الفصل الثاني

التباديل والتوافيق
Permutations and Combinations

المضروب [Factorial]

نحتاج لحل العديد من مسائل العد إلى ضرب أعداد صحيحة موجبة متتالية كما رأينا في الفصل الأول، على سبيل المثال،عدد طرق اصطفاف 5 طلاب في صف هو $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$ و عدد طرق اختيار ثلاثة طلاب على التوالي من 9 طلاب هو $9 \times 8 \times 7$.

ولغرض تسهيل هذه الحسابات نقدم مفهوم مضروب العدد الصحيح الموجب n ويرمز له بالرمز $n!$ (يقرأ مضروب n) ويعرف على أنه

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3 \times 2 \times 1}$$

لاحظ إمكانية كتابة $9 \times 8 \times 7$ باستخدام المضروب على النحو التالي:

$$9 \times 8 \times 7 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{9!}{6!}$$

لاحظ أيضاً أن

$$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)! = \cdots$$

وعندما يكون $n = 1$ نرى أن $1! = 1 \times 0!$. ولذا نعرف $0! = 1$.

مثال (١) بسط المقدار $\dfrac{6! + 5! - 4!}{4!}$.

الحل

$$\frac{6! + 5! - 4!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4! + 5 \times 4! - 4!}{4!} = \frac{4!(30+5-1)}{4!} = 34 \;. \diamond$$

مثال (٢) بسط المقدار $\dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{n+3}$

الحل

$$\frac{(n+2)! + (n+1)!}{n+3} = \frac{(n+1)!(n+2+1)}{n+3}$$

$$= \frac{(n+1)!(n+3)}{n+3} = (n+1)! \quad \diamond$$

التباديل[Permutations]

تبديل مجموعة من الرموز هو أي ترتيب لهذه الرموز. على سبيل المثال، BAC هو تبديل للرموز A ، B ، C . ومن الممكن إيجاد جميع هذه التبديلات وهي

ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA .

أحياناً، يكون اهتمامنا منصباً على إيجاد تبديلات بعض الرموز وليس جميعها. فمثلاً، تبديلات رمزين من رموز المجموعة $\{A,B,C\}$ هي

AB , BA , CA , AC , BC , CB

إذا كانت S مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وكان $r \le n$ فنرمز لعدد تبديلات r من عناصر المجموعة S بالرمز $P(n,r)$ أو الرمز ${}_nP_r$ أو P_r^n .

من السهل إيجاد هذا العدد على النحو التالي: يمكن اختيار العنصر الأول بعدد من الطرق يساوي n (لأن عدد عناصر المجموعة يساوي n). ومن ثم يمكن اختيار العنصر الثاني من التبديل بعدد من الطرق يساوي $n-1$. وبالمثل، عدد طرق اختيار العنصر الثالث يساوي $n-2$ وهكذا إلى أن نجد أن عدد طرق اختيار العنصر r يساوي $n-r+1$. وبهذا نجد من مبدأ الضرب أن

$$\boxed{P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

وفي الحالة الخاصة التي يكون فيها $r = n$ نجد أن

$$\boxed{P(n,n) = \frac{n!}{0!} = n!}$$

مثال (٣) أراد خمسة أصدقاء، أحمد ومحمد ويونس وحمزة وهاشم أن يقفوا في صف واحد لالتقاط صورة جماعية.

(أ) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

(ب) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أصر يونس أن يكون في آخر الصف من اليمين؟

(ج) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أصر أحمد أن يكون الثاني من اليسار ومحمد الثاني من اليمين؟

(د) بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أصر أحمد و هاشم على أن يكونا في بداية أو نهاية الصف؟

الحل

(أ) عدد الطرق في هذه الحالة هو عدد تبديلات خمسة عناصر وهو $5! = 120$

.

(ب) يمكن اختيار يونس بطريقة واحدة والأربعة أشخاص الآخرين بعدد $4!$ من الطرق. إذن، عدد الطرق يساوي $24 = 4! \times 1$.

(ج) يمكن اختيار كل من أحمد ومحمد بطريقة واحدة والبقية بعدد $3!$ من الطرق. إذن، عدد الطرق يساوي $6 = 3! \times 1 \times 1$.

(د) يمكن اختيار أحمد أو هاشم في بداية الصف بطريقتين وبعد اختيار أحدهما ليكون في البداية نضع الآخر في النهاية بطريقة واحدة. بعد ذلك عدد طرق ترتيب الثلاثة الباقيين يساوي $3!$. إذن، عدد الطرق هو $12 = 3! \times 1 \times 2$. ◇

مثال (٤) أردنا ترتيب خمسة كتب رياضيات مختلفة وكتابي فيزياء مختلفين في صف واحد على أحد رفوف مكتبة. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك إذا أردنا أن نضع كتابي الفيزياء بجانب بعضهما البعض؟

الحل

يمكن وضع كتابي الفيزياء A و B بجانب بعضهما البعض بطريقتين هما AB و BA. الآن، يمكن النظر إلى الكتابين على أنهما كتاب واحد. وبهذا نحتاج إلى إيجاد عدد طرق ترتيب 6 كتب (5 رياضيات وكتاب فيزياء). وهذا العدد هو $6!$. إذن، عدد الطرق المطلوب هو $1440 = 6! \times 2$. ◇

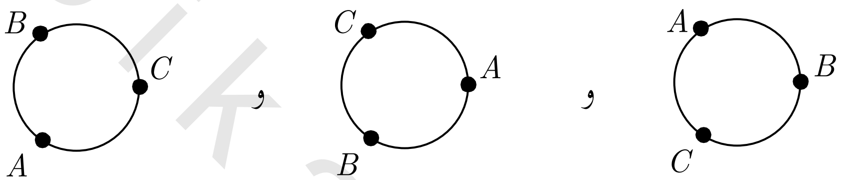
التباديل الدائرية [Circular Permutations]

عدد تبديلات الحروف الثلاثة A ، B ، C هو 6 وهي

$$ABC\ ,\ ACB\ ,\ BAC\ ,\ BCA\ ,\ CAB\ ,\ CBA$$

ولكن لو أردنا وضع هذه الحروف على دائرة فإننا سنلاحظ وجود تبديلين فقط هما

لأن



تعتبر تبديلاً دائرياً واحداً.وبصورة عامة إذا أردنا إيجاد عدد التبديلات الدائرية لمجموعة مكونة من n من العناصر فإن هذا العدد يكون

$$\boxed{\frac{n!}{n} = (n-1)!}$$

لأن أي تبديل يقابل n من الأنساق الدائرية غير المختلفة.

التوافيق [Combinations]

إذا كانت $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ وكان $r \leq n$ فإن التوفيق من النوع r هو اختيار غير مرتب لعدد r من عناصر A، أي أنه بكل بساطة مجموعة جزئية من A عدد عناصرها r. على سبيل المثال، إذا أردنا اختيار لجنة مكونة من ثلاثة أشخاص من بين مجموعة الأشخاص $\{A, B, C, D, E\}$ فإن هذه الخيارات، حيث الترتيب غير مهم هي

$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE$$

لاحظ أن عدد هذه الخيارات يساوي 10.

يرمز عادة لعدد خيارات r عنصراً من مجموعة مكونة من n عنصراً بالرمز $C(n,r)$ أو $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ أو C_r^n ويسمى أيضاً بمعامل ذات الحدين. إذا كان $0 \leq r \leq n$ فإن

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}}$$

ويمكن رؤية ذلك، بملاحظة أنه يمكن الحصول على $P(n,r)$ من $C(n,r)$ وذلك باختيار ترتيب العناصر التي عددها r (عدد طرق ترتيبها هو $r!$). إذن، $P(n,r) = r!C(n,r)$. أي أن $C(n,r) = \dfrac{P(n,r)}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

ملحوظة

لاحظ أن $C(n,r) = C(n,n-r)$ حيث $r \leq n$. وذلك لأن

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r) .$$

أو لأن عدد طرق اختيار r عنصراً من n عنصراً هو نفس عدد طرق اختيار $n-r$ عنصراً من n عنصراً.

مثال (٥) أردنا تكوين لجنة مكونة من 4 أشخاص من بين 7 مهندسين و 6 إداريين. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك ؟

(أ) إذا لم يوجد شروط على تكوين اللجنة.

(ب) إذا كانت اللجنة مكونة من مهندسيْن وإدارييْن.

(ج) إذا كانت اللجنة تحتوي على الأقل مهندساً واحداً وعلى الأقل إدارياً واحداً.

الحل

(أ) إذا لم نضع أي شروط على تكوين اللجنة فنحتاج إلى اختيار 4 أشخاص من بين 13 شخصاً. وبهذا يكون عدد الطرق الممكنة هو

$$C(13,4) = \frac{13!}{4! \times 9!} = 715$$

(ب) في هذه الحالة نختار مهندسين من بين 7 مهندسين بعدد من الطرق يساوي

$$C(7,2) = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$$

ونختار إداريين من بين 6 إداريين بعدد من الطرق يساوي

$$C(6,2) = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

إذن، عدد طرق تكوين اللجنة هو

$$C(7,2) \times C(6,2) = 21 \times 15 = 315 .$$

(ج) عدد طرق اختيار اللجنة في هذه الحالة هو

$$C(7,3) \times C(6,1) + C(7,2) \times C(6,2) + C(7,1) \times C(6,3)$$

أو

$$C(13,4) - C(7,4) \times C(6,0) - C(7,0) \times C(6,4)$$

وفي كلتا الحالتين هذا العدد يساوي 665. ◇

مثال (٦) وضعنا 8 نقاط مختلفة وهي A, B, C, D, E, F, G, H على محيط دائرة.

(أ) كم عدد المستقيمات التي يمكن تكوينها؟

(ب) كم عدد المستقيمات التي يمكن تكوينها والتي تمر بالنقطة B؟

(ج) كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها؟

(د) كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون B هي أحد الرؤوس؟

الحل

(أ) كل مستقيم يمر بنقطتين. ولذا فعدد المستقيمات هو عدد طرق اختيار عنصرين من 8 عناصر وهذا يساوي $C(8,2)=\dfrac{8!}{2!\times 6!}=28$

(ب) بما أن المستقيمات تمر بالنقطة B فيمكن تكوين المستقيمات بعدد من الطرق $C(7,1)=7$.

(ج) لكل مثلث ثلاثةرؤوس. إذن، عدد المثلثات هو عدد طرق اختيار 3 عناصر من بين 8 عناصر وهذا يساوي $C(8,3)=\dfrac{8!}{3!\times 5!}=56$.

(د) بما أن B هي أحد رؤوس المثلث فنحتاج إلى نقطتين للرأسين الآخرين. إذن، عدد المثلثات هو $C(7,2)=\dfrac{7!}{2!\times 5!}=21$. ◇

التباديل مع وجود عناصر متشابهة

[Permutations with Indistinguishable Objects]

في العديد من مسائل العد نحتاج لمعالجة وجود عناصر متشابهة (لا يمكن تمييزها عن بعضها البعض) ونوضح ذلك في المثال التالي.

مثال (٧) ما عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بإعادة ترتيب حروف الكلمة summertime ؟

الحل

الكلمة مكونة من عشرة حروف حيث الحرف m مكرر ثلاث مرات والحرف e مكرر مرتين. ولذا، يكون المطلوب إيجاد عدد تبديلات مجموعة مكونة من عشرة حروف مع تكرار بعض حروفها. ولإنجاز ذلك، لاحظ أن الثلاثة حروف m يمكن أن توضع في أي من العشرة مواقع ويمكن إنجاز ذلك بعدد من الطرق يساوي $C(10,3)$. وبهذا يتبقى لنا 7 مواقع. بعد ذلك يمكن وضع أي من الحرفين e بأي من هذه المواقع السبعة بعدد من الطرق يساوي $C(7,2)$. الآن، تبقى 5 مواقع. نضع الآن الحرف s بأي من هذه المواقع الخمسة بعدد من الطرق يساوي $C(5,1)$، ثم نضع الحروف u، r، t، i بعدد من الطرق $C(4,1)$، $C(3,1)$، $C(2,1)$، $C(1,1)$ على التوالي. الآن، استناداً إلى مبدأ الضرب نجد أن عدد تبديلات الكلمة Summertime يساوي

$$\begin{aligned}
&C(10,3)\times C(7,2)\times C(5,1)\times C(4,1)\times C(3,1)\times C(2,1)\times C(1,1)\\
&=\frac{10!}{3!\times 7!}\times\frac{7!}{2!\times 5!}\times\frac{5!}{1!\times 4!}\times\frac{4!}{1!\times 3!}\times\frac{3!}{1!\times 2!}\times\frac{2!}{1!\times 1!}\times\frac{1!}{1!\times 0!}\\
&=\frac{10!}{3!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!}
\end{aligned}$$

وهذا العدد يساوي 50400. ◇

يمكن تعميم المثال (٧) لنحصل على:

عدد التبديلات المختلفة لمجموعة عدد عناصرها n حيث n_1 من عناصرها متشابهة من النمط الأول و n_2 من عناصرها متشابهة من النمط الثاني، ...، n_k من عناصرها متشابهة من النمط n_k يساوي

$$\frac{n\,!}{n_1\,! \times n_2\,! \times \cdots \times n_k\,!}$$

مثال (٨) ما عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بترتيب حروف الكلمة parallel؟

الحل

عدد التبديلات المطلوب هو

$$\frac{8!}{3! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 2} = 560. \qquad \diamond$$

استراتيجية النجوم والأشرطة [Stars and Bars Strategy]

تستخدم هذه الاستراتيجية لإيجاد عدد طرق توزيع n من العناصر المتشابهة على r من الأوعية المختلفة $A_1, A_2, \ldots, A_r$. لتوضيح هذه الطريقة نبدأ بالمثال التالي:

مثال (٩) بكم طريقة يمكن أن يختار أحمد أربعة أقلام من بين ثلاثة أنواع من الأقلام هي مرسم، حبر جاف، حبر سائل بفرض توافر أربعة أقلام على الأقل من كل نوع ؟

الحل

لاحظ أن هذه هي مسألة اختيار أربعة عناصر من مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر هي مرسم، حبر جاف، حبر سائل مع السماح بتكرار هذه العناصر. ويمكن النظر

إليها على أنها إيجاد عدد طرق توزيع 4 عناصر متشابهة وهي الأقلام على ثلاثة أوعية مختلفة هي مرسم، حبر جاف، حبر سائل.

الحل المباشر لهذه المسألة يكون بسرد الخيارات الممكنة ومن ثم عدها. ولتسهيل عملية العد نفرض أن الثلاثي المرتب (A_1, A_2, A_3) يرمز لعدد أقلام المرسم، الحبر الجاف، الحبر السائل الذي تم اختياره. نقسم الآن المسألة حسب نوع الأقلام المختارة.

(أ) الأقلام الأربعة من نوع واحد. في هذه الحالة لدينا ثلاثة خيارات هي

$$(0,0,4)\ ,\ (0,4,0)\ ,\ (4,0,0)$$

(ب) ثلاثة أقلام من نوع وقلم من نوع آخر. في هذه الحالة لدينا ستة خيارات

$$(3,1,0)\ ,\ (3,0,1)\ ,\ (1,3,0)\ ,\ (1,0,3)\ ,\ (0,3,1)\ ,\ (0,1,3)$$

(ج) قلمان من نوع والقلمان الآخران من نوع ثان. لدينا في هذه الحالة 3 خيارات

$$(2,2,0)\ ,\ (2,0,2)\ ,\ (0,2,2)$$

(د) قلمان من نوع وقلم من كل من النوعين الآخرين. هذه هي الحالة الأخيرة ونحصل منها على ثلاثة خيارات هي

$$(2,1,1)\ ,\ (1,2,1)\ ,\ (1,1,2)$$

وبهذا يكون عدد طرق اختيار الأربعة أقلام هو

$$3 + 6 + 3 + 3 = 15\ .$$

يمكن تسهيل حل المسألة باستخدام استراتيجية الأشرطة والنجوم على النحو التالي: نفرض أن المكتبة وضعت الأقلام على رف مقسوم إلى ثلاثة أجزاء مفصولة عن بعضها البعض بعمودين من الخشب (شريطين) بحيث يوضع في كل قسم من هذه

الأقسام نوع واحد من أنواع الأقلام الثلاثة. كما هو مبين في الشكل أدناه.

أقلامالمرسم | أقلامالحبرالجاف | أقلامالحبرالسائل

الآن، اختيار أربعة أقلام يتم بوضع أربعة نجوم في الأجزاء الثلاثة التي تمثل الخيار.

