# الباب السادس

# تطبيقات على التفاضل

سوف نهتم خصوصاً بالتطبيقات التي تبحث عن النهايات العظمى أو الصغرى للدالة.

فإذا كانت $Q$ كمية فيزيائية تتغير مع متغير مستقل $x$ على النحو $Q = f(x)$.

فإذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق فإنه من الممكن استعمال $\frac{dQ}{qx}$ لإيجاد القيم القصوى للكمية $Q$. أحيانا نسمي القيمة القصوى، القيمة المفضلة optimal value، فقد تكون القيمة المفضلة هي العظمى تارة وقد تكون الصغرى تارة لأخرى. ونسمي هذه المسألة، مسألة الحصول على القيمة المفضلة optimization problem. سوف نبدأ بتطبيقات عامة ثم نعطي تطبيقات خاصة في الميكانيكا والاقتصاد والعلوم الاجتماعية وعلوم الحياة.

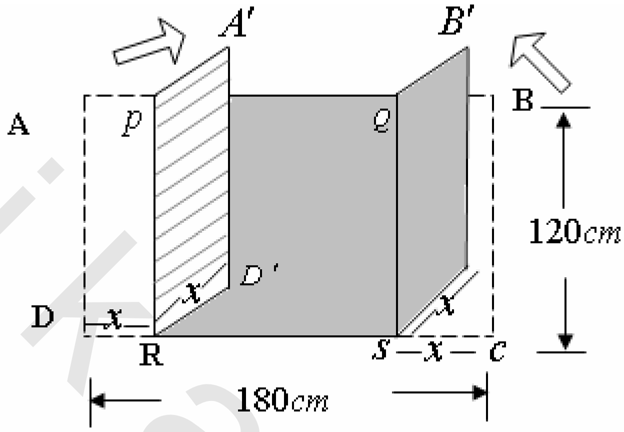
**بند 6–1: تطبيقات على القيم القصوى**

**مثال (1):** لوح معدني مستطيل عرضه $120\,cm$ وطوله $180\,cm$. ثني من نهايتي الطول جزئين طوليهما $x$. أي أدير $QBCS$ حول $QS$ زاوية قائمة وكذلك $APRD$ حول $PR$ زاوية قائمة بحيث $DR = SC$.

اوجد مقدار $DR$ أو $SC$ بحيث يسمح الجاروف المصنوع بهذه الكيفية من جمع أكبر كمية من المادة أثناء الجرف.

**الحـــل**

اللوح وكيفية ثنيه موضحه في شكل (129). $x$ ترمز لطولي $DR$ ، $SC$ .




شكل (129): مثال (1)

تتحدد سعة الجاروف حسب عرضه $RS$ وارتفاع جوانبه $RD'$ أو $SC'$ .

أي هذه المساحة أكبر ما يمكن. إذا رمزنا للمساحة بالرمز $A$ فإن

$$A = x(180-2x)$$
$$= 180x - 2x^2 \quad , \quad 0 \le x \le 90$$

لأن $x$ أكبر من 0 ولأنها أقل من نصف الطول وللحصول على $A$ القصوى،

$$\frac{dA}{dx} = 180 - 4x$$
$$= 0$$

يؤدي إلى $x = 45cm$

وبما أن $\frac{d^2A}{dx^2} = -4$

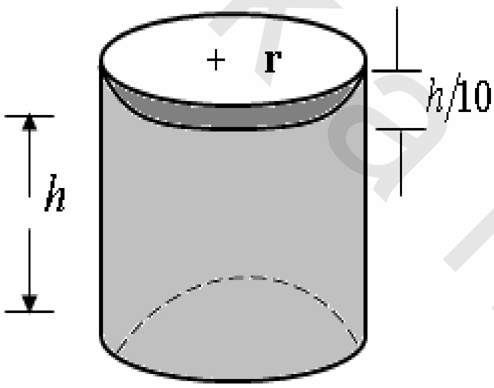
$\therefore$ $x = 45$ هي عدد حرج يناظر نهاية عظمى للمساحة $A$ .

وعلى ذلك يثنى جزء طوله $x = 45cm$ من نهايتي الطول للحصول على أفضل جاروف.

**مثال (2):** يراد صنع علب للمشروب تسع كل منها $100cm^3$ من التن، على شكل أسطوانة دائرية قائمة بغطاء. علماً بأن للغطاء حافة تساوي $\frac{1}{10}$ من ارتفاع الأسطوانة تستخدم للبرشمة.

