الخامس هو 19 والحد السادس هو 23 وهكذا.

ومن الممكن تعريف المتتابعة على النحو التالي:

تعريف

متتابعة الأعداد هي دالة مجالها الأعداد الصحيحة الموجبة. تسمى صورة العدد الصحيح n، الحد النوني (أو الحد العام) للمتابعة وعادة يرمز له بالرمز a_n.

فمثلاً، $a_1 = 3$ ، $a_2 = 7$ ، $a_3 = 11$ ، $a_4 = 15$ للمتابعة المقدمة أعلاه. لاحظ

أنه يمكن تعريف هذه المتتابعة على النحو التالي:

$a_1 = 3$ و $a_n = a_{n-1} + 4$ لكل $n \geq 2$.

يمكن التعبير عن المتتابعة بكتابة $\{a_n\}$ وهذا يعني أن المتتابعة مولَّدة باستخدام الحد العام a_n. فمثلاً، الحدود الخمسة الأولى للمتابعة $\{15 - (-2)^n\}$ هي:

$$\begin{aligned}
15 - (-2)^1 &= 17 \\
15 - (-2)^2 &= 11 \\
15 - (-2)^3 &= 23 \\
15 - (-2)^4 &= -1 \\
15 - (-2)^5 &= 47
\end{aligned}$$

(٥.٢) المتتابعات الحسابية [Arithmetic Sequences]

المتتابعة الحسابية هي متتابعة يكون الفرق بين أي حدين متتاليين عدداً ثابتاً. وبصورة أدق، نقول إن $\{a_n\}$ متتابعة حسابية إذا كان $a_{n+1} - a_n = d$ لكل عدد صحيح موجب n حيث d عدد ثابت يسمى الفرق المشترك (common difference). فمثلاً، $\{2n + 2\}$ متتابعة حسابية فرقها المشترك هو 2 لأن

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) + 2 - (2n+2) = 2.$$

الحدود الأولى لهذه المتتابعة هي

$$4, 6, 8, 10, \ldots$$

لنفرض أن الحد الأول لمتتابعة حسابية هو a_1 وأن الفرق المشترك هو d. عندئذ،

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d
\end{aligned}$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

وهكذا، ولذا فإن الحد العام للمتابعة هو

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال (١) أثبت أن المتتابعة $2, 9, 16, 23, 30, \ldots$ هي متتابعة حسابية وجد a_{2011} .

الحل

بما أن $9-2 = 16-9 = 23-16 = 30-23 = 7$ فإن المتتابعة حسابية فيها $a_1 = 2$ و $d = 7$. إذن،

$a_{2011} = a_1 + 2010d = 2 + 2010 \times 7 = 14072$. ◇

ملحوظة

إذا كانت a, b, c أي ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فإن

$$b - a = c - b$$
$$2b = a + c$$
$$b = \frac{a+c}{2}$$

وبهذا يكون الحد الأوسط هو الوسط الحسابي (arithmetic mean) للحد الذي قبله والحد الذي يليه.

مثال (٢) إذا كانت $3k+1, k, -3$ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة حسابية فجد قيمة k.

الحل

بما أن الحدود أعداد متتالية نجد أن

$$k-(3k+1)=-3-k$$
$$-2k-1=-3-k$$

وبهذا يكون $k = 2$. ◇

مثال (٣) جد الحد العام a_n للمتابعة الحسابية التي حدها الثالث يساوي 8 وحدها الثامن يساوي 17−.

الحل

بما أن $a_3 = 8$ فإن $a_1 + 2d = 8$ (١)

وبما أن $a_8 = -17$ فإن $a_1 + 7d = -17$ (٢)

وبحل المعادلتين (١) و (٢) نجد أن $d = -5$ وأن $a_1 = 18$. إذن، $a_n = a_1 + (n-1)d = 18 + (n-1)\times(-5) = 23 - 5n$. ◇

مثال (٤) لنفرض أن $a_1, a_2, \ldots, a_k$ متتابعة حسابية تحقق

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17$$
$$a_4 + a_5 + a_6 + \ldots + a_{13} + a_{14} = 77$$
$$a_k = 13$$

ما هي قيمة k ؟

الحل

الإجابة هي $k = 18$. لنفرض أن الحد الأول من المتتابعة هو a وأن الفرق المشترك d . عندئذ،

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 17 \Rightarrow (a+3d)+(a+6d)+(a+9d) = 17$$
$$\Rightarrow 3a + 18d = 17$$

أيضاً

$$\begin{aligned} & a_4 + a_5 + \cdots + a_{13} + a_{14} = 77 \\ & \Rightarrow 11a + 88d = 77 \\ & \Rightarrow a + 8d = 7 \\ & \Rightarrow a = 7 - 8d \end{aligned}$$

وبالتعويض عن a في المعادلة $3a + 18d = 17$ نرى أن

$$\begin{aligned} 3(7-8d) + 18d &= 17 \\ 21 - 24d + 18d &= 17 \\ -6d &= -4 \\ d &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن $a = 7 - 8 \times \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. الآن،

$$\begin{aligned} a_k = 13 &\Leftrightarrow a + (k-1)d = 13 \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{3} + (k-1) \times \frac{2}{3} = 13 \\ &\Leftrightarrow k - 1 = 17 \end{aligned}$$

إذن، $k = 18$. ◇

مثال (٥) أدخل أربعة أعداد بين العددين 3 و 12 بحيث تكون الستة أعداد متتابعة حسابية.

الحل

لنفرض أن d هو الفرق المشترك للمتتابعة. عندئذ، الأعداد الستة هي

$$3, 3+d, 3+2d, 3+3d, 3+4d, 12 .$$

من ذلك نرى أن

$$\begin{aligned} 3+5d &= 12 \\ 5d &= 9 \\ d &= \frac{9}{5} = 1.8 \end{aligned}$$

وبهذا تكون الأعداد هي $3, 4.8, 6.6, 8.4, 10.2, 12$. ◇

(٥.٣) المتتابعات الهندسية [Geometric Sequences]

المتتابعة الهندسية هي متتابعة $\{a_n\}$ نحصل على كل من حدودها بضرب الحد الذي يسبقه بعدد غير صفري ثابت r يدعى النسبة المشتركة (common ratio). أي أن $a_{n+1} = a_n r$ لكل عدد صحيح موجب n. على سبيل المثال

$$4, 12, 36, 108, \ldots$$

متتابعة هندسية نسبتها المشتركة تساوي 3. كما أن

$$4, -12, 36, -108, \ldots$$

متتابعة هندسية نسبتها المشتركة تساوي -3.

ملحوظة

إذا كانت a ، b ، c ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فنرى أن

$$\begin{aligned} \frac{b}{c} &= \frac{a}{b} \\ b^2 &= ac \\ b &= \pm\sqrt{ac} \end{aligned}$$

حيث $\sqrt{ac}$ هو الوسط الهندسي (geometric mean) للعددين a و c.

إذا كانت $\{a_n\}$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة هي r فنجد أن حدود المتتابعة هي

$$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, \ldots, a_1r^{n-1}, \ldots$$

أي أن الحد العام للمتتابعة هو

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال (٦) المتتابعة $9,3,1,\frac{1}{3},\frac{1}{9},\ldots$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة هي $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $a_1 = 9$. ولذا فالحد العام هو

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 9\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^2\times 3^{-n+1} = 3^{3-n}$$

وبهذا يكون $a_n = 3^{3-n}$ لكل $n \geq 1$. ◇

مثال (٧) إذا كانت $k, 3k, 20-k$ ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية فما هي قيمة k ؟

الحل

لاحظ أن

$$\begin{aligned}\frac{3k}{k} &= \frac{20-k}{3k}\\ 3 &= \frac{20-k}{3k}\\ 9k &= 20-k\\ 10k &= 20\end{aligned}$$

إذن، $k = 2$. ◇

مثال (٨) جد الحد العام للمتتابعة الهندسية

$$6, 6\sqrt{2}, 12, 12\sqrt{2}, \ldots$$

ثم جد أول حد تزيد قيمته عن المقدار 1400.

الحل

لدينا $a_1 = 6$ و $r = \sqrt{2}$. إذن، $a_n = 6\times\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$.

