الفصل الرابع

الاحتمالات
Probabilities

نقدم في هذا الفصل المبادئ الأساسية للاحتمالات دون الإسهاب في دراسة هذا الموضوع مما يتلاءم مع الغرض الذي وضع لأجله هذا الكتاب.

يمكن تعريف الاحتمال على أنها تقدير وقوعات مخرج بعد تكرار المحاولات في تجربة.

التجربة [experiment]

يمكن تعريف التجربة على أنها عملية مخرجاتها محددة تماماً. أما التجربة العشوائية فهي التجربة التي لا يمكن توقع مخرجاتها, مثل تجربة إلقاء قطعة نقود عادلة أو إلقاء حجر نرد عادل أو سحب ورقة من مجموعة من أوراق اللعب المخلوطة جيداً.

فضاء العينة [Sample Space]

فضاء العينة هو مجموعة جميع مخرجات تجربة عشوائية.يوجد العديد من الطرق لتمثيل فضاء العينة ومن الطرق الشائعة:

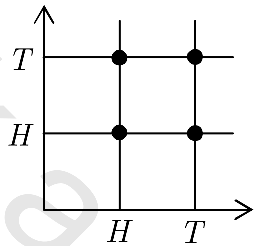
- سرد جميع مخرجات التجربة وخاصة إذا كان عدد هذه المخرجات صغيراً

نسبياً. فمثلاً, عند رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $S = \{H,T\}$ حيث H تعني ظهور صورة و T تعني ظهور كتابة.أما فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرتين فهو $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.

وفضاء العينة لإلقاء حجر نرد ذو ستة وجوه هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

- استخدام نقاط الشبكة في المستوى.

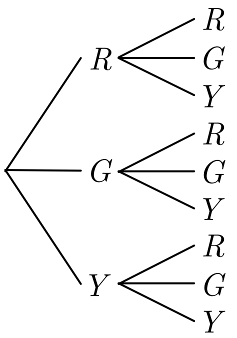
فمثلاً, يمكن تمثيل فضاء العينة لرمي قطعة نقود مرتين على النحو التالي:



حيث كل من نقاط التقاطع تمثل مخرجاً.

- استخدام الشجرة البيانية.

إحدى فوائد هذا التمثيل هي إمكانية استخدامه عندما يكون لمخرج التجربة خياران أو أكثر. فمثلاً, إذا سحبنا كرتين من وعاء يحتوي على عدد من الكرات الحمراء وعدد من الكرات الصفراء وعدد من الكرات الخضراء فمن الممكن الحصول على فضاء العينةعلى النحو التالي:



ويمكن قراءة عناصر فضاء العينة من الشجرة

$$S = \{RR, RG, RY, GR, GG, GY, YR, YG, YY\}$$

الحدث [Event]

تسمى أي مجموعة جزئية من فضاء العينةحدثاً. ويكون الحدث بسيطاً إذا احتوى على عنصر واحد من فضاء العينة. وإذا احتوى على أكثر من عنصر فإنه يسمى حدثاً مركباً. الحدث المستحيل هو المجموعة الخالية(أي أنه حدث مستحيل الوقوع). أما الحدث المؤكد وقوعه دائماً فهو فضاء العينة S.

نقول إن وقوع الحوادث متساوٍ على الأرجح إذا لم يكن هناك سبب لترجيح وقوع حدث عن وقوع حدث آخر. على سبيل المثال, عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن وقوع الحوادث 1 , 2 , 3 ,4 , 5 , 6متساوٍ.

احتمال وقوع الحدث [Probability of an Event]

ليكن Sفضاء عينة وليكن $E \subseteq S$ حدثاً. يعرف احتمال وقوع الحدث Eويرمز

لذلك بالرمز $P(E)$ على أنه

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

حيث $|E|$ يرمز لعدد عناصر E و $|S|$ يرمز لعدد عناصر S.

مثال (١) عند إلقاء قطعة نقود مرتين فإن فضاء العينة هو

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

إذا كان E هو حدث الحصول على صورة واحدة فإن $E = \{HT, TH\}$ وإن $P(E) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. ◇

مثال (٢) عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. إذا كان E هو حدث ظهور عدد أكبر من 4 فإن $E = \{5, 6\}$ ويكون $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◇

مثال (٣) إذا أردنا تجليس ثلاثة أشخاص A , B , C على ثلاثة كراسي في صف واحد فإن فضاء العينة هو عدد الطرق الممكنة لذلك. أي عدد تبديلات ثلاثة عناصر وهذا العدد كما نعلم يساوي $3! = 6$. من السهل هنا تعيين فضاء العينة وهو $S = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$.

إذا كان E هو حدث جلوس A على يسار الصف فإن $E = \{ABC, ACB\}$ ويكون $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. وأما حدث جلوس A و C بجانب بعضهما البعض فهو $D = \{ACB, BAC, BCA, CAB\}$ ويكون $P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. ◇

الحوادث المنفصلة [Mutually Exclusive Events]

نقول إن الحدثين A و B منفصلان إذا لم يقعا معاً. أي إذا وقع A فإن B لم يقع وبالعكس, إذا وقع B فإن A لم يقع. وبهذا فإن $A \cap B = \varnothing$. وبصورة عامة نقول إن الحوادث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ منفصلة مثنى مثنى إذا وفقط إذا كان $A_i \cap A_j = \varnothing$ لكل $i \neq j$.

مثال (**٤**) عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن فضاء العينة هو $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. إذا كان A هو حدث الحصول على عدد زوجي وأن B هو حدث الحصول على عدد فردي فإن $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,3,5\}$. وبما أن $A \cap B = \varnothing$ (أي أن العدد لا يمكن أن يكون فردياً وزوجياً معاً) فإن A و B حدثان منفصلان. وإذا كان E هو حدث الحصول على عدد أصغر من 4 فإن $E = \{1,2,3\}$. وبهذا فإن الحدثين E و A غير منفصلين لأن $A \cap E = \{2\} \neq \varnothing$. ◇

الحوادث المستقلة [Independent Events]

نقول إن الحدثين A و B مستقلان إذا كان وقوع أحدهما أو عدم وقوعه لا يؤثرعلى احتمال وقوع أو عدم وقوع الآخر. وبصورة عامة نقول إن الحوادث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مستقلة إذا كان وقوع أحدها أو عدم وقوعه لا يؤثر على وقوع أو عدم وقوع الحوادث الأخرى.

مثال (**٥**) يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 7 كرات سوداء. سحبنا كرتين واحدة بعد الأخرى مع الإرجاع. إذا كان A حدث أن الكرة المسحوبة أولاً هي

كرة بيضاء وأن B هو حدث سحب كرة سوداء في السحبة الثانية. عندئذ, احتمال حدوث B لا يتأثر بحدوث A سابقاً وذلك لأننا أرجعنا A إلى الكيس قبل سحب الكرة B . أي أن $P(A) = \frac{5}{12}$ وأن $P(B) = \frac{7}{12}$. ◇

المسلمات الأساسية للاحتمال[Basic Axioms of Probability]

ليكن S فضاء العينة لتجربة عشوائية. عندئذ,

(١) $P(A) \geq 0$ لكل حدث A .

(٢) $P(S) = 1$.

(٣) إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ حوادث منفصلة مثنى مثنى فإن

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

خصائص الاحتمال الأساسية [Basic Properties of Probability]

(١) $P(\varnothing) = 0$.

البرهان

بما أن $A \cap \varnothing = \varnothing$ لأي حدث A فإن

$$P(A) = P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$$

وبهذا فإن $P(\varnothing) = 0$.

(٢) $0 \leq P(A) \leq 1$ لكل حدث A .

البرهان

بما أن $P(A) \geq 0$ فيبقى إثبات أن $P(A) \leq 1$. الآن، $A \cap A' = \varnothing$. ولذا فإن

$A \cup A' = S$. إذن،

$$1 = P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

وبما أن $P(A') \geq 0$ فإن $P(A) \leq 1$.

(٣) إذا كان A' هو الحدث المتمم للحدث A (أي أن $A' = S - A$) فإن

$$P(A') = 1 - P(A)$$

البرهان

بما أن $A' = S - A$ فإن $S = A \cup A'$ وإن $A \cap A' = \varnothing$. إذن,

$$P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$$

من ذلك يكون $P(A') = P(S) - P(A) = 1 - P(A)$.

(٤) إذا كان $A \subseteq B$ فإن $P(A) \leq P(B)$.

البرهان

بما أن $B = A \cup (B - A)$ وأن $A \cap (B - A) = \varnothing$ فإن $P(B) = P(A) + P(B - A)$. وبما أن $P(B - A) \geq 0$ فإننا نخلص إلى أن $P(A) \leq P(B)$.

(٥) تبين لنا هذه الخاصية كيفية إيجاد احتمال وقوع الحدث $A \cup B$ بصورة عامة. إذا كان A و B حدثين فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) .$$

البرهان

بملاحظة أن

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (B \cap A') \cup (A \cap B)$$
$$A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$
$$B = (B \cap A') \cup (A \cap B)$$

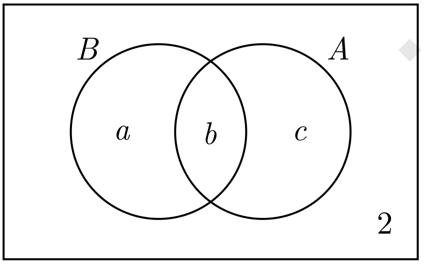
وأن الحوادث $A \cap B$, $A \cap B'$, $B \cap A'$ منفصلة نجد أن

$$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B \cap A') + P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(B \cap A') + P(A \cap B)$$
$$= [P(A \cap B') + P(A \cap B)] + [P(B \cap A') + P(A \cap B)] - P(A \cap B)$$
$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال (٦) عند استطلاع رأي 40 طالباً وجد أن 34 منهم يفضلون الموز و 22 يفضلون الأناناس وأن طالبين لا يفضلون الموز ولا الأناناس. اخترنا طالباً عشوائياً. ما احتمال أن يكون هذا الطالب يفضل إحدى الفاكهتين على الأقل ؟

الحل

إن أفضل طريقة لحل هذه المسألة هو استخدام أشكال فــن. لنفرض أن B هو حدث تفضيل الطالب للموز وأن A هو حدث تفضيل الطالب للأناناس. عندئذ, نجد من الرسم المرفق أن



$a + b = 34$, $b + c = 22$, $a + b + c = 38$. من ذلك, نرى أن

$$c = 38 - (a + b) = 38 - 34 = 4$$
$$b = 22 - c = 22 - 4 = 18$$
$$a = 34 - b = 34 - 18 = 16$$

المطلوب هو $P(A \cup B)$. ولحساب ذلك نستخدم

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{34}{40} + \frac{22}{40} - \frac{18}{40} = \frac{38}{40} = \frac{19}{20}$$ ◇

الاحتمال المشروط [Conditional Probability]

لنفرض أننا ألقينا قطعة نقود عادلة ثلاث مرات. عندئذ, فضاء العينة هو

$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, TTH, THT, TTT\}$$

ولنفرض أن A هو حدث وقوع كتابة في الرمية الأولى. أي أن

$A = \{THH, TTH, THT, TTT\}$.

ولنفرض أن B هو حدث وقوع عدد فردي من الكتابات في الرميات الثلاث. أي

$B = \{HHT, HTH, THH, TTT\}$.

ولنفرض أن C هوحدث وقوع B إذا علمنا أن A قد وقع. أي أن

$C = \{THH, TTT\}$. وبهذا فإن $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

هذا النوع من الاحتمال يسمى الاحتمال المشروط لوقوع B إذا كان A قد وقع ويرمز له بالرمز $P(B \mid A)$ ويعرف على النحو التالي:

$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ حيث $P(A) > 0$.

مثال (٧) ألقينا حجري نرد. إذا كان مجموع العددين الظاهرين يساوي 7 فما احتمال أن يظهر العدد 3 على أحد الحجرين ؟

الحل

لنفرض أن B هو حدث أن مجموع العددين يساوي 7. ولنفرض أن A هو حدث

ظهور العدد 3على أحد الحجرين على الأقل. عندئذ, المطلوب هو إيجاد $P(A \mid B)$. الآن, $B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

ومن ثم فإن $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. أيضاً

$A = \{(1,3),(2,3),(3,3),(4,3),(5,3),(6,3),(3,1),(3,2),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

$A \cap B = \{(3,4),(4,3)\}$

وبهذا نجد أن $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.ويكون

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{18} \times \frac{6}{1} = \frac{1}{3} \qquad \diamond$$

لنفرض الآن أن الحدثين A , B مستقلان.عندئذ, وقوع أو عدم وقوع B لا يؤثر على احتمال وقوع A . أي أن $P(A \mid B) = P(A)$. وبهذا نحصل على:

يكون الحدثان A و B مستقلين إذا وفقط إذا كان

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B) = P(A)$. أي أن $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

وبصورة عامة, إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ حوادث مستقلة فإن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

ملحوظة

أحياناً نكتب AB عوضاً عن $A \cap B$ ليدل على وقوع الحدثين A و B معاً.

من الممكن تعميم قانون الاحتمال المشروطإلى أي عدد من الحوادث.

مبرهنة الضرب للاحتمال المشروط

[Multiplication Theorem For Conditional Probability]

إذا كانت $A_1, A_2, \cdots, A_n$ حوادث فإن

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) =$$
$$P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

البرهان

الطرف الأيمن من المساواة هو

$$P(A_1) \times \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} \times \frac{P(A_3 \cap A_1 \cap A_2)}{P(A_1 \cap A_2)} \times \cdots \times \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n)}{P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})}$$
$$= P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

مثال (٨) ألقينا قطعة نقود وحجر نرد معاً. ما احتمال الحصول على كتابة وعدد أكبر من 4؟

الحل

هذه مسألة على حدثين مستقلين. لنفرض أن A هو حدث الحصول على كتابة وأن B هو حدث الحصول على عدد أكبر من 4 . عندئذ,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{6}. \qquad \diamond$$

مثال (٩) اخترنا ثلاثة أعداد عشوائياً من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,30\}$ واحداً بعد الآخر دون إرجاع. ما احتمال أن تكون الثلاثة أعداد هي أعداد أولية ؟

الحل

الأعداد الأولية هي $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29$ وعددها 10 . لنفرض أن A , B , C هي حوادث أن يكون العدد الأول, العدد الثاني, العدد الثالث, أولياً على التوالي.

عندئذ, المطلوب هو إيجاد $P(A \cap B \cap C)$. ولكن

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$$
$$= \frac{10}{30} \times \frac{9}{29} \times \frac{8}{28} = \frac{6}{603} \quad \diamond.$$

التجزئة ومبرهنة بيز [Partitions And Bayes Theorem]

لتكن الحوادث $A_1, A_2, \cdots, A_n$ تجزيئاًلفضاء العينة S. أي أن $A_i \cap A_j = \varnothing$ لكل $i \neq j$ وأن $S = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$. وليكن B أي حدث. عندئذ,

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap B$$
$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)$$

وبما أن الحوادث $A_i \cap B$ منفصلة فإننا نجد:

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

ولكن $P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B \mid A_i)$ لكل i. إذن,

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)$$

ولكننا نعلم من الاحتمال المشروط أن $P(A_i \mid B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$. إذن,

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n)}$$

وهذه النتيجة تعرف بمبرهنة بيز.

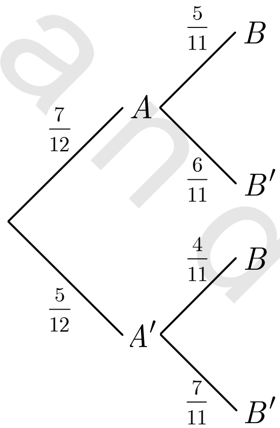
مثال (١٠) وعاء يحتوي على 5 كرات زرقاء و 7 كرات خضراء. سحبنا عشوائياً كرة من الوعاء دون إرجاع وسجلنا لونها. ثم سحبنا بعد ذلك كرة أخرى.

(أ) احسب احتمال أن تكون الكرة الثانية زرقاء

(ب) احسب احتمال أن تكون الكرة الأولى خضراء إذا علمت أن الكرة الثانية زرقاء.

الحل

لنفرض أن A حدث أن الكرة الأولى خضراء وأن B حدث أن الكرة الثانية زرقاء.بالاستعانة بالشجرة البيانية نرى أن



(أ)
$$P(B) = P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A')$$
$$= \frac{7}{12}\times\frac{5}{11} + \frac{5}{12}\times\frac{4}{11} = \frac{55}{132}$$

(ب)
$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}}{\frac{55}{132}} = \frac{35}{55} = \frac{7}{11}.$$ ◇

مثال (١١) في روضة للأطفال وجدنا أن خمس الأولاد وثلث البنات لا يشربون الحليب في الصباح. كما أن عدد البنات في الروضة يساوي $\frac{2}{5}$عدد أطفال الروضة. اخترنا طفلاً عشوائياً ووجدنا أنه لا يشرب الحليب في الصباح. ما احتمال أن يكون هذا الطفل بنتاً ؟

الحل

لنفرض أن A حدث أن الطفل لا يشرب الحليب في الصباح وأن G حدث أن يكون الطفل بنتاً وأن B حدث أن يكون الطفل ولداً. إذن, المطلوب هو إيجاد $P(G \mid A)$. باستخدام مبرهنة بيز لدينا

$$P(G \mid A) = \frac{P(G)P(A \mid G)}{P(G)P(A \mid G) + P(B)P(A \mid B)}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{16}{75}} = \frac{5}{8} \qquad \diamond$$

مثال (١٢) ذهب أحمد وبدر إلى البر لغرض الصيد. وأثناء محاولتهم ذلك لمحا ضباً. إذا كان احتمال أن يرمي أحمد ويصيب الضب 25%واحتمال أن يرمي بدر ويصيب الضب 35% . فما احتمال أن يصيب الضب أحدهما على الأقل ؟

الحل

لنفرض أن A حدث أن يصيب أحمد الضب وأن B حدث أن يصيب بدر الضب. المطلوب هو إيجاد $P(A \cup B)$.وبما أن A و B مستقلان فإن

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= \frac{25}{100} + \frac{35}{100} - \frac{25}{100} \times \frac{35}{100} = 0.5125 \end{aligned}$$ ◇

مثال (١٣) يحتوي الصندوق A على 20 كرة، خمسة منها حمراء ويحتوي الصندوق B على 15 كرة 6 منها حمراء. سحبنا كرة من كل من الصندوقين عشوائياً. إذا كانت إحداهما حمراء والأخرى ليست حمراء فما احتمال أن تكون الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق A ؟

الحل

لنفرض أن R حدث أن الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق A ولنفرض أن S هو حدث أن تكون إحداهما حمراء والأخرى ليست حمراء.المطلوب هو إيجاد $P(R \mid S) = \dfrac{P(R \cap S)}{P(S)}$.