على سبيل المثال، الشكل المرفق يبين أربع خيارات

* * * *		
* * *	*	
* *	* *	
* *	*	*

وبهذا فإن عدد طرق اختيار أربعة أقلام يقابل عدد طرق ترتيب شريطين وأربعة نجوم. أي هو عدد طرق اختيار مواقع أربعة نجوم من بين ستة مواقع وهذا العدد هو

$$C(6,4) = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15 \; . \qquad \diamond$$

مثال (١٠) لدى عبدالله 6ريالات ويريد توزيعها على أربعة من أخوته، محمد، أحمد، فهد، سلطان. بكم طريقة يمكن عمل ذلك ؟

الحل

نفرض أن لدينا ثلاثة أشرطة لفصل نصيب كل من الأخوة الأربعة

محمد | أحمد | فهد | سلطان

وستة نجوم تمثل كل منها ريالاً. إذن، المطلوب هو عدد طرق اختيار مواقع 6نجوم من بين 9مواقع وهذا العدد هو

$$C(9,6) = \frac{9!}{6! \times 3!} = 84 \; . \qquad \diamond$$

مثال (١١) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

؟$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 60$

الحل

لاحظ أن الحل لهذه المعادلة هو أربعة أعداد صحيحة غير سالبة مجموعها 60. ولإيجاد عدد الحلول نضع ثلاثة أشرطة لفصل المتغيرات

$$x_1 \mid x_2 \mid x_3 \mid x_4$$

ونحتاج إلى 60 نجمة لتمثيل العدد 60. ولهذا يكون المطلوب هو عدد اختيار 60 موقعاً من بين 63 موقعاً وهذا العدد يساوي

$$C(63,60) = \frac{63 \times 62 \times 61}{6} = 39711$$ ◇

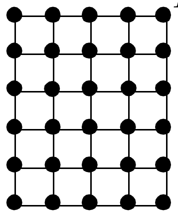
يمكن تعميم حل الأمثلة الثلاثة السابقة على النحو التالي:

> عدد طرق اختيار r من العناصر من مجموعة مكونة من n من العناصر مع السماح بالتكرار هو عدد طرق اختيار مواقع r من النجوم من بين عدد من المواقع يساوي $n+r-1$. أي عدد طرق اختيار r عنصراً من مجموعة عدد عناصرها $n+r-1$ دون مراعاة الترتيب وهذا العدد هو $C(n+r-1,r)$.

نود الإشارة هنا إلى إمكانية استخدام هذه الاستراتيجية بطرق أخرى ستتضح في أمثلة لاحقة.

عدد المسارات [Number of Paths]

مثال (١٢) لدينا الشبكة من النوع 4×5 المبينة في الشكل أدناه



المطلوب هو إيجاد عدد المسارات (الطرق) للوصول من الركن A إلى الركن B بالتحرك على خطوط الشبكة بخطوات طولها 1 باتجاه الشرق (إلى اليمين) أو باتجاه الشمال (إلى الأعلى) فقط. لاحظ أولاً أن المسار يحتاج إلى 4 خطوات أفقية و 5 خطوات رأسية. ولذا فطول المسار يساوي 9. الآن، إذا رمزنا للخطوة الأفقية بالرمز H والخطوة الرأسية بالرمز V فإن أي مسار هو عبارة عن كلمة مكونة من 9 حروف أربع منها H والخمسة الأخرى هي V. وبهذا يكون عدد المسارات هو عدد ترتيب حروف كلمة طولها 9 حروف (4 حروف H و 5 حروف V). هذا العدد ما هو إلا عدد التبديلات المختلفة لمجموعة عدد عناصرها 9 تحتوي على 4 عناصر متشابهة من النمط الأول (H) و 5 عناصر متشابهة من النمط الثاني (V). وبهذا يكون عدد المسارات يساوي $\frac{9!}{4! \times 5!}$. $\diamond$

ملحوظة

لاحظ أنه إذا كانت الشبكة من النوع $m \times n$ فإن عدد المسارات هو $\frac{(m+n)!}{m! \times n!}$ ، أي $C(n+m,m)$ أو $C(n+m,n)$.

عدد مستطيلات شبكة[Number of Rectangles of a Grid]

مثال (١٣) ما عدد المستطيلات في الشبكة 5×4 المبينة في المثال (١٢)؟

الحل

لاحظ أن المستطيل يتحدد تماماً بمعرفة ركنين متقابلين أو بمعرفة ضلعين متقابلين. ولذا سنقدم حلين لهذه المسألة.

الحل الأول: بمعرفة ركنين متقابلين. ولهذا نحتاج إلى عد المستطيلات التي تشترك بركن علوي على النحو التالي: لكل ركن من أركان الشبكة إذا وجد عدد m من المستقيمات أسفل هذا الركن وعدد n من المستقيمات على يمين هذا الركن فإن عدد مستطيلات الشبكة التي يكون ذلك الركن هو الركن العلوي الأيسر لها يساوي $m \times n$. ولذا فعدد مستطيلات الشبكة مبين في الشكل أدناه

5×4	5×3	5×2	5×1
4×4	4×3	4×2	4×1
3×4	3×3	3×2	3×1
2×4	2×3	2×2	2×1
1×4	1×3	1×2	1×1

لاحظ أن مجموع أعداد الأعمدة هو

$$
\begin{aligned}
&4(1+2+3+4+5)+3(1+2+3+4+5)\\
&+2(1+2+3+4+5)+1(1+2+3+4+5)\\
&=15(4+3+2+1)=15\times 10=150
\end{aligned}
$$

وهذا هو عدد المستطيلات المطلوبة.

يمكن تعميم هذا الحل لإيجاد عدد مستطيلات شبكة من النوع $m \times n$ ليكون

$$
\begin{aligned}
&(1+2+3+\cdots+m)(1+2+3+\cdots+n)\\
&=\frac{m(m+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{mn(m+1)(n+1)}{4}
\end{aligned}
$$

الحل الثاني: بمعرفة ضلعين متقابلين. بما أن كل خطين أفقيين متوازيين وكل خطين رأسيين متوازيين يحددان مستطيلاً فعدد المستطيلات التي تحددها الخطوط المتوازية

الأفقية والخطوط المتوازية الرأسية هو عدد مستطيلات الشبكة وهو

$$C(6,2)\times C(5,2)=\frac{6!}{4!\times 2!}\times\frac{5!}{3!\times 2!}=15\times 10=150 .$$

يمكن تعميم هذه الطريقة أيضاً لنجد أن عدد مستطيلات شبكة من النوع $m\times n$:

$$C(m+1,2)\times C(n+1,2) . \qquad \diamond$$

ننهي هذا الفصل بتقديم المزيد من الأمثلة على استخدام التباديل والتوافيق في العد.

مثال (١٤) أراد ناصر شراء طبق من الحلويات لتقديمه هدية لأخته هدى فوجد أن لدى المحل علبة تكفي لثماني قطع من الحلويات وأن المحل يبيع أربعة أنواع من الحلويات فقرر أن يشتري ثماني قطع لوضعها في العلبة. بكم طريقة مختلفة يستطيع ناصر أن يقدم الهدية لأخته هدى؟

الحل

نفصل بين أنواع الحلويات بثلاثة أشرطة ونمثل الثماني قطع بواسطة ثمانية نجوم. إذن، المسألة الآن، هي إيجاد عدد طرق اختيار 8 مواقع من بين 11 موقعاً. هذا العدد يساوي $C(11,8)=\frac{11!}{8!\times 3!}=165$. $\diamond$

مثال (١٥) كم عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $x_1+x_2+x_3+x_4=60$ ؟

الحل

لاحظ أولاً أن الأعداد الصحيحة هنا موجبة. ولكن يمكن تحويل هذه المسألة إلى مسألة مشابهة لتلك المقدمة في المثال (١١) بوضع $y_i=x_i-1$ فتصبح المعادلة تكافئ المعادلة

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 56$$

ويكون عدد الحلول في هذه الحالة هو $C(59,56) = \dfrac{59!}{56! \times 3!} = 32509$.

حل آخر: يمكن استخدام النجوم والأشرطة لحل هذه المسألة على النحو التالي: لدينا 60 نجماً و 3أشرطة كما في السابق ولكن يجب أن نضع نجماً واحداً على الأقل بين كل شريطين ولا بد من وجود نجم واحد على الأقل قبل الشريط في أقصى اليمين ونجم واحد على الأقل بعد الشريط في أقصى اليسار. ولحل هذه الإشكالية نضع الأشرطة بين النجوم. أي $* - * - * - * \cdots *$ويكون لدينا 59 موقعاً لوضع الأشرطة الثلاثة. وبهذا يكون عدد الطرق يساوي $C(59,3)$. ◇

مثال (١٦)[Aust.MC 1983] أثناء مغادرة خمسة طلاب الفصل الدراسي ثلاثة منهم حملوا حقائب آخرين واثنان منهم حمل كل منهما حقيبته. كم عدد الطرق الممكنة لذلك؟

الحل

لنفرض أن الطلاب الذين حملوا حقيبة غيره هم A ، B ، C . هناك طريقتان فقط لحمل كل منهم حقيبة غيره وهما

(أ) A يحمل حقيبة B ، B يحمل حقيبة C ، C يحمل حقيبة A

(ب) A يحمل حقيبة C ، B يحمل حقيبة A ، C يحمل حقيبة B .

عدد طرق اختيار 3أشخاص من بين خمسة أشخاص هو $C(5,3) = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$. إذن، عدد الطرق الكلية هو $2 \times 10 = 20$. ◇

مثال (١٧)[Aust.MC 1981] كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن لمراسل مهمل أن يضع أربعة رسائل في صناديق بريد أربع موظفين بحيث يستلم كل من الموظفين

رسالة غيره؟

الحل

يمكن حل هذه المسألة بكتابة تبديلات المجموعة $\{A, B, C, D\}$ وعددها $4! = 24$ ومن ثم حذف التبديلات التي يكون فيها A هو الحرف الأول (أي أن A يستلم رسالته)، B هو الحرف الثاني، C هو الحرف الثالث، D هو الحرف الرابع لنحصل على التبديلات المطلوبة وهي

$$\begin{array}{ccc} BADC & BDAC & BCDA \\ CADB & CDAB & CDBA \\ DABC & DCAB & DCBA \end{array}$$

وعددها 9. ◇

ملحوظة

المثال (١٧) هو حالة خاصة من نوع من التبديلات التي تسمى التبديلات التامة (derangements) والتي تعرف على النحو التالي: التبديل التام للعناصر $1, 2, 3, \ldots, n$ هو تبديل لهذه العناصر بحيث لا يظهر أي من هذه العناصر في مكانه الأصلي. على سبيل المثال، 23514 تبديل تام للعناصر 12345 ولكن 23541 ليس تبديلاً تاماً لهذه العناصر. من المعلوم أن عدد التبديلات التامة لعناصر عددها n هو

$$\boxed{n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].}$$

بتطبيق هذه الصيغة على المثال (١٨) نجد أن المطلوب في المثال هو عدد التبديلات التامة لأربعة عناصر وهو $9 = 4!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right]$.

مثال (١٨) في أسبوع الحذف والإضافة للفصل الدراسي الأول طلب 15 طالباً

إضافة مقرر التكامل إلى جدولهم الدراسي. وبعد النظر إلى الفرص المتاحة لهم لاحظ مسجل الكلية وجود أربع شعب من المقرر غير مكتملة، الأولى تستطيع استيعاب 3 طلاب والثانية 4 طلاب والثالثة طالبين والرابعة 6 طلاب. كم عدد الطرق الممكنة التي يستطيع أن يسجل فيها الطلاب المقرر؟

الحل

عدد طرق الممكنة هو عدد التبديلات المختلفة لمجموعة عدد عناصرها 15 من أربعة أنماط n_1، n_2، n_3، n_4 حيث $n_1 = 3$، $n_2 = 4$، $n_3 = 2$، $n_4 = 6$. هذا العدد:

$$\frac{15!}{3! \times 4! \times 2! \times 6!} = 6306300.$$ ◇

مثال (١٩) [AIME #2 1992] نقول إن العدد المكون من خمس مراتب $ABCDE$ تزايدي إذا كان $A < B < C < D < E$. كم عدد الأعداد التزايدية المكونة من خمس مراتب؟

الحل

لاحظ أولاً أن العدد التزايدي لا يحتوي أي مرتبة صفرية لأن $A \neq 0$ وأن كل مرتبة بعد ذلك أكبر من A. عدد طرق اختيار 5 مراتب غير صفرية مختلفة هو

$$C(9,5) = \frac{9!}{4! \times 5!} = 126.$$

وهذا هو العدد المطلوب لأنه يمكن ترتيب أي خمس مراتب غير صفرية مختلفة ترتيباً تزايدياً بطريقة واحدة فقط. ◇

استراتيجية عامة لحل مسائل التباديل والتوافيق

[General Strategy For Solving Permutation and Combination Problems]

من المهم جداً لأجل النجاح في حل مسائل التباديل والتوافيق أن يميز الطالب نمط المسألة، هل هي مسألة تباديلأم مسألة توافيق لأن الكثير من الطلاب يتناول مسألة التباديل على أنها مسألة توافيق أو العكس. بعد ذلك يقوم الطالب بالاستعانة بالصيغة المناسبة لحل المسألة. الأسئلة التالية تساعد الطالب على تمييز نمط المسألة:

(١) هل المسألة هي مسألة تباديل أم توافيق؟

إن اختبار ترتيبين نمطيين لنفس العناصر يساعد الطالب على تحديد نوع المسألة. إذا حسبنا الترتيبين على أنهما خيار واحد فمعنى ذلك أن المسألة هي مسألة توافيق وما عدا ذلك فهي مسألة تباديل. لتوضيح ذلك، إذا سئلت عن ترتيبات الحروف A، B، C فإن ABC و ACB يعدان ترتيبين مختلفين. ولذا فالمسألة هي مسألة تباديل. أما إذا سئلت عن عدد طرق اختيار ثلاثة أعداد من بين الأعداد $1,2,3,4,5,6$ دون الاهتمام بالترتيب الذي تختار به هذه الأعداد فإن المسألة هي مسألة توافيق. لاحظ أيضاً أن بعض المسائل تتطلب ضمنياً الترتيب دون أن تنص صراحة على ذلك، ولذا فهذه المسائل هي مسائل تباديل، على سبيل المثال، 4 مراتب تكون عدداً مكوناً من أربع مراتب. هنا العدد المكون من أربع مراتب يتضمن ترتيباً لأن العدد 1234 يختلف عن العدد 1324.

المسائل التي تتضمن ترتيبات جزئية هي مسائل تباديل، فمثلاً، إذا أردت وضع ثلاثة كتب رياضيات وأربعة كتب فيزياء على رف بحيث تكون

الكتب من كل نوع متلاصقة هي مسألة تباديل.

في الأغلب، إذا تضمنت المسألة كلمة "ترتيب" فهي مسألة تباديل وإذا تضمنت كلمة "اختيار" فهي مسألة توافيق.

(٢) هل التكرار مسموح؟

يجب قراءة المسألة جيداً لتعرف إذا كان تكرار العناصر مسموحاً به أم لا، على سبيل المثال، إذا كانت المسألة عن أعضاء دول مجلس التعاون فمن الواضح هنا التكرار غير مسموح به، أما إذا كان لديك 5 مداخل لكلية العلوم فمن الممكن أن تدخل وتخرج من المدخل نفسه، ولذا فالتكرار هنا مسموح به ضمنياً.

(٣) هل هناك عناصر متشابهة في المجموعة؟

تفحص المجموعة المراد حساب تباديلها أو توافيقها فإذا احتوت على عناصر متشابهة احسبها أولاً، فمثلاً، إذا كانت المسألة هي إيجاد عدد ترتيبات حروف الكلمة $SUCCESS$ فهي كلمة تحتوي على 3 حروف S، حرفين C، حرف U، حرف E.

مسائل محلولة

(١) بكم طريقة مختلفة يمكن تكوين مجموعة جزئية تتكون من عنصرين فأكثر من مجموعة عدد عناصرها 5؟

(٢) جد عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بترتيب حروف الكلمة $PENCILS$ بشرط:

(أ) أن يقع الحرف E بعد الحرف I.

(ب) أن يكون هناك حرفان بين E و I.