ولإيجاد الحد الذي يزيد عن 1400 يكون المطلوب إيجاد n حيث $a_n > 1400$.
باستخدام آلة حاسبة نرى أن

$$a_{15} = 768 \text{ ، } a_{16} = 768\sqrt{2} \text{ ، } a_{17} = 1536 .$$

ومن ذلك نجد أن a_{17} هو أول حد يحقق المطلوب. ◇

ملحوظة

سندرس في الجزء الثاني من هذا الكتاب الدوال اللوغاريتمية حيث يكون باستطاعتنا استخدام مفهوم اللوغاريتمات لإيجاد حل جبري لمثل هذه المسائل.

مثال (٩) متتابعة هندسية حدها الثاني يساوي -6 وحدها الخامس يساوي 162. جد الحد العام لهذه المتتابعة.

الحل

لدينا
$$a_2 = a_1 r = -6 \quad (١)$$
$$a_5 = a_1 r^4 = 162 \quad (٢)$$

بقسمة المعادلة (٢) على المعادلة (١) نجد أن

$$\frac{a_1 r^4}{a_1 r} = \frac{162}{-6}$$
$$r^3 = -27$$
$$r = \sqrt[3]{-27}$$
$$r = -3$$

إذن، $a_1 = 2$ و $r = -3$ ويكون الحد العام $a_n = 2 \times (-3)^{n-1}$. ◇

مثال (١٠) لدينا ثلاثة أعداد حقيقية تكون متتابعة حسابية حدها الأول يساوي 9. إذا أضفنا العدد 2 للحد الثاني وأضفنا العدد 20 للحد الثالث وأبقينا الحد الأول كما هو نحصل على متتابعة هندسية. ما هي أصغر قيمة للحد الثالث

من المتتابعة الهندسية ؟

الحل

إذا فرضنا أن d هو الفرق المشترك للمتتابعة الحسابية وأن r هو النسبة المشتركة للمتتابعة الهندسية فجد أن الحدود الثلاثة من المتتابعتين الحسابية والهندسية هي على التوالي

$$\begin{aligned} &9, 9+d, 9+2d \\ &9, 11+d, 29+2d \end{aligned}$$

من ذلك نرى أن $d + 11 = 9r$. أي أن $d = 9r - 11$.

كما أن

$$9r^2 = 29 + 2d = 29 + 2(9r - 11) = 7 + 18r \ .$$

أي أن، $9r^2 - 18r - 7 = 0$. وبحل هذه المعادلة نجد أن

$$\begin{aligned} 9r^2 - 18r - 7 = 0 &\Leftrightarrow (3r+1)(3r-7) = 0 \\ &\Leftrightarrow r = -\frac{1}{3} \quad \text{أو} \quad r = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

إذا كان $r = -\frac{1}{3}$ فالحد الثالث من المتتابعة الهندسية هو $9r^2 = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = 1$.

أما إذا كان $r = \frac{7}{3}$ فالحد الثالث من المتتابعة الهندسية هو $9r^2 = 9\left(\frac{7}{3}\right)^2 = 49$.

إذن، أصغر قيمة للحد الثالث من المتتابعة الهندسية هي 1. ◇

(٥.٤) المتسلسلات (Series)

المتسلسلة المنتهية هي مجموع حدود متتابعة

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

وسنرمز لهذا المجموع بالرمز S_n. أي أن

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

فإذا كان لدينا المتتابعة... ,$1, 4, 9, 16, 25$ فإن

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2$$

ويكون

$$S_1 = 1^2 = 1$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$$
$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

وهكذا.

(٥.٥) المتسلسلات الحسابية (Arithmetic Series)

تسمى المتسلسلة الناتجة عن جمع حدود متتابعة حسابية، متسلسلة حسابية. فمثلاً

$$3 + 5 + 7 + \cdots + 23 + 25$$

متسلسلة حسابية لأنها مجموع حدود المتابعة الحسابية

$$3, 5, 7, \ldots, 23, 25.$$

لنفرض أن $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ متتابعة حسابية فرقها المشترك d. عندئذ، يمكن كتابة حدودها على الصورة

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots, a_n - 2d, a_n - d, a_n.$$

من ذلك يكون

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

وبكتابة S_n بترتيب عكسي نجد أيضاً أن

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1$$

وبجمع المعادلتين نرى أن

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

حيث عدد الحدود يساوي n. إذن،

$$2S_n = n(a_1 + a_n)$$

ويكون

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

وبما أن $a_n = a_1 + (n-1)d$ فنجد أيضاً أن

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

مثال (١١) جد مجموع $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots$ إلى 40 حداً.

الحل

هذه متسلسلة حسابية فيها $a_1 = 5$، $d = 3$، $n = 40$. إذن،

$$S_{40} = \frac{40}{2}(2 \times 5 + 39 \times 3) = 20(10 + 117) = 2540 \,.$$ ◇

مثال (١٢) جد المجموع $50 + 49\frac{1}{2} + 49 + 48\frac{1}{2} + \cdots + (-20)$.

الحل

هذه متسلسلة حسابية فيها $a_1 = 50$، $d = -\frac{1}{2}$، $a_n = -20$. الآن،

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$-20 = 50 + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-70 = -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$$

$$-70 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}n$$

$$-\frac{141}{2} = -\frac{n}{2}$$

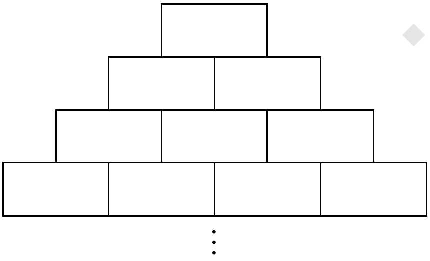
$$n = 141$$

وبهذا نجد أن

$$S_{141} = \frac{141}{2}(50 + (-20)) = \frac{141}{2} \times 30 = 141 \times 15$$

إذن، $S_{141} = 2115$ ◇

مثال (١٣) أراد سلطان أن يبني جدار داخلياً على شكل مثلث كما هو مبين في الشكل وذلك باستخدام طوب حراري. إذا كان عدد الطوب الذي استخدمه سلطان لبناء الجدار هو 171 فما هو عدد طبقات الجدار ؟



الحل

لاحظ أن عدد الطوب في الطبقات هو $1, 2, 3, 4, \ldots$.

وهذه متتابعة حسابية حدها الأول 1 وفرقها المشترك 1. الآن

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \\ 171 &= \frac{n}{2}\left[2\times 1 + (n-1)\times 1\right] \\ 342 &= n(1+n) \\ 342 &= n + n^2 \\ n^2 + n - 342 &= 0 \\ (n+19)(n-18) &= 0 \end{aligned}$$

إذن، $n = -19$ وهذا مرفوض. وبهذا يكون عدد طبقات الجدار هو $n = 18$. ◇

مثال (١٤) أثبت أن مجموع أول n من الأعداد الصحيحة الموجبة يساوي $\frac{1}{2}n(n+1)$.

الحل

الأعداد هي $1, 2, 3, \dots, n$ وهي متتابعة حسابية حدها الأول $a_1 = 1$ وحدها النوني $a_n = n$ وفرقها المشترك هو $d = 1$. إذن،

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n}{2}(1+n) = \frac{n}{2}(n+1).\quad \Diamond$$

مثال (١٥) متتابعة حسابية حدها السادس يساوي 21 ومجموع أول 17 حد منها يساوي 0. جد حدها الثالث.

الحل

$$\begin{aligned} a_6 &= a_1 + 5d \Rightarrow 21 = a_1 + 5d \\ S_{17} &= \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) \Rightarrow 0 = \frac{17}{2}(2a_1 + 16d) \end{aligned}$$

إذن،

$$a_1 + 5d = 21$$
$$2a_1 + 16d = 0$$

أي أن

$$a_1 + 5d = 21$$
$$a_1 + 8d = 0$$

بطرح المعادلتين نجد أن

$$-3d = 21$$
$$d = -7$$

بالتعويض في المعادلة $a_1 + 8d = 0$ نرى أن

$$a_1 = -8d = -8 \times (-7) = 56 .$$

إذن، $a_3 = a_1 + 2d = 56 + 2 \times (-7) = 42$. ◇

(٥.٦) المتسلسلات الهندسية (Geometric Series)

المتسلسلة الهندسية هي مجموع حدود متتالية لمتتابعة هندسية. على سبيل المثال،

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots + 128$$

متسلسلة هندسية لأنها مجموع حدود المتتابعة الهندسية

$$1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 128$$

لنفرض أن $a_1, a_2, \ldots, a_n$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة هي r . عندئذ، يمكن كتابة حدودها على الصورة

$$a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots, a_1r^{n-1}$$

من ذلك يكون

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \cdots + a_1r^{n-1}$$

وبضرب طرفي المعادلة بالعدد r نرى أن

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} + a_1 r^n$$

وبطرح المعادلتين نجد أن

$$\begin{aligned} rS_n - S_n &= a_1 r^n - a_1 \\ S_n(r-1) &= a_1\left(r^n - 1\right) \\ S_n &= \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} \end{aligned}$$

لاحظ أن $r \neq 1$.

