الفصل الرابع

كثيرات الحدود
Polynomials

(٤.١) مقدمة [Introduction]

رأينا في الفصل الثاني معادلات الدرجة الأولى ومعادلات الدرجة الثانية في متغير x وهذه ما هي إلا أمثلة على مفهوم أساسي في الرياضيات وهو كثيرات الحدود، فكثيرة الحدود في متغير x من الدرجة n تأخذ الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ أعداد حقيقية تسمى معاملات، $a_n \neq 0$. فمثلاً، $x^2 + 4x - 2$ كثيرة حدود من الدرجة الثانية، $3x^5 - 2x^2 + \sqrt{3}x + 4$ كثيرة حدود من الدرجة الخامسة. أما $\frac{x+1}{x^5+2}$، $3\sqrt{x} + 4$، $6x^2 - \frac{3}{x}$ فلا تعد كثيرات حدود. تسمى كثيرة الحدود التي معامل الحد ذو الدرجة العليا 1، كثيرة حدود واحدية (monic). فمثلاً، $x^4 + 2x^2 + 5$ كثيرة حدود واحدية من الدرجة 4.

سنرمز لدرجة كثيرة الحدود $f(x)$ بالرمز $\deg\left(f(x)\right)$.

نعني بجذر (أو صفر) لكثيرة حدود $f(x)$، عدداً a يحقق $f(a) = 0$. كما يسمى صفر كثيرة الحدود $f(x)$ جذراً للمعادلة $f(x) = 0$. فمثلاً،

إذا كانت $f(x) = x^2 - 4$ فإن $f(2) = 0$ و $f(-2) = 0$. ولذا فكل من 2 و -2 جذر لكثيرة الحدود.

مثال (١)[AHSME 1995] إذا كانت $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$ وكان $f(-3) = 2$ فاحسب قيمة $f(3)$.

الحل

$$f(-3) = 2 \Rightarrow a(-3)^4 - b(-3)^2 - 3 + 5 = 2 \Rightarrow 81a - 9b = 0$$

الآن،

$$f(3) = a(3)^4 - b(3)^2 + 3 + 5 = (81a - 9b) + 8 = 0 + 8 = 8 \; . \; \diamondsuit$$

(٤.٢) العمليات على كثيرات الحدود [Operations on Poynomials]

يمكن جمع أو طرح كثيرتي حدود $f(x)$ و $g(x)$ وذلك بجمع أو طرح معاملات الحدود ذات القوى المتساوية. فإذا كانت $f(x) = 2x^2 - 36x + 9$ و $g(x) = 2x^3 + 4x^2 + 5x - 1$ فإن

$$f(x) + g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 31x + 8$$
$$f(x) - g(x) = -2x^3 - 2x^2 - 41x + 10$$

لضرب كثيرتي حدود، نقوم باستخدام قاعدة توزيع الضرب على الجمع وضرب الأسس لنحصل على كثيرة حدود جديدة.

مثال (٢) إذا كانت $f(x) = x - 2$ و $g(x) = x^2 + 2x + 4$ فإن

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (x-2)(x^2 + 2x + 4) \\ &= x(x^2 + 2x + 4) - 2(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 \\
&= x^3 + (2x^2 - 2x^2) + (4x - 4x) - 8 \\
&= x^3 - 8
\end{aligned}
$$

لاحظ أن $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$. ◇

أما قسمة كثيرتي حدود فتتم بصورة مماثلة تماماً لعملية قسمة الأعداد بطريقة القسمة المطولة وأفضل وسيلة لتوضيح ذلك هو الأمثلة.

مثال (٣) إذا كانت $f(x) = 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ وكانت $g(x) = x^2 + 1$ فجد $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

الحل

باستخدام القسمة المطولة نحصل على

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5x + 4 \\ \hline
x^2 + 1 & 5x^3 + 4x^2 + 2x - 1 \\
 & 5x^3 \qquad\quad + 5x \\ \cline{2-2}
 & \qquad 4x^2 - 3x - 1 \\
 & \qquad 4x^2 \qquad + 4 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad -3x - 5
\end{array}
$$

نتوقف هنا لأن درجة $-3x - 5$ أقل من درجة $x^2 + 1$. ويكون خارج القسمة هو $5x + 4$ والباقي هو $-3x - 5$. ◇

لاحظ أن بالإمكان كتابة $f(x)$ في المثال (٣) على النحو التالي

$f(x) = (5x + 4)g(x) + (-3x - 5)$.

وهذا صحيح دائماً استناداً إلى خوارزمية القسمة التي تنص على:

خوارزمية القسمة[Division Algorithm]

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتي حدود فتوجد كثيرتا حدود وحيدتان $q(x)$ (تسمى خارج القسمة) و $r(x)$ (تسمى باقي القسمة) حيث

$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ ، $0 \leq \deg(r(x)) < \deg(g(x))$ أو $r(x) = 0$.

(٤.٣) جذور كثيرات الحدود[Roots of Polynomials]

لقد رأينا وجود قانون عام لإيجاد جذور كثيرات الحدود من الدرجة الثانية، كما أنه يوجد قانون عام لإيجاد جذور كثيرتي الحدود من الدرجتين الثالثة والرابعة ولكن تقديمهما يخرجنا عن نطاق هذا الكتاب. أما كثيرات الحدود من الدرجة الخامسة فأكثر فلا يوجد قانون عام لإيجاد جذورها ولكن توجد بعض الحقائق العامة التي تساعدنا على إيجاد هذه الجذور للعديد من كثيرات الحدود. سنذكر بعض هذه الحقائق دون برهان.

(١) **مبرهنة العامل الخطي.**

إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n وقسمناها على العامل الخطي $x - a$ فإن

$$f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$$

حيث $q(a)$ كثيرة حدود من الدرجة $n - 1$.

ويكون $x - a$ عاملاً (قاسماً) من عوامل $f(x)$ إذا وفقط إذا كان $f(a) = 0$.

(٢) اختبار الأصفار الكسرية

إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة، $a_n \neq 0$ وكان $\frac{p}{q}$ صفراً كسرياً مكتوباً في أبسط صورة لها فإن p يقسم a_0 و q يقسم a_n.

(٣) العلاقة بين معاملات كثيرة الحدود وأصفارها.

إذا كانت $f(x) = x^2 + px + q$ وكان α_1 و α_2 جذري كثيرة الحدود $f(x)$ فلقد بينا في الفصل الثاني أن $p = -(\alpha_1 + \alpha_2)$ وأن $q = \alpha_1\alpha_2$.

توجد علاقات مماثلة لكثيرات الحدود من الدرجات العليا، نذكر واحدة منها لكثيرات حدود الدرجة الثالثة. فإذا كانت $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ وكانت $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ جذور كثيرة الحدود $f(x)$ فإن

$$
\begin{aligned}
p &= -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\
q &= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 \\
r &= -\alpha_1\alpha_2\alpha_3
\end{aligned}
$$

(٤) المبرهنة الأساسية في الجبر

أي كثيرة حدود من الدرجة $n \geq 1$ لها على الأقل جذر حقيقي أو مركب.

لاحظ أن المبرهنة الأساسية في الجبر تسمح لنا بكتابة كثيرة الحدود كالتالي:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&= c(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)
\end{aligned}
$$

حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ هي جذور كثيرة الحدود $f(x)$ وهذه الجذور ليست

بالضرورة مختلفة.