(٣) كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الحروف $ABCDEFG$ بحيث تكون الحروف A، B، C متجاورة؟

(٤) كم عدد الكلمات الثنائية (مراتبها 0 أو 1) من الطول 10 التي يمكن تكوينها بحيث يكون سبع من مراتبها يساوي 1؟

(٥) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6 أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن تحتوي اللجنة على طالب واحد على الأقل؟

(٦) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6 أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن لا يكون الطالب أحمد وعضو هيئة التدريس يوسف معاً في اللجنة؟

(٧) جد عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من ترتيب حروف الكلمة $ABCDE$ والتي لا تحتوي أياً من النمطين AB و CD.

(٨) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس مهندسان جوار بعضهما البعض؟

(٩) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 8 أطباء في صف من المقاعد بحيث لا يجلس مهندسان بجانب بعضهما البعض؟

(١٠) يتكون أحد فصول مرحلة الروضة من 10 بنات و 10 أولاد. أرادت المعلمة تجليس الطلاب والطالبات على مقاعد في صف واحد بحيث لا يجلس ولدان أو بنتان في مقعدين متجاورين. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(١١) بكم طريقة يمكن ترتيب 3 كتب رياضيات وأربعة كتب كيمياء وخمسة كتب فيزياء على أحد رفوف مكتبة بشرط أن تكون كتب الموضوع الواحد بجانب بعضها البعض.

(١٢) بكم طريقة يمكن أن يجلس 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس أحمد بجانب عبدالعزيز؟

(١٣) تتكون أرقام لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مأخوذة من حروف اللغة الانجليزية متبوعة بأربعة أرقام. ما عدد لوحات السيارات التي لا تسمح بتكرار أي من الحروف وأي من الأرقام؟

(١٤) مجموعة من عشرة طلاب أرادوا الجلوس على طاولتين تتسع كل منهما لخمسة طلاب إحداهما دائرية والثانية مستطيلة الشكل ولكن يسمح فقط بالجلوس على ضلع واحد من أضلاعها.

(أ) كم عدد الطرق الممكنة لتجليس الطلاب؟

(ب) إذا كان سالم وسعد من ضمن المجموعة وأراد كل منهما الجلوس على طاولة مختلفة فكم يكون عدد الطرق في هذه الحالة؟

(١٥) لدى السيد عبدالرحمن 8 أبناء، أربعة أولاد وأربع بنات ولديهم مائدة مستديرة تتسع لثمانية أشخاص. بكم طريقة يمكن تجليس الأبناء حول المائدة

بحيث لا يتجاور ولدان؟

(١٦) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11 \text{ ؟}$$

(١٧) كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \quad \text{حيث:}$$

(أ) $x_1 \geq 10$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2, 3, 4, 5$.

(ب) $x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2, 3, 4, 5$.

(ج) $10 \leq x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2, 3, 4, 5$.

(١٨) أراد سلطان توزيع 100 حبة حلوى على إخوته الخمسة أحمد ومحمد وسعاد ونورة وهيفاء بحيث يأخذ أحمد على الأكثر 55 حبة ويأخذ محمد على الأكثر 65 حبة. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

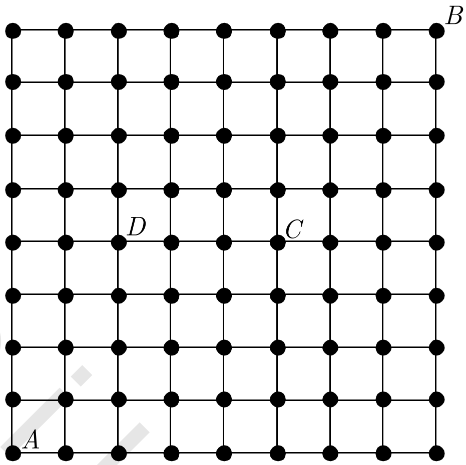
(١٩) كم عدد الأعداد الصحيحة N التي يمكن كتابتها كحاصل ضرب 10 أعداد مأخوذة من مجموعة الأعداد $\{3, 5, 7, 11\}$؟

(٢٠) [Aust.MC 1983] اختبار رياضيات مكون من ست مسائل مرقمة من 1 إلى 6. الدرجات التي يمكن الحصول عليها عند حل أي مسألة هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 درجات. تقدم أحمد إلى الاختبار وحصل على درجة كلية تساوي 15. ما عدد الطرق الممكنة للحصول على هذه الدرجة؟

(٢١) الشكل المبين أدناه شبكة من النوع 8×8.

(أ) كم عدد المسارات من A إلى B التي تمر بالنقطة C حيث الخطوات المسموح بها إلى اليمين وإلى الأعلى فقط؟

(ب) كم عدد هذه المسارات التي لا تحتوي المسار CD؟



(٢٢) [Aust.MC 1991]كم عدد الأعداد الصحيحة ABC التي بين العددين 100و 999 حيث $A > B > C$ ؟

(٢٣) [Aust.MC 1991] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 1000بحيث يكون مجموع مراتبها يساوي 6؟

(٢٤) [Aust.MC 1987] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 4 مراتب غير صفرية مختلفة بحيث يكون مجموع المراتب يساوي 12؟

(٢٥) [Aust.MC 1985] بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة xو yو z حيث $1 \leq x \neq y \neq z \leq 30$ بحيث يكون مجموع هذه الأعداد مضاعفاً للعدد 3والترتيب غير مهم؟

(٢٦) كم عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف الكلمة $ASCENDENCE$ ؟

(٢٧) (AHSME 1993)كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون رؤوسها من تقاطع شبكة نقاط من النوع 4×4 ؟

(٢٨) [TFAOC] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 500 والتي يمكن كتابتها كمجموع مكعبين كاملين؟

(٢٩) [AIME 2005] يمتلك أحمد 4 قطع نقدية متشابهة ذهبية اللون و 4 قطع نقدية متشابهة فضية اللون. أحد جانبي كل من هذه القطع صورة والجانب الآخر كتابة. ما عدد الطرق المختلفة لوضع هذه القطع واحدة فوق الأخرى بحيث لا تتلاصق صورتا قطعتين؟

(٣٠) [AIME 1990] علقنا 8 بالونات منفوخة على حائط بحيث تشكل 3 أعمدة، كل من العمود الأول والثاني يتكون من 3 بالونات والعمود الثالث يتكون من بالونين. المطلوب تنفيس البالونات باتباع الترتيب التالي:

(أ) نختار أولاً العمود المراد تنفيس أحد بالوناته.

(ب) نقوم بتنفيس البالون الواقع في أسفل العمود.

كم عدد الطرق الممكنة لتنفيس جميع البالونات؟

(٣١) [AIME 2004] نقول إن العدد المكون من أربع مراتب $ABCD$ عدد شبيه الأفعى إذا كان $A < B$ و $B > C$ و $C < D$. مثلاً كل من العددين 1324 و 1423 شبيه الأفعى. كم عدداً شبيه الأفعى مكوناً من أربع مراتب ؟

(٣٢) [AIME 1989] وضعنا عشر نقاط على محيط دائرة. كم عدد المضلعات المختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام بعض أو جميع هذه النقاط كرؤوس؟

(٣٣) [TFAOC] أراد مزارع زرع 15 شتلة من الزهور في صف واحد داخل حديقة منزله. 10 من هذه الشتلات ورد جوري والخمس شتلات الباقية قرنفل. بكم طريقة يمكنه إنجاز ذلك بشرط أن لا تكون شتلتان من القرنفل متجاورتين؟

(٣٤) [TFAOC] وعاء يحتوي على 10 حبات من حلوى MM و 5 حبات من حلوى الهيرشي. سقط الوعاء على الأرض وتناثرت منه الحلوى وتراكض 8 أطفال للحصول على هذه الحلوى. كم عدد طرق توزيع حبات الحلوى على الأطفال ؟

(٣٥) [Math counts 1985] ما مرتبة آحاد المجموع

$$1! + 2! + 3! + \cdots + 14! + 15!$$ ؟

(٣٦) [MAΘ 1990] لدينا 5 مستقيمات ودائرتان في المستوى. ما أكبر عدد ممكن من النقاط الذي نحصل عليه من تقاطعات الأشكال السبعة؟

(٣٧) [MAΘ 2011] يمتلك أحمد 8 قمصان و 6 بنطلونات و 10 أزواج من الجوارب. في صباح يوم بارد قرر أحمد قبل خروجه إلى المدرسة أن يلبس قميصين وثلاثة أزواج من الجوارب وبنطلوناً واحداً. كم عدد الخيارات المختلفة المتاحة لأحمد؟

(٣٨) [MAΘ 2011] رسم أحمد 15 قطعة مستقيمة من الطول نفسه بعضها مواز لعرض الورقة والبعض الآخر موازلطول الورقة. ما أكبر عدد من المستطيلات التي يمكن تكوينها باستخدام هذه القطع المستقيمة ؟

(٣٩) [MAΘ 2011] ما عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $a + b + 2c = 35$ ؟

(٤٠) [MAΘ 2010] لدى محمد خمسة مفاتيح مختلفة. إذا كان A هو عدد طرق ترتيبها في صف واحد و B عدد طرق ترتيبها حول دائرة و C هو عدد طرق وضعها في علاقة مفاتيح فما قيمة $\frac{A}{B} + \frac{B}{C}$ ؟

(٤١) [AHSME 1994] في الحفل الختامي للنشاط المدرسي وضعت 9 مقاعد في الصف الأول ليجلس عليها 3 مدرسين و 6 من طلاب المدرسة المتميزين. إذا أردنا تجليس كل من المدرسين بين طالبين فبكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

(٤٢) [AMC12A 2003] بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة مكونة من 5 حروف A و 5 حروف B وخمسة حروف C بحيث لا تحتوي الحرف A في الخمسة أماكن الأولى ولا تحتوي الحرف B في الخمسة أماكن الثانية ولا تحتوي الحرف C في الخمسة أماكن الأخيرة ؟

(٤٣) [AIME 2010] تتكون كلية العلوم الرياضية في إحدى الجامعات الصغيرة من ثلاثة أقسام هي الرياضيات، الاحصاء، الحاسب الآلي. في كل من هذه الأقسام يوجد أربعة أعضاء هيئة تدريس، رجلان وامرأتان. نريد تكوين لجنة من 6 أعضاء هيئة تدريس، ثلاثة رجال وثلاث نساء على أن تحتوي هذه اللجنة على عضوين من كل من الأقسام الثلاثة. ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها بهذه الشروط؟

(٤٤) [MAΘ 2008] كم عدد التبديلات المكونة من ثلاثة حروف مأخوذة من الكلمة $SACRAMENTO$؟

(٤٥) [MAΘ 2008] نريد الوصول من نقطة الأصل $(0,0)$ في المستوى الإحداثي إلى النقطة $(4,4)$ بحيث تكون الخطوة، التحرك وحدة إلى اليمين أو اليسار أو الأعلى أو الأسفل. على سبيل المثال، يمكن أن تكون الخطوة من $(0,0)$ هي التحرك إلى $(1,0)$ أو $(0,1)$ أو $(-1,0)$ أو $(0,-1)$.
ما عدد المسارات الممكنة من $(0,0)$ إلى $(4,4)$ المكونة من عشر خطوات؟

(٤٦) [MAΘ 2008] كم عدد طرق توزيع 10 بالونات متشابهة على أحمد، بدر،

جمال بحيث لا يشترط أن يأخذ أحدهم أياً من البالونات؟

(٤٧) [MAΘ 2008] إذا كانت العشرة بالونات في المسألة (٤٦) ملونة بثلاثة ألوان: 3 بالونات لونها أحمر، 3 بالونات لونها أصفر، 4 بالونات لونها أزرق فما عدد الطرق الممكنة لتوزيعها على الأطفالالثلاثة؟

(٤٨) [MAΘ 2008] وضعت خمسة مقاعد في صف واحد وخصص مقعد واحد لكل من المدرسين الخمسة للجلوس عليه. عند وصول المدرسين لم يلتزموا بالجلوس على المقاعد المخصصة لكل منهم ولكنهم قاموا بالجلوس عشوائياً على هذه المقاعد. كم عدد الطرق الممكنة لجلوس المدرسين بحيث يجلس اثنان فقط منهم على المقعدين المخصصة لهما؟

(٤٩) [MAΘ 2008] لدينا 5 كرات نريد توزيعها على أربعة صناديق A، B، C، D يتسع كل منها لكرتين على الأكثر. كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع هذه الكرات على الصناديق الأربعة؟

(٥٠) [MAΘ 2008] عدد ترتيبات حروف الكلمة $AABBCC$ هو

$90 = \dfrac{6!}{2!\times 2!\times 2!}$. كم عدد الترتيبات من بينها التي تحتوي الكلمة ABC؟

(٥١) نريد اختيار لجنة مكونة من 4 أعضاء هيئة تدريس ومقرر لها من بين 15 عضو هيئة تدريس. كم عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه اللجنة؟

(٥٢) أراد 14 شخصاً الذهاب إلى البر باستخدام ثلاث سيارات، سيارة جيب تتسع لسبعة أشخاص وسيارة صالون تتسع لخمسة أشخاص وسيارة رياضية تتسع لثلاثة أشخاص. بكم طريقة يمكنهم ركوب السيارات؟

(٥٣) [PACAT] أردنا تجليس 20 شخصاً بينهم أخوان على طاولة دائرية بحيث يجلس شخص واحد بين الأخوين. ما عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

(٥٤) [PACAT] نريد تكوين لجنة تحتوي على 3 أشخاص من بين 6 أطباء و 4 ممرضين. إذا رفض الممرض A أن ينضم إلى اللجنة التي تحتوي الطبيب B، بينما الطبيب B يقبل أن يكون ضمن اللجنة فقط إذا احتوت اللجنة الممرض C فما عدد اللجان الممكن تكوينها؟

(٥٥) [PACAT] في سباق للخيل تتنافس 6 أحصنة بينها الحصانان A و B. كم عدد الترتيبات الممكنة لوصول الأحصنة الستة إلى خط النهاية بشرط أن يصل A دائماً قبل B؟

(٥٦) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة $MAROUF$ بشرط أن لا يكون الحرفان M و F متجاورين؟

(٥٧) كم عدد طرق وقوف 4 أطفال وأمهاتهم في طابور بحيث يقف الطفل دائما أمام والدته؟

(٥٨) [PACAT] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تزيد عن 6000000 ومراتبها هي الأعداد $3,4,4,5,6,6,7$؟

(٥٩) [AMC122007] يقال إن مجموعة من الأعداد الصحيحة مميزة إذا كانت لا تحوي أكثر من عدد من أي ثلاثة أعداد موجبة متتابعة. كم عدد المجموعات الجزئية المميزة من $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ (بما فيها المجموعة الخالية)؟

(٦٠) أراد صلاح توزيع 9 قطع حلوى على إخوته الأربعة. بكم طريقة يمكنه عمل

ذلك بشرط أن يعطي كل واحد قطعة على الأقل؟

حلول المسائل

(١) بكم طريقة مختلفة يمكن تكوين مجموعة جزئية تتكون من عنصرين فأكثر من مجموعة عدد عناصرها 5؟

الحل

عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين هو $10 = \dfrac{5!}{2!\times 3!} = C(5,2)$.

عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر هو $10 = \dfrac{5!}{2!\times 3!} = C(5,3)$.

عدد المجموعات الجزئية المكونة من أربعة عناصر هو $5 = \dfrac{5!}{4!\times 1!} = C(5,4)$.

عدد المجموعات الجزئية المكونة من خمسة عناصر هو $1 = \dfrac{5!}{5!\times 0!} = C(5,5)$.

إذن، عدد المجموعات الجزئية المكونة من عنصرين فأكثر هو

$$10 + 10 + 5 + 1 = 26.$$

أو يمكن إيجاد عدد المجموعات الجزئية من مجموعة مكونة من خمسة عناصر وطرح عدد المجموعات الجزئية الخالية والمكونة من عنصر واحد لنحصل على العدد المطلوب وهو $2^5 - 5 - 1 = 26$.

(٢) جد عدد الكلمات التي يمكن الحصول عليها بترتيب حروف الكلمة $PENCILS$ بشرط:

(أ) أن يقع الحرف E بعد الحرف I.

(ب) أن يكون هناك حرفان بين E و I.

الحل

(أ) لاحظ أن الحرف E لا يمكن أن يكون أول حروف الكلمة. وبهذا يكون لدينا الحالات التالية:

الحالة الأولى: $\_\_\_\_\_E\_$. في هذه الحالة I يجب أن يكون الحرف الأول ويمكن ترتيب الخمسة حروف الباقية على يمين E بعدد من الطرق يساوي $5!$.