مثال (١٦) جد مجموع الحدود العشرين الأولى للمتابعة

$$9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$$

الحل

المتتابعة هندسية حدها الأول $a_1 = 9$ والنسبة المشتركة $r = -\frac{1}{3}$. إذن،

$$S_{20} = \frac{a_1\left(r^n-1\right)}{r-1} = \frac{9\left(\left(-\frac{1}{3}\right)^{20} - 1\right)}{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{27}{4}\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{20} - 1\right). \quad \diamondsuit$$

مثال (١٧) مجموع الحدين الأول والثاني لمتسلسلة هندسية يساوي 90 وحدها الثالث يساوي 24. أثبت وجود متسلسلتين تحققان ذلك. ثم جد الحد الأول والنسبة المشتركة لكل منهما.

الحل

لدينا

$$a_1 + a_1 r = a_1(1+r) = 90$$
$$a_1 r^2 = 24$$

بقسمة المعادلتين نجد أن

$$\frac{1+r}{r^2} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4}$$
$$15r^2 - 4r - 4 = 0$$

وبحل هذه المعادلة نجد أن

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \times (-4) \times 15}}{2 \times 15} = \frac{4 \pm \sqrt{256}}{30} = \frac{4 \pm 16}{30}$$

إذن، $r_1 = \frac{4+16}{30} = \frac{2}{3}$ و $r_2 = \frac{4-16}{30} = -\frac{2}{5}$.

عند $r_1 = \frac{2}{3}$ نجد أن

$$a_1\left(\frac{4}{9}\right) = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{9 \times 24}{4} = 54 .$$

وعند $r_2 = -\frac{2}{5}$ نجد أن

$$a_1\left(\frac{4}{25}\right) = 24 \Rightarrow a_1 = \frac{24 \times 25}{4} = 150 .$$

◇

(٥.٧) مسائل محلولة

(١) ما عدد الأعداد الفردية بين العددين $\frac{17}{4}$ و $\frac{175}{2}$ ؟

(أ) 38 (ب) 40 (ج) 42 (د) 44

(٢) [MAΘ 2011] حاصل ضرب ثلاثة حدود متتالية من متتابعة هندسية يساوي 27. ما هي قيمة الحد الأوسط من هذه الحدود الثلاثة ؟

(أ) $\frac{27}{8}$ (ب) 3 (ج) 9 (د) 27

(٣) [MAΘ 2011] ما مجموعة الثلاثة أعداد من بين مجموعات الأعداد التالية التي يمكن أن تكون أول ثلاثة أعداد لمتتابعة حسابية ؟

(أ) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 1$ (ب) $2, 4, 8$ (د) $\frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{27}{25}$ (د) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

(٤) إذا رتبنا الجذور الثلاثة لكثيرة الحدود

$$f(x) = (x-11)\left(x^2 - 10x + 21\right)$$

تصاعدياً فإنها تكون متتابعة حسابية.ما فرقها المشترك ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 7 (د) 11

(٥) [MAΘ 2011] ما عدد حدود المتابعة $-8, -5, -2, \ldots, 2011$ ؟

(أ) 671 (ب) 672 (ج) 673 (د) 674

(٦) [MAΘ 2011] متتابعة هندسية حدها الأول 6 ونسبتها المشتركة 12. ما الحد العاشر ؟

(أ) $2^{19} \times 3^{10}$ (ب) $2^{10} \times 3^{10}$ (ج) $2^{21} \times 3^{11}$ (د) $2^{22} \times 3^{11}$

(٧) ما عدد حدود المتتابعة $36, 35\frac{1}{3}, 34\frac{2}{3}, \ldots, -30$ ؟

(أ) 60 (ب) 99 (ج) 100 (د) 200

(٨) [MAΘ 2011]الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 144 والحد الرابع يساوي 324. ما مجموع جميع القيم الممكنة للحد الأول ؟

(أ) 0 (ب) -96 (ج) 216 (د) -216

(٩) إذا أدخلنا ثلاثة أعداد بين 5 و 10 لتكوين متتابعة حسابية فإن مجموع الأعداد الثلاثة هو

(أ) $22\frac{1}{2}$ (ب) $23\frac{1}{2}$ (ج) $24\frac{1}{4}$ (د) $24\frac{3}{4}$

(١٠) [MAΘ 2011] ما العدد الصحيح الموجب الذي يحقق

$$15 + 16 + 17 + \cdots + n = 15n \text{ ؟}$$

(أ) -6 (ب) 21 (ج) 35 (د) 85

(١١) ما مجموع قيم k المختلفة التي تجعل $5, k, k^2 - 8$ متتابعة حسابية ؟

(أ) -1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٢) إذا كان $a_n = \dfrac{71 - 7n}{2}$ هو الحد العام لمتتابعة. ما أصغر قيمة للعدد n التي تجعل حدود المتتابعة أصغر من -200 ؟

(أ) 67 (ب) 68 (ج) 69 (د) 70

(١٣) [MAΘ 2011] كتب سلطان على السبورة متتابعة حسابية مكونة من ثلاثة حدود ولاحظ أن مجموع هذه الحدود يساوي 21 وأن حاصل ضرب الحدين الكبيرين يساوي ضعف حاصل ضرب الحدين الصغيرين. ما قيمة الحد الأكبر من بين هذه الحدود ؟

(أ) 8 (ب) $\dfrac{33}{4}$ (ج) $7 + \sqrt{2}$ (د) $\dfrac{28}{3}$

(١٤) [AHSME 1956] مجموع الأعداد التي على الصورة $2k+1$ حيث k عدد صحيح يأخذ القيم من 1 إلى n هو

(أ) n^2 (ب) $n(n+1)$ (ج) $n(n+2)$ (د) $(n+1)^2$

(١٥) [AHSME 1950] أدخلنا خمسة أوساط هندسية بين العددين 8 و 5832. ما الحد الخامس من المتتابعة الهندسية التي نحصل عليها ؟

(أ) 648 (ب) 832 (ج) 1168 (د) 1950

(١٦) [MAΘ 2010] إذا كانت $a<b<c<d$ هي الحدود الأربعة الأولى من متتابعة حسابية وكان $d-a=r$ فما قيمة $c-a$ ؟

(أ) $\frac{r}{3}$ (ب) $\frac{r}{2}$ (ج) $\frac{2r}{3}$ (د) $\frac{3r}{4}$

(١٧) ما مجموع الوسطين الحسابيين بين العددين -21 و 24 ؟

(أ) -2 (ب) 2 (ج) 3 (د) 12

(١٨) أي من المتتابعات الهندسية التالية لا تحتوي الحد الذي قيمته 64 ؟

(أ) $2, 4, 8, \ldots$ (ب) $1, -2, 4, \ldots$

(ج) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \ldots$ (د) $\frac{1}{4}, 2, 16, \ldots$

(١٩) [MAΘ 2010] مجموع الحدود الثمانية الأولى من متتابعة حسابية يساوي 440 والفرق المشترك هو 6. ما الحد الثالث من المتتابعة ؟

(أ) 32 (ب) 34 (ج) 44 (د) 46

(٢٠) عدد حدود المتتابعة $-16, -10, -4, \ldots$ يساوي 37. ما مجموع هذه المتتابعة ؟

(أ) 2404 (ب) 3404 (ج) 4000 (د) 4404

(٢١) [MAΘ 2011]مجموع أول ثلاثة حدود من متتابعة حسابية يساوي -300 ومجموع أول تسعة حدود يساوي 300 . ما مجموع الحدود الستة الأولى ؟