لحساب $P(S)$ لاحظ أنه إما أن تكون الكرة الحمراء من A والكرة غير الحمراء من B أو أن تكون الكرة الحمراء من B والكرة غير الحمراء من A. ولهذا فإن

$$P(S) = \frac{5}{20} \times \frac{9}{15} + \frac{15}{20} \times \frac{6}{15} = \frac{125}{300}.$$

أما $R \cap S$ فهو حدث الحصول على كرة حمراء من الصندوق A وكرة غير حمراء من الصندوق B. إذن, $P(R \cap S) = \dfrac{5}{20} \times \dfrac{9}{15} = \dfrac{45}{300}$.

وبهذا يكون $P(R \mid S) = \dfrac{\frac{45}{300}}{\frac{135}{300}} = \dfrac{45}{135} = \dfrac{1}{3}$. ◇

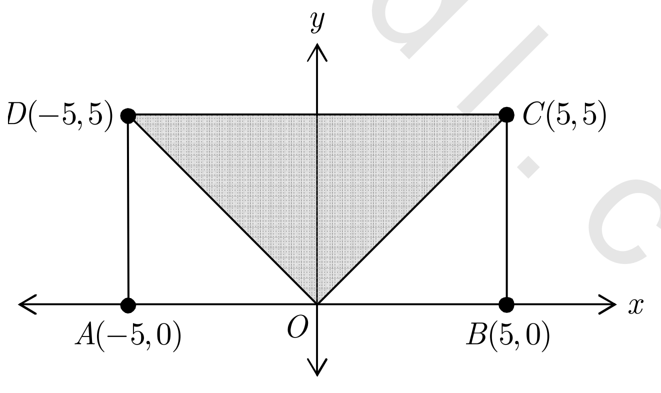
احتمالات هندسية [Geometric Probabilities]

في العديد من مسائل الاحتمالات نحتاج لمفهوم الاحتمال الهندسي الذي يصف فرصة وقوع نقطة على قطعة مستقيمة أو داخل منطقة. فلذا يمكن حساب احتمال الحدث في هذه الحالات باستخدام الأطوال أو المساحات أو الحجوم وسنوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (١٤) لنفرض أن $ABCD$ مستطيل في المستوى. إحداثيات رؤوسه هي $A=(-5,0)$ ، $B=(5,0)$ ، $C=(5,5)$ ، $D=(-5,5)$. اخترنا نقطة داخل المستطيل عشوائياً. ما احتمال أن تحقق النقطة المتباينة $|x| \geq y$؟

الحل

الشكل المرفق يبين المستطيل حيث ظللنا النقطة داخل المستطيل التي تحقق $|x| \geq y$. بفرض أن S هو فضاء العينة (جميع النقاط داخل المستطيل) وأن E هو حدث أن النقطة داخل المستطيل تحقق المتباينة $|x| \geq y$. يكون

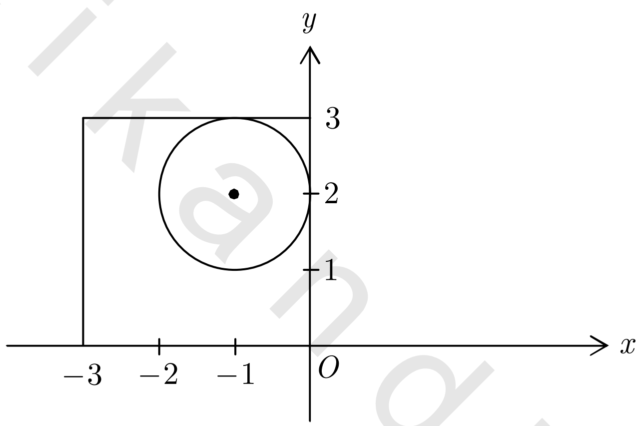


$$P(E)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{OCD \text{ مساحة المثلث}}{ABCD \text{ مساحة المستطيل}}=\frac{\frac{1}{2}\times 5\times 10}{5\times 10}=\frac{1}{2}. \quad \diamond$$

مثال (١٥) اخترنا نقطة (x,y)عشوائياً في المستوى حيث $-3 \le x \le 0$ و $0 \le y \le 3$. ما احتمال أن تقع النقطة داخل الدائرة $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ ؟

الحل

لتكن S هي مجموعة نقاط فضاء العينة وهي نقاط المربع المبين في الشكل المرفق، وليكن A هو حدث وقوع النقطة داخل الدائرة.إذن,



$$P(A) = \frac{\text{مساحة الدائرة}}{\text{مساحة المربع}} = \frac{\pi \times 1^2}{9} = \frac{\pi}{9}.$$ ◇

الاحتمال وطرق العد [Probability And Counting]

لحل العديد من مسائل الاحتمالات نحتاج إلى استخدام طرق العد التي درسناها في الفصلين الأول والثاني. نقدم بعض الأمثلة لتوضيح ذلك.

مثال (١٦) نريد اختيار فريق عشوائياً مكون من ثلاثة أطباء وأربعة ممرضين من بين 10أطباء و 12ممرضاً. ما احتمال أن يكون الطبيب أحمد والممرض بدر من

ضمن الفريق المختار ؟

الحل

عدد طرق اختيار الفريق (عدد عناصر فضاء العينة S) يساوي

$$\left|S\right| = C(10,3)\times C(12,4) = 59400 .$$

وليكن A هو حدث اختيار الطبيب أحمد والممرض بدر ضمن الفريق. عندئذ, إذا كان الطبيب أحمد ضمن الفريق فيمكن اختيار الطبيبين الآخرين بعدد من الطرق يساوي $C(9,2) = 36$ وإذا كان بدر ضمن الفريق فيمكن اختيار الثلاثة ممرضين الآخرين بعدد من الطرق يساوي $C(11,3) = 165$. إذن,

$\left|A\right| = 36\times 165 = 5940$. وبهذا فإن $P(A) = \dfrac{\left|A\right|}{\left|S\right|} = \dfrac{5940}{59400} = \dfrac{1}{10}$. ◇

مثال (١٧) عدد الطلاب المسجلين في مقرر التفاضل والتكامل لفصل دراسي يساوي 220 طالباً.اجتاز 80 طالباً المقرر بنجاح. اخترنا ثلاثة طلاب عشوائياً. ما احتمال أن يكون الثلاثة طلاب قد اجتازوا المقرر بنجاح ؟

الحل

ليكن S هو فضاء العينة و A هو حدث اجتياز الثلاثة طلاب لمقرر التفاضل والتكامل. إذن,

$$P(A) = \frac{\left|A\right|}{\left|S\right|} = \frac{C(80,3)}{C(220,3)} .$$ ◇

مثال (١٨) تتكون لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مأخوذة من الهجائية الإنجليزية (عدد حروفها 26) متبوعة بأربعة أرقام مأخوذة من المجموعة $\{0,1,2,\cdots,9\}$. اخترنا لوحة سيارة عشوائياً. ما احتمال أن

لا تحتوي هذه اللوحة, الحرف Oولا الرقم 0؟

الحل

عدد اللوحات الممكنة (عدد عناصر فضاء العينة) يساوي $26^3 \times 10^4$.

عدد الأعداد المكونة من أربعة أرقام ولا تحتوي الرقم 0هو $10^4 - 9^4$.

عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف ولا تحتوي على الحرف Oهو $26^3 - 25^3$

.

إذن, عدد اللوحات التي يمكن تكوينها ولا تحتوي على الحرف Oولا الرقم 0هو

$$(10^4 - 9^4) \times (26^3 - 25^3).$$

وبهذا فاحتمال عدم احتواء اللوحة على الحرف Oوالرقم 0هو

$$\frac{(10^4 - 9^4)(26^3 - 25^3)}{26^3 \times 10^4}. \qquad \diamond$$

مثال (١٩) فصل حضانة أطفال يحتوي 5تلميذات و 10تلاميذ. اخترنا مجموعة من الأطفال عددهم 7. ما احتمال أن تحتوي المجموعة على جميع التلميذات ؟

الحل

عدد طرق اختيار 7أطفال من بين 15طفلاً هو $C(15,7) = \frac{15!}{7! \times 8!} = 6435$.

عدد طرق اختيار 5تلميذات من 5تلميذات هو $C(5,5) = 1$وعدد طرق اختيار تلميذين من 10تلاميذ هو $C(10,2) = 45$. إذن, احتمال اختيار الفريق هو

$$\frac{1 \times 45}{6435} = \frac{1}{143} \approx 0.07. \qquad \diamond$$

مثال (٢٠) ما احتمال أن تحتوي المجموعة المختارة في المثال (١٩) على ثلاث تلميذات على الأقل ؟

الحل

عدد طرق اختيار ثلاث تلميذات على الأقل هو

$$C(5,3)C(10,4)+C(5,4)C(10,3)+C(5,5)C(10,2)$$
$$=10\times 210+4\times 120+1\times 45=2745$$

إذن, الاحتمال المطلوب هو $0.27 \approx \frac{349}{1287}=\frac{2745}{6435}$. ◇

مثال (٢١) وضعنا الثمانية حروف A, D, G, I, K, N, S, U عشوائياً في صف واحد. ما احتمال الحصول على كلمة $KINGSAUD$ ؟

الحل

عدد تبديلات 8 حروف هو $8!$. واحدة فقط من هذه التبديلات هي $KINGSAUD$. إذن, الاحتمال هو $0.000025 \approx \frac{1}{40320}=\frac{1}{8!}$. ◇

احتمالات ذات الحدين [Binomial Probabilities]

لنفرض أن فريق نادي الهلال السعودي سيلعب 4 مباريات ودية ولنفرض أن احتمال فوز الفريق في كل من هذه المباريات هو $\frac{3}{5}$. ما احتمال أن يفوز الفريق ببعض هذه المباريات ويخسر في البعض الآخر ؟

للإجابة عن هذا السؤال ندرس جميع الحالات الممكنة. دعنا نستخدم الرمز $P(X=k)$ ليعني فوز فريق نادي الهلال بعدد k من المباريات الأربع حيث $k=0,1,2,3,4$.

الحالة الأولى: $P(X=0)$. في هذه الحالة يخسر الفريق جميع المباريات واحتمال ذلك

$$P(X=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\left(\frac{3}{5}\right)^0\times\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$$

الحالة الثانية: $P(X=1)$. لاحظ هنا إمكانية الفوز في المباراة الأولى أو الثانية أو الثالثة أو الرابعة.ولذا فالاحتمال هنا هو

$$P(X=1)=P(WLLL)+P(LWLL)+P(LLWL)+P(LLLW)$$

حيث W يرمز للفوز في المباراة و L يرمز لخسارة المباراة. ولذا فإن

$$\begin{aligned}&P(X=1)\\&=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\\&=4\times\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}\end{aligned}$$

لاحظ أنهيمكن حساب هذا الاحتمال على النحو التالي: عدد طرق اختيار مباراة رابحة من بين أربع مباريات هو $C(4,1)=4$. واحتمال الفوز في مباراة واحدة هو $\left(\frac{3}{5}\right)^1\times\left(\frac{2}{5}\right)^3$.إذن, $P(X=1)=C(4,1)\times\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{96}{625}$.

الحالة الثالثة: $P(X=2)$. احتمال الفوز بمبارتين من أربع مباريات هو $\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2$.وعدد طرق اختيار مبارتين من أربع مباريات هو $C(4,2)=6$.

إذن,

$$P(X=2)=C(4,2)\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{216}{625}.$$

الحالة الرابعة: $P(X = 3)$. احتمال الفوز في ثلاث مباريات من أربع مباريات هو $\left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3$. عدد طرق اختيار ثلاث مباريات من أربع مباريات هو $C(4,3) = 4$. إذن,

$$P(X = 3) = C(4,3) \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{2}{5}\right) = \frac{216}{625} .$$

الحالة الخامسة: $P(X = 4)$. احتمال الفوز في الأربع مباريات هو $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4$. عدد طرق اختيار أربع مباريات من أربع مباريات هو $C(4,4) = 1$. إذن,

$$P(X = 4) = C(4,4) \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 = \frac{81}{625} .$$

لاحظ أن

$$\begin{aligned} &P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) \\ &= \frac{16 + 96 + 216 + 216 + 81}{625} = 1 \end{aligned}$$

إن ما قدمناه في هذا المثال هو حالة خاصة لإيجاد احتمال k من النجاحات من n من المحاولات المستقلة حيث تسمى هذه المحاولات بتجربة ذات الحدين أو تجربة بيرنولي. في هذه التجربة المحاولات n جميعها مستقلة ونتيجة كل من هذه المحاولات هي النجاح أو الفشل (الفوز أو الخسارة في مثالنا المقدم أعلاه). فمثلاً, إذا ألقينا قطعة نقود فيمكن اعتبار ظهور صورة هو النجاح وظهور كتابة هو الفشل, وإذا ألقينا حجري نرد وسجلنا المجموع فيمكن اعتبار أن يكون المجموع يساوي 10 هو النجاح و الفشل هو أن يكون المجموع لا يساوي 10. وبصورة عامة, إذا كان

احتمال النجاح في تجربة بيرنولي هو p فيكون احتمال الفشل هو $1-p$ ومن ثم احتمال الحصول على عدد k من النجاحات من عدد n من المحاولات المستقلة هو
$$P(X=k)=C(n,k)\times p^k(1-p)^{n-k}.$$
ويسمى هذا الاحتمال عادة باحتمال ذات الحدين.

مثال (٢٢) من خبرة سابقة, وجد بائع سيارات أنه يبيع سيارة لمتسوق واحد من بين كل خمسة متسوقين. زار المعرض 15 متسوقاً يوم السبت. ما احتمال أن يشتري 4 منهم سيارات ؟

الحل

هذا مثال على تجربة بيرنولي حيث احتمال النجاح هو $\frac{1}{5}$ واحتمال الفشل هو $\frac{4}{5}$ و $n=15$, الاحتمال المطلوب هو $P(X=4)$.

$$P(X=4)=C(15,4)\times\left(\frac{1}{5}\right)^4\times\left(\frac{4}{5}\right)^{11}\approx 0.002.$$ ◇

مثال (٢٣) ألقينا قطعة نقود 8 مرات (أو ألقينا 8 قطع نقود مرة واحدة). ما احتمال الحصول على ثلاث صور ؟

الحل

لنفرض أن النجاح هو الحصول على صورة. وبهذا نجد أن $p=1-p=\frac{1}{2}$. المطلوب هو إيجاد $P(X=3)$. إذن،

$$P(X=3)=C(8,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5=56\times\frac{1}{256}=\frac{7}{32}.$$ ◇

مثال (٢٤) حجر نرد يحتوي على وجهين لونهما أحمر وأربع وجوه لونها أخضر. رمينا حجر النرد 7 مرات. ما احتمال الحصول على وجه أحمر في ثلاث رميات ؟

الحل

لاحظ أن احتمال النجاح هنا هو $p = P(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ واحتمال الفشل هو $P(G) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. المطلوب هنا هو إيجاد $P(X = 3)$. إذن,

$$P(X = 3) = C(7,3)\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4 = 35 \times \frac{16}{2187} = \frac{560}{2187}.$$ ◇

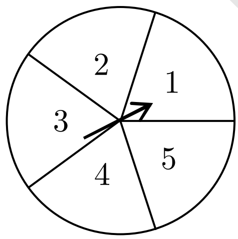
مسائل محلولة

(١) وعاء به 5 خرزات خضراء و 7 خرزات صفراء و 9 خرزات زرقاء. سحبنا عشوائياً خرزة واحدة من الوعاء. ما احتمال أن تكون الخرزة خضراء أو صفراء ؟

(٢) أطلق أحمد وبدر النار معاً على هدف. إذا كان احتمال أن يصيب أحمد الهدف هو 70% واحتمال أن يصيب بدر الهدف هو 80% فما احتمال أن يصيب بدر الهدف ويخطئ أحمد ؟

(٣) اخترنا عشوائياً عائلة مكونة من ثلاثة أطفال. ما احتمال أن يكون أحد أطفالها على الأقل ولداً ؟ (على اعتبار احتمال أن يكون الطفل ولداً يساوي احتمال أن يكون الطفل بنتاً).