ملحوظة

إذا كان α جذراً لكثيرة الحدود مكرراً m من المرات فنقول إنه جذر مضاعف عدد تكراراته m. وإذا كان $m = 1$ فنقول إنه جذر بسيط.

مثال (٤) [AHSME 1965] إذا كان r_1 هو باقي قسمة $f(y) = y^2 + my + 2$ على $y - 1$ وكان r_2 هو باقي قسمتها على $y + 1$ وكان $r_1 = r_2$ فجد قيمة m.

الحل

باستخدام مبرهنة العامل الخطي نجد أن

$$r_1 = f(1) = 1^2 + m \times 1 + 2 = m + 3$$
$$r_2 = f(-1) = (-1)^2 + m \times (-1) + 2 = -m + 3$$

وبما أن $r_1 = r_2$ فنجد أن $m + 3 = -m + 3$. أي أن $2m = 0$ ومنه فإن $m = 0$. ◇

مثال (٥) جد جميع جذور كثيرة الحدود $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$.

الحل

باستخدام مبرهنة الجذور الكسرية نجد أن الجذور الكسرية إن وجدت يجب أن تكون قواسم العدد 8 وهي $\{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$. وبالتجريب نجد أن

$$f(1) = 1^3 + 5 \times 1^2 + 2 \times 1 - 8 = 0$$
$$f(-2) = -8 + 20 - 4 - 8 = 0$$
$$f(-4) = -64 + 80 - 8 - 8 = 0$$

إذن، -4 ، -2 ، 1 هي جميع جذور كثيرة الحدود (لماذا لا توجد جذور أخرى؟). ◇

مثال (٦)[AHSME 1988] لنفرض أن b و c عددان حقيقيان حيث $(x+2)(x+b)=x^2+cx+6$. جد قيمة كل من b و c .

الحل

لاحظ أن صفري كثيرة الحدود هما $x_1=-2$ و $x_2=-b$. من علاقة ڤـيتاي نعلم أن $x_1x_2=6$. إذن، $2b=6$ ومن ثم فإن $b=3$. أيضاً $x_1+x_2=-c$.
ومنه فإن $-c=-2-3$. وبهذا يكون $c=5$. $\diamond$

مثال (٧)[AHSME 1988] لنفرض أن a و b عددان صحيحان وأن x^2-x-1 عامل لكثيرة الحدود ax^3+bx^2+1 . جد قيمة كل من a و b .

الحل

باستخدام القسمة المطولة نجد أن

$$ax^3+bx^2+1=(ax+a+b)\left(x^2-x-1\right)+(2a+b)x+(a+b+1)$$

وبهذا يكون الباقي هو $(2a+b)x+(a+b+1)$.

وبما أن x^2-x-1 قاسماً لكثيرة الحدود فإن الباقي يساوي صفر. إذن،

$$(2a+b)x+(a+b+1)=0$$

وبهذا يكون $a+b+1=0$ و $2a+b=0$.

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $a=1$ و $b=-2$. $\diamond$

مثال (٨)[AMC12B 2003] إذا كانت $f(x)$ كثيرة حدود خطية (من الدرجة الأولى) حيث $f(6)-f(2)=12$. جد $f(12)-f(2)$.

الحل

لنفرض أن $f(x)=ax+b$. عندئذ،

$$f(6)-f(2)=(6a+b)-(2a+b)=4a$$

من ذلك نرى أن $4a = 12$. إذن $a = 3$. وبهذا فإن $f(x) = 3x + b$. الآن،

$f(12) - f(2) = (3 \times 12 + b) - (3 \times 2 + b) = 36 - 6 = 30$. ◇

مثال (٩)[AMC122000] ما هو باقي قسمة $x^{51} + 51$ على $x + 1$.

الحل

باستخدام مبرهنة العامل الخطي نجد أن باقي القسمة هو

$f(-1) = (-1)^{51} + 51 = -1 + 51 = 50$. ◇

مثال (١٠)[AMC12 2001] لنفرض أن $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

إذا علمت أن $P(0) = 2$ وأن متوسط أصفار $P(x)$ يساوي حاصل ضرب أصفار $P(x)$ وهذا أيضاً يساوي مجموع معاملات $P(x)$ فجد a، b، c .

الحل

بما أن $P(0) = 2$ فإن $c = 2$. الآن، مجموع الأصفار هو $-a$. إذن متوسطها هو $-\dfrac{a}{3}$. حاصل ضرب الأصفار هو $-c$. إذن، $-\dfrac{a}{3} = -c$. وبهذا فإن $a = 3c = 6$. مجموع المعاملات هو $1 + a + b + c = -c$. إذن، $1 + 6 + b + 2 = -2$. ومن ذلك نجد أن $b = -11$. ◇

مثال (١١)[AHSME 1960] إذا كان $x^2 + 2x + 5$ قاسماً لكثيرة الحدود $x^4 + px^2 + q$ فجد كلاً من p و q .

الحل الأول

لنفرض أن العامل الآخر هو $x^2 + ax + b$. عندئذ،

$$\left(x^2 + 2x + 5\right)\left(x^2 + ax + b\right) = x^4 + px^2 + 9$$
$$x^4 + (2 + a)x^3 + (5 + b + 2a)x^2 + (5a + 2b)x + 5b = x^4 + px^2 + q$$

بمقارنة المعاملات نجد أن

$$2+a=0 \Rightarrow a=-2$$
$$5a+2b=0 \Rightarrow b=-\frac{5a}{2}=+5$$
$$p=5+b+2a=5+5-4=6$$
$$.\ q=5b=5\times 5=25$$

الحل الثاني

بقسمة x^4+px^2+q على x^2+2x+5 نحصل على

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2-2x+(p-1) \\
\hline
x^2+2x+5 & x^4 \qquad\qquad + px^2 \qquad + q \\
 & x^4+2x^3 \qquad + 5x^2 \\
\hline
 & -2x^3+(p-5)x^2 \qquad + q \\
 & -2x^3-4x^2 \qquad -10x \\
\hline
 & (p-1)x^2 \quad +10x \quad + q \\
 & (p-1)x^2+2(p-1)x+5(p-1) \\
\hline
 & (12-2p)x+(q-5p+5)
\end{array}$$

إذن، الباقي $(12-2p)x+(q-5p+5)=0$. من ذلك نجد أن

$$12-2p=0 \Rightarrow p=6$$
$$q-5p+5=0 \Rightarrow q=5p-5=30-5=25$$

الحل الثالث

ضع $y=x^2$. عندئذ، $x^4+px^2+q=y^2+py+q$.

لنفرض أن جذري $y^2+py+q=0$ هما r^2 و s^2 . عندئذ، جذور $x^4+px^2+q=0$ هي $\pm r$ و $\pm s$ (لأن $y=x^2$). الآن، بما أن

$x^2 + 2x + 5 = 0$ قاسم فإن الجذرين r و s يحققان المعادلة. وبهذا فالجذران $-r$ و $-s$ يحققان المعادلة. من ذلك نجد أن $x^2 - 2x + 5 = 0$ ويكون القاسم الآخر هو $x^2 - 2x + 5$. الآن،

$$\left(x^2 + 2x + 5\right)\left(x^2 - 2x + 5\right) = x^4 + px^2 + q$$
$$x^4 + 6x^2 + 25 = x^4 + px^2 + q$$

ويكون $p = 6$ و $q = 25$. ◇

مثال (١٢) إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx - 7$ وكان $f(5) = 3$ فجد $f(-5)$.