(أ) -200 (ب) -100 (ج) 0 (د) 400

(٢٢) النسبة بين الحد السادس والحد الثامن لمتتابعة هندسية هي 2 إلى 5 . ما نسبة الحد السابع إلى الحد الثامن ؟

(أ) 1 إلى 2 (ب) 2 إلى 1 (ج) $\sqrt{2}$ إلى 5 (د) $\sqrt{2}$ إلى $\sqrt{5}$

(٢٣) [AHSME 1959] إذا أضفنا العدد الثابت نفسه لكل من الأعداد 20 ، 50 ، 100 نحصل على متتابعة هندسية . ما نسبتها المشتركة ؟

(أ) $\frac{5}{3}$ (ب) $\frac{4}{3}$ (ج) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{1}{2}$

(٢٤) [MAΘ 2011] الحد الأول من متتابعة هندسية أكبر من 10 والحد الخامس أصغر من 1000 . إذا كانت النسبة المشتركة r للمتابعة عدداً حقيقياً فما عدد الأعداد الصحيحة التي يمكن أن تساوي r ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 6 (د) 7

(٢٥) $\{a_n\}$ متتابعة حسابية فيها $a_8 = 4$ و $a_{20} = 120$. ما قيمة المجموع $a_8 + a_9 + \cdots + a_{20}$ ؟

(أ) 606 (ب) 706 (ج) 806 (د) 906

(٢٦) [MAΘ 2010] الحد الخامس من متتابعة حسابية يساوي 15 والحد الخامس والعشرون يساوي 105 . ما الحد الحادي والعشرون من هذه المتتابعة ؟

(أ) 87 (ب) 90 (ج) 93 (د) 143

(٢٧) [MAΘ 2010] ما مجموع الخمسة حدود الأولى من متتابعة هندسية

حدودها أعداد حقيقية حدها الأول يساوي 17 وحدها الخامس يساوي 272 ؟

(أ) 17 أو 17×3^4 (ب) 177 (ج) -17 (د) 187 أو 527

(٢٨) مجموع أول n حد من حدود المتتابعة $20, 16, 12, \ldots$.

يساوي 60. ما مجموع القيم الممكنة للعدد n ؟

(أ) 5 (ب) 6 (ج) 9 (د) 11

(٢٩) ما المتتابعة من بين المتتابعات التالية التي ليست حسابية ولا هندسية ؟

(أ) $10, 36, 62, 88, \ldots$ (ب) $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$

(ج) $-15, -2, 11, 24, \ldots$ (د) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(٣٠) [AHSME 1953] متتابعة هندسية حدودها موجبة. كل حد من حدودها يساوي مجموع الحدين التاليين له. ما نسبتها المشتركة ؟

(أ) 1 (ب) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (ج) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (د) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(٣١) لتكن $\{a_n\}$ متتابعة حسابية مجموع أول n حد من حدودها يساوي $S_n = 2n^2 + 6n$. إذا كانت a_3, a_t, a_{15} متتابعة هندسية فما قيمة t ؟

(أ) 5 (ب) 7 (ج) 8 (د) 9

(٣٢) [MAΘ 2010] عدد مقاعد الصف الأخير من مسرح يساوي 64. وعدد مقاعد كل صف بعد ذلك يقل عن الذي خلفه بثلاثة مقاعد. إذا كان عدد صفوف المسرح يساوي 18 فكم يكون عدد مقاعد الصف الأول ؟

(أ) 10 (ب) 13 (ج) 16 (د) 19

(٣٣) [MAΘ 2009] الحد الثالث من متتابعة هندسية هو 10 والحد السابع

هو 160. ما هي القيمة الممكنة للحد الثاني من بين القيم التالية ؟

(أ) -5 (ب) $-\frac{5}{2}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) 8

(٣٤) [MAC12 2002]مجموع 18 من الأعداد الصحيحة الموجبة المتتالية هو مربع كامل. ما أصغر قيمة لهذا المجموع ؟

(أ) 169 (ب) 225 (ج) 289 (د) 361

(٣٥) [MAΘ 2007]إذا كانت $\frac{1}{4}, x, y, \frac{2}{27}$ متتابعة هندسية من الأعداد الحقيقيه فما قيمة $x+y$ ؟

(أ) $\frac{11}{36}$ (ب) $\frac{5}{18}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{15}{16}$

(٣٦) لتكن $2, x, 6$ متتابعة حسابية فرقها المشترك يساوي d وأن $2, y, 6$ متتابعة هندسية نسبتها المشتركة r. ما قيمة $\frac{\sqrt{3}r}{d}$ ؟

(أ) $\frac{3}{2}$ (ب) $\frac{5}{2}$ (ج) 3 (د) 5

(٣٧) [MAΘ 2007] متتابعة هندسية حدودها موجبة حدها الثالث هو 2 وحدها السابع هو 8. إذا كان $S_6 = a\sqrt{b}+c$ فما قيمة $a+b+c$ ؟

(أ) 12 (ب) 16 (ج) 24 (د) 63

(٣٨) [MAΘ 2009] متتابعة حسابية فرقها المشترك هو d وحدها الأول $a_1 = -5$ والمجموع $S_8 = 16$.ما قيمة المجموع

$$\frac{1}{18}\left(d+d^2+d^3+d^4+d^5+d^6\right) \text{ ؟}$$

(أ) $-\frac{31}{9}$ (ب) 6 (ج) $\frac{31}{9}$ (د) 7

(٣٩) [AHSME 1955] لتكن $\{a_n\}$ متتابعة هندسية حيث $a_1 \neq 0$ و $r \neq 0$ ولتكن $\{b_n\}$ متتابعة حسابية حيث $b_1 = 0$. كونا المتتابعة $\{c_n\}$ على النحو التالي: $c_n = a_n + b_n$ لكل $n \geq 1$.

إذا كانت حدود c_n هي $1, 1, 2, \ldots$ فما مجموع الحدود العشرة الأولى للمتتابعة c_n ؟

(أ) 467 (ب) 557 (ج) 978 (د) 1068

(٤٠) [AHSME 1958] الحد الأول من متتابعة حسابية حدودها أعداد صحيحة متتالية هو $k^2 + 1$. ما قيمة المجموع S_{2k+1} ؟

(أ) $k^3 + (k+1)^3$ (ب) $(k-1)^3 + k^3$

(ج) $(k+1)^3$ (د) $(2k+1)(k+1)^2$

(٤١) [AHSME 1960] لنفرض أن S_n، S_{2n}، S_{3n} هي مجاميع n، $2n$، $3n$ من حدود متتابعة حسابية حدها الأول هو a وفرقها المشترك هو d. ما قيمة $S_{3n} - S_{2n} - S_n$ ؟

(أ) $2n^2d$ (ب) n^2d (ج) an^2d (د) and

(٥.٨) حلول المسائل المحلولة

(١) الإجابة هي (ج): الأعداد هي $5, 7, 9, 11, \ldots, 87$.

وهذه متتابعة حسابية حدها الأول $a_1 = 5$، فرقها المشترك $d = 2$، الحد الأخير $a_n = 87$. إذن،

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 87 &= 5 + 2(n-1) \\ 2n &= 84 \\ n &= 42. \end{aligned}$$

(٢) الإجابة هي (ب): الحدود الثلاثة هي $\frac{a}{r}, a, ar$ حيث r هو النسبة المشتركة. عندئذ،

$$\begin{aligned} a^3 &= \frac{a}{r} \times a \times ar = 27 \\ a &= \sqrt[3]{27} = 3. \end{aligned}$$

(٣) الإجابة هي (أ): لاحظ أن

$$\begin{aligned} &\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \\ &4 - 2 \neq 8 - 4 \\ &\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \neq \frac{27}{25} - \frac{3}{5} \\ &\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

إذن، (أ) هي متتابعة حسابية فرقها المشترك هو $\frac{2}{5}$.

(٤) الإجابة هي (ب): $f(x) = (x-11)(x-7)(x-3)$.

إذن، الجذور هي 3، 7، 11. وهي متتالية حسابية فرقها المشترك

يساوي 4 .