الحالة الثانية: $\_\_\_\_E\_\_$. هناك خياران للحرف I (الحرف الأول أو الثاني) والحروف الخمسة الباقية يمكن ترتيبها بعدد من الطرق يساوي $5!$. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $5! \times 2$.

الحالة الثالثة: $\_\_\_E\_\_\_$. يوجد ثلاثة خيارات لوضع الحرف I قبل E . وبهذا عدد طرق هذه الحالة هو $5! \times 3$.

الحالة الرابعة: $\_\_\_\_E\_\_$.يوجد أربعة خيارات للحرف I ومن ثم عدد طرق هذه الحالة هو $5! \times 4$.

الحالة الخامسة: $\_\_\_\_\_E\_$. يوجد خمسة خيارات للحرف I ويكون عدد طرق هذه الحالة هو $5! \times 5$.

الحالة السادسة: $\_\_\_\_\_\_E$. في هذه الحالة جميع الحروف الستة (ومن ثم I) قبل الحرف E ويمكن ترتيبها بعدد من الطرق يساوي $5! \times 6 = 6!$. إذن عدد الطرق هو

$$(1+2+3+4+5+6) \times 5! = 21 \times 120 = 2520 .$$

لاحظ أنه يمكن حل هذه المسألة بطريقة أسهل على النحو التالي: عدد طرق ترتيب حروف كلمة مكونة من 7 حروف مختلفة هو $7!$. في كل كلمة من هذه الكلمات إما أن يكون الحرف E قبل الحرف I أو الحرف I قبل الحرف E . أي

أن الحرف I يكون قبل الحرف E في نصف هذه الكلمات ويكون العدد المطلوب هو $\frac{7!}{2} = 2520$.

(ب) في هذه الحالة إما أن يقع I قبل E وبينهما حرفان أو أن يقع E قبل I وبينهما حرفان. ولهذا فلدينا خياران هنا ويكفي الآن أن نجد عدد طرق الحالة التي يقع فيها I قبل E وبينهما حرفان. لكي يتحقق ذلك فإن الحرف E لا يمكن أن يكون الحرف الأول أو الثاني أو الثالث. وبهذا فهو الحرف الرابع أو الخامس أو السادس أو السابع ويكون I هو الحرف الأول أو الثاني أو الثالث أو الرابع كما هو موضح أدناه

$$I\_\_E\_\_\_ ،\ \_I\_\_E\_\_ ،\ \_\_I\_\_E\_ ،\ \_\_\_I\_\_E .$$

في كل من هذه الحالات يمكن ترتيب الحروف الخمسة الباقية بعدد يساوي $5!$.

إذن، عدد الطرق يساوي $4 \times 5! + 4 \times 5! = 8 \times 120 = 960$.

(٣) كم عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من الحروف $ABCDEFG$ بحيث تكون الحروف A، B، C متجاورة؟

الحل

يمكن ترتيب الحروف A، B، C بحيث تكون متجاورة بعدد من الطرق يساوي $3!$. الآن، باعتبار ABC حرفاً واحداً يكون المطلوب بعد ذلك إيجاد عدد ترتيبات خمسة حروف $\boxed{ABC}\ D\ E\ F\ G$. وهذا العدد يساوي $5!$. إذن العدد الكلي للترتيبات المطلوبة هو $3! \times 5! = 6 \times 120 = 720$.

(٤) كم عدد الكلمات الثنائية (مراتبها 0 أو 1) من الطول 10 التي يمكن تكوينها بحيث تكون سبع من مراتبها تساوي 1؟

الحل

تتحدد الكلمة تماماً بمعرفة أي من مراتبها تساوي 1. أي أن المطلوب هنا هو إيجاد عدد طرق اختيار 7عناصر من مجموعة مكونة من 10عناصر. وبهذا يكون عدد الطرق يساوي $C(10,7) = \frac{10!}{7! \times 3!} = 120$.

(٥) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن تحتوي اللجنة على طالب واحد على الأقل؟

الحل

عدد طرق اختيار لجنة من أربعة أشخاص من بين 13شخصاً يساوي $C(13,4)$. عدد طرق اختيار اللجنة من أعضاء هيئة التدريس فقط يساوي $C(6,4)$. إذن، عدد طرق اختيار لجنة تحتوي على طالب واحد على الأقل هو

$$C(13,4) - C(6,4) = \frac{13!}{4! \times 9!} - \frac{6!}{4! \times 2!} = 715 - 15 = 700.$$

(٦) نريد تكوين لجنة من أربعة أشخاص من بين 6أعضاء هيئة تدريس و 7 طلاب. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك بشرط أن لا يكون الطالب أحمد وعضو هيئة التدريس يوسف معاً في اللجنة؟

الحل

إذا كان الطالب أحمد وعضو هيئة التدريس يوسف في اللجنة معاً فإن عدد طرق اختيار الشخصين الآخرين هو $C(11,2)$. إذن، عدد طرق اختيار أعضاء اللجنة في هذه الحالة هو $C(13,4) - C(11,2) = 715 - 55 = 660$.

(٧) جد عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من ترتيب حروف الكلمة $ABCDE$ والتي لا تحتوي أياً من النمطين AB و CD.

الحل

عدد ترتيبات حروف الكلمة $ABCDE$ هو $5!$. لنفرض الآن أن مجموعة الترتيبات التي تحتوي النمط AB هي Y وأن مجموعة الترتيبات التي تحتوي النمط CD هي Z. إذن، عدد الكلمات التي لا تحتوي أياً من النمطين AB و CD هو $5!-\left|Y \cup Z\right|$. ولكن استناداً إلى مبدأ التضمين والإقصاء لدينا

$$\left|Y \cup Z\right| = \left|Y\right| + \left|Z\right| - \left|Y \cap Z\right|$$

عدد كلمات Y هو عدد ترتيبات كلمة مكونة من أربعة حروف (على اعتبار أن AB حرف واحد) وهذا العدد يساوي $4!$. وبالمثل، عدد كلمات Z هو $4!$. وعدد كلمات $Y \cap Z$ هو $3!$ (على اعتبار أن AB حرف واحد و CD حرف واحد والحرف الثالث هو E) إذن، العدد المطلوب هو

$$5!-4!-4!+3! = 120-24-24+6 = 78.$$

(٨) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 5 أطباء حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس مهندسان جوار بعضهما البعض؟

الحل

عدد طرق تجليس الأطباء حول المائدة يساوي $4!$. الآن، يمكن أن يجلس أي مهندس بين أي طبيبين. أي يوجد خمسة خيارات للمهندس الأول، أربعة خيارات للمهندس الثاني، ثلاثة خيارات للمهندس الثالث، خياران للمهندس الرابع وخيار واحد للمهندس الخامس. إذن، عدد طرق تجليس المهندسين هو $5!$. ويكون عدد طرق تجليس العشرة أشخاص بالنمط المطلوب هو

$4! \times 5! = 24 \times 120 = 2880$.

(٩) بكم طريقة يمكن تجليس 5 مهندسين و 8 أطباء في صف من المقاعد بحيث لا يجلس مهندسان بجانب بعضهما البعض؟

الحل

نقوم بتجليس 8 أطباء أولاً في صف واحد بعدد من الطرق يساوي $8!$. الآن، عدد طرق تجليس المهندس الأول يساوي 9 (إما أن يجلس في المقعد الأول أو الأخير أو بين أي طبيبين). ولذا يتبقى 8 خيارات للمهندس الثاني، 7 خيارات للمهندس الثالث، 6 خيارات للمهندس الرابع، 5 خيارات للمهندس الخامس. إذن، عدد طرق تجليس الأطباء والمهندسين بالشرط المطلوب هو $5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 8!$.

(١٠) يتكون أحد فصول مرحلة الروضة من 10 بنات و 10 أولاد. أرادت المعلمة تجليس الطلاب والطالبات على مقاعد في صف واحد بحيث لا يجلس ولدان أو بنتان في مقعدين متجاورين. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

الحل

يوجد خياران للمقعد الأول، إما أن يجلس عليه ولد أو أن يجلس عليه بنت. لكل من هذين الخيارين يمكن تجليس الطلاب والطالبات بعدد من الطرق يساوي $10! \times 10!$. إذن، عدد الطرق المطلوب هو $2(10!)^2$.

(١١) بكم طريقة يمكن ترتيب 3 كتب رياضيات وأربعة كتب كيمياء وخمسة كتب فيزياء على أحد رفوف مكتبة بشرط أن تكون كتب الموضوع الواحد بجانب بعضها البعض.

الحل

طرق ترتيب 3 كتب رياضيات هو $3!$.

طرق ترتيب 4 كتب كيمياء هو $4!$.

طرق ترتيب 5 كتب فيزياء هو $5!$.

أيضاً، نحتاج إلى $3!$ طريقة لترتيب المواضيع الثلاثة. إذن، عدد الطرق الكلي هو

$3! \times 3! \times 4! \times 5!$.

(١٢) بكم طريقة يمكن أن يجلس 6 أشخاص حول مائدة مستديرة بشرط أن لا يجلس أحمد بجانب عبدالعزيز؟

الحل

عدد طرق تجليس 6 أشخاص حول مائدة مستديرة يساوي $5!$. الآن، إذا جلس أحمد بجانب عبدالعزيز فإما أن يكون أحمد على يمين عبدالعزيز أو على يساره. ولذا يوجد خياران هنا. نفرض أن أحمد وعبدالعزيز جلسا متجاورين. إذن، يمكن اعتبار الستة أشخاص، خمسة أشخاص ويمكن تجليسهم بعدد من الطرق يساوي $4!$.

إذن، عدد الطرق المطلوب هو $5! - 2 \times 4! = 120 - 48 = 72$.

(١٣) تتكون أرقام لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مأخوذة من حروف اللغة الانجليزية متبوعة بأربعة أرقام. ما عدد لوحات السيارات التي لا تسمح بتكرار أي من الحروف وأي من الأرقام؟

الحل

المسألة هنا هي إيجاد عدد التبديلات من السعة 3 مأخوذة من مجموعة

عدد عناصرها 26 وعدد التبديلات من السعة 4 مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها 10. هذان العددان هما $P(26,3)$ و $P(10,4)$. إذن، عدد اللوحات هو

$$P(26,3)\times P(10,4)=\frac{26!}{23!}\times\frac{10!}{6!}=78624000\ .$$

(١٤) مجموعة من عشرة طلاب أرادوا الجلوس على طاولتين تتسع كل منهما لخمسة طلاب، إحداهما دائرية والثانية مستطيلة الشكل ولكن يسمح فقط بالجلوس على ضلع واحد من أضلاعها.

(أ) كم عدد الطرق الممكنة لتجليس الطلاب؟

(ب) إذا كان سالم وسعد من ضمن المجموعة وأراد كل منهما الجلوس على طاولة مختلفة فكم يكون عدد الطرق في هذه الحالة؟

الحل

(أ) عدد طرق اختيار مجموعة مكونة من 5 طلاب من مجموعة مكونة من عشرة طلاب وتجليسهم على إحدى الطاولتين يساوي $C(10,5)$. الآن، يمكن تجليس خمسة طلاب على دائرة بعدد من الطرق يساوي $4!$ ويمكن تجليس الخمسة الآخرين على ضلع واحد من مائدة مستطيلة بعدد من الطرق يساوي $5!$. إذن، عدد طرق تجليسهم هو

$$C(10,5)\times 4!\times 5!=\frac{10!}{5!\times 5!}\times 4!\times 5!=725760\ .$$

(ب) في هذه الحالة يمكن اختيار سالم وسعد بطريقتين ليجلسا على طاولتين مختلفتين ومن ثم اختيار أربعة طلاب لتجليسهم على إحدى الطاولتين بعدد من الطرق يساوي $C(8,4)$. وبهذا يكون العدد الكلي هو

$$2 \times C(8,4) \times 4! \times 5! = \frac{2 \times 8!}{4! \times 4!} \times 4! \times 5! = 403200 .$$

(١٥) لدى السيد عبدالرحمن 8 أبناء، أربعة أولاد وأربع بنات ولديهم مائدة مستديرة تتسع لثمانية أشخاص. بكم طريقة يمكن تجليس الأبناء حول المائدة بحيث لا يتجاور ولدان ؟

الحل

نقوم بتجليس البنات أولاً حول المائدة بعدد من الطرق يساوي $3!$. بعد ذلك يوجد $4!$ من الطرق لتجليس الأولاد بين البنات. إذن، عدد طرق تجليس الأبناء الثمانية هو $3! \times 4! = 144$.

(١٦) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$؟

الحل

بوضع ثلاثة أشرطة لفصل المتغيرات و 11 نجمة لتمثيل العدد 11 بين هذه الأشرطة نجد أن عدد الحلول الصحيحة غير السالبة يساوي $C(14,11) = \frac{14!}{11! \times 3!} = 364$.

(١٧) كم عدد الحلول الصحيحة للمعادلة

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث:

(أ) $x_1 \geq 10$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

(ب) $x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

(ج) $10 \leq x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$.

الحل

(أ) بوضع $y_1 = x_1 - 10$ يكون المطلوب إيجاد عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 - 10 = 90$.

وهذا العدد يساوي $C(94,4) = \dfrac{94!}{4! \times 90!} = 3049501$.

(ب) يمكن حساب عدد الحلول هذه على النحو التالي:

نحسب أولاً عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$$

فنجد أن هذا العدد هو $C(104,4)$. الآن، نجد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث $x_1 \geq 81$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$. بوضع $y_1 = x_1 - 81$ يكون المطلوب هو عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة

$$y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 - 81 = 19$$

وهذا العدد يساوي $C(23,4)$.

الآن، عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث $x_1 \leq 80$ و $x_i \geq 0$ لكل $i = 2,3,4,5$ هو

$$C(104,4) - C(23,4) = 27588756 - 53130 = 27536626$$

(ج) لنفرض الآن أن A هو عدد الحلول حيث $x_1 \geq 10$ وأن B هو عدد الحلول حيث $x_1 \geq 81$. عندئذ، عدد الحلول المطلوب هو العدد

$$A - B = C(94,4) - C(23,4) = 3049501 - 53130 = 2996371$$

(١٨) أراد سلطان توزيع 100 حبة حلوى على إخوته الخمسة أحمد ومحمد

وسعاد ونورة وهيفاء بحيث يأخذ أحمد على الأكثر 55 حبة ويأخذ محمد على الأكثر 65 حبة. بكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

الحل

لنفرض أن حصص أحمد ومحمد وسعاد ونورة وهيفاء هي x_1، x_2، x_3، x_4، x_5 على التوالي. إذن، المطلوب هو إيجاد عدد حلول المعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100$ حيث $x_1 \leq 55$ و $x_2 \leq 65$ و $0 \geq x_i$، $i = 3,4,5$. لنفرض أن D هي مجموعة الحلول غير السالبة للمعادلة. عندئذ، $\left|D\right| = C(104,4)$. لنفرض الآن أن A و B هما مجموعتا الحلول حيث $x_1 \geq 56$ و $x_2 \geq 66$ على التوالي وأن C هي مجموعة الحلول المطلوبة. بما أن $A \cap B = \phi$ فنجد أن

$$\left|C\right| = \left|D\right| - \left|A\right| - \left|B\right| = C(104,4) - C(48,4) - C(38,4).$$

(١٩) كم عدد الأعداد الصحيحة N التي يمكن كتابتها كحاصل ضرب 10 أعداد مأخوذة من مجموعة الأعداد $\{3,5,7,11\}$؟

الحل

لنفرض أن C_1، C_2، C_3، C_4 هي الأعداد 3، 5، 7، 11 على التوالي في حاصل الضرب. عندئذ، المطلوب هو عدد طرق توزيع 10 أشياء متشابهة إلى أربع أنماط مختلفة. هذا العدد يساوي $286 = \dfrac{13!}{3! \times 10!} = C(13,3)$.

(٢٠) [Aust.MC 1983] اختبار رياضيات مكون من ست مسائل مرقمة من 1 إلى 6. الدرجات التي يمكن الحصول عليها عند حل أي مسألة هي 0 أو 1 أو 2 أو 3 درجات. تقدم أحمد إلى الاختبار وحصل على درجة كلية

تساوي 15 . ما عدد الطرق الممكنة للحصول على هذه الدرجة؟

الحل

لنفرض أن الدرجات التي يمكن الحصول عليها للأسئلة الستة هي x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، x_6 على التوالي. إذن، المطلوب هو إيجاد عدد الحلول الصحيحة للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 15$ حيث $0 \leq x_i \leq 3$ لكل $i = 1, \ldots, 6$. ندرس الحالات الممكنة لعدد الأسئلة التي تكون درجتها 3 . يمكن أن يتحقق ذلك إذا إجاب أحمد على 3 أو 4 أو 5 أسئلة درجة كل منها 3 .