الحل

$$f(5) = 5^3a + 5b - 7 \Rightarrow 5^3a + 5b = 10$$

الآن،

$$f(-5) = -5^3a - 5b - 7 = -\left(5^3a + 5b\right) - 7 = -10 - 7 = -17 .$$ ◇

مثال (١٣)[MAΘ 1991] إذا كان $c \neq 0$ و $d \neq 0$ وكانت جذور المعادلة $4x^3 - 12x^2 + cx + d = 0$ هي α_1، α_2، α_3 حيث $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ فجد قيمة $\frac{d}{c}$.

الحل

لاحظ أن

$$\begin{aligned}4\left(x^3 - 3x^2 + \frac{c}{4}x + \frac{d}{4}\right) &= 4\left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)\left(x - \alpha_3\right)\\ &= 4\left(x^2 - \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)x + \alpha_1\alpha_2\right)\left(x - \alpha_3\right)\\ &= 4\left(x^2 + \alpha_1\alpha_2\right)\left(x - \alpha_3\right)\\ &= 4\left(x^3 - \alpha_3x^2 + \alpha_1\alpha_2x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)\end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات نجد أن $\alpha_3 = 3$ و $\alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{4}$ و $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{12}$.

إذن، $-\frac{d}{12} = \frac{c}{4}$. أي أن $d = -3c$.

وبهذا نجد أن $\frac{d}{c} = -3$. ◇

مثال (١٤) ما باقي قسمة $f(x) = x^{90}$ على $x^2 - 3x + 2$.

الحل

لنفرض أن $r(x) = ax + b$ هو باقي قسمة $f(x)$ على $x^2 - 3x + 2$ وأن $q(x)$ هو خارج القسمة. عندئذ،

$$\begin{aligned} f(x) = x^{90} &= \left(x^2 - 3x + 2\right)q(x) + (ax + b) \\ &= (x-1)(x-2)q(x) + (ax + b) \end{aligned}$$

الآن،

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 = 0 + a + b \\ f(2) &= 2^{90} = 0 + 2a + b \end{aligned}$$

من ذلك نجد أن

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 2^{90} \end{aligned}$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية نجد أن $a = 2^{90} - 1$. وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن $b = 2 - 2^{90}$. إذن، $r(x) = \left(2^{90} - 1\right)x + \left(2 - 2^{90}\right)$. ◇

(٤.٤) تحليل كثيرات الحدود [Factorization of Polynomials]

نعني بتحليل كثيرة حدود، كتابتها كحاصل ضرب كثيرات حدود من الدرجة الأولى وكثيرات حدود من الدرجة الثانية ليس لها جذور حقيقية (أي أن مميزها

سالب). من الناحية النظرية تضمن لها المبرهنة الأساسية في الجبر إمكانية ذلك. ولكن لا توجد طريقة عامة لإنجاز ذلك عملياً. ولهذا يتطلب تحليل كثيرات الحدود بعض الحنكة والكثير من التدريب. وإضافة إلى طرق تحليل صيغ الدرجة الثانية فالقواعد التالية تساعد كثيراً.

(١) تحليل فرق بين مربعين:

$$a^2 - b^2 = \left(a-b\right)\left(a+b\right)$$

(٢) تحليل فرق بين مكعبين:

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

(٣) تحليل مجموع مكعبين:

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right).$$

مثال (١٥) حلل كثيرة الحدود $6x^4 + 3x^3 + 3x^2$.

الحل

$$6x^4 + 3x^3 + 3x^2 = 3x^2\left(2x^2 + x + 1\right)$$

وبما أن مميز $2x^2 + x + 1$ هو $1 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$.

فالتحليل أعلاه هو التحليل المطلوب. ◇

مثال (١٦) حلل كثيرة الحدود $x^{12} - 2^{12}$.

الحل

$$\begin{aligned} x^{12} - 2^{12} &= \left(x^6 - 2^6\right)\left(x^6 + 2^6\right) \\ &= \left(x^3 - 2^3\right)\left(x^3 + 2^3\right)\left(x^2 + 2^2\right)\left(x^4 - 4x^2 + 16\right) \\ &= (x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right) \\ &\quad \left(x^2 + 4\right)\left(x^4 - 4x^2 + 16\right) \end{aligned}$$

ولكن

$$\begin{aligned} x^4-4x^2+16 &= x^4+8x^2+16-12x^2 \\ &= \left(x^2+4\right)^2-12x^2 \\ &= \left(x^2+4-\sqrt{12}x\right)\left(x^2+4+\sqrt{12}x\right) \end{aligned}$$

ويكون التحليل هو

$$(x-2)\left(x^2+2x+4\right)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)\left(x^2+4\right).$$

$$\left(x^2+4-\sqrt{12}x\right)\left(x^2+4+\sqrt{12}x\right)$$ ◇

مثال (١٧) حلل x^4+324 .

الحل

لاحظ أن

$$\begin{aligned} x^4+324 &= x^4+4\times 81 = x^4+4\times 3^4 \\ &= x^4+36x^2+4\times 81-36x^2 \\ &= \left(x^2+18\right)^2-36x^2 \\ &= \left(x^2+18-6x\right)\left(x^2+18+6x\right) \end{aligned}$$

ومميز كل من $x^2+6x+18$ و $x^2-6x+18$ سالب. ◇

مثال (١٨) حلل كثيرة الحدود x^4+x^2+1 .

الحل

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1-x^2 \\ &= \left(x^2+1\right)^2-x^2 \\ &= \left(x^2+1-x\right)\left(x^2+1+x\right) \end{aligned}$$

ومميز كل من x^2+x+1 و x^2-x+1 سالب. ◇

مثال (١٩) أثبت أن $x^2 + x + 1$ قاسم لكثيرة الحدود $x^5 + x^4 + 1$.

الحل

باستخدام القسمة المطولة نحصل على

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 - x + 1 \\ \hline
x^2 + x + 1 & x^5 + x^4 \qquad\qquad + 1 \\
 & x^5 + x^4 + x^3 \\ \hline
 & \qquad - x^3 \qquad + 1 \\
 & \qquad - x^3 - x^2 - x \\ \hline
 & \qquad\qquad x^2 + x + 1 \\
 & \qquad\qquad x^2 + x + 1 \\ \hline
 & \qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

إذن، $\left(x^3 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^5 + x^4 + 1$.

هل تستطيع تحليل $x^3 - x + 1$ (حاول ذلك) ؟ ◇

مثال (٢٠) حل المعادلة $x(x+1)(x+2)(x+3) = 63$

الحل

لاحظ أن المعادلة تكافئ $\left(x^2 + 3x + 2\right)\left(x^2 + 3x\right) - 63 = 0$.

بوضع $y = x^2 + 3x$ نجد أن

$$\begin{aligned}
(y+2)y - 63 &= 0 \\
y^2 + 2y - 63 &= 0 \\
(y-7)(y+9) &= 0
\end{aligned}$$

إذن، $y = 7$ أو $y = -9$.