(٥) الإجابة هي (د): المتتابعة حسابية فيها $a_1 = -8$ ، $d = 3$ ، $a_n = 2011$.
إذن،

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ 2011 &= -8 + (n-1)\times 3 \\ 2022 &= 3n \\ .n &= \frac{2022}{3} = 674 \end{aligned}$$

(٦) الإجابة هي (أ):

$$.\, a_{10} = a_1 r^9 = 6\times(12)^9 = 2\times 3\times 2^{18}\times 3^9 = 2^{19}\times 3^{10}$$

(٧) الإجابة هي (ج): المتتابعة حسابية فيها $a_1 = 36$ ، $d = -\frac{2}{3}$ ، $a_n = -30$. إذن،

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)d \\ -30 &= 36 + (n-1)\left(-\frac{2}{3}\right) \\ -66 - \frac{2}{3} &= -\frac{2}{3}n \\ -\frac{200}{3} &= -\frac{2}{3}n \\ .n &= 100 \end{aligned}$$

(٨) الإجابة هي (أ): لدينا $ar = 144$ و $ar^3 = 324$. بقسمة المعادلتين نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{ar^3}{ar} &= \frac{324}{144} \\ r^2 &= 2.25 \end{aligned}$$

$$r = \pm\sqrt{2.25}$$

إذن، $a = \frac{144}{\sqrt{2.25}}$ أو $a = \frac{-144}{\sqrt{2.25}}$ ومجموعهما يساوي 0.

(٩) الإجابة هي (أ): الأعداد هي $5, 5+d, 5+2d, 5+3d, 10$.

من ذلك، نجد أن

$$\begin{aligned} 5 + d - 5 &= 10 - 5 - 3d \\ 4d &= 5 \\ d &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

والأعداد هي $6\frac{1}{4}$، $7\frac{1}{2}$، $8\frac{3}{4}$. مجموعها يساوي

$$6\frac{1}{4} + 7\frac{1}{2} + 8\frac{3}{4} = 22\frac{1}{2}.$$

(١٠) الإجابة هي (ج): هذه متتابعة حسابية فيها $a_1 = 15$، $d = 1$، $a_n = n + 14$ وعدد حدودها $n - 14$. إذن

$$\begin{aligned} S_{n-14} &= \frac{(n-14)}{2}\left[15 + n\right] = 15n \\ 15n + n^2 - 210 - 14n &= 30n \\ n^2 - 29n - 210 &= 0 \\ (n - 35)(n + 6) &= 0 \end{aligned}$$

إذن $n = 35$ (لأن n موجب).

(١١) الإجابة هي (ب): لدينا

$$\begin{aligned} k^2 - 8 - k &= k - 5 \\ k^2 - 2k - 3 &= 0 \\ (k-3)(k+1) &= 0 \end{aligned}$$

إذن، $k_1 = -1$ و $k_2 = 3$. ويكون $k_1 + k_2 = -1 + 3 = 2$.

(١٢) الإجابة هي (ب): المطلوب هو حل المتباينة

$$\frac{71-7n}{2} < -200$$
$$7n > 471$$
$$n > \frac{471}{7} \approx 67.3$$

إذن، أصغر قيمة صحيحة للعدد n هي 68.

(١٣) الإجابة هي (د): لنفرض أن هذه الأعداد هي $a-d, a, a+d$. عندئذ،

$$a-d+a+a+d = 21$$
$$3a = 21$$
$$a = 7$$

الآن،

$$7(7+d) = 2\times(7-d)\times 7$$
$$7+d = 14-2d$$
$$d = \frac{7}{3}$$

العدد الأكبر هو $\frac{28}{3} = 7+\frac{7}{3}$.

(١٤) الإجابة هي (ج): المتتابعة حسابية حدها الأول 3 والفرق المشترك 2.

إذن،

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\left[2\times 3+(n-1)\times 2\right] = \frac{n}{2}(4+2n) \\ &= 2n+n^2 = n(n+2) \end{aligned}$$

(١٥) الإجابة هي (أ): لدينا $a_1 = 8$ و $a_7 = 5832$. إذن،

$$\frac{a_1 r^6}{a_1} = \frac{5832}{8}$$
$$r^6 = 729$$
$$r = \pm 3$$

الآن، $a_5 = a_1 r^4 = 8 \times (\pm 3)^4 = 648$.

(١٦) الإجابة هي (ج): لدينا

$$d - a = 3(b - a)$$
$$b - a = \frac{d - a}{3} = \frac{r}{3}$$

أيضاً، $c - a = 2(b - a) = \frac{2r}{3}$.

(١٧) الإجابة هي (ج): لنفرض أن d هو الفرق المشترك. عندئذ، الحدود الأربعة هي $-21, -21 + d, -21 + 2d, 24$.

ومجموع الوسطين هو $-6 + 9 = 3$.

(١٨) الإجابة هي (د): بكتابة بعض الحدود الأخرى للمتتابعات نجد أن

(أ) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

(ب) $1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, \ldots$

(ج) $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$

(د) $\frac{1}{4}, 2, 16, 128, \ldots$

ولذا فالمتتابعة (د) لا تحتوي 64.

(١٩) الإجابة هي (د):

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{8}{2}(2a_1 + 7 \times 6) \\ 440 &= 4(2a_1 + 42) \\ 2a_1 &= 68 \\ a_1 &= 34 \end{aligned}$$

إذن، $a_3 = 34 + 2 \times 6 = 46$.

(٢٠) الإجابة هي (ب): هذه متتابعة حسابية حدها الأول -16 وفرقها المشترك 6 . إذن،

$$S_{37} = \frac{37}{2}\left[2 \times (-16) + 36 \times 6\right] = 37 \times 92 = 3404 \,.$$

(٢١) الإجابة هي (أ): لدينا

$$a + (a + d) + (a + 2d) = -300$$

$$3a + 3d = -300 \qquad (١)$$

أيضاً،

$$a + (a + d) + \cdots + (a + 8d) = 300$$

$$9a + 36d = 300$$

$$3a + 12d = 100 \qquad (٢)$$

المطلوب إيجاد $a + (a + d) + \cdots + (a + 5d)$. أي إيجاد $6a + 15d$.

بطرح المعادلة (١) من المعادلة (٢) نجد أن $9d = 400$.إذن،

$$\begin{aligned} 6a + 15d &= 6a + 6d + 9d \\ &= 2(3a + 3d) + 9d \\ &= 2 \times (-300) + 400 = -200 \end{aligned}$$

(٢٢) الإجابة هي (د): لدينا

$$\frac{ar^5}{ar^7} = \frac{2}{5} \Rightarrow r^2 = \frac{5}{2} \,.$$

إذن، $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{r} = \frac{ar^6}{ar^7}$.

(٢٣) الإجابة هي (أ): لدينا المتتابعة الهندسية $20+k, 50+k, 100+k$.

عندئذ،

$$\begin{aligned}
\frac{50+k}{20+k} &= \frac{100+k}{50+k} \\
(50+k)^2 &= (20+k)(100+k) \\
2500+100k+k^2 &= 2000+120k+k^2 \\
20k &= 500 \\
k &= \frac{500}{20} = 25
\end{aligned}$$

إذن، النسبة المشتركة هي $\frac{5}{3} = \frac{75}{45} = \frac{50+k}{20+k}$.

(٢٤) الإجابة هي (د): لدينا

$$a_1 > 10 \Rightarrow a_1 r^4 > 10 r^4$$
$$a_5 = a_1 r^4 < 1000 \Rightarrow 10 r^4 < 1000 \Rightarrow r^4 < 100$$

الأعداد الصحيحة التي تحقق ذلك هي $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$. بوضع $a_1 = 11$ نجد أن المتباينتين محققتان لجميع قيم r هذه. إذن، العدد المطلوب هو 7 .

(٢٥) الإجابة هي (ج): لاحظ أن المجموع هو مجموع متتابعة حسابية حدها الأول 4 وحدها الثالث عشر هو 120. إذن،

$$a_8 + a_9 + \cdots + a_{20} = \frac{13}{2}\left[4+120\right] = 806$$

(٢٦) الإجابة هي (أ): لدينا

$$a_5 = a_1 + 4d = 15$$
$$a_{25} = a_1 + 24d = 105$$

بطرح المعادلة الأولى من المعادلة الثانية نرى أن

$$20d = 90$$
$$d = \frac{9}{2}$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن

$$a_1 = 15 - 4 \times \frac{9}{2} = 15 - 18 = -3$$

إذن، $a_{21} = a_1 + 20d = -3 + 20 \times \frac{9}{2} = 87$.