الحالة الأولى: عدد هذه الأسئلة هو 3 . في هذه الحالة يحصل أحمد على 9 درجات لإجابته على ثلاثة أسئلة درجة كل منها 3 ويتبقى ست درجات للثلاثة أسئلة الباقية. ولكي يكون المجموع 15 فيجب أن تكون درجة كل من الثلاثة أسئلة المتبقية هي 2 وهذه يتم اختيارها بطريقة واحدة. إذن، عدد الطرق في هذه الحالة هو

$$C(6,3) = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20 .$$

الحالة الثانية: عدد هذه الأسئلة هو 4 . في هذه الحالة يحصل أحمد على 12 درجة لإجابته على أربعة أسئلة درجة كل منها 3 ويبقى 3 درجات للسؤالين الآخرين. أي درجة أحد الأسئلة هي 1 ودرجة الآخر هي 2. يوجد 6 خيارات للسؤال الذي درجته 1 ومن ثم خمسة خيارات للسؤال الذي درجته 2. وبهذا يكون عدد طرق هذه الحالة هو $6 \times 5 = 30$.

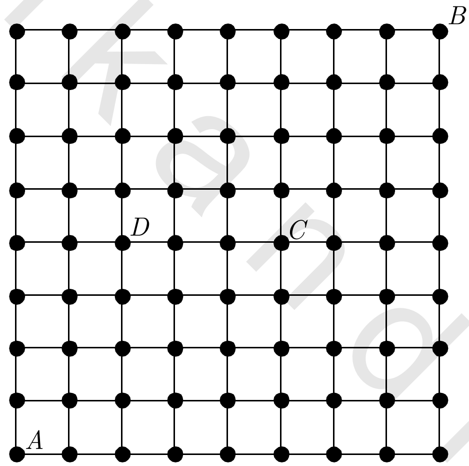
الحالة الثالثة: عدد هذه الأسئلة هو 5 . في هذه الحالة يحصل أحمد على 15 درجة

وتكون درجة السؤال المتبقي هي صفر. عدد طرق هذه الحالة هو $6 = \dfrac{6!}{5!\times 1!} = C(6,5)$. إذن، عدد الطرق الكلي هو $56 = 6 + 30 + 20$.

(٢١) الشكل المبين أدناه شبكة من النوع 8×8.

(أ) كم عدد المسارات من A إلى B التي تمر بالنقطة C حيث الخطوات المسموح بها إلى اليمين وإلى الأعلى فقط؟

(ب) كم عدد هذه المسارات التي لا يكون المسار CD جزءاً منها؟



الحل

(أ) المسار على الشبكة مروراً بالنقطة C سيقسم إلى جزأين الأول، من النقطة A إلى النقطة C، أي شبكة من النوع 4×5 والثاني من النقطة C إلى النقطة B وهو شبكة من النوع 4×3. وبالتالي عدد المسارات الممكنة للجزء الأول يساوي

$126 = \dfrac{9!}{4!\times 5!}$ وعدد المسارات للثاني $35 = \dfrac{7!}{3!\times 4!}$. وبالتالي من مبدأ الضرب نجد أن عدد المسارات من A إلى B والتي تمر في C يساوي $4410 = 126 \times 35$.

(ب) من الأسهل حساب عدد المسارات التي سيكون المسار DC جزءاً منها وعددها يساوي $630 = \dfrac{7!}{3!\times 4!} \times \dfrac{6!}{2!\times 4!}$. بطرح هذا العدد من عدد المسارات الكلي نحصل على المطلوب وهو $\dfrac{16!}{8!\times 8!} - 630 = 15015 - 630 = 14385$.

(٢٢) [Aust.MC 1991] كم عدد الأعداد الصحيحة ABC بين العددين 100 و 999 حيث $A > B > C$ ؟

الحل

يمكن حل هذه المسألة بسرد الأعداد ولكن بملاحظة أن $A \neq 0$ و $B \neq 0$ وأن المراتب مختلفة ولهذا ندرس الحالتين التاليتين:

(أ) المرتبة $C = 0$: في هذه الحالة يمكن اختيار A و B من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 9\}$ بعدد من الطرق يساوي $36 = \dfrac{9!}{2!\times 7!} = C(9,2)$ ومن ثم ترتيبها بطريقة وحيدة.

(ب) $C \neq 0$: في هذه الحالة نختار A و B و C من المجموعة $\{1, 2, \ldots, 9\}$ بعدد من الطرق يساوي $84 = \dfrac{9!}{3!\times 6!} = C(9,3)$ وترتيبها بطريقة وحيدة. إذن، عدد الأعداد المطلوبة هو $36 + 84 = 120$.

(٢٣) [Aust.MC 1991] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من

1000 بحيث يكون مجموع مراتبها يساوي 6؟

الحل

الأعداد المطلوبة هي على الصورة abc حيث $a+b+c=6$ و $0 \le a\,,b\,,c \le 9$. عدد هذه الأعداد باستخدام استراتيجية النجوم والأشرطة هو $28 = C(8,2) = \dfrac{8!}{2! \times 6!}$.

(٢٤) [Aust.MC 1987] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 4 مراتب غير صفرية مختلفة بحيث يكون مجموع المراتب يساوي 12؟

الحل

لاحظ أن أحد هذه المراتب يساوي 1 وإلا لكان أصغر مجموع نحصل عليه هو $12 > 14 = 5 + 4 + 3 + 2$. أيضاً، أحد هذه المراتب يساوي 2 وإلا لكان أصغر مجموع نحصل عليه هو $12 > 13 = 5 + 4 + 3 + 1$. الآن، المطلوب هو إيجاد عددين مختلفين a و b حيث $a+b=9$. الحلان الوحيدان هما $\{4,5\}$ و $\{3,6\}$. وبهذا تكون مجموعتا المراتب هما $\{1,2,3,6\}$ أو $\{1,2,4,5\}$. ويمكن ترتيب كل منهما بعدد من الطرق يساوي $24 = 4!$. إذن، عدد الأعداد هو $48 = 24 + 24$.

(٢٥) [Aust.MC 1985] بكم طريقة يمكن اختيار ثلاثة أعداد صحيحة موجبة مختلفة x و y و z حيث $1 \le x \ne y \ne z \le 30$ بحيث يكون مجموع هذه الأعداد مضاعفاً للعدد 3 والترتيب غير مهم؟

الحل

يمكن تجزئة أعداد المجموعة من 1 إلى 30 إلى ثلاث مجموعات منفصلة تحتوي كل منها على 10 أعداد هي

$$A = \{3k : 1 \le k \le 10\}$$
$$B = \{3k+1 : 0 \le k \le 9\}$$
$$C = \{3k+2 : 0 \le k \le 9\}$$

الآن، لكي يكون مجموع الأعداد مضاعفاً للعدد 3 فيمكن أن تكون هذه الأعداد جميعاً في مجموعة واحدة أو أن نختار عدداً واحداً من كل من المجموعات الثلاث. عدد طرق الحالة الأولى هو $3C(10,3)$ وعدد طرق الحالة الثانية هو $10^3 = 10 \times 10 \times 10$. إذن، عدد الطرق جميعاً هو

$$3C(10,3) + 1000 = \frac{3 \times 10!}{3! \times 7!} + 1000 = 360 + 1000 = 1360.$$

(٢٦) كم عدد الكلمات المختلفة التي يمكن تكوينها من حروف الكلمة $ASCENDENCE$؟

الحل

عدد التبديلات (الكلمات المختلفة) لمجموعة مكونة من عشرة عناصر حيث ثلاثة من عناصرها هي E وعنصران هما N وعنصران هما C وباقي العناصر مختلفة هو

$$\frac{10!}{3! \times 2! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!} = 151200.$$

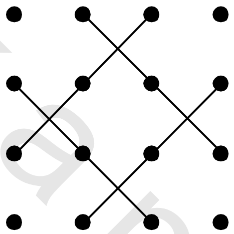
(٢٧) (AHSME 1993) كم عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون رؤوسها من نقاط شبكة نقاط من النوع 4×4؟

الحل

عدد رؤوس المثلث هي 3. فلذا عدد المثلثات التي يمكن تكوينها بحيث تكون رؤوسها مختارة من 16 نقطة هو $C(16,3)$. سنطرح من هذا العدد عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاث نقاط على استقامة واحدة هي:

(أ) يوجد 4 مستقيمات أفقية و 4 مستقيمات رأسية وقطران كل منهما مكون من أربع نقاط. عدد المجموعات الجزئية هنا هو $10C(4,3)$.

(ب) المستقيمات المكونة من 3 نقاط هي 4 وهي المبينة في الشكل أدناه



ولذا فعدد المثلثات هو $C(16,3) - 10\ C(4,3) - 4 = 560 - 40 - 4 = 516$.

(٢٨) [TFAOC] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 500 والتي يمكن كتابتها كمجموع مكعبين كاملين؟

الحل

لاحظ أن $1^3 = 1$، $2^3 = 8$، $3^3 = 27$، $4^3 = 64$، $5^3 = 125$، $6^3 = 216$، $7^3 = 343$، $8^3 = 512$. ولذا فعدد المكعبات التي أصغر من 500 يساوي 7. وبالتجريب نجد أن مجموع أي اثنين مختلفين من هذه المكعباتأصغر من 500 ما عدا $6^3 + 7^3 = 559$. إذن، عدد الأعداد الصحيحة الأصغر من 500 التي يمكن كتابتها كمجموع مكعبين مختلفين

يساوي $20 = \dfrac{7!}{2! \times 5!} - 1 = C(7,2) - 1$.

ولكن، يوجد أيضاً 6 أعداد أصغر من 500 مكتوبة كمجموع مكعبين متساويين هي $a^3 + a^3$ حيث $a = 1,2,3,4,5,6$. إذن، العدد الكلي هو $26 = 6 + 20$.

(٢٩) [AIME 2005] يمتلك أحمد 4 قطع نقدية متشابهة ذهبية اللون و 4 قطع نقدية متشابهة فضية اللون. أحد جانبي كل من هذه القطع صورة والجانب الآخر كتابة. ما عدد الطرق المختلفة لوضع هذه القطع واحدة فوق الأخرى بحيث لا تتلاصق صورتا قطعتين؟

الحل

إذا تجاهلنا اللون فيمكن رص القطع واحدة فوق الأخرى بحيث يتحقق الشرط في الحالتين التاليتين

الحالة الأولى: جميع صور الثماني قطع متجهة إلى الأسفل. ويمكن إنجاز هذه الحالة بطريقة واحدة فقط.

الحالة الثانية: إحدى القطع الثماني (القطعة السفلى) صورتها للأعلى وبقية القطع الأخرى فوقها صورها للأعلى أيضاً. يمكن إنجاز ذلك بطرق عددها 8. الآن، يمكن اختيار 4 قطع من القطع الثماني لتكون القطع الذهبية بعدد من الطرق يساوي $C(8,4)$. إذن، عدد طرق رص القطع النقدية لتحقيق الشرط المطلوب هو

$$630 = \frac{9 \times 8!}{4! \times 4!} = 9 \times C(8,4) .$$

(٣٠) [AIME 1990] علقنا 8 بالونات منفوخة على حائط بحيث تشكل 3 أعمدة، كل من العمود الأول والثاني يتكون من 3 بالونات والعمود الثالث يتكون من بالونين. المطلوب تنفيس البالونات باتباع الترتيب التالي:

(أ) نختار أولاً العمود المراد تنفيس أحد بالوناته.

(ب) نقوم بتنفيس البالون الواقع في أسفل العمود.

كم عدد الطرق الممكنة لتنفيس جميع البالونات؟

الحل

الطرق الممكنة تتكون من اختيار عمود ثم تنفيس البالون الواقع أسفل هذا العمود وتكرار ذلك ثماني مرات. لنفرض أن A، B، C تمثل اختيار الأعمدة الأول، الثاني، الثالث على التوالي. المسألة الآن يتم إنجازها بإيجاد عدد الترتيبات الممكنة لكلمة $AAABBBCC$. وهذا العدد يساوي

$$\frac{8!}{3!\times 3!\times 2!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5\times 4}{3\times 2\times 2} = 560 .$$

(٣١) [AIME 2004] نقول إن العدد المكون من أربع مراتب $ABCD$ عدد شبيه الأفعى إذا كان $A < B$ و $B > C$ و $C < D$. مثلاً، كل من العددين 1324 و 1423 شبيه الأفعى. كم عدداً شبيه الأفعى مكوناً من أربع مراتب ؟

الحل

لنفرض أولاً أن جميع مراتب العدد غير صفرية. في هذه الحالة نستطيع اختيار 4 مراتب من 9 مراتب بعدد من الطرق يساوي $C(9,4)$. لكل من هذه الأعداد

يوجد 6 طرق لاختيار مرتبتين من المراتب الأربع. هذه الخيارات هي

AB ، AC ، AD ، BC ، BD ، CD .

وإذا افترضنا أن $A < B < C < D$ لهذه المراتب فإننا نستطيع أن نُكْمِل كلاً من المرتبتين بطريقة واحدة للحصول على عدد شبيه الأفعى وهذه الأعداد هي:

$AB : ACBD$ ، $AC : ADBC$ ، $AD : ACBD$ ،

$BC : BCAD$ ، $BD : BDAC$ ، $CD : CDAB$.

وبملاحظة وجود عددين متساويين فنرى أن عدد الأعداد المختلفة في هذه الحالة هو 5. إذن، عدد الأعداد شبيهة الأفعى في الحالة الأولى هو

$$5C(9,4) = \frac{5 \times 9!}{4! \times 5!} = 630 .$$

نفرض الآن أن إحدى مراتب العدد هي المرتبة 0. في هذه الحالة نستطيع اختيار المراتب الثلاث الأخرى بعدد من الطرق يساوي $C(9,3)$. لنفرض أن مراتب العدد هي $0 < B < C < D$. نقوم الآن باختيار مرتبتين ثم نكمل العدد. لاحظ أن مرتبة الآلاف للعدد لا يمكن أن تساوي صفراً. إذن، يتبقى لدينا ثلاثة أعداد هي $BC0D$ ، $BD0C$ ، $CD0B$. ويكون عدد الأعداد شبيهة الأفعى في هذه الحالة هو $3C(9,3) = \frac{3 \times 9!}{3! \times 6!} = 252$.

إذن، عدد الأعداد شبيهة الأفعى يساوي

$$630 + 252 = 882 .$$

(٣٢) [AIME 1989] وضعنا عشر نقاط على محيط دائرة. كم عدد المضلعات المختلفة التي يمكن تكوينها باستخدام بعض أو جميع هذه النقاط كرؤوس؟

الحل

أي مجموعة مكونة من 3 نقاط فأكثر تحدد مضلعاً واحداً. ولذا المطلوب إيجاد عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها 3 فأكثر من مجموعة عدد عناصرها 10. هذا العدد هو عدد جميع المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها 10 مطروحاً منه عدد المجموعات الجزئية التي عدد عناصرها 0 أو 1 أو 2. إذن، عدد المضلعات هو $2^{10} - C(10,0) - C(10,1) - C(10,2) = 968$.

(٣٣) [TFAOC] أراد مزارع زرع 15 شتلة من الزهور في صف واحد داخل حديقة منزله. 10 من هذه الشتلات ورد جوري والخمس شتلات الباقية قرنفل. بكم طريقة يمكنه إنجاز ذلك بشرط أن لا تكون شتلتان من القرنفل متجاورتين؟

الحل

يمكن استخدام النجوم والأشرطة لحل هذه المسألة وذلك باستخدام 5 أشرطة لشتلات القرنفل وبعد ذلك يقوم المزارع بغرس شتلة ورد جوري بين كل شريطين ليضمن عدم التجاور وبهذا يحتاج إلى 4 شتلات من الورد الجوري ويتبقى لديه 6 شتلات من الورد الجوري يمثلها بنجوم. الآن، عدد الطرق هو عدد طرق اختيار 6 مواقع من بين $11 = 5 + 6$ موقعاً. هذا العدد هو $C(11,6) = \dfrac{11!}{6! \times 5!} = 462$.