إذا كان $y = -9$ فنجد أن $x^2 + 3x + 9 = 0$ ومميز هذه المعادلة هو $0 > 27- = 36 - 9$ ومن ثم ليس لها جذور حقيقية.أما إذا كان $y = 7$ فنرى أن $x^2 + 3x - 7 = 0$. وباستخدام القانون العام نجد أن

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+28}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

إذن، $x_1 = \frac{-3+\sqrt{37}}{2}$ و $x_2 = \frac{-3-\sqrt{37}}{2}$. ◇

مثال (٢١) حلل كثيرة الحدود $x^9 + x^4 - x - 1$ إذا علمت أن $x^2 + x + 1$ قاسماً لكثيرة الحدود $x^5 + x + 1$.

الحل

$$\begin{aligned} x^9 + x^4 - x - 1 &= \left(x^9 - x\right) + \left(x^4 - 1\right) \\ &= x\left(x^8 - 1\right) + \left(x^4 - 1\right) \\ &= x\left(x^4 - 1\right)\left(x^4 + 1\right) + \left(x^4 - 1\right) \\ &= \left(x^4 - 1\right)\left(x^5 + x + 1\right) \end{aligned}$$

الآن $x^2 + x + 1$ قاسم لكثيرة الحدود $x^5 + x + 1$. ولذا بقسمة $x^5 + x + 1$ على $x^2 + x + 1$ نجد أن خارج القسمة هو $x^3 - x^2 + 1$.

إذن، التحليل المطلوب هو

$$(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^3-x^2+1\right) .$$ ◇

(٤.٥) مسائل محلولة

(١) إذا كانت $f(x) = ax^2 + x + 1$ وكان $f(2) = 10$ فما قيمة a ؟

(أ) $\frac{5}{4}$ (ب) $\frac{7}{4}$ (ج) $\frac{13}{4}$ (د) $\frac{15}{4}$

(٢) إذا كانت $f(x) = 4x^3 + 8x^2 + 6x + 5$ وكانت $g(x) = x^2 - 3x + 1$ فإن $4f(1) + 5g(5)$ تساوي

(أ) 145 (ب) 146 (ج) 147 (د) 148

(٣) [AMC10A2002] مجموع أصفار كثيرة الحدود $(2x+3)(x-4) + (2x+3)(x-6)$ هو

(أ) $\frac{7}{2}$ (ب) 4 (ج) 5 (د) 7

(٤) [AHSME 1965] إذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x + 3$ قاسماً لكثيرة الحدود $g(x) = x^4 + 4x^3 + 6px^2 + 4qx + r$ فإن قيمة $(p+q)r$ تساوي

(أ) -18 (ب) 12 (ج) 15 (د) 27

(٥) لتكن $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 1$. أي من كثيرات الحدود التالية قاسم لكثيرة الحدود $f(x)$ ؟

(أ) $x+1$ (ب) $x-1$ (ج) x^2-1 (د) $x+2$

(٦) إذا قبلت $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ القسمة على $g(x) = x^2 + x + 2$ فإن $a - b$ يساوي

(أ) -1 (ب) 0 (ج) 1 (د) 2

(٧) إذا كان $81x^4 - 16 = \left(ax^2 + b\right)(cx + d)(ex + f)$ فإن

$a-b+c+d-e+f$ يساوي

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 3 (د) 5

(٨) إذا كان $6x^4-3x^3-4x^2+x=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

فإن $a+b+c+d$ يساوي

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 1 (ج) 2 (د) $3\sqrt{33}$

(٩) مجموع الجذور الحقيقة لكثيرة الحدود x^4-10x^2+9 هو

(أ) 0 (ب) 3 (ج) 6 (د) 7

(١٠) خارج قسمة $x^4+x^3-7x^2+13x+4$ على x^2+4x+1 هو

(أ) x^2-3x+4 (ب) x^2+3x+4

(ج) x^2+3x-4 (د) x^2-3x-4

(١١) إذا كان $x^4-3x^3-x+3=\left(x^2+x+a\right)(x+b)(x+c)$ فإن

abc يساوي

(أ) -3 (ب) -1 (ج) 1 (د) 3

(١٢) إذا كان $x^6-x^4-x^2+1=\left(ax^2+bx+c\right)(x+1)^2(x-1)^2$

فإن abc يساوي

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٣) [AHSME 1950] باقي قسمة $x^{13}+1$ على $x-1$ يساوي

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٤) [MAΘ 1991] مجموع قيم m التي تجعل $x+2$ قاسماً لكثيرة الحدود

$f(x)=x^3+3m^2x^2+mx+4$ هو

(أ) $-\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{6}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

(١٥) لنفرض أن جذور كثيرة الحدود x^3+px^2+4 هي $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ حيث $\alpha_1=\alpha_2$. ما قيمة p ؟

(أ) -3 (ب) 0 (ج) 3 (د) 4

(١٦) [AMC10A 2010] إذا كانت الجذور الثلاثة لكثيرة الحدود $f(x)=x^3-ax^2+bx-2010$ أعداداً صحيحة موجبة فما أصغر قيمة للعدد a ؟

(أ) 78 (ب) 88 (ج) 98 (د) 108

(١٧) إذا كانت جميع جذور كثيرة الحدود

$$f(x)=x^3-18x^2+87x+k=0$$

أعداداً أولية فما عدد القيم الممكنة للعدد k ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(١٨) [AHSME 1982] إذا كانت $f(x)=ax^7+bx^3+cx-5$ وكان $f(-7)=7$ فما قيمة $f(7)$ ؟

(أ) -19 (ب) -17 (ج) 17 (د) 19

(١٩) إذا كان $p\neq 0$ و $q\neq 0$ وكانت α_1 ، α_2 ، α_3 هي جذور المعادلة $x^3+px^2+qx+15=0$ حيث $\alpha_1+\alpha_2=0$ فما قيمة pq ؟

(أ) -15 (ب) -12 (ج) 12 (د) 15

(٢٠) إذا كان باقي قسمة $f(x)=ax^5+bx^3+cx$ على $x-3$ هو 6 فما باقي قسمة $f(x)$ على x^2-9 ؟

(أ) $2x$ (ب) $2x-1$ (ج) $2x+1$ (د) $3x$

(٢١) [AHSME 1979] لنفرض أن $q_1(x)$ و r_1 هما خارج القسمة والباقي عند قسمة x^8 على $x+\frac{1}{2}$. ولنفرض أن $q_2(x)$ و r_2 هما خارج القسمة والباقي عند قسمة $q_1(x)$ على $x+\frac{1}{2}$ فما قيمة r_2 ؟

(أ) $-\frac{1}{16}$ (ب) $-\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{1}{16}$ (د) $\frac{1}{8}$.

(٢٢) [M and IQ3] مجموع جذور المعادلة

$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=-1$ هو

(أ) -15 (ب) -10 (ج) 10 (د) 15

(٢٣) ما باقي قسمة $f(x)=x^{51}-1$ على x^2-1 ؟

(أ) $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ (ب) $x-1$ (ج) $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ (د) $x+1$

(٢٤) أحد جذور المعادلة $x^3-6x^2-x+30=0$ يساوي مجموع الجذرين الآخرين. ما الجذر الأصغر ؟

(أ) -2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 8

(٢٥) إذا كان -1 و 1 جذرين للمعادلة

$$f(x)=x^4-7x^3+11x^2+7x-12=0$$

فما مجموع الجذرين الآخرين ؟

(أ) 7 (ب) 9 (ج) 10 (د) 11

(٢٦) العدد 7 هو أحد جذور كثيرة الحدود

$f(x)=3x^3-14x^2-55x+42$.