(٢٧) الإجابة هي (د): لدينا

$a_1 = 17$ و $272 = a_5 = a_1 r^4 = 17r^4$. إذن،

$$r^4 = \frac{272}{17} = 16$$
$$r = \pm 2$$

إذا كان $r = 2$ فنرى أن

$$S_5 = \frac{a_1\left(r^5 - 1\right)}{r - 1} = 17\left(2^5 - 1\right) = 17 \times 31 = 527$$

وإذا كان $r = -2$ فنجد أن

$$S_5 = \frac{a_1\left(r^5 - 1\right)}{r - 1} = \frac{17\left((-2)^5 - 1\right)}{-2 - 1} = \frac{17 \times (-33)}{-3} = 187.$$

(٢٨) الإجابة هي (د): المتتابعة حسابية فيها $a_1 = 20$ و $d = -4$ و $S_n = 60$

إذن،.

$$\frac{n}{2}\left[2\times 20+(n-1)\times(-4)\right]=60$$
$$n(44-4n)=120$$
$$n^2-11n+30=0$$
$$(n-5)(n-6)=0$$

إذن، $n_1=6$ و $n_2=5$ ويكون المجموع

$n_1+n_2=6+5=11$.

(٢٩) الإجابة هي (د):

(أ) متتابعة حسابية فرقها المشترك هو 16.

(ب) متتابعة هندسية نسبتها المشتركة 3.

(ج) متتابعة حسابية فرقها المشترك 13.

(د) لا حسابية ولا هندسية لأن $-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$. ولكن $-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1$.

أيضاً، $\frac{1}{2}=1\div\frac{1}{2}$ ولكن $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\div\frac{1}{3}$.

(٣٠) الإجابة هي (ب): لدينا لكل $n\geq 1$

$$a_1r^n=a_1r^{n+1}+a_1r^{n+2}$$

بقسمة المعادلة على a_1r^n نجد أن

$$r^2+r-1=0$$
$$r=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

وبما أن الحدود موجبة فإن r موجب ومن ثم يكون $r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(٣١) الإجابة هي (ب): لدينا

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 6 \times 1 = 8$$
$$a_2 = S_2 - a_1 = 2 \times 2^2 + 6 \times 2 - 8 = 12$$

إذن، $d = a_2 - a_1 = 12 - 8 = 4$.

من ذلك نجد أن $a_3 = a_1 + 2d = 8 + 2 \times 4 = 16$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 8 + 14 \times 4 = 64$$

الآن، بما أن a_3, a_t, a_{15} متتابعة هندسية فإن

$$a_t^2 = a_3 \times a_{15} = 16 \times 64$$

إذن، $a_t = 4 \times 8 = 32$. وبهذا نجد أن

$$32 = a_t = 8 + (t-1) \times 4$$
$$4t = 28$$
$$t = \frac{28}{4} = 7$$

(٣٢) الإجابة هي (ب): عدد مقاعد الصفوف هي متتابعة حسابية حدها الأول 64 وفرقها المشترك هو -3 وهي $64, 61, 58, \ldots$.

المطلوب هو إيجاد a_{18}. الآن،

$$a_{18} = a_1 + 17d = 64 + 17 \times (-3) = 13 .$$

(٣٣) الإجابة هي (أ): لدينا $a_1 r^2 = 10$ و $a_1 r^6 = 160$. إذن

$$\frac{a_1 r^6}{a_1 r^2} = \frac{160}{10}$$
$$r^4 = 16$$
$$r = \pm 2$$

إذا كان $r = 2$ فإن $a_1 = \frac{5}{2}$ ويكون $a_2 = a_1 r = \frac{5}{2} \times 2 = 5$.

وإذا كان $r = -2$ فإن $a_1 = \frac{5}{2}$ ويكون $a_2 = a_1 r = \frac{5}{2} \times (-2) = -5$.

إذن، الإجابة الممكنة من بين الاجابات هي -5.

(٣٤) الإجابة هي (ب): لنفرض أن العدد الأول هو a. إذن، الأعداد هي

$$a, a+1, a+2, \ldots, a+17$$

وهي متتابعة حسابية حدها الأول a والفرق المشترك هو 1. من ذلك نجد أن

$$\begin{aligned} S_{18} &= 18a + (1+2+3+\cdots+17) = 18a + \frac{17 \times 18}{2} \\ &= 18a + 9 \times 17 = 9(2a+17) \end{aligned}$$

وبما أن 9 مربع كامل فلكي يكون S_{18} مربعاً كاملاً فيجب أن يكون $2a+17$ مربعاً كاملاً. وبتجريب الأعداد 1، 2، 3، 4، ... نجد أن أصغر قيمة للعدد a التي تجعل $2a+17$ مربعاً كاملاً هي $a = 4$ ويكون $S_{18} = 9(2 \times 4 + 17) = 225$.

(٣٥) الإجابة هي (ب): لدينا $a_1 = \frac{1}{4}$ و $a_1 r^3 = \frac{2}{27}$. عندئذ، $r^3 = \frac{a_1 r^3}{a_1} = \frac{2/27}{1/4} = \frac{8}{27}$. إذن، $r = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$.

وبهذا يكون

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \\ y &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{9} \\ x + y &= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{5}{18}. \end{aligned}$$

(٣٦) الإجابة هي (أ): بما أن $2, x, 6$ متتابعة حسابية فإن

$$x-2=6-x \Rightarrow 2x=8 \Rightarrow x=4$$

وبهذا فالمتتابعة هي $2, 4, 6$ ويكون فرقها المشترك $d=2$.

وبما أن $2, y, 6$ ومتتابعة هندسية فإن $y^2=2\times 6=12 \Rightarrow y=2\sqrt{3}$.

إذن، المتتابعة هي $2, 2\sqrt{3}, 6$ وتكون نسبتها المشتركة هي $r=\sqrt{3}$.

وبهذا نجد أن $\frac{\sqrt{3}r}{d}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$.

(٣٧) الإجابة هي (ب): لدينا $a_1r^2=2$ و $a_1r^6=8$. عندئذ،

$$\frac{a_1r^6}{a_1r^2}=\frac{8}{2}$$

$$r^4=4=\left(\sqrt{2}\right)^4$$

من ذلك نرى أن $r=\sqrt{2}$ (حدود المتتابعة موجبة) و $a_1=1$. إذن،

$$S_6=\frac{1\left(\left(\sqrt{2}\right)^6-1\right)}{\sqrt{2}-1}=\frac{7}{\sqrt{2}-1}=7\left(1+\sqrt{2}\right)=7\sqrt{2}+7$$

وبهذا فإن $a=7$ ، $b=2$ ، $c=7$ ويكون

$$a+b+c=7+2+7=16 .$$

(٣٨) الإجابة هي (د): لدينا

$$16=S_8=\frac{8}{2}\left[2\times(-5)+7d\right]$$
$$4=-10+7d$$
$$7d=14$$
$$d=2$$

الآن، $d, d^2, d^3, d^4, d^5, d^6$ متتابعة هندسية حدها الأول $d=2$ ونسبتها المشتركة هي $d=2$. إذن،

$$.\frac{1}{18}S_6 = \frac{1}{18}\times\frac{2\left(2^6-1\right)}{2-1} = \frac{2\times 63}{18} = 7$$

(٣٩) الإجابة هي (ج): المتتابعة الهندسية هي $a_1, a_1r, a_1r^2, \ldots$.

والمتتابعة الحسابية هي

$$.\ 0, d, 2d, \ldots$$

بما أن $c_n = a_n + b_n$ فإن $a_1 = 1$ وإن $a_1 + 0 = 1 \Rightarrow a_1 = 1$

$$a_1r + d = 1 \Rightarrow r + d = 1 \qquad (١)$$

$$a_1r^2 + 2d = 2 \Rightarrow r^2 + 2d = 2 \qquad (٢)$$

بضرب المعادلة (١) بالعدد -2 وجمع الناتج إلى المعادلة (٢) نجد أن

$r^2 - 2r = 0$. أي أن $r(r-2) = 0$.

إذن، $r = 2$ (لأن $r \neq 0$).وبهذا يكون $d = -1$.