أوجد أبعاد هذه العلب بحيث تكون بأقل تكاليف ممكنة.

**الحـــل**




بفرض $r$ نصف القطر، $h$ الارتفاع.

حجم العلبة $V$

$$V = \pi r^2 h$$

إذن

$$100 = \pi r^2 h$$

أو

$$h = \frac{100}{\pi r^2}$$

مساحة الشريحة المستخدمة في الصناعة،

$A$ = مساحة الحافة + مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{h}{10}$$

$$= 2\pi r\left(h + r + \frac{h}{10}\right)$$

$$= 2\pi r\left(r + \frac{11h}{10}\right)$$

ولتقليل التكاليف يجب جعل هذه المساحة أصغر ما يمكن. بوضع $h=\dfrac{100}{\pi r^2}$

$$A=2\pi r\left(r+\frac{110}{\pi r^2}\right)$$

$$A=2\pi r^2+\frac{220}{r}$$

$$\frac{dA}{dr}=4\pi r-\frac{220}{r^2}$$

والقيمة القصوى لـــ $A$ عندما $A'=0$

$$2\pi r-\frac{220}{r^2}=0$$

$$2\pi r^3-220=0$$

$$r=\left(\frac{110}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$r\approx 3.25cm$$

$$h=\frac{100}{\pi(3.25)^2}$$

$$h=3cm$$

والشريط المستخدم للبرشام عرضه $0.3cm$ وطوله $2\pi r=20.4cm$

وبما أن

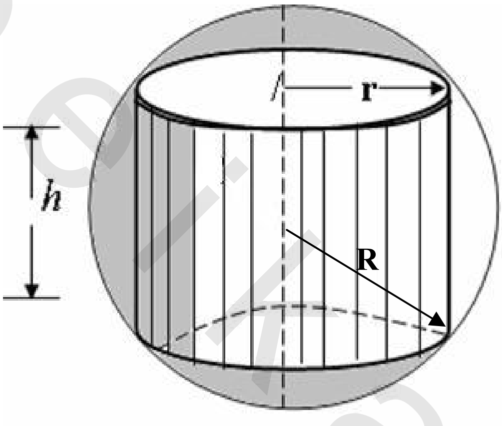
$$\frac{d^2A}{dr^2}=2\pi+\frac{440}{r^3}$$

موجبة دائماً. إذا القيمة القصوى للمساحة هي النهاية الصغرى للمساحة المستخدمة.

**مثال (3)**

أوجد أكبر حجم اسطوانة دائرية قائمة من الممكن أن تمس حافتي قاعدتها السطح الداخلي لقشرة كروية نصف قطرها $R$.

**الحـــل**




شكل (130)

لكي نعبر عن حجم الاسطوانة (شكل 130)، $v$، بدلالة متغير واحد. نوجد أولاً علاقة بين نصف قطر الاسطوانة ونفرضه $r$ وارتفاعها ونفرضه $h$. وتبدو هذه العلاقة واضحة من مبرهنة فيثاغورث،

$$R^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2$$

$$r^2 = R^2 = -\frac{1}{4}h^2$$

والحجم $v$،

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi h\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)$$

$$V = \pi\left(R^2 h - \frac{h^3}{4}\right)$$

ويبلغ $v$ قيمته العظمى عندما

$$\frac{dv}{dh} = 0$$

$$\frac{dv}{dh} = \pi\left(R^2 - \frac{3}{4}h^2\right) = 0$$

$$h^2 = \frac{4}{3} R^2$$
$$h = \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

وعندئذ،

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3}$$
$$r = \frac{2}{\sqrt{3}} R$$

∴ حجم الأسطوانة المفضلة هما

$$r = \frac{\sqrt{6}}{3} R \quad , \quad h = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$$

وواضح أن، اختبار المشتقة الثانية،

$$\frac{d^2 v}{dh^2} = \pi\left(-\frac{3}{2} h\right)$$

وبما أن $v''$ سالبة إذن فعلاً $v$ نهاية عظمى.