(٣٤) [TFAOC] وعاء يحتوي على 10 حبات من حلوى MM و 5 حبات من حلوى الهيرشي. سقط الوعاء على الأرض وتناثرت منه الحلوى وتراكض 8 أطفال للحصول على هذه الحلوى. كم عدد طرق توزيع حبات الحلوى على الأطفال؟

الحل

سنستخدم طريقة النجوم والأشرطة لتوزيع 10 حبات حلوى MM على ثمانية أطفال وتوزيع 5 حبات حلوى الهيرشي على ثمانية أطفال ومن ثم استخدام مبدأ الضرب للحصول على العدد المطلوب. نحتاج 7 أشرطة لفصل الأطفال الثمانية و 10 نجوم لحبات حلوى MM وبهذا يكون عدد طرق هذه الحالة هو $C(17,10)$. وبالنسبة لحبات حلوى الهيرشي نحتاج 7 أشرطة لفصل الأطفال الثمانية وخمسة نجوم لحبات حلوى الهيرشي ويكون عدد طرق هذه الحالة هو $C(12,5)$. إذن، عدد طرق توزيع حبات الحلوى هو $C(17,10)\times C(12,5) = 15402816$.

(٣٥) [Math counts 1985] ما مرتبة آحاد المجموع
$1! + 2! + 3! + \cdots + 14! + 15!$؟

الحل

لاحظ أن $1! = 1$، $2! = 2$، $3! = 6$، $4! = 24$، $5! = 120$، $6! = 720$. ولذا فإن مرتبة آحاد كل من الأعداد $6!$ إلى $15!$ هي 0. ومن ثم نحتاج إلى إيجاد مرتبة آحاد المجموع $1! + 2! + 3! + 4! = 33$ وهي 3.

(٣٦) [MAΘ 1990] لدينا 5 مستقيمات ودائرتان في المستوى. ما أكبر عدد ممكن من النقاط الذي نحصل عليه من تقاطعات الأشكال السبعة؟

الحل

كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة. ولذا فعدد نقاط تقاطع المستقيمات هو $C(5,2) = 10$. كل مستقيم يقطع كلاً من الدائرتين في نقطتين. ولذا عدد نقاط تقاطع المستقيمات مع الدائرتين يساوي $5\times 2\times 2 = 20$. وأخيراً تتقاطع

الدائرتان مع بعضهما البعض بنقطتين. إذن، أكبر عدد لنقاط التقاطع هو $10 + 20 + 2 = 32$.

(٣٧) [MAΘ 2011] يمتلك أحمد 8 قمصان و 6 بنطلونات و 10 أزواج من الجوارب. في صباح يوم بارد قرر أحمد قبل خروجه إلى المدرسة أن يلبس قميصين وثلاثة أزواج من الجوارب وبنطلوناً واحداً. كم عدد الخيارات المختلفة المتاحة لأحمد؟

الحل

يمكن اختيار قميصين بعدد من الطرق يساوي $C(8,2)$ واختيار ثلاثة أزواج جوارب بعدد من الطرق يساوي $C(10,3)$ واختيار بنطلون بعدد من الطرق يساوي 6. إذن، عدد الخيارات المتاحة لأحمد يساوي

$$6 \times C(8,2) \times C(10,3) = \frac{6 \times 8!}{6! \times 2!} \times \frac{10!}{3! \times 7!} = 20160.$$

(٣٨) [MAΘ 2011] رسم أحمد 15 قطعة مستقيمة من الطول نفسه بعضها مواز لعرض الورقة والبعض الآخر موازلطول الورقة. ما أكبر عدد من المستطيلات التي يمكن تكوينها باستخدام هذه القطع المستقيمة ؟

الحل

لنفرض أن n هو عدد المستقيمات الموازية لعرض الورقة. إذن، يوجد $15 - n$ مستقيماً موازياً لطول الورقة. عدد المستطيلات هو

$$
\begin{aligned}
C(15-n,2)\times C(n,2) &= \frac{(15-n)\times(14-n)}{2}\times\frac{n\times(n-1)}{2}\\
&= \frac{(15-n)(n-1)}{2}\times\frac{(14-n)\times n}{2}\\
&= \frac{49-(n-8)^2}{2}\times\frac{49-(n-7)^2}{2}
\end{aligned}
$$

وهذا العدد أكبر ما يمكن عندما يكون $n=7$ أو $n=8$. وبهذا فإن أكبر عدد من المستطيلات التي يمكن تكوينها يساوي $C(8,2)\times C(7,2)=28\times 21=588$.

(٣٩) [MAΘ 2011] ما عدد الحلول الصحيحة الموجبة للمعادلة $a+b+2c=35$؟

الحل

بفرض أن $x=a-1$، $y=b-1$، $z=c-1$ يكون المطلوب هو إيجاد عدد الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلة $x+y+2z=31$. لاحظ أن z تأخذ القيم $0,1,2,3,\ldots,15$. ولذا فالمطلوب إيجاد جميع الحلول الصحيحة غير السالبة للمعادلات $x+y=31,\ x+y=29,\ \ldots,\ x+y=1$. وباستخدام طريقة النجوم والأشرطة نجد أن العدد الكلي للحلول هو

$$
\begin{aligned}
&C(32,1)+C(30,1)+C(28,1)+\cdots+C(2,1)\\
&=32+30+28+\cdots+2=272
\end{aligned}
$$

حل آخر: كما في الحل الأول، نفرض أن $x=a-1$، $y=b-1$، $z=c-1$ لنحصل على $x+y+2z=31$.

لاحظ الآن، أنه لا يمكن أن يكون العددان x و y زوجيين معاً أو فرديين معاً. إذن، أحدهما فردي والآخر زوجي. إذا كان $x=2t+1$ فردياً وكان $y=2r$

زوجياً فإننا نحصل على $2t + 1 + 2r + 2z = 31$. أي أن $t + r + z = 15$.
وعدد الطرق في هذه الحالة هو $C(17,2) = 136$.
وبالمثل، عدد الطرق عندما يكون x زوجياً و y فردياً هو $C(17,2) = 136$.
إذن، عدد الحلول الكلي هو $136 + 136 = 272$.

(٤٠) [MAΘ 2010] لدى محمد خمسة مفاتيح مختلفة. إذا كان A هو عدد طرق ترتيبها في صف واحد و B عدد طرق ترتيبها حول دائرة و C هو عدد طرق وضعها في علاقة مفاتيح فما قيمة $\frac{B}{C} + \frac{A}{B}$؟

الحل

لاحظ أن $A = 5!$ و $B = 4!$ و $C = \frac{4!}{2}$. إذن، $\frac{A}{B} + \frac{B}{C} = 5 + 2 = 7$.

(٤١) [AHSME 1994] في الحفل الختامي للنشاط المدرسي وضعت 9 مقاعد في الصف الأول ليجلس عليها 3 مدرسين و 6 من طلاب المدرسة المتميزين. إذا أردنا تجليس كل من المدرسين بين طالبين فبكم طريقة يمكن إنجاز ذلك؟

الحل

لنفرض أنه تم تجليس الطلاب الستة. الآن، يوجد خمسة أماكن بين الطلاب لوضع مقاعد المدرسين. ولذا فعدد الخيارات هو $C(5,3)$. ولكن يوجد $3!$ طريقة لترتيب المدرسين. إذن، عدد الطرق يساوي $3! \times C(5,3) = 6 \times 10 = 60$.
ولكن عدد طرق تجليس 6 طلاب في صف هو $6!$. وبهذا يكون عدد الطرق المطلوب هو $6! \times 60 = 43200$.

(٤٢) [AMC12A 2003] بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة مكونة من

5 حروف A و 5 حروف B و 5 حروف C بحيث لا تحتوي الحرف A في الخمسة أماكن الأولى ولا تحتوي الحرف B في الخمسة أماكن الثانية ولا تحتوي الحرف C في الخمسة أماكن الأخيرة؟

الحل

سندرس الحالات الممكنة وهي ست حالات.

الحالة الأولى: الخمسة مواقع الأولى جميعها الحرف B. عدد الطرق لذلك هو 1. في هذه الحالة الحرف C يجب أن يحتل الخمسة مواقع الوسطى والحرف A يجب أن يحتل الخمسة مواقع الأخيرة. وعدد طرق إنجاز ذلك هو 1×1. إذن، عدد ترتيبات هذه الحالة هو $1 = (1)^3$.

الحالة الثانية: الخمسة مواقع الأولى جميعها الحرف C. هذه الحالة مماثلة للحالة الأولى وعدد ترتيباها هو $1 = (1)^3$.

الحالة الثالثة: إذا وضعنا 4 حروف B وحرف C في المواقع الخمس الأولى. في هذه الحالة، الخمسة مواقع الثانية يجب أن تكون 4 حروف C وحرف A والخمسةمواقع الأخيرة يجب أن تكون 4 حروف A وحرف B. وعدد الترتيبات في هذه الحالة هو $C(5,1)\times C(5,1)\times C(5,1) = 5^3$.

الحالة الرابعة: 4 حروف C وحرف B في المواقع الخمسة الأولى. هذه الحالة مماثلة للحالة الثالثة وعدد ترتيباها هو 5^3.

الحالة الخامسة: ثلاثة حروف B وحرفان C في الخمسة مواقع الأولى. بصورة مشابهة نجد أن عدد ترتيبات هذه الحالة هو $C(5,2)\times C(5,2)\times C(5,2) = 10^3$.

الحالة السادسة: ثلاثة حروف C وحرفان B في الخمسة مواقع الأولى. هذه الحالة مماثلة للحالة الخامسة وعدد ترتيباها يساوي 10^3.

إذن، عدد الترتيبات جميعاً هو $2\times(1!)^3 + 2\times 5^3 + 2\times 10^3 = 2252$.

> (٤٣) [AIME 2010] تتكون كلية العلوم الرياضية في إحدى الجامعات الصغيرة من ثلاثة أقسام هي الرياضيات، الاحصاء، الحاسب الآلي. في كل من هذه الأقسام يوجد أربعة أعضاء هيئة تدريس، رجلان وامرأتان. نريد تكوين لجنة من 6 أعضاء هيئة تدريس، ثلاثة رجال وثلاث نساء على أن تحتوي هذه اللجنة على عضوين من كل من الأقسام الثلاثة. ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها بهذه الشروط؟

الحل

لدينا حالتان هما:

(أ) اختيار رجل واحد وامرأة واحدة من كل قسم. في هذه الحالة عدد اللجان هي

$$2\times2\times2\times2\times2\times2 = 2^6 = 64$$

(ب) رجلان من أحد الأقسام وامرأتان من القسم الثاني وامرأة ورجل من القسم الثالث. في هذه الحالة عدد الخيارات هو $1\times1\times4 = 4$. ولكن، يوجد عدد $3!$ من الخيارات لاختيار القسم. وبهذا فعدد الطرق في هذه الحالة هو $4\times3! = 24$.

إذن، عدد اللجان يساوي $64 + 24 = 88$.

> (٤٤) [MAΘ 2008] كم عدد التبديلات المكونة من ثلاثة حروف مأخوذة من الكلمة $SACRAMENTO$ ؟

الحل

لدينا حالتان. الأولى منهما أن يحتوي التبديل على حرف واحد A على الأكثر والثانية أن يحتوي التبديل على الحرفين A. في الحالة الأولى يوجد 9 خيارات

للحرف الأول و 8 خيارات للحرف الثاني و 7 خيارات للحرف الثالث. وبهذا يكون عدد خيارات هذه الحالة هو $9 \times 8 \times 7 = 504$.

أما الحالة الثانية، بعد اختيار الحرفين A يوجد 8 خيارات لاختيار الحرف الثالث وثلاث طرق لتبديل كل من هذه الخيارات هي AAZ، AZA، ZAA. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $3 \times 8 = 24$. ويكون العدد الكلي هو $504 + 24 = 528$.

(٤٥) [MAΘ 2008] نريد الوصول من نقطة الأصل $(0,0)$ في المستوى الإحداثي إلى النقطة $(4,4)$ بحيث تكون الخطوة، التحرك وحدة إلى اليمين أو اليسار أو الأعلى أو الأسفل. على سبيل المثال، يمكن أن تكون الخطوة من $(0,0)$ هي التحرك إلى $(1,0)$ أو $(0,1)$ أو $(-1,0)$ أو $(0,-1)$.

ما عدد المسارات الممكنة من $(0,0)$ إلى $(4,4)$ المكونة من عشر خطوات؟

الحل

يمكن الوصول من $(0,0)$ إلى $(4,4)$ بعشر خطوات بالتحرك 5 خطوات إلى اليمين وخطوة إلى اليسار و 4 خطوات إلى الأعلى أو خمسخطوات إلى الأعلى وأربعخطوات إلى اليمين وخطوة إلى الأسفل.عدد مسارات كل من الحالتين هو

$1260 = \dfrac{10!}{4! \times 5! \times 1!}$. إذن، عدد المسارات هو $2 \times 1260 = 2520$.

(٤٦) [MAΘ 2008] كم عدد طرق توزيع 10 بالونات متشابهة على أحمد، بدر، جمال بحيث لا يشترط أن يأخذ أحدهم أياً من البالونات؟

الحل

هذه مسألة يمكن حلها مباشرة بتطبيق طريقة النجوم والأشرطة، نحتاج شريطين لفصل الأشخاص و 10 نجوم لتمثيل البالونات. وبهذا فعدد الطرق المطلوب هو

$$C(12,2) = \frac{12!}{2! \times 10!} = 66 .$$

(٤٧) [MAΘ 2008] إذا كانت العشرة بالونات في المسألة (٤٦) ملونة بثلاثة ألوان: 3 بالونات لونها أحمر، 3 بالونات لونها أصفر، 4 بالونات لونها أزرق فما عدد الطرق الممكنة لتوزيعها على الأطفال الثلاثة؟

الحل

يمكن استخدام طريقة النجوم والأشرطة في هذه المسألة أيضاً بإيجاد عدد طرق توزيع كل من الألوان الثلاثة فنحصل من مبدأ الضرب على العدد

$$C(5,2) \times C(5,2) \times C(6,2) = 10 \times 10 \times 15 = 1500 .$$

(٤٨) [MAΘ 2008] وضعت خمسة مقاعد في صف واحد وخصص مقعد واحد لكل من المدرسين الخمسة للجلوس عليه. عند وصول المدرسين لم يلتزموا بالجلوس على المقاعد المخصصة لكل منهم ولكنهم قاموا بالجلوس عشوائياً على هذه المقاعد. كم عدد الطرق الممكنة لجلوس المدرسين بحيث يجلس اثنان فقط منهم على المقعدين المخصصين لهما؟

الحل

يمكن تجليس اثنان من المدرسين على المقعدين المخصصين لهما بعدد من الطرق يساوي $C(5,2) = 10$. ويوجد طريقتان فقط لتجليس كل من الثلاثة مدرسين

الآخرين على مقعد غير مخصص له هما BCA و CAB. إذن، عدد الطرق هو $2 \times 10 = 20$.

(٤٩) [MAΘ 2008] لدينا 5 كرات نريد توزيعها على أربعة صناديق A، B، C، D يتسع كل منها لكرتين على الأكثر. كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع هذه الكرات على الصناديق الأربعة؟

الحل

توجد حالتان فقط لتوزيع الكرات الخمس. الأولى منهما وضع كرتين في كل من صندوقين وكرة واحدة في أحد الصندوقين الآخرين أو وضع كرتين في صندوق وكرة واحدة في كل من الصناديق الثلاثة الباقية. عدد طرق الحالة الأولى هو $2 \times C(4,2) = 12$. وعدد طرق الحالة الثانية هو 4. إذن، عدد الطرق الكلية هو $12 + 4 = 16$.

(٥٠) [MAΘ 2008] عدد ترتيبات حروف الكلمة $AABBCC$ هو $\dfrac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$. كم عدد الترتيبات من بينها التي تحتوي الكلمة ABC؟

الحل

نفرض أن الكلمة ABC هي حرف واحد. ولذا يكون المطلوبإيجاد عددترتيبات الحروف الأربعة ABC، A، B، C. هذا العدد هو $4! = 24$. ولكن هناك ترتيبان من بينها متشابهان هما $ABC \quad C \quad B \quad A$ و $C \quad B \quad A \quad ABC$. ولذا عدد الترتيبات هو $24 - 1 = 23$.

(٥١) نريد اختيار لجنة مكونة من 4 أعضاء هيئة تدريس ومقرر لها من بين 15

عضو هيئة تدريس. كم عدد الطرق الممكنة لاختيار هذه اللجنة؟

الحل

يمكن اختيار لجنة مكونة من 5أشخاص (أعضاء اللجنة والمقرر) من بين 15عضو هيئة تدريس بعدد من الطرق يساوي $C(15,5) = \dfrac{15!}{10! \times 5!} = 3003$.