مجموع العشرة حدود الأولى للمتابعة الهندسية $\{a_n\}$ هو

$$\frac{a_1\left(r^{10}-1\right)}{r-1} = \frac{2^{10}-1}{2-1} = 1023$$

مجموع الحدود العشرة الأولى للمتتابعة الحسابية $\{b_n\}$ هو

$$\frac{10}{2}\left[0 + 9\times(-1)\right] = -45$$

إذن، مجموع الحدود العشرة الأولى للمتتابعة $\{c_n\}$ هو

$$.1023 + (-45) = 978$$

(٤٠) الإجابة هي (أ): لاحظ أن $a_1 = k^2 + 1$ وأن $d = 1$. إذن،

$$\begin{aligned}
S_{2k+1} &= \frac{2k+1}{2}\left[2\left(k^2+1\right)+(2k)\times 1\right] \\
&= \frac{2k+1}{2}\left(2k^2+2k+2\right) \\
&= (2k+1)\left(k^2+k+1\right) \\
&= 2k^3+3k^2+3k+1 \\
&= k^3+3k^2+3k+1+k^3 = (k+1)^3+k^3
\end{aligned}$$

(٤١) الإجابة هي (أ):

$$\begin{aligned}
&S_{3n}-S_{2n}-S_n \\
&= \frac{3n}{2}\left(2a+(3n-1)d\right)-\frac{2n}{2}\left(2a+(2n-1)d\right) \\
&\qquad -\frac{n}{2}\left(2a+(n-1)d\right) \\
&= \frac{n}{2}\left[6a+9nd-3d-4a-4nd+2d-2a-nd+d\right] \\
&= \frac{n}{2}\left[4nd\right] = 2n^2d
\end{aligned}$$

(٥.٩) مسائل غير محلولة

(١) المتتابعة $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$ هي:

(أ) حسابية فقط (ب) هندسية فقط

(ج) لا حسابية ولا هندسية (د) حسابية و هندسية

(٢) متتابعة حسابية حدها الأول 20 وحدها الأخير 110 وعدد حدودها 31. ما قيمة فرقها المشترك ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 2 (د) 3

(٣) الحد العام لكل من المتتابعتين $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هو $a_n = \frac{71-7n}{2}$ و $b_n = 2 \times (-3)^{n-1}$. عندئذ،

(أ) كل من المتتابعتين هندسية

(ب) كل من المتتابعتين حسابية

(ج) $\{a_n\}$ حسابية و $\{b_n\}$ هندسية

(د) $\{a_n\}$ هندسية و $\{b_n\}$ حسابية

(٤) [MAΘ 1991] ما الحد السادس من متتابعة حسابية حدها الواحد والثلاثون يساوي 18 وحدها الثالث والسبعون يساوي 46 ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) 1 (د) $\frac{4}{3}$

(٥) [MAΘ 1992] الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 4 والحد السادس يساوي 16. إذا كانت النسبة بين حدين متتاليين عدداً حقيقياً فما قيمة الحد الرابع ؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٦) ما قيمة k التي تجعل $k+1, 2k+1, 13$ متتابعة حسابية ؟

(أ) -4 (ب) -3 (ج) 3 (د) 4

(٧) إذا أدخلنا أربعة أعداد بين -8 و 32 لتكوين متتابعة حسابية فإن مجموع الأعداد الأربعة هذه هو

(أ) 32 (ب) 40 (ج) 48 (د) 50

(٨) [Mathcounts 1992] مجموع الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة هندسية حدودها أعداد صحيحة موجبة يساوي سبعة أمثال الحد الأول و مجموع الحدود الأربعة الأولى يساوي 45. ما الحد الأول ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٩) إذا كانت الأعداد $k-1, 2k, 21-k$ متتابعة هندسية فما مجموع القيم الممكنة للمقدار k ؟

(أ) $-\frac{2}{3}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{22}{5}$ (د) $\frac{20}{3}$

(١٠) ما عدد حدود المتتابعة $8, 4, 2, 1, \ldots, \frac{1}{256}$ ؟

(أ) 8 (ب) 11 (ج) 12 (د) 13

(١١) ما عدد حدود المتتابعة $6, 6\sqrt{2}, 12, \ldots, 3072$ ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 19 (د) 24

(١٢) [MAΘ 2011] المتتابعة التربيعية هي متتابعة حدها العام $a_n = an^2 + bn + c$ حيث a، b، c أعداد ثابتة. إذا كانت الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة تربيعية هي $a_1 = 1$، $a_2 = 3$، $a_3 = 1$ فما الحد

الرابع ؟

(أ) -7 (ب) -5 (ج) 0 (د) 3

(١٣) [MAΘ2010] ما هو مجموع الحدود الثلاثين الأولى من المتسلسلة $1-2+2-4+3-6+4-8+\cdots$ ؟

(أ) -120 (ب) -105 (ج) -465 (د) -15

(١٤) [MAΘ 2011] لتكن $5{,}11{,}13$ هي ثلاثة حدود من الخمسة حدودها الأولى لمتتابعة حسابية تزايدية. ما الحد العشرين من المتتابعة ؟

(أ) 38 (ب) 41 (ج) 43 (د) 45

(١٥) متتابعة هندسية حدها الخامس 162 وحدها الثامن -4374. ما مجموع حدها الأول ونسبتها المشتركة ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 (د) 1

(١٦) إذا كانت الأعداد $k, k+8, 9k$ متتابعة هندسية فما قيم أوساطها الهندسية ؟

(أ) -2 و 4 (ب) 6 و 12 (ج) 2 و -4 (د) -6 و 12

(١٧) [MAΘ 2010] الحد الثاني من متتابعة هندسية حقيقية موجبة هو 4 والحد السادس هو 16. ما الحد الرابع ؟

(أ) 10 (ب) 8 (ج) $8\sqrt{2}$ (د) 12

(١٨) مجموع المتسلسلة $-6+1+8+15+\cdots+141$ يساوي

(أ) 1385 (ب) 1450 (ج) 1485 (د) 1515

(١٩) [MAΘ 2010] النسبة بين الحد الأول و الثالث لمتتابعة حسابية هي 5 إلى 4. ما النسبة بين الحد الأول إلى الحد الثاني ؟

(أ) 10 إلى 9 (ب) 5 إلى 2 (ج) 5 إلى 8 (د) 5 إلى 9

(٢٠) حاصل جمع ثلاثة حدود متتالية لمتتابعة حسابية يساوي 12 وحاصل ضربهم يساوي -80. ما أصغر هذه الأعداد ؟

(أ) -2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٢١) [MAΘ 2010] متتابعة حسابية

$$-2, 1+2k, 4+4k, \ldots$$

مجموع الحدود العشرة الأولى هو $a+bk$. ما قيمة $a-b$ ؟

(أ) 15 (ب) 25 (ج) 35 (د) 55

(٢٢) مجموع خمسة حدود متتالية من متتابعة حسابية يساوي 40 وحاصل ضرب الحد الأول والثالث والخامس من هذه الحدود يساوي 224. ما أصغر هذه الحدود ؟

(أ) 2 (ب) 5 (ج) 8 (د) 11

(٢٣) إذا كان مجموع أول n حد من حدود المتتابعة

$$9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$$

يساوي $\frac{182}{27}$ فما قيمة n ؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 12 (د) 15

(٢٤) الأعداد $4, a, b, 8\sqrt{2}, c, d$ متتابعة هندسية حقيقية. ما قيمة $\frac{d}{a}$ ؟

(أ) 2 (ب) $2\sqrt{2}$ (ج) 4 (د) $4\sqrt{2}$

(٢٥) [MAΘ 2010] إذا كانت $\sqrt{x+1}, \sqrt{x+\frac{49}{4}}, 6$ هي الحدود الثلاثة

الأولى لمتتابعة حسابية. ما مجموع قيم x الممكنة ؟

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 7 (د) 8

(٢٦) الحد الثالث من متتابعة حسابية هو 1 والحد العاشر هو 36. ما مجموع الحدود العشرة الأولى من هذه المتتابعة ؟

(أ) 110 (ب) 125 (ج) 135 (د) 155

(٢٧) مجموع الحدود الثلاثين الأولى للمتتابعة $-\frac{1}{4},\frac{1}{2},-1,2,-4,...$ هو