(٤) رمينا قطعة نقود ثم دورنا دولاباً مقسوماً إلى خمسة أجزاء متساوية كما هو موضح في الرسم المرفق.بعد توقف الدولاب واستقرار قطعة النقود, ما احتمال حدث الحصول على صورة أو عدد فردي ؟

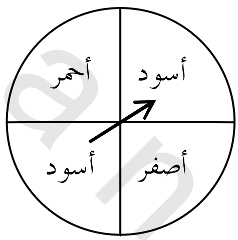


(٥) ذهب طلاب الصف الثالث متوسط وعددهم 30 طالباً في رحلة مدرسية. وعند سؤال مشرف الرحلة فيما إذا كان الطلاب يفضلون السباحة أو ركوب الدراجات كانت إجاباتهم على النحو التالي: 17 منهم يفضلون السباحة, 19 طالباً يفضلون ركوب الدراجات, طالبان فقط لا يفضلان أياً

من الخيارين, 8 طلاب يفضلون الخيارين. إذا اختار المشرف طالباً عشوائياً فما احتمال أنه يفضل السباحة علماً بأنه يفضل ركوب الدراجات أيضاً ؟

(٦) وضعنا أسماء 22 لاعباً لفريق كرة القدم بما فيهم قائد(كابتن) الفريق ومساعد قائد الفريق في وعاء. اخترنا 11 لاعباً عشوائياً لخوض المباراة النهائية على كأس ولي العهد. ما احتمال أن يكون قائد الفريق أو مساعد قائد الفريقوليس الاثنان معاًمن بينهم؟

(٧) بعد دوران الدولاب المبين في الشكل المرفق مرتين ثم توقفه ما احتمال أن يتوقف المؤشر على لونين مختلفين في الدورتين ؟

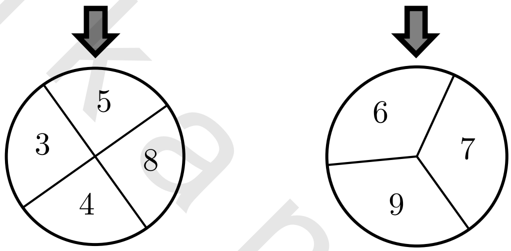


(٨) احتمال هبوب عاصفة رملية غداً على الرياض هو $\frac{1}{5}$. إذا هبت العاصفة الرملية على الرياض غداً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{1}{2}$وإذا كان الجو صافياً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{19}{20}$. ما احتمال ذهاب وسيم إلى العمل غداً ؟

(٩) يستخدم كمال طريقة استخدام السهام لصيد الغزلان. ذهب كمال للصيد وفي جعبته خمسة سهام. إذا علمت أن كمال يصيب الغزال عند رمي السهم باحتمال 90% فما احتمال إصابة كمال للغزال باستخدام أربعة سهام على الأكثر من سهامه الخمسة ؟

(١٠) [AJHSME 1987] وعاء به عشر كرات مرقمة بالأعداد 1إلى 10 . سحب جمال كرة من الوعاء عشوائياً. بعد ذلك سحب حسام كرة أخرى مختلفة عن الكرة التي سحبها جمال عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع العددين على الكرتين المسحوبتين زوجياً ؟

(١١) [AJHSME 1989] عند تدوير الدولابين الموضحين في الشكل أدناه, يتم اختيار العددين عند المؤشرين. ما احتمال أن يكون مجموع العددين زوجياً ؟



(١٢) [AJHSME 1990] وعاء يحتوي على كرات زرقاء وكرات خضراء. إذا كان عدد الكرات الزرقاء هو 6واحتمال سحب كرة زرقاء عشوائياً هو $\frac{1}{4}$ فما عدد الكرات الخضراء ؟

(١٣) [AJHSME 1992] رمينا حجري نرد وسجلنا حاصل ضرب العددين. ما احتمال أن يكون حاصل الضرب أكبر من 10؟

(١٤) رمى كل من حسام وأحمد حجر نرد. ما احتمال أن يكون العدد الذي يظهر على حجر نرد حسام أكبر من العدد الذي يظهر على حجر نرد أحمد ؟

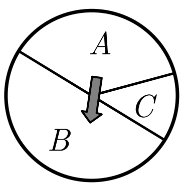
(١٥) [AJHSME 1996] اخترنا نقطة عشوائياً داخل منطقة دائرية. ما احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائرة ؟

(١٦) [AJHSME 1997] ثلاثة من طلاب فصل لهم أسماء مختلفة. كتبنا الأسماء في قائمة. ما احتمال أن تكون الأسماء مرتبة حسب الهجائية العربية ؟

(١٧) [AJHSME 1997] حجرا نرد لكل منهما 8 أوجه مرقمة بالأرقام $1, 2, \dots, 8$ حيث احتمالات ظهور الأعداد على الوجوه عند رمي الحجر جميعها متساوية. إذا رمينا الحجرين فما احتمال أن يكون حاصل ضرب العددين الظاهرين أكبر من 36 ؟

(١٨) [AJHSME 1998] اختار تحسين عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{8,9,10\}$ ثم جمعهما. واختار كريم عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{3,5,6\}$ ووجد حاصل ضربهما. ما احتمال أن تكون النتيجة التي حصل عليها تحسين أكبر من النتيجة التي حصل عليها كريم ؟

(١٩) [AMC8 2002] دولاب معلق على حائط مقسم إلى ثلاث مناطق A ، B ، C كما هو مبين في الشكل المرفق. احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة A هو $\frac{1}{3}$ واحتمال توقفه في المنطقة B هو $\frac{1}{2}$. ما احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة C؟



(٢٠) [AMC8 2007] لدينا أربع كرات لونها أحمر ومعلمة بالحروف A, B, C, D وأربع كرات لونها أخضر ومعلمة بالحروف A, B, C, D. سحبنا كرتين. ما احتمال أن تكون الكرتان من اللون نفسه أو معلمتين

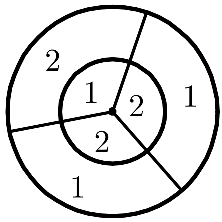
بالعلامة نفسها ؟

(٢١) [AMC8 2003] عند رمي حجر نرد ووقوعه على سطح طاولة فإننا لا نستطيع رؤية الوجه الأسفل. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الخمسة التي نستطيع رؤيتها على الأوجه الخمسة يقبل القسمة على العدد 6؟

(٢٢) [AMC8 2007] كيس يحتوي على أربع قطع من الورق مرقمة بالأرقام 1, 2, 3, 4 وأرقام جميع الورقات مختلفة. سحبنا ثلاث ورقات واحدة بعد الأخرى دون إرجاع لإنشاء عدد مكون من ثلاث مراتب. ما احتمال أن يكون هذا العدد مضاعفاً للعدد 3 ؟

(٢٣) [Aust.MC 1984] ثلاثة صناديق A , B , C،يحتوي كل من الصندوقين A و B على كرة واحدة بيضاء ويحتوي الصندوق C على 16 كرة بيضاء وست كرات سوداء. اخترنا عشوائياً صندوقاً ثم سحبنا كرة من هذا الصندوق. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟

(٢٤) [AMC8 2007]في لوح لعبة الأسهم المبين في الشكل, نصف قطر الدائرة الكبيرة يساوي 6 ونصف قطر الدائرة الصغيرة يساوي 3. تقسم أنصاف أقطار كلاً من الدائرتين إلى ثلاث مناطق متطابقة مبيناً عليها القيمة العددية. احتمال أن يصيب السهم منطقة معينة هو نسبة مساحة هذه المنطقة إلى مساحة الدائرة الكبيرة. عند رمي سهمين على اللوح تكون النقاط التي حصل عليها اللاعب هي مجموع عددي المنطقتين اللتين وقع عليهما السهمان. ما احتمال أن تكون النقاط التي حصل عليها لاعب هي عدد فردي ؟



(٢٥) [Aust.MC 1988] ذهب سليم إلى محل ملابس لشراء قميص وكان في محفظته 12قطعة نقود, ثلاث قطع من كل من الفئات 10ريـــال, 20 ريـــال, 50ريـــال, 100ريـــال. لاحظ سليم أن محل الملابس لديه تخفيضات حيث يبيع القميص بمائة ريـــال فقط. بعد أن قرر سليم شراء القميص سحب ثلاث قطع نقود عشوائياً من محفظته. ما احتمال أن يكون مجموع الثلاث قطع على الأقل كافياً لدفع ثمن القميص ؟

(٢٦) [Aust.MC 1989] اتفق الصديقان أحمد وبدر المشهوران بنسيانهما للمواعيد على أن يلتقيا بعد الظهر في محل دنكن دونات لشربالقهوة. كلاهما نسي وقت اللقاء المتفق عليه ولكن كلاً منهما تذكر أن الموعدهو بين الساعة الثانية والخامسة مساءً. قرر كل منهما الذهاب للموعد بين الساعة الثانية والخامسة مساءً والانتظار نصف ساعة ومن ثم المغادرة إذا لم يحضر الصديق الآخر. ما احتمال أن يلتقي الصديقان في الموعد ؟

(٢٧) [Aust.MC 1982] أخذنا 16ورقة لعب مكونة من 4ملوك, 4ملكات، 4 شباب, 4آصات. بعد خلط الأوراق جيداً سحب عصام وهو الصادق دائماً ورقتين على التوالي عشوائياً. ثم صرح "على الأقل إحدى الورقتين هي ملكة". ما احتمال أن تكون كل من الورقتين ملكة ؟

(٢٨) [AMC10A, AMC12A 2002] اختارت ليلى عشوائياً عددين مختلفين من المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ واختارت سعاد عشوائياً عدداً من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,10\}$. ما احتمال أن يكون العدد الذي اختارته سعاد أكبر من مجموع العددين اللذين اختارتهما ليلى ؟

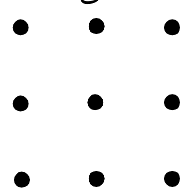
(٢٩) [AMC10A, AMC12A 2003] اخترنا عشوائياً قاسماً موجباً للعدد 60. ما احتمال أن يكون هذا القاسم أصغر من 7؟

(٣٠) [AMC10A 2003] اخترنا نقطة (x,y) عشوائياً داخل المستطيل الذي رؤوسه $(0,0)$, $(0,1)$, $(4,0)$, $(4,1)$. مااحتمال أن يكون $x < y$؟

(٣١) [AMC10A 2003] ما احتمال أن يقبل عدد من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,100\}$ القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 3؟

(٣٢) [AMC10B 2003] يحتوي وعاء على خرزتين من اللون الأحمر وخرزتين من اللون الأخضر. اسحب خرزة من الوعاء واستبدلها بخرزة حمراء بغض النظر عن لون الخرزة المسحوبة. ما احتمال أن تكون جميع الخرزات في الوعاء من اللون الأحمر بعد سحب واستبدال ثلاث خرزات ؟

(٣٣) [AMC10A 2004] اخترنا ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط التسع المبينة في الشكل المرفق. إذا كانت احتمالات اختيار النقاط الثلاث جميعها متساوية فما احتمال أن تكون الثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟



(٣٤) [AMC10A 2004] رمينا قطعة النقود A ثلاث مرات ورمينا قطعة النقود B أربع مرات. ما احتمال أن يكون عددا الصور التي حصلنا عليها من رمي قطعتي النقود متساويين ؟

(٣٥) [AMC10B 2004] رمينا حجري نرد لكل منهما 8 وجوه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 8 وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب هذين العددين أكبر من مجموعهما ؟

(٣٦) [AMC10A 2005] علمنا ثلاث بلاطات بالعلامة X وعلمنا بلاطتين بالعلامة O. وضعنا الخمس بلاطات عشوائياً في صف. ما احتمال أن يكون الترتيب هو $XOXOX$ ؟

(٣٧) [AMC10B 2005] حجر نرد ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $1,1,2,2,3,3$ وحجر نرد آخر ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $4,4,5,5,6,6$. رمينا حجري النرد وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون مجموع هذين العددين فردياً ؟

(٣٨) [AMC10B 2005] رمينا 12 حجر نرد مرة واحدة.ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الظاهرة على الوجوه العلوية عدداً أولياً ؟

(٣٩) [AMC10B, AMC12B 2005] تحتوي محفظة على 8 قطع نقود: قطعتان من كل من الفئات: 1 ريـــال, 5 ريالات, 10 ريالات, 20 ريالاً. سحبنا قطعتي نقود عشوائياً من المحفظة. ما احتمال أن يكون مجموعهما 20 ريالاً فأكثر ؟

(٤٠) [AMC10B 2005] وضعنا 40 ورقة متماثلة في كيس بحيث يكون كل من الأعداد $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ مكتوباً على أربع من هذه الورقات.

سحبنا أربع ورقات عشوائياً من الكيس دون إرجاع. لنفرض أن p هو احتمال أن تحمل الأوراق الأربع العدد نفسه وأن q هو احتمال أن تحمل ورقتان العدد a وأن تحمل الورقتان الأخريان العدد b حيث $a \neq b$. ما قيمة $\frac{q}{p}$؟

(٤١) [MAΘ 1991] جد احتمال أن يكون ملك السباتي بجانب الشاب القلبي في مجموعة من ورق اللعب الاعتيادية التي عددها 52 ورقة.

(٤٢) [AHSME 1970] اخترنا عدداً عشوائياً من بين جميع الأعداد المكونة من خمس مراتب والتي مجموع مراتبها يساوي 43. ما احتمال أن يقبل العدد القسمة على 11؟

(٤٣) [Mandelbrot #3] في إحدى الجزر البعيدة يوجد نوعان من البشر هما الصادقون دائماً والكاذبون دائماً. $\frac{1}{5}$ سكان الجزيرة كاذبون وباقي السكان صادقون. سأل صاحب مركب ثلاثة أشخاص من سكان الجزيرة "هل الجو ماطر ؟" فكانت إجاباتهم جميعاً "نعم". ما احتمال أن يكون الجو هو بالفعل ماطراً ؟

(٤٤) [AHSME 1987] نجزئ 2.5 إلى عددين حقيقيين غير سالبين x و y عشوائياً وبانتظام. على سبيل المثال، إلى 2.143 و 0.357 أو إلى $\sqrt{3}$ و $2.5-\sqrt{3}$. بعد ذلك نقرب كلاً من العددين إلى أقرب عدد صحيح، على سبيل المثال، إلى 2 و 0 في الحالة الأولى و إلى 2 و 1 في الحالة الثانية. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الصحيحين يساوي 3؟

(٤٥) [MAΘ 1987] أراد سليمان تغطية باب موقد مترله بشبك فصنع شبكاً

مكوناً من مربعات مفتوحة طول ضلع كل منها 5ميلمتر وكل من هذه المربعات محاط بإطار من السلك قطره1ميلمتر. تطايرت شرارة قطرها 2 ميلمتر من النار واتجهت مباشرة نحو الشبك. ما احتمال أن تخطئ هذه الشرارة إطار السلك ؟

(٤٦) [MAΘ 2011] يمتلك بهاء حجر نرد ثماني الوجوه مرقمة بالأعداد من 1إلى 8. رمى بهاء حجر النرد ثلاث مرات. ما احتمال أن يكون مجموع الأعداد الظاهرة على الوجوه يساوي 22؟

(٤٧) [MAΘ 2011] رمى حسام حجري نرد وجوه كل منهما مرقمة بالأعداد من1إلى 6مرة واحدة. إذا كان مجموع العددين الظاهرين يساوي 8. فما احتمال أن يكون العددان الظاهران متساويين ؟

(٤٨) [MAΘ 2010] سحبنا ورقة من مجموعة ورق اللعب الاعتيادية (52ورقة) ورمينا حجر نرد. ما احتمال ظهور العدد 3على الأقل مرة واحدة ؟

(٤٩) [MAΘ 2010] اخترنا عددين حقيقيين xو y حيث $0 \leq x \leq 2$ و $0 \leq y \leq 2$ عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع مربعيهما أكبر من 2؟

(٥٠) [MAΘ 2007] لنفرض أن A, B, Cثلاثة أحداث مستقلة احتمالات وقوعها هي 1, 0.5, 0.7على التوالي.ما احتمال وقوع اثنين منها بالضبط ؟

(٥١) [MAΘ 2007] اخترنا عددين حقيقيين xو yعشوائياً في الفترة $[-1,1]$. ما احتمال أن يكون $\left|x+y\right| > 0.5$؟

(٥٢) [Pascal 2009] رمى كل من أحمد وبدر حجري نرد مرة واحدة. يكون أحمد هو الرابح إذا كان الفرق بين العددين الظاهرين يساوي 1. مااحتمال

أن يربح أحمد ؟

(٥٣) [MAΘ 2005] اخترنا عددين حقيقيين عشوائياً من الفترة [$-20,10$]. ما احتمال أن يكون حاصل ضربهما أكبر من الصفر ؟

(٥٤) [MAΘ 2005] تقابل أربعة أصدقاء لتناول وجبة الغداء في أحد مطاعم الرياض. أثناء تناولهم للغداء وضع كل منهم مفتاح سيارته وسط المائدة وعند مغادرتهم للمطعم تناول كل منهم أحد المفاتيح عشوائياً. ما احتمال أن يكون على الأقل أحدهم أخذ مفتاح سيارته ؟

(٥٥) [مسألة مونتي هول Monty Hall Problem]

مونتي هول هو مقدم برنامج مسابقات في إحدى قنوات التلفاز حيث قيمة الجائزة للمتسابق الرابح هي سيارة جديدة. قوانين المسابقة هي على النحو التالي: توجد ثلاثة أبواب مقفلة مرقمة بالأرقام $1, 2, 3$ووراء أحدها سيارة جديدة ووراء كل من البابين الآخرين ماعز. يختار المتسابق أحد الأبواب الذي يعتقد أن خلفه السيارة. بعد ذلك يفتح مقدم البرنامج مونتي هول أحد البابين الآخرين فتظهر ماعز وراء الباب ومن ثم يسأل المتسابق ما إذا كان يرغب بتغيير الباب الذي اختاره أم يبقى على خياره. هل يغير المتسابق الباب وما احتمال أن يكسب السيارة ؟

(٥٦) وعاء يحتوي على 3 خرزات حمراء و n خرزة زرقاء. إذا كان احتمال سحب خرزتين زرقاوين يساوي احتمال سحب خرزتين من لونين مختلفين فجد

قيمة n.

(٥٧) [AHSME 1994] كيس من الفشار (حب الذرة) ثلثا حباته من اللون

الأبيض والثلث الباقي من اللون الأصفر. عند وضع حبات الذرة على النار لعمل الفشار, نصف الحبات البيض ستتفتق (تفرقع) وثلثا الحبات الصفراء ستتفتق. اخترنا حبة ذرة عشوائياً من الكيس ووضعناها على النار فتفتقت. ما احتمال أن تكون من الذرة البيضاء اللون ؟

(٥٨) لتكن $S = \{1,2,\cdots,10\}$ ولتكن A مجموعة جزئية من S عدد عناصرها يساوي 4. اخرتنا عشوائياً مجموعة جزئية B من S مكونة من 4 عناصر. ما احتمال أن تكون المجموعتان A و B منفصلتين ؟

(٥٩) [AIME 1989] ألقينا قطعة نقود خمس مرات. إذا كان احتمال الحصول على صورة واحدة فقط ليس صفراً ويساوي احتمال الحصول على صورتين فقط فما احتمال الحصول على ثلاث صور فقط ؟

(٦٠) [AHSME 1997] حجرا نرد كل منهما مكون من ستة وجوه. وجوه أحدهما مرقمة بالأرقام $1,2,3,3,5,6$ ووجوه الآخر مرقمة بالأرقام $1,2,4,4,5,6$. ألقينا حجري النرد مرة واحدة وسجلنا مجموع العددين الظاهرين. ما احتمال أن يكون هذا المجموع عدداً فردياً ؟

(٦١) [MAΘ 1992] يلعب فريقان عدداً من المباريات ضد بعضهما البعض حتى يكسب أحدهما أربع مباريات وبعدها يتوقفان. إذا كان احتمال أن يكسب أحد الفريقين مساوياًلاحتمال أن يكسب الفريق الآخر فما احتمال أن يتوقفا بعد 6 مباريات ؟

(٦٢) [MAΘ 1991] اخترنا نقطة P, عشوائياًمن القطعة AB حيث M هي منتصف AB. ما احتمال إمكانية تكوين مثلث من القطع AP , PB , AM؟

حلول المسائل

(١) وعاء به 5 خرزات خضراء و 7 خرزات صفراء و 9 خرزات زرقاء. سحبنا عشوائياً خرزة واحدة من الوعاء. ما احتمال أن تكون الخرزة خضراء أو صفراء ؟

الحل

عدد الخرزات الخضراء و الصفراء هو $5 + 7 = 12$. عدد الخرزات في الوعاء هو $5 + 7 + 9 = 21$.إذن, احتمال أن تكون الخرزة خضراء أو صفراء هو $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$
.