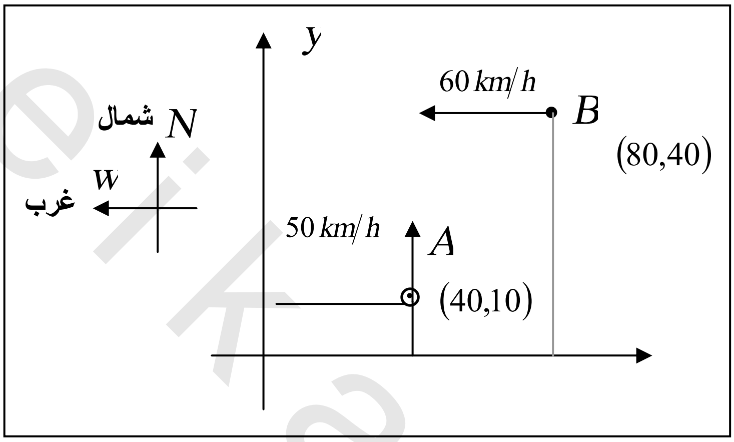
ومقداره،

$$V_{\max} = \pi\left( R^2 \cdot - \frac{2\sqrt{3}}{3} R - \frac{2\sqrt{3}}{9} R^3 \right)$$
$$= \frac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}$$

**مثال (4)**

أبحرت سفينة $A$ في الساعة العاشرة صباحاً من نقطة إحداثياتها الكارتيزيان $(40,10)$ كم متجهة نحو الشمال (المحور $y$) بسرعة 50 (كيلومتر/ساعة)

في نفس الوقت الذي أبحرت فيه سفينة $B$ من النقطة $(80,40)$ كم بسرعة 60 (كيلومتر/ساعة) غرباً متى تصبحان أقرب ما يمكن لبعضهما والمسافة بينهما عندئذ. (شكل 131 ).




شكل ( 131)

**الحـــــل**

بعد زمن قدره $t$ تكون $A$ قد قطعت مسافة = السرعة × الزمن $= 50t$ شمالاً وأصبح إحداثياتها $(40,10,50t)$

في نفس هذا الزمن تكون $B$ قد قطعت مسافة $= 60t$ غرباً

وأصبح إحداثياتها $(80-60,40)$ عندئذ يكون البعد بينها هو،

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

أو،

$$D^2=(40-60t)^2+(40-50t)^2$$

المراد أن تكون $d$ وبالتالي $d^2$ أصغر ما يمكن،

$$\frac{d(D^2)}{dt}=2(40-60t)(-60)+2(40-50t)(-50)=0$$

بالقسمة على 200،

$$-6(4-6t)-5(4-5t)=0$$

$$-24+36t-20+25t=0$$

$$61t=44$$

$$t=\frac{44}{61} \quad \text{hours}$$

$$t=0.7213\ h=\overset{\text{دقيقة}}{43}\ \ \overset{\text{ثانية}}{17}$$

وحيث أن
$$\frac{d^2\left(D^2\right)}{dt}=12200>0$$

$\therefore$ فعلا $D$ نهاية صغرى هي

$$D_{\min}^2=\left(40-60\times\frac{44}{61}\right)^2+\left(40-50\times\frac{44}{61}\right)^2$$

$$=26.23$$

$$D_{\min}\approx 5.13\ km$$

**مثال (5):**

إذا وضع جسم $O$ في الهواء على ارتفاع ما عن سطح البحر تكونت له صورة $I$، داخل الماء. وأي شعاع ضوئي يصدر من الجسم ينكسر حين يلاقى السطح الفاصل بين الهواء والماء ويصل إلى الصورة. وتسمى الزاوية بين الشعاع الساقط والعمود على السطح الفاصل، $\theta_1$، زاوية السقوط.

والزاوية بين الشعاع المنكسر والعمود، $\theta_2$، زاوية الانكسار.

وتنص قاعدة فيرمات على أن الضوء يقطع الطريق من الجسم إلى الصورة في أقل زمن ممكن. فإذا كانت $\upsilon_1$ سرعة الضوء في الهواء، $\upsilon_2$ سرعة الضوء في الماء

فاثبت قانون سنل، $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ . ( شكل 132)

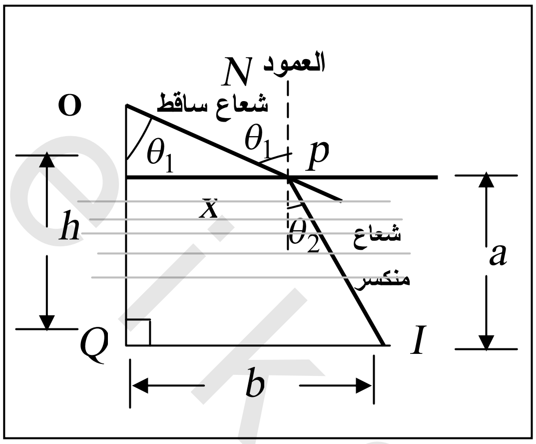
**الحــــل**

نفرض الشعاع الساقط من $O$ قابل السطح الفاصل في $p$ وانكسر حتى لاقى الصورة $I$.