(أ) $2^{31}-2$ (ب) 2^{31} (ج) $\frac{2^{30}-1}{12}$ (د) $\frac{2^{30}-2}{3}$

(٢٨) الحد العام لمتتابعة هو $a_n = 4 + 3(n-1)$. ما المجموع S_{15} ؟

(أ) 270 (ب) 275 (ج) 350 (د) 375

(٢٩) إذا كانت a,b,c ثلاث حدود متتالية من متتابعة حسابية ومتتابعة هندسية في الوقت نفسه فإن

(أ) $a = b$ و $a \neq c$ (ب) $a = c$ و $b \neq c$

(ج) $a = b = c$ (د) $a \neq b \neq c$

(٣٠) إذا كانت a,b,c,d,e متتابعة حسابية فإن

(أ) $a + e = b + d = 2c$ (ب) $a + e = 2c$ و $b + d = c$

(ج) $a + e = 2c$ و $b + d = 3c$ (د) $a + e = c$ و $b + d = 2c$

(٣١) ما عدد حدود المتتابعة

$$128,\ 64,\ 32,\ 16, \ldots, \frac{1}{512} \text{ ؟}$$

(أ) 15 (ب) 16 (ج) 17 (د) 21

(٣٢) [MAΘ 2011] اختار سلطان متتابعة حسابية فرقها المشترك هو d ومتتابعة

هندسية نسبتها المشتركة هي r. ثم قام بعد ذلك بجمع الحد الأول من المتتابعة الحسابية مع الحد الأول من المتتابعة الهندسية وجمع الحد الثاني من المتتابعة الحسابية مع الحد الثاني من المتتابعة الهندسية وهكذا لتكوين متتابعة جديدة. إذا كانت $3, 8, 15$ هي الحدود الثلاثة الأولى من المتتابعة الجديدة وإذا كان كل من d و r عدداً صحيحاً موجباً فما مجموع قيم d ؟

(أ) 3 (ب) 7 (ج) 4 (د) 5

(٣٣) [MAΘ 2010] إذا كان $ab \neq 0$ وكانت

$$a, a+b\sqrt{3}, a+b\sqrt{6}$$

متتابعة هندسية حيث $\frac{a}{b} = \frac{-\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{m}+n\right)$ فما قيمة $m+n$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٣٤) [AHSME 1963] لتكن الأعداد غير الصفرية a, b, c متتابعة حسابية. إذا أضفنا 1 إلى a أو 2 إلى c نحصل على متتابعتين هندسيتين. ما قيمة b ؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 14

(٣٥) [AHSME 1981] مجموع أول حدين من متتابعة هندسية حقيقية يساوي 7 ومجموع أول 6 حدود يساوي 91. ما مجموع الحدود الأربعة الأولى ؟

(أ) 28 (ب) 30 (ج) 32 (د) 34

(٣٦) [AHSME 1966] متتابعة حسابية حدها الأول 2 وحدها الأخير 29 ومجموع حدودها 155. ما فرقها المشترك ؟

(أ) 3 (ب) 2 (ج) $\frac{27}{19}$ (د) $\frac{13}{9}$

(٣٧) [AHSME 1966] إذا كان A_n هو مجموع أول n من حدود المتتابعة

$8, 12, 16, \ldots$ وكان B_n هو مجموع أول n حد من حدود المتتابعة $17, 19, 21, \ldots$ وإذا كان $n \neq 0$ فإن عدد قيم n التي تجعل $A_n = B_n$ هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 14

(٣٨) [AHSME 1968] الوسط الحسابي للعددين a و b يساوي ضعف وسطهما الهندسي حيث $a > b > 0$. القيمة الممكنة للنسبة $\frac{a}{b}$ (لأقرب عدد صحيح) هي

(أ) 5 (ب) 10 (ج) 11 (د) 14

(٣٩) [AHSME 1972] لنفرض أن $3 < x < y < 9$ حيث $3, x, y$ متتابعة هندسية و $x, y, 9$ متتابعة حسابية. ما قيمة $x + y$ ؟

(أ) $9\frac{1}{2}$ (ب) 10 (ج) $10\frac{1}{4}$ (د) $11\frac{1}{4}$

(٤٠) [AMC10B, 2003] الحد الثاني من متتابعة هندسية يساوي 2 والحد الرابع يساوي 6. أي من الأعداد التالية يمكن أن يكون الحد الأول ؟

(أ) $-\sqrt{3}$ (ب) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (ج) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ (د) $\sqrt{3}$

(٥.١٠) إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) د	(٣) ج	(٤) د	(٥) د
(٦) د	(٧) ج	(٨) ب	(٩) ج	(١٠) ج
(١١) ج	(١٢) ب	(١٣) أ	(١٤) ج	(١٥) ب
(١٦) ب	(١٧) ب	(١٨) ج	(١٩) أ	(٢٠) أ
(٢١) ب	(٢٢) أ	(٢٣) أ	(٢٤) ج	(٢٥) د
(٢٦) ج	(٢٧) ج	(٢٨) د	(٢٩) ج	(٣٠) أ
(٣١) ج	(٣٢) ب	(٣٣) ج	(٣٤) ج	(٣٥) أ
(٣٦) أ	(٣٧) ب	(٣٨) د	(٣٩) د	(٤٠) ب

المراجع
Bibliography

[١] البركاتي، سلطان سعود، مبادئ أساسية لأولمبياد الرياضيات، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

[٢] الجوعي، عبدالله محمد، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى، ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٣] سمحان، معروف عبدالرحمن وأبوعمه، عبدالرحمن محمد سليمان والذكير، فوزي أحمد، قاموس العلوم الرياضية، النشر العلمي والمطابع، منشورات جامعة الملك سعود ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م).

[٤] سمحان، معروف عبدالرحمن والسنوسي، صالح عبدالله، استراتيجيات حلول المسائل (مترجم)، تحت الطبع

[٥] سمحان، معروف عبدالرحمن والذكير، فوزي أحمد، نظرية الأعداد وتطبيقاتها، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٦] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد، رياضيات الأولمبياد-الجبر-الجزء الأول، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م)

[٧] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد، رياضيات الأولمبياد - نظرية الأعداد - الجزء الأول - دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م)

[8] Atkins WJ, Edwards JD, King DJ, O'Halloran PJ,and Taylor PJ, Australian Mathematics Competition Book 1 (1978-1984), AMT Publishing 2004

[9] Atkins WJ, Munro JE, and Taylor PJ,Australian Mathematics Competition (1992-1998), AMT Publishing 2009

[10] Atkins WJ, Taylor PJ, Australian Mathematics Competition (1999-2005), AMT Publishing 2007

[11] Batterson J, Competition Math For Middle School, AoPSInc, 2011

[12] Canadian Mathematics Competitions, Past Contest Problems With Solutions, Gauss (Grade 7), Gauss (Grade 8), Pascal(Grade 9), Cayley (Grade 10), and Fermat (Grade 11) (1997-2012)

[13] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving,Volume 1: The Basics, 7th Edition, AoPS Inc. 2006

[14] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 2: And Beyond, 7th Edition, AoPS Inc. 2006

[15] Mu Alpha Theta (ΜΑΘ), A Great Collection of High School Problems and Solutions From Past Contests (1995-2011)

[16] O'Halloran PJ, Pollard GH, and Taylor PJ, Ausralian Mathematics Competition Book 2 (1985-1991), AMT Publishing 2003

[17] The UK Mathematics Trust, Ten Years of Mathematical Challenges (1997-2006), The University of Leeds, Leeds LS29JT, 2010

كشاف الموضوعات
Subject Index

geometric mean	٢١٤	متتابعة هندسية
series	٢١٧	متسلسلة
geometric series	٢٢٢	متسلسلة هندسية
arithmetic series	٢١٨	متسلسلة حسابية
variable	٧٩	متغير
sum of two cubes	١٨٢	مجموع مكعبين
unknown	٧٩	مجهول
least common multiple	٤	المضاعف المشترك الأصغر
quadratic equation	٨٥	معادلة الدرجة الثانية
linear equation	٧٩	معادلة خطية
coefficient	٧٩	معامل
comparing numbers	١٤٧	مقارنة الاعداد
discriminant	٩١	مميز
common ratio	٢١٤	نسبة مشتركة
arithmetic mean	٢١١	وسط حسابي
geometric mean	٢١٤	وسط هندسي