(٢) أطلق أحمد وبدر النار معاً على هدف. إذا كان احتمال أن يصيب أحمد الهدف هو 70% واحتمال أن يصيب بدر الهدف هو 80% فما احتمال أن يصيب بدر الهدف ويخطئ أحمد ؟

الحل

لنفرض أن A هو حدث إصابة أحمد للهدف وأن B هو حدث إصابة بدر للهدف. عندئذ, $P(A) = 0.7$ و $P(B) = 0.8$. المطلوب هو $P(B \cap A')$. لاحظ أن الحدثين منفصلان. إذن,

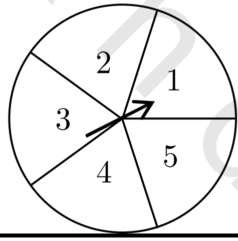
$$\begin{aligned} P(B \cap A') &= P(B)P(A') = P(B)(1 - P(A)) \\ &= 0.8 \times (1 - 0.7) = 0.24 \end{aligned}$$

(٣) اخترنا عشوائياً عائلة مكونة من ثلاثة أطفال. ما احتمال أن يكون أحد أطفالها على الأقل ولداً ؟ (على اعتبار احتمال أن يكون الطفل ولداً يساوي احتمال أن يكون الطفل بنتاً).

الحل

إذا رمزنا للبنت بالرمز G وللولد بالرمز B فنرى أن $P(B) = P(G) = \frac{1}{2}$.
لاحظ أن فضاء العينة هو $\{GGG, GGB, GBG, BGG, BBG, BGB, GBB, BBB\}$. الآن, حدث عدم وجود ولد هو GGG واحتمال ذلك هو $\frac{1}{8}$. ولذا فاحتمال أن يكون لدى العائلة ولد واحد على الأقل هو $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

(٤) رمينا قطعة نقود ثم دورنا دولاباً مقسوماً إلى خمسة أجزاء متساوية كما هو موضح في الرسم المرفق. بعد توقف الدولاب واستقرار قطعة النقود, ما احتمال حدث الحصول على صورة أو عدد فردي ؟



الحل

فضاء العينة هو

$S = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5)\}$.

حدث الحصول على صورة أو عدد فردي هو

$$A = \{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(T,1),(T,3),(T,5)\}.$$

إذن, $P(A) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

حل آخر: لنفرض أن H هو حدث الحصول على صورة وأن O هو حدث

الحصول على عدد فردي.المطلوب هو $P(H \cup O)$.

$$P(H \cup O) = P(H) + P(O) - P(H \cap O)$$
$$= P(H) + P(O) - P(H)P(O) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

(٥) ذهب طلاب الصف الثالث متوسط وعددهم 30 طالباً في رحلة مدرسية. وعند سؤال مشرف الرحلة فيما إذا كان الطلاب يفضلون السباحة أو ركوب الدراجات كانت إجاباتهم على النحو التالي: 17منهم يفضلون السباحة, 19طالباً يفضلون ركوب الدراجات, طالبان فقط لا يفضلان أياً من الخيارين, 8طلاب يفضلون الخيارين. إذا اختار المشرف طالباً عشوائياً فما احتمال أنه يفضل السباحة علماً بأنه يفضل ركوب الدراجات أيضاً ؟

الحل

لنفرض أن Sهو حدث تفضيل السباحة وأن Rهو حدث تفضيل ركوب الدراجات. الاحتمال المطلوب هو $P(S \mid R)$. الآن، $P(S \mid R) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(R)}$

.

ولكن $P(R) = \dfrac{17}{30}$ و $P(S \cap R) = \dfrac{8}{30}$. إذن, $P(S \mid R) = \dfrac{\frac{8}{30}}{\frac{17}{30}} = \dfrac{8}{17}$.

(٦) وضعنا أسماء 22لاعباً لفريق كرة القدم بما فيهم قائد(كابتن) الفريق ومساعد قائد الفريق في وعاء. اخترنا 11لاعباً عشوائياً لخوض المباراة النهائية على كأس ولي العهد. ما احتمال أن يكون قائد الفريق أو مساعد

قائد الفريقوليس الاثنان معاً من بينهم ؟

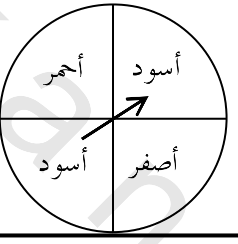
الحل

لنفرض أن C هو حدث اختيار الكابتن وأن V هو حدث اختيار مساعد الكابتن.

المطلوب هو $P(C \cup V)$. وبما أن $C \cap V = \varnothing$ فإن

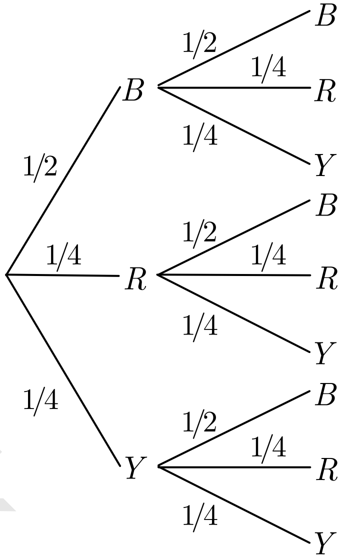
$$P(C \cup V) = P(C) + P(V) = \frac{1}{22} + \frac{1}{22} = \frac{1}{11}.$$

(٧) بعد دوران الدولاب المبين في الشكل المرفق مرتين ثم توقفه، ما احتمال أن يتوقف المؤشر على لونين مختلفين في الدورتين ؟



الحل

أفضل طريقة لحل هذه المسألة هي استخدام الشجرة البيانية.



حيث B ، R ، Y ترمز إلى حدث توقف المؤشر على اللون الأسود، الأحمر، الأصفر على التوالي.

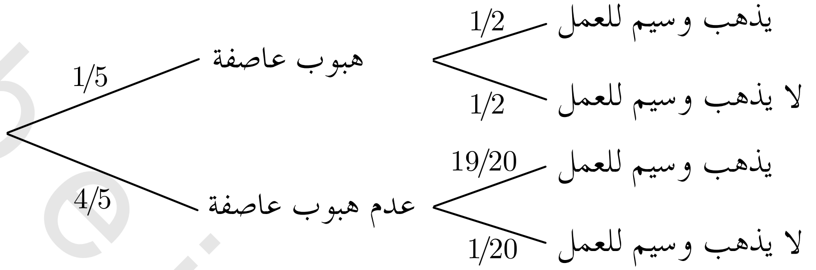
المطلوب هو احتمال توقف المؤشر عند لونين مختلفين. لاحظ أن احتمال توقف المؤشر عند اللون نفسه في الدروتين هو $\frac{3}{8} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$.

إذن, احتمال توقف المؤشر عند لونين مختلفين في الدورتين هو $\frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1$.

(٨) احتمال هبوب عاصفة رملية غداً على الرياض هو $\frac{1}{5}$. إذا هبت العاصفة الرملية على الرياض غداً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{1}{2}$ وإذا كان الجو صافياً فإن احتمال ذهاب وسيم إلى العمل هو $\frac{19}{20}$. ما احتمال ذهاب وسيم إلى العمل غداً ؟

الحل

باستخدام الشجرة البيانية نجد أن



إذن, احتمال أن يذهب وسيم للعمل غداً هو

$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\times\frac{19}{20}=\frac{1}{10}+\frac{76}{100}=\frac{86}{100}=\frac{43}{50}.$$

(٩) يستخدم كمال طريقة استخدام السهام لصيد الغزلان. ذهب كمال للصيد وفي جعبته خمسة سهام. إذا علمت أن كمال يصيب الغزال عند رمي السهم باحتمال 90% فما احتمال إصابة كمال للغزال باستخدام أربعة سهام على الأكثر من سهامه الخمسة ؟

الحل

احتمال النجاح هنا هو $p = 0.9$. واحتمال الفشل $q = 0.1$. المطلوب هو حساب $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$.

ولكن هذا الاحتمال يساوي $1-P(X=5)$. ولذا فإن

$$1-P(X=5)=1-C(5,5)(0.9)^5(0.1)^0=1-(0.9)^5$$

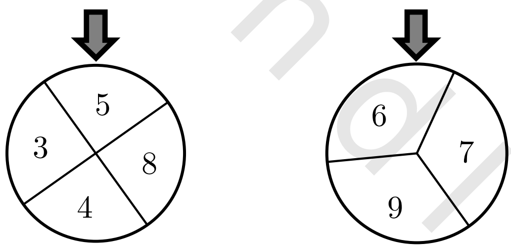
(١٠) [AJHSME 1987] وعاء به عشر كرات مرقمة بالأعداد 1إلى 10. سحب جمال كرة من الوعاء عشوائياً. بعد ذلك سحب حسام كرة

أخرى مختلفة عن الكرة التي سحبها جمال عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع العددين على الكرتين المسحوبتين زوجياً ؟

الحل

لكي يكون مجموع العددين زوجياً يجب أن يكون العددان فرديين أو أن يكونا زوجيين. عدد الأعداد الزوجية يساوي 5 وعدد الأعداد الفردية يساوي 5. مهما كان نوع العدد الذي سحبه جمال فإن عدد الكرات الباقية في الوعاء والمرقمة بنفس نوع العدد المسحوب يساوي 4. إذن, الاحتمال هو $\frac{4}{9}$.

(١١) [AJHSME 1989] عند تدوير الدولابين الموضحين في الشكل أدناه, يتم اختيار العددين عند المؤشرين. ما احتمال أن يكون مجموع العددين زوجياً ؟



الحل

لكي يكون مجموع العددين زوجياً يجب أن يكون العددان من نفس النوعية (إما فرديان أو زوجيان). على الدولاب الأول عددان زوجيان وعددان فرديان. فلذا مهما كان العدد الذي سيتوقف عنده الدولاب الثاني فاحتمال أن يتوقف الدولاب الأول عند عدد من نفس النوعية هو $\frac{1}{2}$.

(١٢) [AJHSME 1990] وعاء يحتوي على كرات زرقاء وكرات خضراء. إذا

كان عدد الكرات الزرقاء هو 6 واحتمال سحب كرة زرقاء عشوائياً هو $\frac{1}{4}$ فما عدد الكرات الخضراء ؟

الحل

لنفرض أن x هو عدد الكرات التي يحتويها الوعاء. بما أن $\frac{1}{4}$ الكرات زرقاء نرى أن $6 = \frac{1}{4}x$. إذن $x = 24$. ويكون عدد الكرات الخضراء هو $24 - 6 = 18$.

حل آخر: بما أن ربع الكرات هي زرقاء فإن ثلاثة أرباع الكرات يجب أن تكون خضراء. وبهذا فعدد الكرات الخضراء هو ثلاثة أضعاف عدد الكرات الزرقاء. أي أن $3 \times 6 = 18$.

(١٣) [AJHSME 1992] رمينا حجري نرد وسجلنا حاصل ضرب العددين. ما احتمال أن يكون حاصل الضرب أكبر من 10؟

الحل

بعمل جدول لفضاء العينة نجد أن

$\times$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

ولهذا فعدد عناصر حدث "حاصل الضرب أكبر من 10" يساوي 17. إذن, الاحتمال هو $\frac{17}{36}$.

(١٤) رمى كل من حسام وأحمد حجر نرد. ما احتمال أن يكون العدد الذي يظهر على حجر نرد حسام أكبر من العدد الذي يظهر على حجر نرد أحمد ؟

الحل

لنفرض أن العدد الذي ظهر على حجر نرد حسام هو H وأن العدد الذي ظهر على حجر نرد أحمد هو A. المطلوب معرفة عدد مرات ظهور (H,A) حيث $H > A$. فضاء العينة هو

$$\begin{array}{cccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\
\boxed{(2,1)} & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\
\boxed{(3,1)} & \boxed{(3,2)} & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\
\boxed{(4,1)} & \boxed{(4,2)} & \boxed{(4,3)} & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\
\boxed{(5,1)} & \boxed{(5,2)} & \boxed{(5,3)} & \boxed{(5,4)} & (5,5) & (5,6) \\
\boxed{(6,1)} & \boxed{(6,2)} & \boxed{(6,3)} & \boxed{(6,4)} & \boxed{(6,5)} & (6,6)
\end{array}$$

عدد هذه الازواج هو 15. إذن, الاحتمال هو $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$.

حل آخر: عدد عناصر فضاء العينة هو $36 = 6 \times 6$. 6 من هذه الأزواج متساوية الإحداثيات و 30 زوجاًمختلفة الإحداثيات.من الثلاثين المختلفة الإحداثيات 15 منها الإحداثي الأول أكبر من الإحداثي الثاني. إذن الاحتمال هو $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$.

(١٥) [AJHSME 1996] اخترنا نقطة عشوائياً داخل منطقة دائرية. ما احتمال أن تكون النقطة أقرب إلى مركز الدائرة منها إلى محيط الدائرة ؟

الحل

قم برسم دائرة نصف قطرها 2 ودائرة داخلها تشترك معها في المركز نصف قطرها

1. الآن, محيط الدائرة الداخلية هو مجموعة جميع النقاط التي تبعد مسافة 1عن المركز وتبعد المسافة نفسها عن محيط الدائرة الخارجية. الآن, إذا اخترنا نقطة عشوائياً داخل منطقة دائرية ولتكن B فإن احتمال أن تكون هذه النقطة داخل منطقة جزئية A من B هو النسبة بين مساحة A و B. ولكن مساحة B تساوي $4\pi = \pi \times 2^2$ ، مساحة A تساوي $\pi = \pi \times 1^2$. إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4\pi}$.

(١٦) [AJHSME 1997] ثلاثة من طلاب فصل لهم أسماء مختلفة. كتبنا الأسماء في قائمة. ما احتمال أن تكون الأسماء مرتبة حسب الهجائية العربية ؟

الحل

لنفرض أن الأسماء تبدأ بالحروف أ, ب, ج. الترتيبات الممكنة لهذه الحروف هي: أ ب ج, أ ج ب, ب أ ج, ب ج أ, ج أ ب, ج ب أ وعددها 6. ولكن الترتيب الهجائي الوحيد بينها هو أ ب ج. إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{6}$.

حل آخر: عدد طرق اختيار الطالب الأول هو 3وعدد طرق اختيار الطالب الثاني هو 2وعدد طرق اختيار الطالب الثالث هو1. إذن, عدد طرق اختيار الطلاب الثلاثة هو $3 \times 2 \times 1 = 6$. وهناك اختيار واحد فقط لكي يكونوا مرتبين هجائياً إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{6}$.

(١٧) [AJHSME 1997] حجرا نرد لكل منهما 8أوجه مرقمة بالأرقام $1, 2, \dots, 8$ حيث احتمالات ظهور الأعداد على الوجوه عند رمي الحجر جميعها متساوية. إذا رمينا الحجرين فما احتمال أن يكون حاصل

ضرب العددين الظاهرين أكبر من 36؟

الحل

عدد عناصر فضاء العينة هو $8 \times 8 = 64$. حدث الحصول على عددين حاصل ضربهما أكبر من 36 هو

$\{(5,8),(6,7),(6,8),(7,6),(7,7),(7,8),(8,5),(8,6),(8,7),(8,8)\}$.

عدد العناصر يساوي 10. إذن, الاحتمال هو $\frac{10}{64} = \frac{5}{32}$.

(١٨) [AJHSME 1998] اختار تحسين عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{8,9,10\}$ ثم جمعهما. واختار كريم عددين مختلفين عشوائياً من المجموعة $\{3,5,6\}$ ووجد حاصل ضربهما. ما احتمال أن تكون النتيجة التي حصل عليها تحسين أكبر من النتيجة التي حصل عليها كريم ؟

الحل

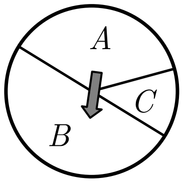
القيم التي يحصل عليها تحسين هي $8 + 9 = 17$، $8 + 10 = 18$، $9 + 10 = 19$.

والقيم التي يحصل عليها كريم هي $3 \times 5 = 15$، $3 \times 6 = 18$، $5 \times 6 = 30$.

إذا حصل تحسين على 17 فاحتمال أن يكون ذلك أكبر مما حصل عليه كريم هو $\frac{1}{3}$ (لأن 17 أكبر من 15 فقط).إذا حصل تحسين على 18 فاحتمال أن يكون ذلك أكبر مما حصل عليه كريم هو $\frac{1}{3}$ أيضاً (18 أكبر فقط من 15). إذا حصل تحسين على 19 فاحتمال أن يكون ذلك أكبر مما حصل عليه كريم هو $\frac{2}{3}$ (لأن 19 أكبر من 15 و 18).واحتمال أن يختار تحسين أياً من المجاميع الثلاثة هو $\frac{1}{3}$. إذن,

الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{9}=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$.

(١٩) [AMC8 2002] دولاب معلق على حائط مقسم إلى ثلاث مناطق A , B , C كما هو مبين في الشكل المرفق. احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة A هو $\frac{1}{3}$ واحتمال توقفه في المنطقة B هو $\frac{1}{2}$. ما احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة C؟



الحل

بما أن مجموع الاحتمالات يساوي 1 فإن احتمال أن يتوقف السهم في المنطقة C هو $\frac{1}{6}=1-\frac{5}{6}=1-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$.

(٢٠) [AMC8 2007] لدينا أربع كرات لونها أحمر ومعلمة بالحروف A,B,C,D وأربع كرات لونها أخضر ومعلمة بالحروف A,B,C,D. سحبنا كرتين. ما احتمال أن تكون الكرتان من اللون نفسه أو معلمتين بالعلامة نفسها ؟

الحل

عدد طرق اختيار كرتين من 8 كرات هو $28=\frac{56}{2}=\frac{8\times 7}{2}$.

عدد طرق اختيار كرتين من اللون الأحمر هو $6=\frac{4\times 3}{2}$.

عدد طرق اختيار كرتين من اللون الأخضر هو $6 = \frac{4\times 3}{2}$.

عدد طرق اختيار كرتين معلمتين بالحرف نفسه هو 4 (AA , BB , CC , DD). إذن, الاحتمال المطلوب هو $\frac{4}{7} = \frac{6+6+4}{28}$.

لاحظ أن هذا الاحتمال هو: $\frac{4}{7} = \frac{C(4,2)+C(4,2)+4}{C(8,2)}$.

حل آخر: لنفرض أن C هو حدث اختيار كرتين من اللون نفسه وأن L هو حدث اختيار كرتين لهما نفس الحرفين. عندئذ،

$\frac{12}{28} = \frac{C(4,2)+C(4,2)}{C(8,2)} = P(C)$ وأن $P(L) = \frac{4C(2,2)}{C(8,2)} = \frac{4}{28}$. وبما أن $C\cap L = \varnothing$ فإن الاحتمال المطلوب هو

$P(C\cup L) = P(C)+P(L) = \frac{12}{28}+\frac{4}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$.