إذا كان α و β هما الجذران الآخران، فما قيمة المقدار $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}$ ؟

(أ) $-\frac{7}{6}$ (ب) $-\frac{7}{3}$ (ج) $\frac{7}{6}$ (د) $\frac{7}{3}$

(٢٧) لتكن $f\left(\frac{x}{5}\right)=2x^2+x+3$. ما حاصل ضرب قيم x التي تحقق $f(5x)=253$ ؟

(أ) $-\frac{1}{10}$ (ب) 0 (ج) 10 (د) 20

(٢٨) ما مجموع مربعات جذور المعادلة

$x^3+3x^2-7x+1=0$ ؟

(أ) 10 (ب) 13 (ج) 19 (د) 23

(٢٩) ما عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

$2x^5+4x^3+2x=0$؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 3 (د) 5

(٣٠) لنفرض أن $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث $f(6)-f(2)=12$ و $f(8)-f(4)=16$. ما قيمة $f(12)-f(2)$ ؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 35 (د) 45

(٤.٦) حلول المسائل

(١) الإجابة هي (ب): لدينا

$$10 = f(2) = a \times (2)^2 + 2 + 1 = 4a + 3$$

إذن، $4a = 7$. أي أن $a = \frac{7}{4}$.

(٢) الإجابة هي (ج): لاحظ أن

$$4f(1) = 4\left(4 \times 1^3 + 8 \times 1^2 + 6 \times 1 + 5\right) = 4 \times 23 = 92$$
$$5g(5) = 5\left(5^2 - 3 \times 5 + 1\right) = 5 \times 11 = 55$$

إذن، $4f(1) + 5g(5) = 92 + 55 = 147$.

(٣) الإجابة هي (أ):

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-4) + (2x+3)(x-6) &= (2x+3)(x-4+x-6)\\ &= (2x+3)(2x-10)\end{aligned}$$

وأصفارها هي $x_1 = 5$ و $x_2 = -\frac{3}{2}$. إذن، $x_1 + x_2 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

(٤) الإجابة هي (ج): بما أن درجة $f(x)$ تساوي 3 ودرجة $g(x)$ تساوي 4 وأن $g(x)$ واحدية فإن

$$\begin{aligned}g(x) &= (x+b)\left(x^3 + 3x^2 + 9x + 3\right)\\ &= x^4 + (3+b)x^3 + (9+3b)x^2 + (3+9b)x + 3b\end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات نجد أن.

$$\begin{aligned}&3 + b = 4 \Rightarrow b = 1\\ &9 + 3b = 6p \Rightarrow 6p = 12 \Rightarrow p = 2\\ &3 + 9b = 4q \Rightarrow 4q = 12 \Rightarrow q = 3\\ &3b = r \Rightarrow r = 3\end{aligned}$$

إذن، $(p+q)r = (2+3) \times 3 = 15$.

حل آخر: بقسمة $g(x)$ على $f(x)$ نحصل على

$$\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\ \hline
x^3+3x^2+9x+3 & x^4+4x^3+6px^2+4qx+r \\
 & x^4+3x^3+9x^2+3x \\ \hline
 & x^3+(6p-9)x^2+(4q-3)x+r \\
 & x^3+3x^2+9x+3 \\ \hline
 & (6p-12)x^2+(4q-12)x+(r-3)
\end{array}$$

إذن، باقي القسمة $0 = (6p-12)x^2+(4q-12)+(r-3)$

ومن ذلك نجد أن

$$r-3=0 \Rightarrow r=3$$
$$4q-12=0 \Rightarrow q=3$$
$$6p-12=0 \Rightarrow p=2$$

وبهذا يكون $(p+q)r=(2+3)\times 3=15$.

(٥) الإجابة هي (ب): لاحظ أن

$$f(-1)=3(-1)^3-2(-1)^2-1=-6\neq 0$$
$$f(1)=3\times 1^3-2\times 1^2-1=0$$
$$f(-2)=3\times(-2)^3-2\times(-2)^2-1=-33\neq 0$$

إذن، $x-1$ قاسم. $x+1$ ليست قاسم وبالتالي $(x-1)(x+1)=x^2-1$ ليست قاسم. كذلك $x+2$ ليست قاسم.

(٦) الإجابة هي (ج): بما أن $f(x)$ واحدية وتقبل القسمة على $g(x)$ فإن

$$f(x)=(x+c)g(x)$$

$$x^3+2x^2+ax+b=(x+c)\left(x^2+x+2\right)$$
$$=x^3+(c+1)x^2+(c+2)x+2c$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن

$$c+1=2 \Rightarrow c=1$$
$$c+2=a \Rightarrow a=3$$
$$b=2c \Rightarrow b=2$$

إذن، $a-b=3-2=1$.

(٧) الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$81x^4-16=\left(9x^2+4\right)(3x+2)(3x-2)$$

إذن،

$$a-b+c+d-e+f=9-4+3+2-3-2=5 \, .$$

(٨) الإجابة هي (أ): بتحليل المقدار نجد أن

$$6x^4-3x^3-4x^2+x=$$
$$x(x-1)\left(x-\frac{-3+\sqrt{33}}{12}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{33}}{12}\right)$$

إذن،

$$a+b+c+d=0+1+\frac{-3+\sqrt{33}}{12}+\frac{-3-\sqrt{33}}{12}$$
$$=1-\frac{3}{12}-\frac{3}{12}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(٩) الإجابة هي (أ):

$$x^4-10x^2+9=\left(x^2-9\right)\left(x^2-1\right)$$
$$=(x-3)(x+3)(x-1)(x+1)$$

إذن، الجذور الحقيقية هي $x_1=3$ ، $x_2=-3$ ، $x_3=1$ ، $x_4=-1$

ومجموعها يساوي 0.

(١٠) الإجابة هي (أ): بالقسمة المطولة نجد أن

$x^4+x^3-7x^2+13x+4=\left(x^2+4x+1\right)\left(x^2-3x+4\right)$.

(١١) الإجابة هي (د): بتحليل كثيرة الحدود نجد أن

$$x^4-3x^3-x+3=(x-3)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

وبهذا فإن $a=1$، $b=-1$، $c=-3$. ويكون

$abc=1\times(-1)\times(-3)=3$.

(١٢) الإجابة هي (أ): بتحليل كثيرة الحدود نجد أن

$$x^6-x^4-x^2+1=\left(x^2+1\right)(x+1)^2(x-1)^2$$

ولذا فإن $a=c=1$ و $b=0$. ويكون $abc=0$.

(١٣) الإجابة هي (ج): الباقي هو $f(1)=1^{13}+1=1+1=2$.