بعد اختيار اللجنة يمكن اختيار المقرر بعدد من الطرق يساوي 5. إذن، عدد الطرق هو $5 \times 3003 = 15015$.

(٥٢) أراد 14 شخصاً الذهاب إلى البر باستخدام ثلاث سيارات، سيارة جيب تتسع لسبعة أشخاص وسيارة صالون تتسع لخمسة أشخاص وسيارة رياضية تتسع لثلاثة أشخاص. بكم طريقة يمكنهم ركوب السيارات؟

الحل

عدد الأشخاص 14والسعة القصوى للثلاث سيارات هي 15. ولذا يمكن تجليس الأشخاص في السيارات الثلاث بإحدى الحالات المبينة في الجدول التالي:

الجيب	صالون	الرياضية
6	5	3
7	5	2
7	4	3

عدد طرق الحالة الأولى هو $C(14,6) \times C(8,5) \times C(3,3)$.

عدد طرق الحالة الثانية هو $C(14,7) \times C(7,5) \times C(2,2)$.

عدد طرق الحالة الثالثة هو $C(14,7) \times C(7,4) \times C(3,3)$.

ولذا يمكن تجليس الأشخاص بعدد من الطرق يساوي

$$C(14,6)\times C(8,5)+C(14,7)\times C(7,5)+C(14,7)\times C(7,4).$$

(٥٣) [PACAT] أردنا تجليس 20 شخصاً بينهم أخوان على طاولة دائرية بحيث يجلس شخصواحد بين الأخوين. ما عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

الحل

لنفرض أن الأخوين والشخص الجالس بينهما هم شخص واحد. ومن ثم نحتاج إلى تجليس 18 شخصاً حول طاولة دائرية. عدد طرق إنجاز ذلك هو $17!$. كما يمكن تجليس الأخوين بأي جهة من جهتي الشخص الجالس بينهما بعدد من الطرق يساوي 2. وأخيراً الشخص الجالس بين الأخوين يمكن أن يكون أياً من الأشخاص الـــ 18. إذن، العدد الكلي لتجليس الأشخاص هو $18\times 2\times 17! = 2\times 18!$.

(٥٤) [PACAT]نريد تكوين لجنة تحتوي على 3 أشخاص من بين 6 أطباء و 4 ممرضين. إذا رفض الممرض A أن ينضم إلى اللجنة التي تحتوي الطبيب B، بينما الطبيب B يقبل أن يكون ضمن اللجنة فقط إذا احتوت اللجنة الممرض C فما عدد اللجان الممكن تكوينها؟

الحل

لدينا حالتان: إما أن يكون الطبيب B عضواً في اللجنة أو أن لا يكون عضواً في اللجنة. إذا كان B عضواً في اللجنة فإن الممرض C عضو في اللجنة والممرض A ليس عضواً في اللجنة.إذن، يبقى 5 أطباء وممرضان نختار منهم العضو الثالث في اللجنة بعدد من الطرق يساوي 7. أما إذا لم يكن B عضواً في اللجنة فيبقى لدينا

9أشخاص نختار ثلاثة منهم بعدد من الطرق يساوي $84 = \dfrac{9!}{6! \times 3!} = C(9,3)$.

إذن، عدد اللجان جميعاً هو $91 = 84 + 7$.

(٥٥) [PACAT] في سباق للخيل تتنافس 6أحصنة بينها الحصانان A و B .
كم عدد الترتيبات الممكنة لوصول الأحصنة الستة إلى خط النهاية بشرط أن يصل A دائماً قبل B ؟

الحل

لدينا حالتان: إما أن يصل A قبل B أو أن يصل B قبل A . إذن، عدد الترتيبات الممكنة هو عدد ترتيبات 6أحصنة مقسوماً على 2. أي $360 = \dfrac{6!}{2}$.

(٥٦) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة $MAROUF$ بشرط أن لا يكون الحرفان M و F متجاورين؟

الحل

عدد ترتيبات حروف الكلمة $MAROUF$ يساوي $6!$. عدد الترتيبات بحيث يكون الحرفان M و F متجاوران هو $2 \times 5!$ (يمكن أن يكون FM أو MF).

إذن، عدد الترتيبات بحيث لا يتجاور الحرفان M و F هو

$$6! - 2 \times 5! = 720 - 240 = 480 .$$

(٥٧) كم عدد طرق وقوف 4أطفال وأمهاتهم في طابور بحيث يقف الطفل دائما أمام والدته؟

الحل

لنفرض أن C_1, C_2, C_3, C_4 هم أطفال الأمهات M_1, M_2, M_3, M_4 على التوالي.

إذن، المطلوب ترتيب 8عناصر بأربعة أنماط M_iC_i .عدد هذه الترتيبات هو

$$\frac{8!}{2!\times 2!\times 2!\times 2!} = 2520.$$

(٥٨) [PACAT] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تزيد عن 6000000 ومراتبها هي الأعداد $3, 4, 4, 5, 6, 6, 7$ ؟

الحل

بما أن العدد n يزيد عن 6000000 فإن مرتبة الملايين يجب أن تكون 6 أو 7. إذا كانت مرتبة الملايين 6 فإنه يمكن ترتيب المراتب الست الباقية بعدد من الطرق

$$\frac{6!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = 360.$$

أما إذا كانت مرتبة الملايين 7 فإنه يمكن ترتيب المراتب الست الباقية بعدد من الطرق

$$\frac{6!}{2!\times 2!\times 1!\times 1!} = 180$$

إذن، عدد الأعداد n هو $540 = 180 + 360$.

(٥٩) [AMC122007] يقال إن مجموعة من الأعداد الصحيحة مميزة إذا كانت لا تحوي أكثر من عدد من أي ثلاثة أعداد موجبة متتابعة. كم عدد المجموعات الجزئية المميزة من $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ (بما فيها المجموعة الخالية)؟

الحل

من شرط المسألة سيكون بين كل عددين مختارين في الوضع المرتب للأعداد لمجموعة مميزة عددان متروكان على الأقل. ولاحظ أن المجموعة الجزئية المميزة من المجموعة المعطاة ستحوي أربعة عناصر على الأكثر. سنعد المجموعات الجزئية المميزة

حسب عدد عناصرها.

الحالة الأولى:المجموعة الجزئية المميزة هي المجموعة الخالية. يوجد مجموعة واحدة في هذه الحالة.

الحالة الثانية: تحوي المجموعة الجزئية المميزة على عنصر واحد. هناك 12 مجموعة في هذه الحالة.

الحالة الثالثة: تحوي المجموعة الجزئية المميزة على عنصرين على الأقل بينها عددان متروكان ○□□○ حيث الدائرة تمثل العدد المختار والمربع يمثل العدد المتروك ويتبقى ثمانية أعداد يمكنها أن تكون قبل العدد الأول المختار أو بعد الثاني أو بينهما، وباعتبار المختارينحاجزين بالنسبة لها فإن عدد طرق ذلك هو $C(8+3-1, 3-1) = C(10,2) = 45$.

الحالة الرابعة: تحوي المجموعة الجزئية المميزةعلى ثلاثةعناصر وسيكون بينها على الأقل 4أعداد متروكة. أي عددان متروكان بين كل عددين مختارين ولنمثل الحل بكرات وأشرطة ○□□○□□○ ،ويتبقى خمسة أعداد يمكنها أن تكون قبل العدد الأول المختارأو بعد الثالث أو بين أي أثنين منهما وكأن الثلاث أعداد المختارةحواجزبالنسبة لها. أي يمكن عمل ذلك بعدد من الطرق يساوي $C(5+4-1, 4-1) = C(8,3) = \dfrac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1} = 56$.

الحالة الخامسة: تحوي المجموعة الجزئية المميزة أربعة عناصر وسيكون بينها على الأقل 6أعداد متروكة. أي عددان متروكان بين كل عددين مختارين ولنمثل ذلك بكرات وأشرطة ○□□○□□○□□○ ويتبقى عددين متروكين يمكنهما أن يكونا قبل العدد الأول المختار أو بعد الرابع أو بين أي اثنين منها وكأن الأربعة أعداد

المختارة حواجز بالنسبة لها. أي يمكن عمل ذلك بعدد من الطرق $15 = \frac{6\times 5}{2\times 1} = C(6,4)$. وبالتالي عدد المجموعات الجزئية المميزة يساوي 129 .

(٦٠) أراد صلاح توزيع 9قطع حلوى على إخوته الأربعة. بكم طريقة يمكنه عمل ذلك بشرط أن يعطي كل واحد قطعة على الأقل؟

الحل

يمكن حل المسألة باستخدام النجوم و الأشرطة باعتبار قطع الحلوى النجوم ونضع ثلاثة حواجز كأشرطة لتحديد نصيب كل أخ من الحلويات. وكون الحصص تتحدد بحركة الحواجز بين النجوم فسيكون عدد التوزيعات المطلوبة بعد إعطاء كل أخ قطعة هو

$$C(8,3) = \frac{8\times 7\times 6}{3!} = 56$$

مسائل غير محلولة

(١) ما عدد طرق ترتيب حروف الكلمة $ABCDEFGH$ بشرط أن يقع الحرف C مباشرة بعد B والحرف B مباشرة بعد الحرف A ؟

(أ) $6!$ (ب) $7!$ (ج) $8!$ (د) $6\times 6!$

(٢) لتكن A ، B ، C ، D ، E خمس نقاط في المستوى لا توجد ثلاثة منها على استقامة واحدة من المستوى. ما عدد المستقيمات المتعامدة التي يمكن تكوينها من هذه النقاط ؟

(أ) 6 (ب) 15 (ج) 30 (د) 45

(٣) بكم طريقة يمكن ترتيب 6 من عشرة أشخاص $A_1,\ldots,A_{10}$ إذا رفض A_1 أن يكون بجوار A_2 ؟

(أ) $10!-9!$ (ب) $10!-2\times 9!$ (ج) $\dfrac{10!-2\times 9!}{4!}$ (د) $\dfrac{10!-9!}{4!}$

(٤) كم عدد الكلمات الثلاثية (تستخدم المراتب 0، 1، 2) من الطول 10 التي تتكون من 5 مراتب صفرية و 3 مراتب 1 ومرتبتين 2؟

(أ) 2500 (ب) 2520 (ج) 7920 (د) $10!$

(٥) ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من عددين غير متتالين من المجموعة $\{0,1,2,3,\ldots,25\}$ ؟

(أ) 325 (ب) 310 (ج) 300 (د) 275

(٦) يتكون فصل من 12 طالباً نريد تقسيمهم إلى 3 فرق، كل فريق يتكون من أربعة طلاب. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(أ) 34650 (ب) 17325 (ج) 6775 (د) 5775

(٧) نريد اختيار لجنة مكونة من 4 مهندسين و 3 فنيين من بين 5 مهندسين و 6 فنيين. بكم طريقة يمكن تكوين اللجنة إذا رفض المهندسان أحمد ووضاح أن يكونا باللجنة نفسها؟

(أ) 100 (ب) 80 (ج) 60 (د) 40

(٨) كم عدد الكلمات الثنائية من الطول 8 التي تحتوي مرتبتين 1 على الأقل؟

(أ) 2^8 (ب) 2^8-9 (ج) 2^7 (د) 2^6

(٩) فصل دراسي عدد طلابه 15. مقاعد الفصل الدراسي موزعة على صفين، الصف الأمامي وعدد مقاعده 8 والصف الخلفي وعدد مقاعده 10. بكم طريقة يمكن تجليس طلاب الفصل في الصفين إذا رفض 4 طلاب الجلوس في الصف الخلفي ورفض 5 طلاب الجلوس في الصف الأمامي؟

(أ) $6!\times 8!\times 10!$ (ب) $8!\times 10!$

(ج) $15\times 8!\times 10!$ (د) $31\times 8!\times 10!$

(١٠) ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من عددين مجموعهما عدد زوجي من المجموعة $\{1,2,3,4,\ldots,20\}$؟

(أ) 90 (ب) 120 (ج) 240 (د) 720

(١١) ما عدد طرق ترتيب 5 حروف A و 7 حروف B بشرط أن لا يتجاور حرفا A؟

(أ) 45 (ب) 56 (ج) $5!\times 7!$ (د) $12!$

(١٢) ما عدد طرق اختيار خمس ورقات نقد من بين الفئات 1 ريال، 5 ريال، 10 ريال، 20 ريال، 50 ريال، 100 ريال، 200 ريال، 500 ريال مع توافر 5 ورقات نقد على الأقل من كل فئة ومع تجاهل

الترتيب في الاختيار؟

(أ) 462 (ب) 528 (ج) 720 (د) $13!$

(١٣) يقدم محل بيع عصائر ثلاثة أنواع مختلفة من العصائر. ما عدد طرق اختيار 7 أكواب عصائر؟

(أ) 36 (ب) 48 (ج) 84 (د) $10!$

(١٤) ما عدد الكلمات التي نحصل عليها بترتيب حروف الكلمة $MOHAMMAD$؟

(أ) 420 (ب) 720 (ج) 3260 (د) 3360

(١٥) ما عدد حلول المعادلة $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$ حيث x_1 عدد صحيح موجب و x_2، x_3، x_4، x_5 أعداد صحيحة غير سالبة؟

(أ) $C(25,4)$ (ب) $C(24,4)$ (ج) $C(25,5)$ (ج) $C(24,5)$

(١٦) ما عدد حلول المعادلة في التمرين (١٥) إذا كانت جميع الأعداد x_i صحيحة وأكبر من أو تساوي 2؟

(أ) $C(16,3)$ (ب) $C(16,4)$ (ج) $C(15,4)$ (د) $C(21,4)$

(١٧) عدد أسئلة الاختبار النهائي لنظرية الأعداد يساوي 6 ومجموع درجاتها يساوي 50. ما عدد الطرق المختلفة لتحديد درجات لهذه الأسئلة بحيث تكون درجة كل منها على الأقل 5 درجات؟

(أ) $C(26,20)$ (ب) $C(26,19)$ (ج) $C(25,20)$ (د) $C(25,19)$

(١٨) كم عدد الكلمات الثنائية من الطول 8 التي تحتوي ثلاث مراتب 0 متجاورة وخمس مراتب 1؟

(أ) 6 (ب) 15 (ج) 24 (د) 56

(١٩) كم عدد ترتيبات حروف الكلمة $ABCDE$ التي لا تحتوي AB ولا تحتوي BE؟

(أ) 42 (ب) 78 (ج) 90 (د) 120

(٢٠) بكم طريقة يمكن وضع 7 مفاتيح مختلفة في علاقة مفاتيح دائرية؟

(أ) $7!$ (ب) $6!$ (ج) $\frac{7!}{2}$ (د) $\frac{6!}{2}$

(٢١) ما عدد طرق تجليس 3 أطفال و 7 نساء حول مائدة مستديرة بحيث لا يتجاور طفلان؟

(أ) $3!\times 7!$ (ب) $3!\times 6!$ (ج) $210\times 6!$ (د) $2!\times 6!$

(٢٢) نريد توزيع عشرة كتب رياضيات مختلفة على أحمد ومحمد وسلطان بحيث يأخذ أحمد خمسة كتب ومحمد ثلاثة كتب وسلطان كتابين. بكم طريقة يمكن توزيع الكتب؟

(أ) 420 (ب) 840 (ج) 1260 (د) 2520

(٢٣) وضعت حبات حلوى MM في أحد المتاجر بثلاثة أكوام حسب لون الحلوى، أزرق، أصفر، أحمر. ولغرض الدعاية للمحل يوزع صاحب المحل 8 حبات من الحلوى يختارها الطفل من بين الأكوام الثلاثة. بكم طريقة يستطيع الطفل محمد أن يختار حباته الثماني بشرط أن يختار على الأقل حبة واحدة من كل كوم؟

(أ) 15 (ب) 21 (ج) 45 (د) 60

(٢٤) [AIME 1983] ما أكبر قاسم أولي مكون من مرتبتين للعدد $C(200,100)$ ؟

(أ) 47 (ب) 59 (ج) 61 (د) 67

(٢٥) [AIME 1988]عرضت إحدى الشركات تصميماً لأبواب بأقفال رقمية حيث وضعت على الباب لوحة عليها الأرقام من 1إلى 10. يختار صاحب البيت 5من هذه الأرقام ليكون القفل الرقمي للباب ويتم فتح الباب بالضغط على الأرقام الخمسة بأي ترتيب. لنفرض أنه تم إعادة تصميم الأبواب بحيث يسمح بأن يكون الرقم السري مكوناً من مجموعات جزئية من المجموعة $\{1,2,3,...,10\}$أعداد عناصرها من 1إلى 9. ما الزيادة في عدد الأقفال الذي سنحصل عليه؟