(٢١) [AMC8 , 2003] عند رمي حجر نرد ووقوعه على سطح طاولة فإننا لا نستطيع رؤية الوجه الأسفل. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الخمسة التي نستطيع رؤيتها على الأوجه الخمسة يقبل القسمة على العدد 6؟

الحل

هناك خياران, إما أن يكون الوجه غير الظاهر يساوي 6 أو لا يساوي 6. إذا كان يساوي 6 فحاصل ضرب الأعداد الخمسة الأخرى هو $120 = 5\times 4\times 3\times 2\times 1$ وهذا العدد يقبل القسمة على العدد 6. أما إذا كان لا يساوي 6 فسيظهر العدد 6 في حاصل ضرب الخمسة أعداد الظاهرة ومن ثم فهو يقبل القسمة على العدد 6. إذن, الاحتمال هو 1.

(٢٢) [AMC8 2007] كيس يحتوي على أربع قطع من الورق مرقمة بالأرقام $1,\ 2,\ 3,\ 4$ وأرقام جميع الورقات مختلفة. سحبنا ثلاث ورقات واحدة بعد الأخرى دون إرجاع لإنشاء عدد مكون من ثلاث مراتب. ما احتمال أن يكون هذا العدد مضاعفاً للعدد 3 ؟

الحل

الأعداد المضاعفة للعدد 3 هي تبديلات العدد 123 وعددها 6 وتبديلات العدد 234 وعددها أيضاً 6. عدد طرق سحب الثلاثة أعداد هو $24 = 2 \times 3 \times 4$.

إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{2} = \frac{6+6}{24}$.

أو إذا لم يكن الترتيب مهمّاً (وهذا هو الحال هنا) فعدد طرق اختيار ثلاثة أعداد من 4 هو 4 وعدد طرق اختيار عدد مضاعف للعدد 3 هو 2 (123 أو 234).

إذن، الاحتمال هو $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

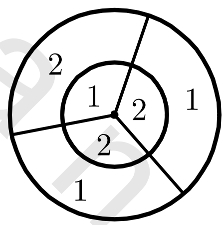
(٢٣) [Aust.MC 1984] ثلاثة صناديق A , B , C، يحتوي كل من الصندوقين A و B على كرة واحدة بيضاء ويحتوي الصندوق C على 16 كرة بيضاء وست كرات سوداء. اخترنا عشوائياً صندوقاً ثم سحبنا كرة من هذا الصندوق. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء ؟

الحل

احتمال اختيار كل من الصناديق هو $\frac{1}{3}$. إذن, احتمال أن تكون الكرة بيضاء هو

$$\frac{10}{11} = \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{16}{22}.$$

(٢٤) [AMC8 2007]في لوح لعبة الأسهم المبين في الشكل, نصف قطر الدائرة الكبيرة يساوي 6ونصف قطر الدائرة الصغيرة يساوي 3. تقسم أنصاف الأقطار كلاً من الدائرتين إلى ثلاث مناطق متطابقة مبيناً عليها القيمة العددية. احتمال أن يصيب السهم منطقة معينة هو نسبة مساحة هذه المنطقة إلى مساحة الدائرة الكبيرة. عند رمي سهمين على اللوح تكون النقاط التي حصل عليها اللاعب هي مجموع عددي المنطقتين اللتين وقع عليهما السهمان. ما احتمال أن تكون النقاط التي حصل عليها لاعب هي عدد فردي ؟



الحل

نقوم اولاً بحساب مساحة المناطق المختلفة.

مساحة كل من المناطق الداخلية يساوي ثلث مساحة الدائرة الصغيرة أي

$$\frac{1}{3} \times 9\pi = 3\pi$$

مساحة كل من الحلقات تساوي ثلث الفرق بين مساحتي الدائرتين. أي

$$\frac{1}{3}(36\pi - 9\pi) = \frac{27\pi}{3} = 9\pi$$

احتمال أن يقع السهم على عدد فردي هو

$$\frac{3\pi + 9\pi + 9\pi}{36\pi} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

(لاحظ وجود عدد فردي واحد في الدائرة الصغيرة وعددين فرديين في المنطقتين الواقعتين بين الدائرتين).

احتمال أن يقع السهم على عدد زوجي هو

$$\frac{5}{12} = \frac{15}{36} = \frac{3\pi + 3\pi + 9\pi}{36\pi} \text{ (أو } \frac{5}{12} = \frac{7}{12} - 1).$$

الآن, نحصل على مجموع فردي من(فردي وزوجي) أو (زوجي وفردي). إذن, احتمال الحصول على مجموع فردي هو $\frac{35}{72} = \frac{7}{12} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{12} \times \frac{7}{12}$.

(٢٥) [Aust.MC 1988] ذهب سليم إلى محل ملابس لشراء قميص وكان في محفظته 12قطعة نقود, ثلاث قطع من كل من الفئات 10ريـــال, 20 ريـــال, 50ريـــال, 100ريـــال. لاحظ سليم أن محل الملابس لديه تخفيضات حيث يبيع القميص بمائة ريـــال فقط. بعد أن قرر سليم شراء القميص سحب ثلاث قطع نقود عشوائياً من محفظته. ما احتمال أن يكون مجموع الثلاث قطع على الأقل كافياً لدفع ثمن القميص ؟

الحل

يكون مجموع الثلاث قطع غير كاف لدفع ثمن القميص (أي المجموع أصغر من 100) إذا كانت مكونة من الفئات التالية:

(0قطعة من فئة 50وثلاث قطع من فئة 10أو 20)أو (1قطعة من فئة 50 وقطعتين من فئة 10أو 20). عدد هذه الطرق هو

$$C(3,0)C(6,3) + C(3,1)C(6,2) = 1 \times 20 + 3 \times 15 = 65$$

وعدد طرق اختيار 3قطع من 12قطعة هو $220 = \frac{12 \times 11 \times 10}{6} = C(12,3)$.

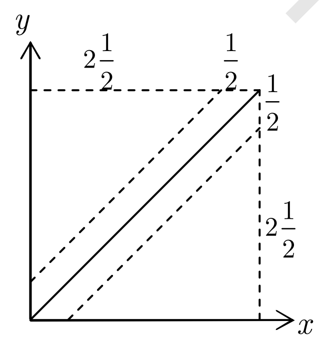
إذن, احتمال أن لا تكفي القطع الثلاث لشراء القميص هو $\frac{65}{220}=\frac{13}{44}$.

وبهذا فإن احتمال أن تكفي القطع الثلاث لشراء القميص هو $1-\frac{13}{44}=\frac{31}{44}$.

(٢٦) [Aust.MC 1989]اتفق الصديقان أحمد وبدر المشهوران بنسيانهما للمواعيد على أن يلتقيا بعد الظهر في محل دنكن دونات لشرب القهوة. كلاهما نسي وقت اللقاء المتفق عليه ولكن كلاً منهما تذكر أن الموعد هو بين الساعة الثانية والخامسة مساءً. قرر كل منهما الذهاب للموعد بين الساعة الثانية والخامسة مساءً والانتظار نصف ساعة ومن ثم المغادرة إذا لم يحضر الصديق الآخر. ما احتمال أن يلتقي الصديقان في الموعد ؟

الحل

لنفرض أن أحمد وصل عند الساعة $x+2$وبدر وصل عند الساعة $y+2$حيث $0 \le x,y \le 3$. وبهذا فإنهما سيتقابلان إذا كان $\left|x-y\right| \le \frac{1}{2}$. أي انهما سيتقابلان في مساحة الشريط المبين في الشكل المرفق



وبهذا يكون احتمال أن يلتقيا هو

$$\frac{3\times 3-2\times\frac{1}{2}\times\left(2\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{1}{2}\right)}{3^2}=\frac{9-\frac{25}{4}}{9}=\frac{11}{36}.$$

(٢٧) [Aust.MC 1982] أخذنا 16 ورقة لعب مكونة من 4 ملوك, 4 ملكات، 4 شباب, 4 آصات. بعد خلط الأوراق جيداً سحب عصام وهو الصادق دائماً ورقتين على التوالي عشوائياً. ثم صرح "على الأقل إحدى الورقتين هي ملكة". ما احتمال أن تكون كل من الورقتين ملكة ؟

الحل

الاحتمال المطلوب يساوي

$$\frac{\text{عدد طرق اختيار ملكتين من أربع ملكات}}{\text{عدد طرق اختيار ورقتين على الأقل واحدة منهما ملكة}}$$

وهذا بدوره يساوي

$$\frac{\text{عدد طرق اختيار ملكتين من أربع}}{\text{عدد طرق اختيار ملكة واحدة + عدد طرق اختيار ملكتين من الأربع ملكات}}$$

الآن, عدد طرق اختيار ملكتين من أربع ملكات هو $12 = 3\times 4$.

ولحساب عدد طرق اختيار ملكة واحدة لاحظ أنه من الممكن أن تكون الملكة هي الورقة الأولى أو الورقة الثانية.ولذا فعدد الطرق هو $96 = 12\times 4 + 12\times 4$

إذن, الاحتمال المطلوب هو $\frac{1}{9} = \frac{12}{108} = \frac{12}{12+96}$.

(٢٨) [AMC10A, AMC12A 2002] اختارت ليلى عشوائياً عددين مختلفين من المجموعة $\{1,2,3,4,5\}$ واختارت سعاد عشوائياً عدداً من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,10\}$. ما احتمال أن يكون العدد الذي اختارته سعاد أكبر

من مجموع العددين اللذين اختارهما ليلى ؟

الحل

عدد طرق اختيار عددين من 5 هو $C(5,2) = 10$. وعدد طرق اختيار عدد من 10 هو 10. إذن, عدد الطرق الكلية لاختيار الأعداد هو $10 \times 10 = 100$.

الآن, ندرس الحالات التالية لإيجاد عدد الطرق التي يكون فيها العدد الذي اختارته سعاد أكبر من مجموع العددين اللذين اختارهما ليلى:

- مجموع العددين يساوي 3 : هناك طريقة واحدة لهذا الخيار وهو $(1,2)$ ومن ثم تستطيع سعاد اختيار أي عدد من 4 إلى 10. عدد الطرق في هذه الحالة هو $1 \times 7 = 7$.
- مجموع العددين يساوي 4 : خيار واحد لليلى هو $(1,3)$ وستة خيارات لسعاد هي الأعداد من 5 إلى 10. عدد الطرق هنا هو $6 = 6 \times 1$.
- مجموع العددين يساوي 5 : خياران لليلى هما $(1,4)$ و $(2,3)$. خمسة خيارات لسعاد هي من 6 إلى 10. عدد الطرق هنا هو $10 = 5 \times 2$.
- مجموع العددين يساوي 6 : خياران لليلى هما $(1,5)$ و $(2,4)$ وأربعة خيارات لسعاد من 7 إلى 10. عدد الطرق هنا هو $8 = 4 \times 2$.
- مجموع العددين يساوي 7 : خياران لليلى هما $(2,5)$ و $(3,4)$ وثلاثة خيارات لسعاد من 8 إلى 10. عدد الطرق هنا هو $6 = 3 \times 2$.
- مجموع العددين يساوي 8 : خيار واحد لليلى هو $(3,5)$ وخياران لسعاد هما 9 , 10. عدد الطرق هنا هو $2 = 2 \times 1$.
- مجموع العددين يساوي 9 : خيار واحد لليلى هو $(4,5)$ وخيار واحد لسعاد هو 10. عدد الطرق هنا هو $1 = 1 \times 1$.

إذن, احتمال أن يكون عدد سعاد أكبر من مجموع عددي ليلى هو

$$\frac{7+6+10+8+6+2+1}{100}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}.$$

(٢٩) [AMC10A, AMC12A 2003] اخترنا عشوائياً قاسماً موجباً للعدد 60. ما احتمال أن يكون هذا القاسم أصغر من 7؟

الحل

لاحظ أولاً أن $60=2^2\times3\times5$. ولذا فعدد قواسمه الموجبة يساوي $3\times2\times2=12$.

القواسم الموجبة التي أصغر من 7 عددها 6 وهي $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$. إذن, احتمال أن يكون القاسم أصغر من 7 هو $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$.

(٣٠) [AMC10A 2003] اخترنا نقطة (x,y) عشوائياً داخل المستطيل الذي رؤوسه $(0,0)$, $(0,1)$, $(4,0)$, $(4,1)$. ما احتمال أن يكون $x<y$؟

الحل

مساحة المستطيل هي $4\times1=4$. المستقيم $y=x$ يقطع المستطيل في النقطتين $(0,0)$ و $(1,1)$. إذن, مساحة المنطقة $x<y$ هي مساحة المثلث الذي رؤوسه $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ وهي $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$. إذن, احتمال $x<y$ يساوي

$$\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}.$$

(٣١) [AMC10A 2003] ما احتمال أن يقبل عدد من المجموعة $\{1,2,3,\cdots,100\}$ القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 3؟

الحل

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2 هو $50 = \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor$.

عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2 و 3 هو عدد الأعداد التي تقبل القسمة على $6 = lcm(2,3)$ وهذا العدد يساوي $16 = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor$.

إذن, عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 2 ولا تقبل القسمة على 3 هو $34 = 16 - 50$. وبهذا فاحتمال أن يقبل العدد القسمة على 2 ولا يقبل القسمة على 3 هو $\frac{17}{50} = \frac{34}{100}$.

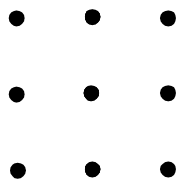
(٣٢) [AMC10B 2003] يحتوي وعاء على خرزتين من اللون الأحمر وخرزتين من اللون الأخضر. اسحب خرزة من الوعاء واستبدلها بخرزة حمراء بغض النظر عن لون الخرزة المسحوبة. ما احتمال أن تكون جميع الخرزات في الوعاء من اللون الأحمر بعد سحب واستبدال ثلاث خرزات ؟

الحل

لكي تصبح جميع الخرزات من اللون الأحمر بعد ثلاث مرات من السحب والاستبدال فيجب أن نكون قد سحبنا الخرزتين الخضراوين في هذه السحبات الثلاث وهذا الاحتمال هو

$$\begin{aligned} &P(GGR) + P(GRG) + P(RGG) \\ &= \frac{2}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{4} + \frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{32} + \frac{1}{16} = \frac{9}{32} \end{aligned}$$

(٣٣) [AMC10A 2004] اخترنا ثلاث نقاط عشوائياً من النقاط التسع المبينة في الشكل المرفق. إذا كانت احتمالات اختيار النقاط الثلاث جميعها متساوية فما احتمال أن تكون الثلاث نقاط على استقامة واحدة ؟



الحل

عدد طرق اختيار ثلاث نقاط من بين 9 نقاط هو $84 = \dfrac{9\times 8\times 7}{3\times 2} = C(9,3)$.

عدد المستقيمات الممكنة يساوي 8 وهي ثلاثة مستقيمات أفقية وثلاثة مستقيمات رأسية وقطران. إذن, الاحتمال المطلوب هو $\dfrac{2}{21} = \dfrac{8}{84}$.

(٣٤) [AMC10A 2004] رمينا قطعة النقود A ثلاث مرات ورمينا قطعة النقود B أربع مرات. ما احتمال أن يكون عددا الصور التي حصلنا عليها من رمي قطعتي النقود متساويين ؟

الحل

نحصل على عددينمتساويين من الصور إذا كان عدد الصور يساوي 0 أو 1 أو 2 أو 3 .

احتمال الحصول على عدد 0 من الصور هو $\dfrac{1}{128} = C(3,0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 C(4,0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$

احتمال الحصول على صورة واحدة هو $\dfrac{12}{128} = C(3,1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 C(4,1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^4$.

احتمال الحصول على صورتين هو $\frac{18}{128} = C(3,2)\left(\frac{1}{2}\right)^3 C(4,2)\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

احتمال الحصول على ثلاث صور هو $\frac{4}{128} = C(3,3)\left(\frac{1}{2}\right)^3 C(4,3)\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

إذن, احتمال الحصول على عددين متساويين من الصور هو

$$\frac{1+12+18+4}{128} = \frac{35}{128}.$$

(٣٥) [AMC10B 2004] رمينا حجري نرد لكل منهما 8 وجوه مرقمة بالأرقام من 1 إلى 8 وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب هذين العددين أكبر من مجموعهما ؟

الحل

لنفرض أن m و n هما العددان الظاهران على الوجهين العلويين. سنجد عدد الأزواج المرتبة (m,n) التي تحقق $mn > m+n$. الآن،

$$\begin{aligned} mn > m+n &\Leftrightarrow mn - m - n > 0 \\ &\Leftrightarrow mn - m - n + 1 > 1 \\ &\Leftrightarrow (m-1)(n-1) > 1 \end{aligned}$$

من الأسهل حساب عدد الأزواج المرتبة (m,n) التي تحقق $(m-1)(n-1) \leq 1$.

بما أن $m-1$ و $n-1$ هما عددان صحيحان يحققان $0 \leq m-1$ و $n-1 \leq 7$.

فإن $(m-1)(n-1) = 0$ أو $(m-1)(n-1) = 1$.

الآن, $(m-1)(n-1) = 0$ إذا وفقط إذا كان $m = 1$ أو $n = 1$. عدد الازواج المرتبة $(1,n)$ يساوي 8 وعدد الأزواج المرتبة $(m,1)$ يساوي 8 وبطرح الزوج المرتب $(1,1)$ الذي تكرر مرتين نجد أن عدد هذه الازواج هو

$8 + 8 - 1 = 15$.

أيضاً, $(m-1)(n-1) = 1$ إذا وفقط إذا كان $m = n = 2$. وهذا يعطينا زوجاً مرتباً واحداً هو $(2,2)$. إذن, عدد الأزواج المرتبة (m,n) التي تحقق $(m-1)(n-1) > 1$ هو $64 - (15+1) = 48$. وبهذا فالاحتمال المطلوب هو $\frac{48}{64} = \frac{3}{4}$.

(٣٦) [AMC10A 2005] علمنا ثلاث بلاطات بالعلامة X وعلمنا بلاطتين بالعلامة O. وضعنا الخمس بلاطات عشوائياً في صف. ما احتمال أن يكون الترتيب هو $XOXOX$ ؟

الحل

عدد ترتيبات الخمس بلاطات (3 معلمة بالعلامة X و 2 معلمتان بالعلامة O) هو $\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$. يوجد فقط ترتيب واحد يقرأ $XOXOX$. إذن, الاحتمال هو $\frac{1}{10}$.

(٣٧) [AMC10B 2005] حجر نرد ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $1,1,2,2,3,3$ وحجر نرد آخر ذو ستة وجوه مرقمة بالأرقام $4,4,5,5,6,6$. رمينا حجري النرد وسجلنا العددين الظاهرين على الوجهين العلويين. ما احتمال أن يكون مجموع هذين العددين فردياً ؟

الحل

لكي نحصل على مجموع فردي يجب أن يكون أحد العددين فردياً والآخر زوجياً. إذن, لدينا حالتان.