(١٤) الإجابة هي (ب): $x+2$ قاسماً عندما يكون $f(-2)=0$. إذن،

$$\begin{aligned}-8+12m^2-2m+4&=0\\12m^2-2m-4&=0\\6m^2-m-2&=0\end{aligned}$$

وبهذا فإن

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times(-2)\times 6}}{12}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{12}=\frac{1\pm 7}{12}$$

إذن، $m_1=\frac{1+7}{12}=\frac{2}{3}$ و $m_2=\frac{1-7}{12}=-\frac{1}{2}$. وبهذا يكون

$m_1+m_2=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

(١٥) الإجابة هي (أ): من علاقات ڤـيتاي لدينا

$$-p = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\alpha_1 + \alpha_3 \qquad (١)$$

$$4 = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\alpha_1^2\alpha_3 \qquad (٢)$$

$$0 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1 = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_3 = \alpha_1(\alpha_1 + 2\alpha_3) \qquad (٣)$$

إذن، $\alpha_1 = 0$ أو $\alpha_1 = -2\alpha_3$.

إذا كان $\alpha_1 = 0$ فإن $0 = 4$ وهذا مستحيل.

إذن، $\alpha_1 = -2\alpha_3$. بالتعويض في المعادلة (٢) نجد أن $-4\alpha_3^3 = 4$. إذن، $\alpha_3^3 = -1$. وبهذا فإن $\alpha_3 = -1$. ومن ذلك نجد أن $\alpha_1 = 2$. إذن، $p = -2\alpha_1 - \alpha_3 = -4 + 1 = -3$.

(١٦) الإجابة هي (أ): لنفرض أن الجذور هي α، β، γ. من علاقات ڤـيتاي لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = a$$
$$\gamma\beta\alpha = 2010 = 2 \times 3 \times 5 \times 67$$

وبما أن عدد الجذور يساوي 3 فيجب أن يكون أحد الجذور هو حاصل ضرب زوج من الأعداد الأولية 2، 3، 5، 67. ولكي نحصل على مجموع $\alpha + \beta + \gamma = a$ أصغري فيجب أن يكون زوج الأعداد الأولية التي نضربهما هما 2 و 3 لنحصل على جذر $2 \times 3 = 6$. ومن ثم فالجذرين الآخرين هما 5 و 67 ونحصل على $a = 6 + 5 + 67 = 78$.

(١٧) الإجابة هي (ب): القيمة الوحيدة الممكنة هي $k = 110$. لنفرض أن α، β، γ هي جذور كثيرة الحدود. من علاقات ڤـيتاي لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = 18$$
$$\alpha\beta\gamma = -k$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 87$$

بما أن α ، β ، γ أعداد أولية فيجب أن يكون أحدها يساوي 2وليكن $\alpha = 2$ (لأنها لو كانت جميعاً فردية لكان $\alpha + \beta + \gamma$ عدداً فردياً وهذا مستحيل). إذن،

$$\beta + \gamma = 16 = 3 + 13 = 5 + 11$$

هما الخياران الآخران الوحيدان.إذا كان $\beta = 3$ و $\gamma = 13$ فنجد أن

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2 \times 3 + 3 \times 13 + 13 \times 2 = 71$$

وهذا مستحيل.إذن، $\beta = 5$ و $\gamma = 11$. ويكون

$$k = 2 \times 5 \times 11 = 110 .$$

(١٨) الإجابة هي (ب): لدينا

$$\begin{aligned} &f(-7) = -7^7 \times a - 7^3 \times b - 7c - 5 = 7 \\ &\Rightarrow 7^7 \times a + 7^3 \times b + 7c = -12 \end{aligned}$$

إذن،

$$f(7) = 7^7 \times a + 7^3 \times b + 7c - 5 = -12 - 5 = -17 .$$

(١٩) الإجابة هي (د): لاحظ أن

$$\begin{aligned} x^3 + px^2 + qx + 15 &= \left(x - \alpha_1\right)\left(x - \alpha_2\right)\left(x - \alpha_3\right) \\ &= \left(x^2 - \left(\alpha_1 + \alpha_2\right)x + \alpha_1\alpha_3\right)\left(x - \alpha_3\right) \\ &= \left(x^2 + \alpha_1\alpha_3\right)\left(x - \alpha_3\right) \\ &= x^3 - \alpha_3 x^2 + \alpha_1\alpha_2 x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \end{aligned}$$

بمقارنة المعاملات نجد أن $p = -\alpha_3$ و $\alpha_1\alpha_2 = q$ و$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = +15$.

إذن،

$$pq = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 15 .$$

(٢٠) الإجابة هي (أ): بقسمة $f(x)$ على $x^2 - 9$ نجد أن

. $f(x) = (x-3)(x+3)q(x) + r(x)$

الآن،

$$\begin{aligned} f(-3) &= -3^5 \times a - 3^3 \times b - 3c \\ &= -\left(3^5 \times a + 3^3 \times b + 3c\right) \\ &= -f(3) = -6 \end{aligned}$$

إذن،

$$\begin{aligned} 6 &= f(3) = r(3) \\ -6 &= f(-3) = r(-3) \end{aligned}$$

ولكن $\deg r(x) < 2$. إذن، $r(x) = ax + b$. الآن،

$$\begin{aligned} r(3) &= 6 &\Rightarrow&\quad 3a + b = 6 \\ r(-3) &= -6 &\Rightarrow&\quad -3a + b = -6 \end{aligned}$$

من ذلك، نجد أن $6a = 12$. أي أن $a = 2$. وبالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن $b = 0$. إذن، $r(x) = 2x$.

(٢١) الإجابة هي (أ): لنفرض أن $f(x) = x^8$. عندئذ،

$$f(x) = x^8 = \left(x + \frac{1}{2}\right) q_1(x) + r_1$$

ولكن $r_1 = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$.

إذن، $f(x) = x^8 = \left(x + \frac{1}{2}\right) q_1(x) + \left(\frac{1}{2}\right)^8$. من ذلك نجد

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{2}\right) q_1(x) &= x^8 - \left(\frac{1}{2}\right)^8 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(x^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4\right) \end{aligned}$$

وبهذا نجد أن $q_1(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(x^4 + \frac{1}{16}\right)$.

ويكون $r_2 = q_1\left(-\frac{1}{2}\right) = (-1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}$.

(٢٢) الإجابة هي (ب): لاحظ أن المعادلة تكافئ

$$\left(x^2 + 5x + 4\right)\left(x^2 + 5x + 6\right) + 1 = 0$$

بوضع $y = x^2 + 5x$ نجد أن

$$(y + 4)(y + 6) + 1 = 0$$
$$y^2 + 10y + 25 = 0$$
$$(y + 5)^2 = 0$$

إذن، $y_1 = y_2 = -5$. بالتعويض في المعادلة $y = x^2 + 5x$ نجد أن

$$x^2 + 5x + 5 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ولذا فالجذور الأربعة للمعادلة الأصلية هي

$$x_1 = x_2 = \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_3 = x_4 = \frac{-5 - \sqrt{5}}{2}$$

ويكون $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -5 + \sqrt{5} - 5 - \sqrt{5} = -10$.

(٢٣) الإجابة هي (ب): لاحظ أن

$f(x) = \left(x^2 - 1\right)q(x) + r(x)$ حيث $r(x) = ax + b$. الآن،

$$f(1) = r(1) = a + b$$
$$f(-1) = r(-1) = -a + b$$

ولكن $f(1) = 1^{51} - 1 = 0$ و $f(-1) = (-1)^{51} - 1 = -2$. إذن،

$$a + b = 0$$
$$-a + b = -2$$

ومن ذلك نجد أن $b = -1$ و $a = 1$. ويكون $r(x) = x - 1$.