(أ) 252 (ب) 770 (ج) 1022 (د) 1024

(٢٦) [AIME1989]حددنا عشر نقاط على محيط دائرة. كم عدد المضلعات المحدبة التي يمكن رسمها باستخدام ثلاث أو أكثر من هذه النقاط؟

(أ) 56 (ب) 968 (ج) 512 (د) 1024

(٢٧) [UOSCHSMC 1993] ما عدد تباديل الأعداد $1,2,3,...,9$ بشرط أن يظهر العدد 1على يمين العدد 2ويظهر العدد 3على يمين العدد 4ويظهر العدد 5على يمين العدد 6؟

(أ) $9!$ (ب) $9\times 8!$ (ج) $9\times 7!$ (د) $9\times 6!$

(٢٨) كم عدد الحلول الصحيحة غير السالبة الفردية للمعادلة $x_1 + x_2 + x_3 = 99$؟

(أ) 99 (ب) 512 (ج) 1035 (د) 1225

(٢٩) لدى السيد صالح سبعة أقارب، ثلاثة رجال وأربع نساء ولدى زوجته أيضاً سبعة أقارب، أربعة رجال وثلاث نساء. أراد الزوجان عمل وجبة عشاء

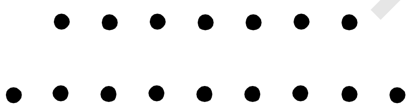
لستة أشخاص من أقاربهما على أن يكون المدعوون ثلاثة رجال وثلاث نساء وأن يكون ثلاثة منهم من أقارب السيد صالح وثلاثة من أقارب زوجته.بكم طريقة يمكنهما تنفيذ ذلك؟

(أ) 485 (ب) 324 (ج) 144 (د) 16

(٣٠) [AIME 1984] يريد السيد أبوعبدالله أن يزرع 3 شجرات رمان و 4 شجرات ليمون و 5 شجرات تفاح في صف واحد على الضلع الخلفي لسور حديقته المنزلية. نصحه المزارع أن لا يزرع شجرتي تفاح متجاورتين. ماعدد الطرق الممكنة لزرع هذه الأشجار؟

(أ) 1960 (ب) $12!$ (ج) $5!\times 9!$ (د) $3!\times 9!$

(٣١) في الرسم المبين صفان متوازيان من النقاط. الصف العلوي يحتوي 7 نقاط، المسافة بين كل نقطتين وحدة طول واحدة والصف السفلي يحتوي 9 نقاط، المسافة بين كل نقطتين وحدة طول واحدة والمسافة بين الصفين وحدتا طول. كم عدد أشباه المنحرفات التي ليست متوازيات أضلاع، التي يمكن تكوينها من هذه النقاط؟



(أ) 523 (ب) 756 (ج) $7!$ (د) $9!$

(٣٢) [AUST.MC1995] عدد أسئلة اختبار رياضيات يساوي 6. الدرجة التي يمكن أن يحصل عليها طالب عن كل من الأسئلة هي 0أو 1أو 2أو 3. يمكن أن يحصل طالب على الدرجة 18في الاختبار بطريقة واحدة فقط ويمكن أن يحصل على الدرجة 17بست طرق. ما عدد طرق الحصول على

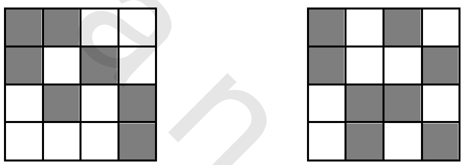
الدرجة 16؟

(أ) 12 (ب) 15 (ج) 21 (د) 42

(٣٣) [AUST.MC 1993]وضعنا أربعة مفاتيح كهرباء كل منها يمكن أن يكون بوضع ONأو وضع OFFفي صف واحد. بكم طريقة يمكن ترتيبها بحيث لا يتجاور مفتاحان بوضع OFF؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 16

(٣٤) [AUST.MC 1992] نريد تلوين رقعة مربعة من النوع 4×4 بلونين: أبيض وأسود بحيث يلون مربعان من كل صف وكل عمود باللون الأبيض والمربعان الآخران باللون الأسود. الشكلان التاليان مثالان على هذا التلوين.



كم عدد التلوينات الممكنة؟

(أ) 36 (ب) 48 (ج) 86 (د) 90

(٣٥) [AUST.MC 1998]سيارة تتسع لراكب واحد في الكرسي الأمامي (غير السائق) وثلاثة ركاب في الكرسي الخلفي. كم عدد طرق تجليس أربعة ركاب إذا رفض أحدهم الجلوس في الكرسي الأمامي؟

(أ) 4 (ب) 6 (ج) 12 (د) 18

(٣٦) [AUST.MC 1994]نريد اختيار لجنة من 6أشخاص من بين 8طلاب و 6مدرسين على أن تحتوي اللجنة على 3طلاب على الأقل ومدرسَيْن على الأقل. كم عدد الطرق الممكنة لذلك؟

(أ) 1050 (ب) 1120 (ج) 2170 (د) 7560

(٣٧) [AUST.MC 1996] ما عدد طرق اختيار 3 أعداد مختلفة بترتيب تزايدي من المجموعة $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ بحيث لا يكون أي عددين منهما متتاليين؟

(أ) 48 (ب) 54 (ج) 56 (د) 72

(٣٨) [MAΘ1998] كم عدد المجموعات الجزئية المكونة من 4 عناصر مأخوذة من المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ والتي تحتوي العدد 1 ولكنها لا تحتوي العدد 7؟

(أ) 10 (ب) 15 (ج) 24 (د) 35

(٣٩) [MAΘ1998] ما العدد الصحيح الموجب n الذي يحقق

$C(n,1) + C(n,2) + C(n,3) = 231$؟

(أ) 11 (ب) 12 (ج) 15 (د) 18

(٤٠) [AUST.MC 2000] أراد الأعضاء المؤسسون لنادي تنس أرضي تنظيم مسابقة بين جميع أعضاء النادي بحيث يلعب كل من لاعبي النادي مع جميع الأعضاء الآخرين. وجد أن عدد المباريات بين جميع الأعضاء سيتجاوز 2000 مباراة مما يشكل عبئاً على النادي فقرروا إلغاء المباريات بين الأعضاء المؤسسين للنادي ليكون عدد المباريات 2001. ما عدد الأعضاء المؤسسين للنادي ؟

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 8 (د) 10

(٤١) [AUST.MC 2001] ما حاصل جمع جميع الأعداد المكونة من أربع مراتب مأخوذة من المراتب 1, 2, 3, 4 مع السماح بالتكرار؟

(أ) 700410 (ب) 711040 (ج) 714040 (د) 718140

(٤٢) ما عدد الكلمات المختلفة التي نحصل عليها من ترتيب حروف كلمة $COMMUNICATION$ بشرط أن يقع الحرف U بعد الحرف T ؟

(أ) $13!$ (ب) $\frac{13!}{2^5}$ (ج) $\frac{13!}{2^6}$ (د) $\frac{13!}{2^7}$

(٤٣) عدد لاعبي كرة القدم في أحد النوادي يساوي 16 لاعباً. أردنا اختيار فريق مكون من 11 لاعباً ليلعب إحدى المباريات وبحيث نحدد قائداً لهذ الفريق. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(أ) 38048 (ب) 40048 (ج) 42048 (د) 48048

(٤٤) أردنا صف 4 كتب رياضيات، 5 كتب فيزياء، 3 كتب كيمياء على أحد رفوف مكتبة بحيث نضع كتب الموضوع الواحد بجوار بعضها البعض. كم عدد الطرق المختلفة لإنجاز ذلك؟

(أ) 17280 (ب) 90280 (ج) 103680 (د) 120680

(٤٥) يتكون اختبار الرياضيات من 10 أسئلة مقسمة إلى مجموعتين كل منهما تحتوي على 5 أسئلة. المطلوب من الطالب أن يجيب عن 6 أسئلة بحيث يجيب عن سؤالين على الأقل من كل من المجموعتين. كم عدد الخيارات الممكنة للطالب؟

(أ) 50 (ب) 100 (ج) 150 (د) 200

(٤٦) عدد طلاب الصفوف الأول والثاني والثالث ثانوي في مدرسة عمر بن الخطاب الثانوية هو 25، 20، 15 على التوالي. بكم طريقة يمكن اختيار ستة طلاب من المدرسة للمشاركة في مسابقة الرياضيات الوطنية إذا أردنا أن نختار طالبين من كل صف؟

(أ) $C(60,6)$ (ب) $C(25,2)\times C(20,2)\times C(15,2)$

(ج) $C(20,2)\times C(40,4)$ (د) $\left[C(60,2)\right]^2$

(٤٧) اخترنا 10 طلاب من المدرسة A و 15 طالباً من المدرسة B و 20 طالباً من المدرسة C للمشاركة في تصفيات لعبة كرة الطاولة. ما عدد طرق فوز ستة طلاب بالمراكز الستة الأولى بشرط أن يكون 3 من الفائزين من المدرسة A ؟

(أ) $3!\times C(10,3)\times C(35,3)\times 3!$ (ب) $3!\times P(10,3)\times P(35,3)\times 3!$

(ج) $6!\times C(10,3)\times C(35,3)\times 6!$ (د) $6!\times P(10,3)\times P(35,3)\times 6!$

(٤٨) في حفل تخرج الصف الثالث ثانوي في مدرسة أبي بكر الصديق الثانوية طلب مدير المدرسة من المصور التقاط صورة جماعية لطلاب الصف وعددهم 30 طالباً مع مدرسيهم وعددهم 4 مدرسين. اقترح عليهم المصور أن يجلس المدرسون في الصف الأمامي وأن يقف الطلاب في الصف الخلفي على أن يقف الطالبان الأطول في بداية ونهاية صف الطلاب. بكم طريقة يمكن تجليس الطلاب؟

(أ) $48\times 28!$ (ب) $24\times 30!$ (ج) $12\times 30!$ (د) $8\times 28!$

(٤٩) ما عدد الكلمات المكونة من 7 حروف التي تستطيع تكوينها من الحروف الانجليزية A إلى Z والتي تحتوي على حرف مكرر على الأقل؟

(أ) 26^7 (ب) $26^7-P(26,7)$

(ج) $26^7-C(26,7)$ (د) $26^7-7!$

(٥٠) [PACAT] وضعنا 12 كرسياً مرقمة بالأعداد من 1 إلى 12 في صف واحد.

أردنا تجليس 4 أشخاص على هذه الكراسي بحيث يجلس اثنان منهما على الكرسي رقم 1 والكرسي رقم 8 وأن لا يتجاور شخصان. كم عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك؟

(أ) 360 (ب) 384 (ج) 432 (د) 470

(٥١) [PACAT] كم عدد الطرق الممكنة لوضع 5 لعب مختلفة في 3 صناديق متشابهة بحيث نضع في كل صندوق لعبة واحدة على الأقل؟

(أ) 20 (ب) 25 (ج) 480 (د) 600

(٥٢) اشترى مدرس الرياضيات 11 هدية رمزية مختلفة وأراد أن يوزعها على 10 طلاب متميزين في الفصل من أجل تشجيعهم. كم عدد الطرق الممكنة لتوزيع الهدايا بحيث يأخذ كل طالب منهم على الأقل هدية واحدة؟

(أ) $10\times 10!$ (ب) $11\times 10!$ (ج) $10\times 11!$ (د) $\dfrac{11\times 10!}{2}$

(٥٣) أراد 25 عضو هيئة تدريس من قسم الرياضيات تناول العشاء في أحد المطاعم الصينية. عند محاولتهم حجز مائدة في المطعم، أخبرهم مدير المطعم بعدم وجود مائدة مستديرة واحدة تتسع لهم جميعاً ولكن ما هو متوافر لديه هو ثلاث موائد مستديرة تتسع إحداها لعشرة أشخاص والثانية لثمانية أشخاص والثالثة لسبعة أشخاص. كم عدد الطرق الممكنة لتجليس 25 عضو هيئة تدريس على الموائد الثلاثة؟

(أ) $\dfrac{25!}{560}$ (ب) $\dfrac{25!}{6!}$ (ج) $9!\times 7!\times 6!$ (د) $10!\times 8!\times 7!$

(٥٤) [PACAT] ادعى أحد خبراء تذوق الشاي بالحليب أن بإمكانه معرفة ما إذا كانت أوراق الشاي مضافة أولاً أو الحليب مضافاً أولاً إلى كوب الشاي

بالحليب بمجرد تذوقه. ولغرض اختبار صحة ادعاء الخبير قدم له 10أكواب من الشاي بالحليب، خمسة منها أضيفت أوراق الشاي إليها قبل الحليب والخمسة أكواب الأخرى أضيف إليها الحليب قبل أوراق الشاي. كم عدد الطرق الممكنة لتقديم هذه الأكواب إلى الخبير؟

(أ) 240 (ب) 252 (ج) 300 (د) 340

(٥٥) [PACAT] عدد طرق ترتيب n من الأطفال في صف بحيث لا يتجاور ولدان ولا تتجاور بنتان يساوي m ($m > 100$). إذا أضفنا إلى المجموعة طفلاً واحداً يصبح عدد طرق ترتيب الأطفال كما هو موصوف أعلاه ثلاثة أمثال العدد السابق. ما قيمة n؟

(أ) 8 (ب) 9 (ج) 10 (د) 12

(٥٦) [PACAT] ما عدد ترتيبات حروف الكلمة $AMAZED$ بشرط وقوع الحرف E بين الحرفين A؟

(أ) 24 (ب) 72 (ج) 120 (د) 240

(٥٧) [PACAT] تتكون حروف اللغة الانجليزية من 11حرفاً متناظراً (أي لا يتغير شكله إذا وضع أمام مرآة) وهي A، H، I، M، O، T، U، V، W، X، Z وباقي الحروف هي حروف غير متناظرة. كم عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف مختلفة التي يمكن تكوينها بحيث يكون أحد حروفها على الأقل متناظراً؟

(أ) 12000 (ب) 12870 (ج) 13000 (د) 13870

(٥٨) [PACAT] عدد مكون من 7مراتب مأخوذة من المرتبتين 2و 3فقط. كم عدداً من بين هذه الأعداد يكون مضاعفاً للعدد 12؟

(أ) 1 (ب) 11 (ج) 21 (د) 47

(٥٩) [PACAT] كم عدد ترتيبات أربع مراتب 0 ومرتبتي 1 ومرتبتي 2 بحيث يكون أول وقوع للمرتبة 1 قبل أول وقوع للمرتبة 2؟

(أ) 420 (ب) 360 (ج) 320 (د) 210

(٦٠) [PACAT] لدينا 8 صناديق كل منها يحتوي على عدد مختلف من حبات الحلوى (من حبة واحدة إلى 8 حبات). بكم طريقة يمكن توزيع أربعة من هذه الصناديق على أربعة أشخاص (كل منهم يأخذ صندوقاً واحداً) بحيث يحتوي صندوق الشخص الأول على أكبر عدد من حبات الحلوى وصندوق الشخص الثاني يحتوي على عدد أكبر من عددي صندوقي الشخصين الثالث والرابع وصندوق الشخص الثالث يحتوي على عدد أكبر من عدد صندوق الشخصالرابع؟

(أ) 70 (ب) 150 (ج) 210 (د) 240

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) أ	(٢) ج	(٣) ج	(٤) ب	(٥) ج
(٦) د	(٧) د	(٨) ب	(٩) د	(١٠) أ
(١١) ب	(١٢) ب	(١٣) أ	(١٤) د	(١٥) ب
(١٦) ج	(١٧) ج	(١٨) أ	(١٩) ب	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) د	(٢٣) ب	(٢٤) ج	(٢٥) ب
(٢٦) ب	(٢٧) ج	(٢٨) د	(٢٩) أ	(٣٠) أ
(٣١) أ	(٣٢) ج	(٣٣) أ	(٣٤) د	(٣٥) د
(٣٦) ج	(٣٧) ج	(٣٨) أ	(٣٩) أ	(٤٠) ب
(٤١) ب	(٤٢) ج	(٤٣) د	(٤٤) ج	(٤٥) د
(٤٦) ب	(٤٧) ج	(٤٨) أ	(٤٩) ب	(٥٠) ب
(٥١) ب	(٥٢) ج	(٥٣) أ	(٥٤) ب	(٥٥) ج
(٥٦) ج	(٥٧) ب	(٥٨) ب	(٥٩) د	(٦٠) أ