- العدد الظاهر على الحجر الأول فردي وعلى الثاني زوجي:

الاحتمال في هذه الحالة هو $\frac{4}{9} = \frac{16}{36} = \frac{4}{6} \times \frac{4}{6}$.

- العدد الظاهر على الحجر الأول زوجي وعلى الثاني فردي:

الاحتمال في هذه الحالة هو $\frac{1}{9} = \frac{4}{36} = \frac{2}{6} \times \frac{2}{6}$.

إذن, الاحتمال المطلوب هو $\frac{5}{9} = \frac{1}{9} + \frac{4}{9}$.

(٣٨) [AMC10B 2005] رمينا 12 حجر نرد مرة واحدة.ما احتمال أن يكون حاصل ضرب الأعداد الظاهرة على الوجوه العلوية عدداً أولياً ؟

الحل

لكي يكون حاصل ضرب الأعداد اولياً فيجب أن يظهر العدد 1 على وجوه 11 حجراً وعدد أولي على وجه الحجر الثاني عشر.يوجد $C(12,1) = 12$ طريقة لاختيار الحجر الذي يظهر عليه عدد أولي. وعدد الأعداد الأولية هو 3 على الحجر فاحتمال ظهور عدد أولي هو $\frac{1}{2}$ واحتمال ظهور العدد 1 على كل من الأحجار هو $\frac{1}{6}$. إذن الاحتمال المطلوب هو $\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 12 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{11} \times \frac{1}{2}$.

(٣٩) [AMC10B, AMC12B 2005] تحتوي محفظة على 8 قطع نقود: قطعتان من كل من الفئات: 1 ريـــال, 5 ريالات, 10 ريالات, 20 ريالاً. سحبنا قطعتي نقود عشوائياً من المحفظة. ما احتمال أن يكون مجموعهما 20 ريالاً فأكثر ؟

الحل

عدد طرق اختيار قطعتين من 8 قطع هو $28 = \dfrac{8\times 7}{2} = C(8,2)$.

نحصل على مجموع 20 ريالاً فأكثر في الحالات التالية:

- قطعة من فئة العشرين والقطعة الأخرى من أي فئة أخرى: عدد الطرق هنا هو 12.
- قطعتان من فئة العشرين: طريقة واحدة.
- قطعتان من فئة العشرة: طريقة واحدة.

إذن, الاحتمال هو $\dfrac{1}{2} = \dfrac{14}{28} = \dfrac{12+1+1}{28}$.

(٤٠) [AMC10B 2005] وضعنا 40 ورقة متماثلة في كيس بحيث يكون كل من الأعداد $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ مكتوباً على أربع من هذه الورقات. سحبنا أربع ورقات عشوائياً من الكيس دون إرجاع. لنفرض أن p هو احتمال أن تحمل الأوراق الأربع العدد نفسه وأن q هو احتمال أن تحمل ورقتان العدد a وأن تحمل الورقتان الأخريان العدد b حيث $a \neq b$. ما قيمة $\dfrac{q}{p}$؟

الحل

عدد طرق سحب أربع أوراق من الكيس دون إرجاع هو $37 \times 38 \times 39 \times 40$.

لحساب الاحتمال p لاحظ أن عدد طرق معرفة العدد المكتوب عل الورقة المسحوبة هو 10 وهناك $4!$ طريقة لسحب الأربع أوراق التي تحمل هذه العدد. إذن, الاحتمال p هو $p = \dfrac{10\times 4!}{40\times 39\times 38\times 37}$.

ولحساب الاحتمال q لاحظ أن عدد طرق اختيار عددين مختلفين هو $C(10,2) = 45$.

وعدد طرق ترتيب سحب الأوراق المختلفة هو $C(4,2) = 6$.

ويوجد لكل من هذه الترتيبات عدد من الطرق $3 \times 4 \times 3 \times 4$ لاختيار الأربع ورقات. إذن، $q = \dfrac{45 \times 6 \times 4^2 \times 3^2}{40 \times 39 \times 38 \times 37}$.

وبهذا فإن $162 = \dfrac{45 \times 6 \times 4^2 \times 3^2}{10 \times 4!} = \dfrac{q}{p}$.

(٤١) [MAΘ 1991] جد احتمال أن يكون ملك السباتي بجانب الشاب القلبي في مجموعة من ورق اللعب الاعتيادية التي عددها 52 ورقة.

الحل

عدد طرق ترتيب مجموعة ورق اللعب هو $52!$. ولإيجاد عدد طرق ترتيب المجموعة بحيث تكون ورقتان بجانب بعضهما البعض نفترض أن الورقتين هما ورقة واحدة وبهذا نحصل على $51!$ طريقة لترتيب 51 ورقة, كما أنه يمكن ترتيب الورقتين بجانب بعضهما البعض بطريقتين. إذن, الاحتمال هو $\dfrac{1}{26} = \dfrac{2 \times 51!}{52!}$.

(٤٢) [AHSME 1970] اخترنا عدداً عشوائياً من بين جميع الأعداد المكونة من خمس مراتب والتي مجموع مراتبها يساوي 43 . ما احتمال أن يقبل العدد القسمة على 11؟

الحل

لاحظ أن الأعداد المكونة من 5 مراتب ومجموع مراتبها 43 هي الأعداد التي نحصل عليها باستخدام أربع مراتب كل منها 9 ومرتبة 7 أو استخدام ثلاث مراتب كل

منها 9 ومرتبتان كل منهما 8 .عدد ترتيبات النمط الأول هو $C(5,1) = 5$ وعدد ترتيبات النمط الثاني هو $C(5,2) = 10$.أي لدينا 15 عدداً، عدد مراتب كل منها يساوي 5 ومجموع هذه المراتب يساوي 43 . وبالاستعانة باختبار قابلية القسمة على 11 نجد أن ثلاثة أعداد فقط من بينها تقبل القسمة على 11 وهي 98989, 99979 , 97999 . إذن الاحتمال هو $\frac{1}{5} = \frac{3}{15}$.

(٤٣) [Mandelbrot #3] في إحدى الجزر البعيدة يوجد نوعان من البشر هما الصادقون دائماً والكاذبون دائماً. $\frac{1}{5}$ سكان الجزيرة كاذبون وباقي السكان صادقون. سأل صاحب مركب ثلاثة أشخاص من سكان الجزيرة "هل الجو ماطر ؟" فكانت إجاباتهم جميعاً "نعم". ما احتمال أن يكون الجو هو بالفعل ماطراً ؟

الحل

بما أن إجابات الثلاث أشخاص هي نعم فإما أن يكون الثلاثة أشخاص صادقين أو أن يكونوا كاذبين. ولذا إذا كانوا جميعاً صادقين فإن الجو ماطر. ولهذا فالاحتمال المطلوب هو احتمال أن يكون الثلاثة أشخاص صادقين مقسوماً على احتمال أن تكون إجابات الثلاثة أشخاص هي الإجابات نفسها. أي

$$P = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^3}{\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{64}{65}$$

حل آخر: يمكن استخدام مبرهنة بيز لحل هذه المسألة بفرض أن B هو الحدث "الأشخاص الثلاثة أعطوا الإجابة نفسها" والحدث A "الأشخاص الثلاثة صادقون"

ويكون المطلوب هو $P(A \mid B)$. الآن،

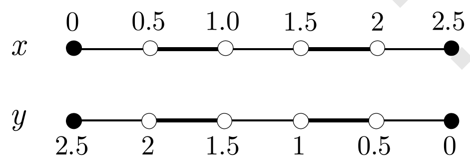
$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B \mid A)P(A) + P(B \mid A')P(A')}$$

$$= \frac{1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3}{1 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 + 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{64}{65}$$

(٤٤) [AHSME 1987]نجزئ 2.5 إلى عددين حقيقيين غير سالبين x و y عشوائياً وبانتظام. على سبيل المثال، إلى 2.143 و 0.357 أو إلى $\sqrt{3}$ و $2.5 - \sqrt{3}$. بعد ذلك نقرب كلاً من العددين إلى أقرب عدد صحيح، على سبيل المثال، إلى 2 و 0 في الحالة الأولى و إلى 2 و 1 في الحالة الثانية. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الصحيحين يساوي 3؟

الحل

نقوم برسم x و y على خط الأعداد , مرة تصاعدياً ومرة تنازلياً كما هو مبين أدناه

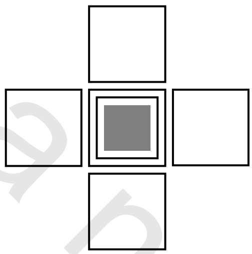


الأجزاء الثخينة تبين الفترات التي تم بها تقريب الأعداد. عندئذ, يكون المجموع يساوي 3 فقط في الفترات التي يتم فيها تقريب كل من x و y وعددها 4 . وبهذا فإن احتمال أن يكون مجموع العددين الصحيحين يساوي 3 هو $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$.

(٤٥) [MAΘ 1987]أراد سليمان تغطية باب موقد منزله بشبك فصنع شبكاً مكوناً من مربعات مفتوحة طول ضلع كل منها 5ميلمتر وكل من هذه المربعات محاط بإطار من السلك قطره1ميلمتر. تطايرت شرارة قطرها 2 ميلمتر من النار واتجهت مباشرة نحو الشبك. ما احتمال أن تخطئ هذه الشرارة إطار السلك ؟

الحل

الشكل المرفق يبين خمسة من المربعات المفتوحة من الشبك



.بما أن نصف قطر الشرارة هو 1ميلمتر فإن مركزها يجب أن يبعد على الأقل 1 ميلمتر عن سلك الإطار لكي تخطئ إطار السلك. ولهذا فإن مركز الشرارة يجب أن يكون داخل المنطقة المظللة التي هي عبارة عن مربع طول ضلعه 3 ميلمتر (لأن المركز يجب أن يبعد 1ميلمتر عن كل من الإطارات).وبهذا فالمساحة المطلوبة هي 9 ميلمتر مربع.

الآن, المساحة الكلية ليست فقط مساحة المربع (الفتحة) بل تحتوي المنطقة أيضاً التي تبعد $\frac{1}{2}$ميلمتر من الجوانب (لأن نصف قطر الشرارة هو 1ميلمتر ويمكن أن تقع الشرارة على السلك نفسه). إذن، مساحة المنطقة الكلية هي $36 = (5+1)^2$ ميلمتر مربع ويكون الاحتمال هو $\frac{1}{4} = \frac{9}{36}$.

(٤٦) [MAΘ 2011] يمتلك بهاء حجر نرد ثماني الوجوه مرقمة بالأعداد من 1 إلى 8. رمى بهاء حجر النرد ثلاث مرات. ما احتمال أن يكون مجموع الأعداد الظاهرة على الوجوه يساوي 22؟

الحل

عدد عناصر فضاء العينة هو $512 = 8 \times 8 \times 8$. نستطيع الحصول على مجموع 22 بطريقتين: إما عددان كل منهما يساوي 7 وعدد يساوي 8 وإما عددان كل منهما يساوي 8 وعدد يساوي 6.

وهذه الأعداد هي $877, 787, 778, 886, 868, 688$ وعددها 6, إذن, الاحتمال هو $\frac{3}{256} = \frac{6}{512}$.

(٤٧) [MAΘ 2011] رمى حسام حجري نرد وجوه كل منهما مرقمة بالأعداد من 1 إلى 6 مرة واحدة. إذا كان مجموع العددين الظاهرين يساوي 8. فما احتمال أن يكون العددان الظاهران متساويين ؟

الحل

لنفرض أن A هو الحدث "المجموع يساوي 8" و B هو الحدث "العددان متساويان". المطلوب هو إيجاد $P(B \mid A)$. الآن،

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}.$$

(٤٨) [MAΘ 2010] سحبنا ورقة من مجموعة ورق اللعب الاعتيادية (52 ورقة) ورمينا حجر نرد. ما احتمال ظهور العدد 3 على الأقل مرة واحدة ؟

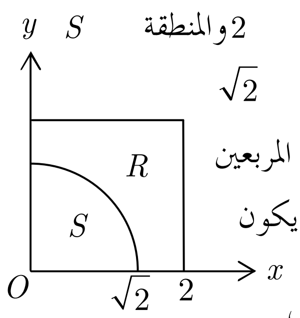
الحل

احتمال عدم الحصول على العدد 3 من ورق اللعب هو $\frac{12}{13} = \frac{48}{52}$ واحتمال عدم الحصول على العدد 3 من رمي حجر النرد هو $\frac{5}{6}$. إذن, احتمال عدم الحصول على العدد 3 هو $\frac{10}{13} = \frac{12}{13} \times \frac{5}{6}$. وبهذا يكون احتمال الحصول على العدد 3 على الأقل مرة واحدة هو $\frac{3}{13} = 1 - \frac{10}{13}$.

(٤٩) [MAΘ 2010] اخترنا عددين حقيقيين x و y حيث $0 \le x \le 2$ و $0 \le y \le 2$ عشوائياً. ما احتمال أن يكون مجموع مربعيهما أكبر من 2؟

الحل

العددان يقعان في المربع الذي طول ضلعه يساوي 2. المنطقة R تمثل المنطقة التي يكون فيها مجموع المربعين أكبر من 2 والمنطقة S وهي عبارة عن ربع دائرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ وهي المنطقة التي يكون فيها مجموع المربعين أصغر من 2. وبهذا فالاحتمال المطلوب يكون $\frac{\text{مساحة المنطقة } R}{\text{مساحة المربع}}$. الآن, مساحة المنطقة R هي



$4 - \frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - \frac{\pi}{2}$. إذن, الاحتمال هو $\frac{4 - \frac{\pi}{2}}{4} = \frac{8 - \pi}{8}$.

(٥٠) [MAΘ 2007] لنفرض أن A , B , C ثلاثة أحداث مستقلة احتمالات وقوعها هي 1, 0.5, 0.7 على التوالي. ما احتمال وقوع اثنين منها بالضبط ؟

الحل

لاحظ أن $P(A) = 1$ يعني أن الحدث A مؤكد وقوعه. ولذا فالاحتمال المطلوب الآن هو احتمال وقوع (B وعدم وقوع C) أو (وقوع C وعدم وقوع B). هذا الاحتمال هو

$$P(B \cap C') + P(B' \cap C) = P(B)P(C') + P(B')P(C)$$
$$= 0.5 \times 0.3 + 0.5 \times 0.7 = 0.15 + 0.35 = 0.5$$

(٥١) [MAΘ 2007] اخترنا عددين حقيقيين x و y عشوائياً في الفترة $[-1,1]$. ما احتمال أن يكون $|x + y| > 0.5$؟

الحل

لاحظ أولاً أن $|x + y| > 0.5$ إذا وفقط كان $x + y > 0.5$ أو $x + y < -0.5$. ولهذا في المربع الذي رؤوسه $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,1)$ تكون المساحة المطلوبة هي مساحة المنطقتين الواقعتين أعلى المستقيم $x + y = 0.5$ وأسفل المستقيم $x + y = -0.5$. كل من هاتين المنطقتين مثلث متساوي الساقين, ارتفاعه يساوي قاعدته وكل منهما يساوي 1.5. إذن, مجموع مساحتيهماهو $2 \times \frac{1}{2} \times 1.5 \times 1.5 = 2.25$. ويكون الاحتمال المطلوب هو $\frac{2.25}{4} = \frac{9}{16}$.

(٥٢) [Pascal 2009] رمى كل من أحمد وبدر حجري نرد مرة واحدة. يكون

أحمد هو الرابح إذا كان الفرق بين العددين الظاهرين يساوي 1. ما احتمال أن يربح أحمد ؟

الحل

الأزواج المرتبة التي الفرق بينها 1هي

$$(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6),(2,1),(3,2),(4,3),(5,4),(6,5)$$

وعددها 10. إذن, الاحتمال هو $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

(٥٣) [MAΘ 2005] اخترنا عددين حقيقيين عشوائياً من الفترة $[-20,10]$. ما احتمال أن يكون حاصل ضربهما أكبر من الصفر ؟

الحل

لنفرض أن العددين هما xو y. عندئذ, يكون $xy>0$ إذا وفقط إذا كان $-20\le x,y<0$ أو $0<x,y<10$. إذن, الاحتمال هو

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{9}.$$

(٥٤) [MAΘ 2005] تقابل أربعة أصدقاء لتناول وجبة الغداء في أحد مطاعم الرياض. أثناء تناولهم للغداء وضع كل منهم مفتاح سيارته وسط المائدة وعند مغادرتهم للمطعم تناول كل منهم أحد المفاتيح عشوائياً. ما احتمال أن يكون على الأقل أحدهم أخذ مفتاح سيارته ؟

الحل

احتمال أن يأخذ واحد على الأقل مفتاح سيارته هو احتمال أن واحداً أو اثنين أو أربعة أشخاص أخذوا مفاتيح سياراتهم.

- شخص واحد يأخذ مفتاح سيارته: عدد طرق اختيار الشخص لمفتاحه هو

4 وعدد طرق اختيار الثلاثة اشخاص الآخرين لمفاتيح بعضهم البعض هو 2 . إذن, عدد الطرق في هذه الحالة هو $8 = 2 \times 4$.

- شخصان يأخذ كل منهما مفتاحسيارته: عدد الطرق هنا هو $6 = C(4,2)$.
- أربعة أشخاص يأخذ كل منهم مفتاح سيارته: توجد طريقة واحدة.

إذن, الاحتمال هو $\frac{5}{8} = \frac{15}{24} = \frac{8+6+1}{4!}$.

(٥٥) [مسألة مونتي هول Monty Hall Problem]

مونتي هول هو مقدم برنامج مسابقات في إحدى قنوات التلفاز حيث قيمة الجائزة للمتسابق الرابح هي سيارة جديدة. قوانين المسابقة هي على النحو التالي: توجد ثلاثة أبواب مقفلة مرقمة بالأرقام 1, 2, 3 ووراء أحدها سيارة جديدة ووراء كل من البابين الآخرين ماعز. يختار المتسابق أحد الأبواب الذي يعتقد أن خلفه السيارة. بعد ذلك يفتح مقدم البرنامج مونتي هول أحد البابين الآخرين فتظهر ماعز وراء الباب ومن ثم يسأل المتسابق ما إذا كان يرغب بتغيير الباب الذي اختاره أم يبقى على خياره. هل يغير المتسابق الباب وما احتمال أن يكسب السيارة ؟

الحل

نفرض دون التأثير على العمومية أن المتسابق اختار الباب رقم 1 بداية. إذا كانت السيارة خلف الباب رقم 2 فيكون الباب الذي فتحه مونتي هول هو الباب رقم 3 (خلفه ماعز), أما إذا كانت السيارة خلف الباب رقم 3 فيكون الباب الذي فتحه

مونتي هول هو الباب رقم 2.