(٢٤) الإجابة هي (أ): نفرض أن الجذور هي α، β، γ وأن $\gamma = \alpha + \beta$.
من علاقات ڤــيتاي لدينا

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -(-6) = 6 \\ \alpha\beta\gamma &= -30 \end{aligned}$$

من ذلك نجد أن $2\gamma = 6$. أي أن $\gamma = 3$.وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن $\beta = -\dfrac{10}{\alpha}$. إذن،

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{10}{\alpha} + 3 &= 6 \\ \alpha - \frac{10}{\alpha} - 3 &= 0 \\ \alpha^2 - 3\alpha - 10 &= 0 \\ (\alpha - 5)(\alpha + 2) &= 0 \end{aligned}$$

إذن، $\alpha = -2$ أو $\alpha = 5$. وفي كلا الحالتين نجد أن الجذور هي $-2, 3, 5$ وأصغرها هو -2 . لاحظ أن $\alpha \neq 0$ (لأنه لو كان $\alpha = 0$ فسنجد أن $-30 = 0$ وهذا مستحيل).

(٢٥) الإجابة هي (أ): كل من $x - 1$ و $x + 1$ قاسم لكثيرة الحدود $f(x)$ ومن ثم فإن $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ قاسماً لكثيرة الحدود $f(x)$. بقسمة $f(x)$ على $x^2 - 1$ نجد

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - 7x + 12\right) \\ &= \left(x^2 - 1\right)(x - 3)(x - 4) \end{aligned}$$

ويكون الجذران الآخران هما 3 و 4 ومجموعهما يساوي 7 .

(٢٦) الإجابة هي (ج):

الحل الأول: إذا كان $\frac{p}{q}$ جذراً كسرياً لكثيرة الحدود $f(x)$ فإن p قاسماً للعدد 42 وأن q قاسماً للعدد 3. وبتجريب هذه القواسم نجد أن $\alpha = \frac{2}{3}$ و $\beta = -3$ هما الجذران الآخران. وبهذا يكون

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{9-2}{6} = \frac{7}{6}$$

الحل الثاني: بما أن 7 هو جذراً لكثيرة الحدود فإن $x - 7$ قاسماً. وبقسمة $f(x)$ على $x - 7$ نجد أن

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-7)\left(3x^2 + 7x - 6\right) \\ &= (x-7)(3x-2)(x+3) \end{aligned}$$

وبهذا يكون الجذران الآخران هما $\alpha = \frac{2}{3}$ و $\beta = -3$.

الحل الثالث: باستخدام علاقات ڤيتاي نرى أن

$$7 + \alpha + \beta = \frac{14}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta = \frac{14}{3} - 7 = -\frac{7}{3}$$

$$7\alpha\beta = -\frac{42}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha\beta = -2$$

إذن، $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-7\,/\,3}{-2} = \frac{7}{6}$.

(٢٧) الإجابة هي (أ): لدينا

$$f\left(\frac{x}{5}\right) = 2x^2 + x + 3 = 50\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{5}\right) + 3$$

إذن،

$$\begin{aligned} f(x) &= 50x^2 + 5x + 3 \\ f(5x) &= 1250x^2 + 25x + 3 \end{aligned}$$

$$253 = 2500x^2 + 25x + 3$$
$$2500x^2 + 25x - 250 = 0$$
$$100x^2 + x - 10 = 0$$

من علاقات ڤـــيتاي نجد أن حاصل ضرب الجذران هو $-\frac{1}{10} = -\frac{10}{100}$.

(٢٨) الإجابة هي (د): نفرض أن α، β، γ هي جذور المعادلة . من علاقات ڤـــيتاي لدينا

$$\alpha + \beta + \gamma = -3$$
$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -7$$

من ذلك نجد أن

$$9 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

وبهذا نجد أن

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9 - 2 \times (-7) = 23 .$$

(٢٩) الإجابة هي (ب): بتحليل كثيرة الحدود نجد أن

$$2x^5 + 4x^3 + 2x = 2x\left(x^4 + x + 1\right)$$

إذن، $x = 0$ هو أحد الجذور. الآن

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= \left(x^2 + 1\right)^2 - x^2 \\ &= \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) \end{aligned}$$

ومميز كل من $x^2 + x + 1$ $x^2 - x + 1$ سالب. ولهذا ليس لها جذور حقيقية. إذن، الجذر الحقيقي الوحيد هو $x = 0$ وتكون الإجابة هي (ب).

(٣٠) الإجابة هي (د): لدينا

$$f(6) - f(2) = 12 \Rightarrow (36a + 6b + c) - (4a + 2b + c) = 12$$

$$\Rightarrow 32a + 4b = 12$$
$$\Rightarrow 8a + b = 3$$

أيضاً

$$\begin{aligned} f(8) - f(4) = 16 &\Rightarrow (64a + 8b + c) - (16a + 4b + c) = 16 \\ &\Rightarrow 48a + 4b = 16 \\ &\Rightarrow 12a + b = 4 \end{aligned}$$

وبحل المعادلتين نجد أن $a = \frac{1}{4}$ و $b = 1$. إذن،

$$\begin{aligned} f(12) - f(2) &= (144a + 12b + c) - (4a + 2b + c) \\ &= 140a + 10b \\ &= 140 \times \frac{1}{4} + 10 \times 1 = 35 + 10 = 45 \end{aligned}$$

وتكون الإجابة هي (د).

(٤.٧) مسائل غير محلولة

(١) [AHSME 1950] جذور المعادلة

$$\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^2 - 4x\right) = 0$$ هي

(أ) 0 و 4 (ب) 1 و 2

(ج) 0 و 1 و 2 و 4 (د) 1 و 2 و 4

(٢) [AHSME 1954] المعادلة $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$:

(أ) ليس لها جذور حقيقية سالبة (ب) ليس لها جذور حقيقية موجبة

(ج) ليس لها جذور حقيقية (د) لها جذر موجب وجذران سالبان

(٣) [AHSME 1953] أحد قواسم $x^4 + 4$ هو:

(أ) $x^2 + 2$ (ب) $x + 1$ (ج) $x^2 - 2x + 2$ (د) $x^2 - 4$

(٤) [MAΘ 1990] إذا كان أحد جذور المعادلة

$$x^3 - 27x^2 + 242x - 720 = 0$$

هو الوسط الحسابي للجذرين الآخرين فما أكبر الجذور ؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 20 (د) 25

(٥) [AHSME 1953] عدد الجذور الحقيقية للمعادلة

$$(2 - x) = \frac{8}{x^2 + 4}$$ هو

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٦) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x) = ax^6 + bx^4 + cx^2$ على $x - 3$ يساوي 2 فما باقي قسمتها على $x^2 - 9$ ؟

(أ) $-\frac{2}{3}x$ (ب) $\frac{2}{3}x$ (ج) $\frac{3}{2}x$ (د) $-\frac{2}{3}x + 2$

(٧) إذا كان $x^2 - 1$ قاسماً لكثيرة الحدود $f(x) = ax^4 + bx^3 + 1$.