لاحظ أنه لو كانت السيارة خلف الباب رقم 1فيكون لمونتي هول خيار فتح أي من البابين 2أو 3. ولهذا دعنا نفترض أن مونتي هول يختار أحدهما عشوائياً (على الرغم من أن هذا الخيار ليس عشوائياًفبإعادة التجربة مرات عديدة فإن احتمال ربح المتسابق بين تبديل الباب الذي اختاره أو عدم تبديل الباب يكون نفسه).

إذن, في المتوسط, يكون احتمال أن تكون ماعز خلف الباب رقم 2يساوي احتمال أن تكون ماعز خلف الباب رقم 3ويساوي كل منهما $\frac{1}{2}$.

نفرض الآن أن A هو الحدث "مونتي هول فتح الباب رقم 2". إذن, $P(A)=\frac{1}{2}$. لنفرض أن B هو الحدث "السيارة خلف الباب رقم 3". إذن, $P(B)=\frac{1}{3}$.

لاحظ أيضاً أن $P(A \mid B)=1$. ولكننا نرغب في حساب $P(B \mid A)$. الآن,

$$P(A)P(B \mid A)=P(A\cap B)=P(B)P(A \mid B)$$

$$P(B \mid A)=\frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

إذن, استبدال المتسابق للباب يزيد من احتمال أن يكسب السيارة. ولتأكيد ما توصلنا إليه نفرض أن C هو الحدث "السيارة خلف الباب رقم 1". لاحظ أن $P(C)=P(B)=\frac{1}{3}$ ولكن $P(A \mid C)=\frac{1}{2}$ وليس 1. إذن,

$$P(C \mid A)=\frac{P(C)P(A \mid C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

(٥٦) وعاء يحتوي على 3 خرزات حمراء و n خرزة زرقاء. إذا كان احتمال سحب خرزتين زرقاوين يساوي احتمال سحب خرزتين من لونين مختلفين فجد قيمة n.

الحل

احتمال سحب خرزتين زرقاوين من الوعاء هو $\dfrac{C(n,2)}{C(n+3,2)}$.

واحتمال سحب خرزتين مختلفتي اللون هو $\dfrac{C(3,1)C(n,1)}{C(n+3,2)}$.

بما أن الاحتمالين متساويان فإن $C(n,2) = C(3,1)C(n,1)$. من ذلك نجد أن

$$\frac{n(n-1)}{2} = 3n$$
$$n^2 - n = 6n$$
$$n^7 - 7n = 0$$
$$n(n-7) = 0$$

إذن, $n = 7$ لأن $n \neq 0$.

(٥٧) [AHSME 1994] كيس من الفشار (حب الذرة) ثلثا حباته من اللون الأبيض والثلث الباقي من اللون الأصفر. عند وضع حبات الذرة على النار لعمل الفشار, نصف الحبات البيض ستتفتق (تفرقع) وثلثا الحبات الصفراء ستتفتق. اخترنا حبة ذرة عشوائياً من الكيس ووضعناها على النار فتفتقت. ما احتمال أن تكون من الذرة البيضاء اللون ؟

الحل

لنفرض أن W هو حدث "حبة الذرة بيضاء" وأن S هو حدث "حبة الذرة تفتقت". إذن, المطلوب هو $P(W \mid S)$. الآن, $P(W \mid S) = \dfrac{P(W \cap S)}{P(S)}$ حيث

$$P(S) = P(S \mid W)P(W) + P(S \mid W')P(W') = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

إذن, $\frac{3}{5} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{9}} = P(W \mid S)$.

(٥٨) لتكن $S = \{1,2,\cdots,10\}$ ولتكن A مجموعة جزئية من S عدد عناصرها يساوي 4 . اخترنا عشوائياً مجموعة جزئية B من S مكونة من 4 عناصر. ما احتمال أن تكون المجموعتان A و B منفصلتين ؟

الحل

لاحظ أن $B \cap A = \varnothing$ إذا وفقط إذا كان $B \subseteq A'$. الآن,عدد طرق اختيار مجموعة مكونة من 4 عناصر من مجموعة مكونة من 10 هو $C(10,4) = 210$.

عدد طرق اختيار مجموعة مكونة من 4 عناصر من مجموعة مكونة من 6 عناصر (عدد عناصر A') هو $C(6,4) = 15$.

إذن, الاحتمال المطلوب هو $\frac{1}{14} = \frac{15}{210}$.

(٥٩) [AIME 1989] ألقينا قطعة نقود خمس مرات. إذا كان احتمال الحصول على صورة واحدة فقط ليس صفراً ويساوي احتمال الحصول على صورتين فقط فما احتمال الحصول على ثلاث صور فقط ؟

الحل

ليكن p هو احتمال الحصول على صورة عند إلقاء قطعة النقود مرة واحدة. بعد إلقاء قطعة النقود 5 مرات فإن احتمال الحصول على صورة واحدة هو $C(5,1)pq^4$ واحتمال الحصول على صورتين هو $C(5,2)p^2q^3$ حيث $q = 1 - p$

. الآن

$$\begin{aligned} C(5,1)pq^4 &= C(5,2)p^2q^3 \\ 5pq^4 &= 10p^2q^3 \\ q &= 2p \\ 1-p &= 2p \\ p &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

إذن, احتمال الحصول على ثلاث صور هو

$C(5,3)p^3q^2 = 10\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$.

(٦٠) [AHSME 1997] حجرا نرد كل منهما مكون من ستة وجوه. وجوه أحدهما مرقمة بالأرقام $1,2,3,3,5,6$ ووجوه الآخر مرقمة بالأرقام $1,2,4,4,5,6$. ألقينا حجري النرد مرة واحدة وسجلنا مجموع العددين الظاهرين. ما احتمال أن يكون هذا المجموع عدداً فردياً ؟

الحل

يكون المجموع عدداً فردياً إذا وفقط إذا كان العدد الظاهر على أحدهما فردياً والعدد الظاهر على الثاني زوجياً. وبهذا فالاحتمال هو $\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

(٦١) [MAΘ 1992] يلعب فريقان عدداً من المباريات ضد بعضهما البعض حتى يكسب أحدهما أربع مباريات وبعدها يتوقفان. إذا كان احتمال أن يكسب أحد الفريقين مساوياًلاحتمال أن يكسب الفريق الآخر فما احتمال أن يتوقفا بعد 6مباريات ؟

الحل

لكي يتوقف اللعب بعد 6 مباريات يجب أن يكسب أحد الفريقين 3 مباريات من أول 5 مباريات ويكسب المباراة الأخيرة. عدد طرق اختيار الفريق يساوي 2 وعدد طرق كسب ثلاث مباريات من 5 مباريات هو $C(5,3) = 10$. إذن, عدد الطرق التي يكسب بها أحد الفريقين 4 مباريات هو $2 \times 10 = 20$. الآن, كل من المباريات الست بها مخرجان ربح أو خسارة. فلذا عدد الطرق هو $2^6 = 64$.

وبهذا يكون الاحتمال المطلوب هو $\frac{5}{16} = \frac{20}{64}$.

(٦٢) [MAΘ 1991] اخترنا نقطة P , عشوائياً من القطعة AB حيث M هي منتصف AB . ما احتمال إمكانية تكوين مثلث من القطع AP , PB , AM ؟

الحل

نفرض (دون المساس بالعمومية) أن $AB = 2$. عندئذ, $AM = 1$. من الواضح أن AP أو PB أكبر من أو يساوي AM . لنفرض أن AP هو الضلع الأكبر. لإنشاء مثلث نحتاج أن يكون $PB + AM > AP$. لنفرض أن $BP = x$ حيث $x \leq 1$ (لأن $BP \leq AP$). عندئذ, $x + 1 > 2 - x$. أي أنه لكي نستطيع إنشاء مثلث فإنه يجب أن يكون $x > \frac{1}{2}$. ومن ثم فالاحتمال المطلوب هو طول الفترة $\frac{1}{2} \leq x < 1$ مقسوماً على طول الفترة $0 \leq x \leq 1$. أي $\frac{1}{2}$.

مسائل غير محلولة

(١) سحبنا خرزة عشوائياً من كيس يحتوي على 3 خرزات خضراء و 4 خرزات صفراء و 5 خرزات زرقاء. ما احتمال أن يكون لون الخرزة أخضر أو أصفر ؟

(أ) $\frac{5}{12}$ (ب) $\frac{7}{12}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{11}{12}$

(٢) في لعبة رمي السهم يتكون الهدف من لوح دائري مقسم إلى 36 قطاعاً متماثلة مرقمة بالأعداد من 1 إلى 36. رمى وسيم سهماً على اللوح. ما احتمال أن يقع السهم على قطاع رقمه مضاعف للعدد 4 أو للعدد 6؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٣) يستطيع أحمد إصابة الهدف الدائري أثناء تدريبه على إطلاق النار ولكنه يصيب مركز الهدف مرتين من كل خمس رميات. أطلق أحمد النار على الهدف ثلاث مرات. ما احتمال أن يصيب مركز الهدف في الرميتين الأولى والثانية ويخطئ في الرمية الثالثة ؟

(أ) $\frac{7}{125}$ (ب) $\frac{8}{125}$ (ج) $\frac{11}{125}$ (د) $\frac{12}{125}$

(٤) سلة تحتوي على 12 بيضة, 4 بيضات لونها أبيض والباقي لونها بني. اختار سعيد ثلاث بيضات عشوائياً من السلة. ما احتمال أن تكون جميعها من اللون البني ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{13}{55}$ (ج) $\frac{14}{55}$ (د) $\frac{17}{55}$

(٥) يحتوي الوعاء A على 3 خرزات حمراء وخرزتين صفراوين ويحتوي الوعاء

Bعلى خرزة واحدة حمراء وأربع خرزات صفراء. اخترنا وعاءً عشوائياً برمي قطعة نقود ثم سحبنا خرزة من الوعاء. ما احتمال أن تكون الخرزة صفراء ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{4}{5}$

(٦) مصنع لإنتاج علب المرطبات يحتوي على خطي إنتاج، الخط Aينتج 40% من علب المرطبات والخط Bينتج الباقي. 5%من إنتاج الخط Aيكون تالفاً و 2%من إنتاج الخط Bيكون تالفاً.ما احتمال أن تكون علبة مرطبات تالفة ؟

(أ) $\frac{1}{125}$ (ب) $\frac{2}{125}$ (ج) $\frac{3}{125}$ (د) $\frac{4}{125}$

(٧) يحتوي كيس على 7خرزات صفراء و nخرزة بيضاء. إذا كان احتمال سحب خرزتين صفراوين واحدة بعد الأخرى دون إحلال هو $\frac{3}{13}$فما عدد الخرزات البيضاء ؟

(أ) 7 (ب) 8 (ج) 9 (د) 10

(٨) اختبار متعدد الخيارات مكون من 5أسئلة، كل سؤال له أربع إجابات واحدة فقط منها صائبة. جلس محمد لأخذ الاختبار دون تحضير مسبق حيث اعتمد كلياً على التخمين. إذا كانت النسبة المطلوبة للنجاح هي 60%فما احتمال نجاح محمد في الاختبار ؟

(أ) 0.052 (ب) 0.068 (ج) 0.072 (د) 0.088

(٩) وضعنا قطعتي نقود في كيس, إحداهما قطعة نقود اعتيادية والأخرى عليها صورتان. سحبنا قطعة عشوائياً دون الإعلان عن ماهيتها ثم ألقيناها وكان

المخرج هو "صورة". ما احتمال أن تكون القطعة التي سحبناها هي ذات الصورتين ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{4}{5}$

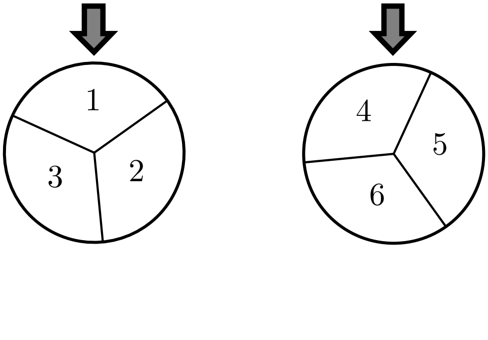
(١٠) أعطيت مسألة رياضيات إلى كل من أحمد و بدر و سعيد. إذا كان احتمال أن يستطيع أحمد حل المسألة هو $\frac{3}{5}$ واحتمال أن يكون بإمكان بدر حل المسألة هو $\frac{2}{3}$ واحتمال أنيكون بإمكان سعيد حل المسألة هو $\frac{1}{2}$ فما احتمال أن يستطيع على الأقل واحد منهم حل المسألة ؟

(أ) $\frac{13}{15}$ (ب) $\frac{14}{15}$ (ج) $\frac{15}{16}$ (د) $\frac{16}{17}$

(١١) ستة أشخاص بينهم ثلاثة أصدقاء A, B, C. أردنا تجليس الأشخاص على ستة مقاعد في صف واحد. إذا أصر الثلاثة أصدقاء الجلوس بجانب بعضهم البعض فما احتمال إنجاز ذلك ؟

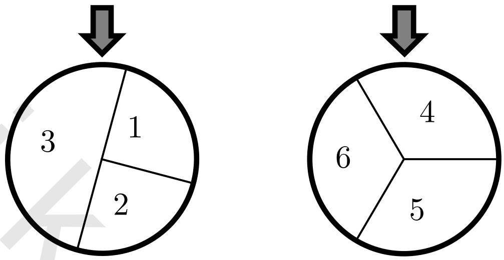
(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{4}{5}$

(١٢) [AJHSME 1991] قسمنا كلاً من الدولابين في الشكل المرفق إلى ثلاثة أقسام متساوية. بعد تدوير الدولابين وتوقفهما يتم أخذ العددين عند المؤشر وضربهما. ما احتمال أن يكون حاصل الضرب هذا زوجياً ؟



(أ) $\frac{5}{9}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{7}{9}$ (د) $\frac{8}{9}$

(١٣) [AJHSME 1994] قمنا بتدوير الدولابين في الشكل المرفق ثم جمعنا العددين اللذين يظهران عند المؤشر بعد توقف الدولابين. ما احتمال أن يكون هذا المجموع زوجياً ؟



(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{5}{12}$

(١٤) [AMC8 2000] رمى كمال قطعة نقود واحدة ورمى إحسان قطعتي نقود. ما احتمال حصول إحسان على العددنفسه من الصور التي يحصل عليها كمال ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{3}{8}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

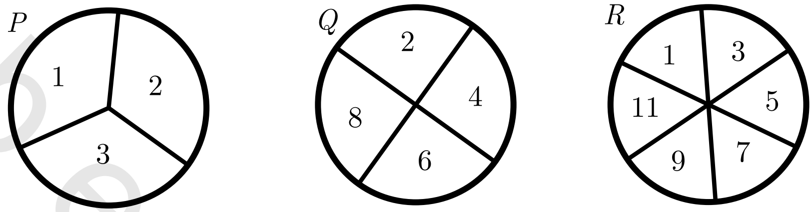
(١٥) [AMC8 2001] رمينا حجري نرد. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب العددين مضاعفاً للعد 5؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{5}{18}$ (ج) $\frac{11}{36}$ (د) $\frac{13}{36}$

(١٦) [AMC8 2002] رمى سعيد قطعة نقود أربع مرات. ما احتمال أن يكون عدد الصور التي حصل عليها أكبر من أو يساوي عدد الكتابات ؟

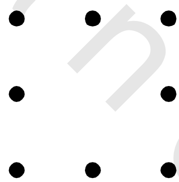
(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{5}{18}$ (ج) $\frac{11}{16}$ (د) $\frac{13}{16}$

(١٧) [AMC8, 2006] بعد توقف دوران الدواليب الثلاثة P , Q , R في الشكل المرفق وجمع الأعداد الثلاثة ما احتمال الحصول على مجموع فردي ؟



(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

(١٨) [AMC8 2008] رسمنا 8 نقاط على محيط مربع طول ضلعه 2سم كما هو مبين في الشكل. اخترنا نقطتين عشوائياً. ما احتمال أن يكون البعد بين النقطتين 1سم؟



(أ) $\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{3}{7}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{7}$

(١٩) [AMC8 2008] رقمنا بلاطات بالأعداد من 1إلى 10ثم وضعناها على سطح مكتب بحيث تكون الأعداد غير ظاهرة. قلبنا إحدى البلاطات عشوائياً ثم رمينا حجر نرد. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب العدد الظاهر على البلاطة والعدد الظاهر على حجر النرد مربعاً كاملاً ؟

(أ) $\frac{7}{60}$ (ب) $\frac{11}{60}$ (ج) $\frac{13}{60}$ (د) $\frac{17}{60}$

(٢٠) [MAΘ 2010] في لعبة التنس بين سامي وكمال نسبة فوز سامي إلى كمال

هي 3 إلى 8. ما احتمال فوز كمال ؟

(أ) $\frac{5}{11}$ (ب) $\frac{6}{11}$ (ج) $\frac{7}{11}$ (د) $\frac{8}{11}$

(٢١) [MAΘ 2007] وضعنا 5 كرات في ثلاثة صناديق عشوائياً. ما احتمال أن نكون قد وضعنا ثلاث كرات في الصندوق الأول وكرتين في الصندوق الثاني و لم نضع أي كرة في الصندوق الثالث ؟

(أ) $\frac{8}{243}$ (ب) $\frac{9}{243}$ (ج) $\frac{10}{243}$ (د) $\frac{11}{243}$

(٢٢) [MAΘ 2007] ألقى اللاعب A حجر نرد ذو ستة وجوه وألقى اللاعب B في الوقت نفسه حجر نرد آخر مماثلاً للحجر الذي ألقاه اللاعب A. إذا كان العدد الظاهر على الحجر الذي ألقاه B أكبر من أو يساوي العدد الظاهر على الحجر الذي ألقاه اللاعب A فإن B يكسب. ما احتمال أن يكسب اللاعب A ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{5}{12}$ (د) $\frac{1}{2}$

(٢٣) [MAΘ 2007] لدينا أربعة صناديق, يحتوي الصندوق الأول على كرة خضراء وأربع كرات زرقاء ويحتوي الصندوق الثاني على كرتين خضراوين وثلاث كرات زرقاء ويحتوي الصندوق الثالث على ثلاث كرات خضراء وكرتين زرقاوين ويحتوي الصندوق الرابع على أربع كرات خضراء وكرة زرقاء. اخترنا صندوقاً عشوائياً وسحبنا منه كرتين. ما احتمال ان يكون لون كل منهما أزرق ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) 1

(٢٤) [MAΘ 2007] إذا كان احتمال وقوع حدث أربع مرات لكل خمس محاولات هو $\frac{10}{243}$ فما احتمال وقوعه في محاولة واحدة ؟