فما قيمة $a + b$ ؟

(أ) -2 (ب) -1 (ج) 0 (د) 1

(٨) للمعادلة $x^4 - 6x^3 + 24x - 16 = 0$ جذران موجبان. ما مجموعهما ؟

(أ) $5 - \sqrt{13}$ (ب) 5 (ج) $5 + \sqrt{13}$ (د) $10 + \sqrt{13}$

(٩) [AMC10B 2006] إذا كان a و b جذرين المعادلة $x^2 - mx + 2 = 0$ وكان $a + \frac{1}{b}$ و $b + \frac{1}{a}$ هما جذران المعادلة $x^2 - px + q = 0$ فما قيمة q ؟

(أ) $-\frac{9}{2}$ (ب) $-\frac{7}{2}$ (ج) $\frac{7}{2}$ (د) $\frac{9}{2}$

(١٠) [AMC10A 2002] مجموع جذور المعادلة

$(2x + 3)(x - 4) + (2x + 3)(x - 6) = 0$ يساوي

(أ) $\frac{7}{2}$ (ب) 4 (ج) 7 (د) 13

(١١) مجموع الجذور الحقيقية للمعادلة

$(x + 1)^2(x + 3)(x - 1) = -4$ هو

(أ) -4 (ب) 0 (ج) $2 + \sqrt{2}$ (د) $4 + 2\sqrt{2}$

(١٢) مجموع مقلوب جذور المعادلة $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ هو

(أ) $-\frac{q}{r}$ (ب) $\frac{q}{r}$ (ج) $\frac{p}{r}$ (د) qr

(**١٣**) إذا كانت $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx + 8$ وكان $f(2) = 5$ فما قيمة $f(-2)$ ؟

(أ) -11 (ب) -7 (ج) 7 (د) 11

(**١٤**) باقي قسمة $f(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3$ على $x - 2$ يساوي 1. ما باقي قسمة $f(x)$ على $x^2 - 4$ ؟

(أ) $\frac{1}{2}x$ (ب) x (ج) $2x$ (د) $\frac{1}{2}x + 1$

(**١٥**) [AHSME 1951] يمكن تحليل $21x^2 + ax + 21$ إلى حاصل ضرب كثيرتي حدود من الدرجة الأولى بمعاملات صحيحة إذا كان a

(أ) عدداً فردياً (ب) عدداً زوجياً (ج) 0 (د) عدداً فردياً أكبر من 21

(**١٦**) [AHSME 1954] كثيرة الحدود $x^4 + 64$ تساوي

(أ) $\left(x^2 + 8\right)^2$

(ب) $\left(x^2 - 4x + 8\right)\left(x^2 - 4x - 8\right)$

(ج) $\left(x^2 - 4x + 8\right)\left(x^2 + 4x + 8\right)$

(د) $\left(x^2 + 8\right)\left(x^2 - 8\right)$

(**١٧**) إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $f(x)$ على $x + 1$ هو 3 وباقي قسمتها على $x - 3$ هو 7 فما باقي قسمتها على $x^2 - 2x + 3$ ؟

(أ) $5x - 3$ (ب) $x + 4$ (ج) $5x - 1$ (د) $5x$

(١٨) إذا كان 1 جذراً مضاعفاً لكثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

فما هو الجذر الثالث ؟

(أ) -1 (ب) $-\frac{1}{2}$ (ج) 0 (د) $\frac{1}{2}$

(١٩) إذا كان -1 و 2 جذرين للمعادلة $x^3 + bx + c = 0$.

فما قيمة $b - c$ ؟

(أ) -4 (ب) -3 (ج) -2 (د) -1

(٢٠) [AMC10 2000] إذا كان $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$ فما مجموع قيم x التي تحقق $f(3x) = 7$ ؟

(أ) $-\frac{1}{3}$ (ب) $-\frac{1}{9}$ (ج) 0 (د) $\frac{5}{9}$

(٢١) [AHSME 1999] إذا كان باقي قسمة كثيرة الحدود $P(x)$ على $x - 19$ هو 99 وباقي قسمتها على $x - 99$ هو 19 فما باقي قسمتها على $(x - 99)(x - 19)$ ؟

(أ) $-x + 118$ (ب) $-x + 80$ (ج) $x + 80$ (د) $x + 118$

(٢٢) ما عدد الجذور الحقيقية لكثيرة الحدود $f(x) = x^4 - 3x^2 + 9$ ؟

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٢٣) ما باقي قسمة $x^{50} - 2x^{25} + 1$ على $x^2 - 1$ ؟

(أ) $-2x$ (ب) $-2x - 2$ (ج) $-2x + 2$ (د) $2x$

(٢٤) ما قيمة a التي تجعل $x - 1$ قاسماً لكثيرة الحدود $f(x) = x^5 - ax^2 - ax + 1$ ؟

(أ) -1 (ب) 0 (ج) 1 (د) 2

(٢٥) للمعادلة $3x^3 + 2x^2 - 6x + 1 = 0$ ثلاث جذور حقيقية، إثنان منهما غير كسريين. ما مجموعهما ؟

(أ) $-\frac{5}{6}$ (ب) $-\frac{5}{3}$ (ج) $\frac{5}{6}$ (د) $\frac{5}{3}$

(٢٦) [AHSME 1953] جذور المعادلة

$$x\left(x^2 + 8x + 16\right)(4 - x) = 0$$ هي

(أ) 0 (ب) 0، 4 (ج) 0، -4، 4 (د) 0، -4، -4، 4

(٢٧) [AHSME 1953] قيمة m التي تجعل $f(x) = 4x^2 - 6x + m$ تقبل القسمة على $x - 3$ هي قاسم للعدد

(أ) 12 (ب) 20 (ج) 36 (د) 48

(٢٨) [AHSME 1955] أحد قواسم $x^4 + 2x^2 + 9$ هو

(أ) $x^2 - 2x + 3$ (ب) $x^2 + 3$ (ج) $x + 1$ (د) $x^2 - 2x - 3$

(٢٩) [AHSME 1969] باقي قسمة x^{100} على $x^2 - 3x + 2$ هو

(أ) $2^{100} - 1$ (ب) $2^{100}(x - 1) - (x - 2)$

(ج) $x\left(2^{100} - 1\right) + 2\left(2^{99} - 1\right)$ (د) $2^{100}(x - 3)$

(٣٠) إذا كان $q_1(x)$ و r_1 هما خارج قسمة وباقي x^4 على $x + 1$ وكان $q_2(x)$ و r_2 هما خارج قسمة وباقي $q_1(x)$ على $x + 1$ فما قيمة r_2؟

(أ) -7 (ب) -6 (ج) -5 (د) -4

(٤.٨) إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) ب	(٣) ج	(٤) أ	(٥) ب
(٦) أ	(٧) ب	(٨) ج	(٩) د	(١٠) أ
(١١) أ	(١٢) أ	(١٣) د	(١٤) أ	(١٥) ب
(١٦) ج	(١٧) ب	(١٨) د	(١٩) د	(٢٠) ب
(٢١) أ	(٢٢) أ	(٢٣) ج	(٢٤) ج	(٢٥) ب
(٢٦) د	(٢٧) ج	(٢٨) أ	(٢٩) ب	(٣٠) د