(أ) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٢٥) [MAΘ 2007] تقدم عشرة أشخاص حاصلين على شهادة الدكتوراه للعمل كأعضاء هيئة تدريس في قسم الرياضيات. إذا اخترنا خمسة أشخاص عشوائياً من بينهم فما احتمال أن يكون ثلاثة أشخاص من بين هؤلاء الخمسة هم من بين أفضل خمسة أشخاص من بين المتقدمين العشرة ؟

(أ) 0.297 (ب) 0.321 (ج) 0.335 (د) 0.397

(٢٦) [MAΘ 2007] يوجد العديد من اختبارات قياس درجة التوتر عند الأشخاص. درجات كل من هذه الاختبارات هي $1, 2, 3, 4, 5$ باحتمالات متساوية. اخترنا خمسة اختبارات عشوائياًلإجرائها على شخص. ما احتمال أن تكون درجات هذه الاختبارات الخمسة هي $1, 2, 3, 4,$ 5على التوالي ؟

(أ) $\frac{24}{625}$ (ب) $\frac{29}{625}$ (ج) $\frac{31}{625}$ (د) $\frac{37}{625}$

(٢٧) [MAΘ 2007] اخترنا عشوائياً مجموعة جزئية Tمن مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة $S = \{1,2,3,\cdots,20\}$. ما احتمال أن يكون 18هو أكبر عناصر T؟

(أ) $\frac{1}{8}$ (ب) $\frac{1}{7}$ (ج) $\frac{1}{6}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٢٨) [MAΘ 2007] لنفرض وجود نملة على كل من رؤوس مربع وأن كلاً من

هذه النملات ستتحرك على أحد الضلعين الواقعين على الرأس الموجودة عليه للوصول إلى الرأس الآخر. إذا كان قرار التحرك على أحد الضلعين عشوائياً فما احتمال عدم تلاقي أي من النملات أثناء تحركها ؟

(أ) $\frac{1}{9}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{1}{7}$ (د) $\frac{1}{6}$

(٢٩) [MAΘ 2007] اختارت نوره عددين مختلفين من بين الأعداد $\{1,2,3,\cdots,10\}$. ما احتمال أن يقبل مجموعهما القسمة على 5؟

(أ) $\frac{4}{45}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{2}{15}$ (د) $\frac{7}{45}$

(٣٠) [MAΘ 2007] تتحرك نملة من نقطة الأصل 1سم كل دقيقة باتجاه الشرق أو الغرب أو الشمال أو الجنوب. ما احتمال أن ترجع النملة إلى نقطة الأصل بعد 4 دقائق ؟

(أ) $\frac{7}{64}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{9}{64}$ (د) $\frac{5}{32}$

(٣١) [AMC10A 2006] اخترنا 6أعداد صحيحة موجبة مختلفة من بين الأعداد 1إلى 2006. ما احتمال أن يقبل الفرق بين زوج من هذه الأعداد القسمة على العدد 5؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) 1

(٣٢) [AMC10B 2006] مع كل من أليس وبوب كيس يحتوي على كرة بيضاء وكرة سوداء وكرة حمراء وكرة زرقاء وكرة خضراء. اختارت أليس كرة عشوائياً من كيسها ووضعتها في كيس بوب. بعد ذلك اختار بوب كرة عشوائياً من كيسه ووضعها في كيس أليس. ما احتمال أن تكون محتويات

الكيسين نفسها بعد هذه العملية ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{3}{4}$

(٣٣) [AMC10B 2006] حجرا نرد احتمالات ظهور $1, 2, 3, 4, 5, 6$على كل منهما هي 1إلى 2إلى 3إلى 4إلى 5إلى 6على التوالي. ألقينا الحجرين مرة واحدة. ما احتمال أن يكون مجموع العددين الظاهرين هو 7؟

(أ) $\frac{5}{63}$ (ب) $\frac{6}{63}$ (ج) $\frac{8}{63}$ (د) $\frac{11}{68}$

(٣٤) [MAΘ 2007] لنفرض احتمال أن يضرب البرق بناية عالية جداً في أي يوم من الأيام هو $\frac{2}{5}$. أي يوم من الأيام يمكن أن يكون ماطراً أو غير ماطر. إذا زاد احتمال أن يضرب البرق بناية عالية جداً في اليوم الماطر إلى $\frac{3}{5}$وتناقص احتمال ضرب البرق بناية عالية جداً في اليوم غير الماطر إلى $\frac{3}{10}$فما احتمال أن يكون اليوم المختار عشوائياً ماطراً ؟

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) 1

(٣٥) [MAΘ 2006] إذا كان احتمال أن يكسب يزيد الميدالية الذهبية لمسابقة الأولمبياد في الرياضيات لهذا العام هو $\frac{1}{10}$واحتمال أن يكسب يزيد الميدالية الفضية هو $\frac{1}{3}$فما احتمال أن لا يكسب يزيد أياً من الميداليتين ؟

(أ) $\frac{1}{5}$ (ب) $\frac{2}{5}$ (ج) $\frac{3}{5}$ (د) $\frac{4}{5}$

(٣٦) [MAΘ 2006] اخترنا عددين صحيحين عشوائياًمع الإحلال من المجموعة

$\{-5,-4,\cdots,5\}$. ما احتمال أن يكون حاصل ضربهما سالباً ؟

(أ) $\frac{49}{121}$ (ب) $\frac{50}{121}$ (ج) $\frac{51}{121}$ (د) $\frac{53}{121}$

(٣٧) [MAΘ 2006] لعب جمال وكمال شطرنج طوال اليوم. كسب جمال 11 مباراة وكسب كمال 5 مباريات. إذا كانت احتمالات جميع متتاليات الربح متساوية فما احتمال أن يكون جمال قد كسب المباراة الأولى ؟

(أ) $\frac{7}{16}$ (ب) $\frac{9}{16}$ (ج) $\frac{11}{16}$ (د) $\frac{13}{16}$

(٣٨) [AMC10A, AMC12A 2007] اخترنا أعداداً صحيحة a، b، c، d ليست بالضرورة مختلفة عشوائياً من مجموعة الأعداد $0,1,2,\cdots,2007$. ما احتمال أن يكون الفرق $ad-bc$ زوجياً ؟

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) $\frac{3}{4}$ (ج) $\frac{7}{8}$ (د) 1

(٣٩) [AMC10A 2008] استخدمت هيفاء الطريقة التالية لتوليد متتالية من الأعداد: الحد الأول من المتتالية يساوي 6. للحصول على الحدود بعد الحد الأول تقوم سعاد بإلقاء قطعة نقود. إذا كان الوجه الظاهر صورة, تقوم سعاد بمضاعفة حد المتتالية وطرح 1من الناتج وإذا كان الوجه الظاهر كتابة تقوم سعاد بقسمة حد المتتالية على 2وطرح 1من الناتج لتحصل على الحد الذي يلي ذلك. ما احتمال أن يكون الحد الرابع من متتالية سعاد عدداً صحيحاً ؟

(أ) $\frac{3}{8}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{5}{8}$ (د) $\frac{7}{8}$

(٤٠) [AMC10B 2008] وضعنا ثلاث خرزات حمراء, خرزتان بيضاوان, خرزة

واحدة زرقاء عشوائياً في صف واحد. ما احتمال أن لا تكون خرزتان متجاورتان لهما اللون نفسه ؟

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$

(٤١) رمينا 100 قطعة نقود متماثلة مرة واحدة. إذا كان احتمال ظهور صورة على كل منها هو p واحتمال ظهور صورة على 50 قطعة يساوي احتمال ظهور صورة على 51 قطعة فما قيمة p ؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{50}{101}$ (ج) $\frac{51}{101}$ (د) $\frac{53}{100}$

(٤٢) أثناء التدريب على إطلاق النار لاحظ أحمد أنه يصيب الهدف مرة واحدة من بين كل خمس محاولات. إذا أطلق أحمد النار 5 مرات فما احتمال أن يصيب

الهدف ؟

(أ) $\frac{1024}{3125}$ (ب) $\frac{2101}{3125}$ (ج) $\frac{3101}{3125}$ (د) 1

(٤٣) إذا كان احتمال إصابة أحمد للهدف هو 3 أمثال عدم إصابته الهدف. ما احتمال إصابة أحمد للهدف 3 مرات من بين 5 محاولات ؟

(أ) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ (ب) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ (ج) $\frac{135}{512}$ (د) $\frac{135}{1024}$

(٤٤) سألنا الطفلين أحمد وبدر السؤال التالي: من منكما سكب الحليب ؟ إذا علمنا من تجارب سابقة أن أحمد يقول الصدق في 7 أعشار الحالات وبدر يقول الصدق في 3 أخماس الحالات فما احتمال أن تكون إجابتهما عن السؤال متناقضة ؟

(أ) $\frac{23}{50}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{27}{50}$ (د) 1

(٤٥) اخترنا 7 أعداد من بين الأعداد $1,2,3,\cdots,100$. ما احتمال أن يكون العدد 50 هو وسيط هذه الاعداد ؟

(أ) 0.01 (ب) 0.02 (ج) 0.03 (د) 0.04

(٤٦) كونا عدداً من خمس مراتب مأخوذة من المراتب $1,2,3,4,5$ بدون تكرار. ما احتمال أن يقبل العدد القسمة على العدد 4؟

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{5}$

(٤٧) كتبنا الأعداد من 1 إلى 10 على أوراق حمراء كل منها يحمل عدداً واحداً وكتبنا الأعداد من 11 إلى 30 على أوراق زرقاء كل منها يحمل عدداً واحداً. وضعنا الأوراق جميعاً في صندوق وسحبنا ورقة واحدة. إذا كانت الورقة زرقاء فما احتمال أن يكون العدد المكتوب عليها هو العدد 11؟

(أ) $\frac{1}{30}$ (ب) $\frac{1}{20}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{2}{3}$

(٤٨) ألقينا 6 أحجار نرد مرة واحدة. ما احتمال ان يكون مجموع الأعداد الظاهرة يساوي 8؟

(أ) $\frac{1}{6^5}$ (ب) $\frac{15}{6^6}$ (ج) $\frac{21}{6^6}$ (د) $\frac{45}{6^8}$

(٤٩) لدينا 6 أعداد صحيحة موجبة و 8 أعداد صحيحة سالبة. اخترنا 4 أعداد من بينها. ما احتمال أن يكون حاصل ضرب هذه الأعداد موجباً ؟

(أ) $\frac{101}{1001}$ (ب) $\frac{202}{1001}$ (ج) $\frac{303}{1001}$ (د) $\frac{505}{1001}$

(٥٠) اخترنا عدداً من بين الأعداد 1 إلى 100. ما احتمال أن يقبل العدد القسمة

على 11أو 17؟

(أ) $\frac{1}{20}$ (ب) $\frac{9}{100}$ (ج) $\frac{7}{50}$ (د) $\frac{9}{50}$

(٥١) دعا الدكتور محمد بعض زملائه إلى البر يوم الغد. تدل الاحصاءات أن عدد الأيام الماطرة في السنوات القليلة السابقة كان بواقع 11يوماً في السنة. توقعت دائرة الأرصاد الجوية أن يوم غد سيكون ماطراً. عندما يكون الجو ماطراً فإن دائرة الأرصاد الجوية تتوقع ذلك بدقة تساوي 80% .وأما عندما لا يكون الجو ماطراً فإن دائرة الأرصاد الجوية تتوقع أن يكون الجو ماطراً بدقة يساوي 20%. ما احتمال أن يكون الجو ماطراً يوم غد ؟ (عدد أيام السنة

هو 365).

(أ) 0.081 (ب) 0.109 (ج) 0.139 (د) 0.2

(٥٢) لدينا رقعة مربعة طول ضلعها 4 سم. قسمناها إلى 16مربعاً طول ضلع كل منها 1سم. اخترنا مربعين عشوائياً. ما احتمال أن لا يكونا متجاورين ؟

(أ) $\frac{3}{10}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) $\frac{7}{10}$ (د) $\frac{9}{10}$

(٥٣) اخترنا عدداً عشوائياً من بين الأعداد 10إلى 99. ما احتمال أن يكون باقي قسمته على مجموع مرتبتيه يساوي 3؟

(أ) $\frac{7}{45}$ (ب) $\frac{8}{45}$ (ج) $\frac{31}{50}$ (د) $\frac{33}{50}$

(٥٤) يختار أحمد عدداً من 1إلى 6ثم يقوم بدر بإلقاء ثلاثة أحجار نرد. إذا ظهر العدد الذي اختاره أحمد على أحد الأحجار الثلاثة يكون هو الرابح. ما احتمال أن يكون أحمد هو الرابح ؟

(أ) 0.4 (ب) 0.42 (ج) 0.5 (د) 0.75

(٥٥) يحتوي الوعاء I على 8 كرات بيضاء وخمس كرات سوداء ويحتوي الوعاء II على 10 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء. سحبنا كرة من الصندوق I ثم أضفناها إلى الصندوق II وبعد ذلك سحبنا كرة من الصندوق II. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق I سوداء إذا كانت الكرة المسحوبة من الصندوق II سوداء ؟

(أ) $\frac{25}{72}$ (ب) $\frac{29}{72}$ (ج) $\frac{31}{72}$ (د) $\frac{37}{72}$

(٥٦) رقمنا عشرين كرة متماثلة بالأعداد من 1 إلى 20 ثم وضعناها في وعاء. سحبنا كرة من الوعاء عشوائياً وسجلنا العدد المكتوب عليها ثم أعدناها إلى الوعاء. كررنا ذلك أربع مرات. ما أقرب احتمال أن تكون متتالية الأعداد التي سجلناها على الكرات الأربع تناقصية فعلاً ؟ أي أن $a_1 > a_2 > a_3 > a_4$ إذا كان a_i هو العدد المكتوب على الكرة i .

(أ) 0.42 (ب) 0.45 (ج) 0.46 (د) 0.48

(٥٧) لدينا أربعة صناديق A , B , C , D . يحتوي الصندوق A على 15 كرة حمراء و 5 وكرات خضراء ويحتوي الصندوق B على 13 كرة حمراء و 7 كرات خضراء ويحتوي الصندوق C على 10 كرات حمراء و 10 كرات خضراء ويحتوي الصندوق D على 8 كرات حمراء و 12 كرة خضراء. اخترنا صندوقاً عشوائياًوسحبنا منه كرة عشوائياً ووجدنا أنها حمراء. ما احتمال أن تكون هذه الكرة قد سحبت من الصندوق D؟

(أ) $\frac{2}{23}$ (ب) $\frac{3}{23}$ (ج) $\frac{4}{23}$ (د) $\frac{7}{23}$

(٥٨) اخترنا نقطة (x,y)عشوائياً في المنطقة المحدودة: $1 \le x \le 4$و $2 \le y \le 6$. ما احتمال أن تقع النقطة في المنطقة $x + y \ge 5$.

(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (ج) $\frac{4}{5}$ (د) $\frac{5}{6}$

(٥٩) [AIME 1990]ألقينا قطعة نقود 10مرات. ما احتمال عدم ظهور صور في رميات متتالية ؟

(أ) $\frac{3}{64}$ (ب) $\frac{5}{64}$ (ج) $\frac{7}{64}$ (د) $\frac{9}{64}$

(٦٠) [Mathcounts 2005] يلعب أحمد وبدر اللعبة التالية: يقومان بإلقاء حجري نرد مرة واحدة. الرابح هو من يحصل أولاً على الحدث $(1,1)$. إذا بدأ أحمد اللعبة فما احتمال أن يكون هو الرابح ؟

(أ) $\frac{36}{71}$ (ب) $\frac{37}{71}$ (ج) $\frac{38}{71}$ (د) $\frac{39}{71}$

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ب	(٢) أ	(٣) د	(٤) ج	(٥) ج
(٦) د	(٧) أ	(٨) د	(٩) ب	(١٠) ب
(١١) أ	(١٢) ج	(١٣) د	(١٤) ب	(١٥) ج
(١٦) ج	(١٧) أ	(١٨) أ	(١٩) ب	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) ج	(٢٣) أ	(٢٤) ب	(٢٥) د
(٢٦) أ	(٢٧) أ	(٢٨) ب	(٢٩) د	(٣٠) ج
(٣١) د	(٣٢) أ	(٣٣) ج	(٣٤) أ	(٣٥) ج
(٣٦) ب	(٣٧) ج	(٣٨) أ	(٣٩) ج	(٤٠) أ
(٤١) ج	(٤٢) ب	(٤٣) ج	(٤٤) أ	(٤٥) ب
(٤٦) د	(٤٧) ب	(٤٨) ج	(٤٩) د	(٥٠) ج
(٥١) ب	(٥٢) د	(٥٣) أ	(٥٤) ب	(٥٥) أ
(٥٦) د	(٥٧) ج	(٥٨) د	(٥٩) د	(٦٠) أ

المراجع
Bibliography

[١] البركاتي، سلطان سعود، مبادئ أساسـية لأولمبيـاد الرياضـيات، مطـابع الحميضي، الطبعة الأولى ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

[٢] الجوعي، عبدالله محمد، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى، ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٣] سمحان، معروف عبدالرحمن وأبوعمه، عبدالرحمن محمد سليمان والـذكير، فوزي أحمد، قاموس العلوم الرياضية، النشر العلمي والمطـابع، منشـورات جامعة الملك سعود ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م).

[٤] سمحان، معروف عبدالرحمن والسنوسي، صالح عبدالله، استراتيجيات حلول المسائل (مترجم)، مطابع الحميضي ١٤٣٤هـ (٢٠١٣م).

[5] Atkins WJ, Edwards JD, King DJ, O'Halloran PJ,and Taylor PJ, Australian Mathematics Competition Book 1 (1978-1984), AMT Publishing 2004.

[6] Atkins WJ, Munro JE, and Taylor PJ,Australian Mathematics Competition (1992-1998), AMT Publishing 2009.

[7] Atkins WJ, Taylor PJ, Australian Mathematics Competition (1999-2005), AMT Publishing 2007.

[8] Batterson J, Competition Math For Middle School, AoPSInc, 2011.

[9] Canadian Mathematics Competitions, Past Contest Problems With Solutions, Gauss (Grade 7), Gauss (Grade 8), Pascal(Grade 9), Cayley (Grade 10), and Fermat (Grade 11) (1997-2012).

[10] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving,Volume 1: The Basics, 7th Edition, AoPS Inc. 2006.

[11] LehoczkySandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 2: And Beyond, 7th Edition, AoPS Inc. 2006.

[12] Mu Alpha Theta (MAΘ), A Great Collection of High School Problems and Solutions from Past Contests (1995-2011).

[13] O'Halloran PJ, Pollard GH, and Taylor PJ, Ausralian Mathematics Competition Book 2 (1985-1991), AMT Publishing 2003.