ونفرض كما بالشكل. $p$ تبعد مسافة $x$ عن مسقط $O$ على السطح الفاصل، $O_1$

كما نفرض الأفقي عند $I$ قابل الرأسي عند $O$ في نقطة $Q$.

وأن $OQ = h$، $QI = b$




شكل (132)

الزمن المستغرق من $O$ إلى $p$ = $\dfrac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$ أ، $t_1 = \dfrac{\overline{OP}}{\upsilon_1}$

والزمن المستغرق من $p$ إلى $I$ = $\dfrac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$ أ، $t_2 = \dfrac{\overline{PI}}{\upsilon_2}$

$\therefore$ الزمن الكلي من $O$ إلى $I$ هو

$$T = t_1 + t_2 = \frac{\overline{OP}}{\upsilon_1} + \frac{\overline{PI}}{\upsilon_2}$$

ولكن، $$\overline{PI}^2 = a^2 + (b-x)^2$$

و $$\overline{OP}^2 = (h-a)^2 + x^2$$

إذن، $$T = \frac{\sqrt{(h+a)^2 + x^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{a^2(b-x)^2}}{\upsilon_2}$$

والقيمة القصوى للزمن $T$ تحدث عندما، $\frac{dT}{dx}=0$،

أيْ

$$\frac{dT}{dx}=\frac{1}{\upsilon_1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{(h+a)^2+x^2}}\cdot(2x)+\frac{1}{\upsilon_2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2(b-x)^2}}2(b-x)(-1)=0$$

إذن،

$$\frac{1}{\upsilon_1}\cdot\frac{x}{2\sqrt{(h+a)^2+x^2}}-\frac{1}{\upsilon_2}\cdot\frac{(b-x)}{2\sqrt{a^2(b-x)^2}}=0$$

ومن هندسة الشكل،

$$\sin\theta_1=\frac{x}{\overline{o}p}\cdot\frac{x}{\sqrt{(h+a)^2+x^2}}$$

و

$$\sin\theta_2=\frac{b-x}{\overline{p}I}=\frac{b-x}{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}$$

إذن،

$$\frac{\sin\theta_1}{\upsilon_1}-\frac{\sin\theta_2}{\upsilon_2}=0$$

ومنها،

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$$

**مثال (6)**

النقطتان $A(4,16)$ ، $B(8,12)$ ثابتتان والنقطة $p$ تتحرك على المستقيم $y+x=0$ وبالتالي تتغير الزاوية $\theta=APB>$ أوجد أكبر قيمة ممكنة للزاوية $\theta$.

**الحـــــل**

نفرض أن إحداثيا $p$

هما $(x, y)$، لكن

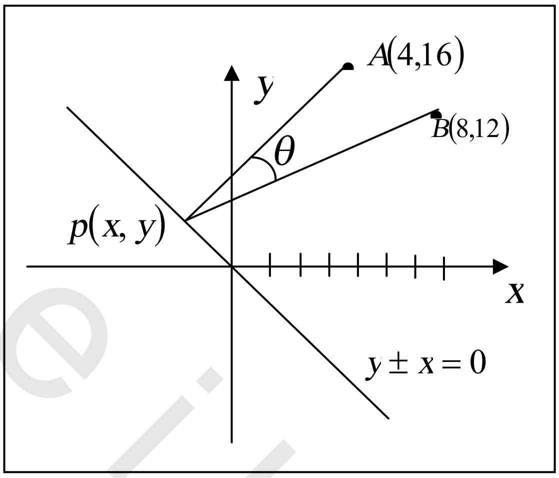
$p$ تتحرك على المستقيم

$y = -x$

إذن احداثيا $p$ هما $p(x, -x)$

ميل المستقيم $AP$ ،

$$m_1 = \frac{y-16}{x-4} = \frac{-x-16}{x-4}$$




شكل ( 133)

، ميل المستقيم $BP$ ،

$$m_2 = \frac{y-122}{x-8} = \frac{-x-12}{x-8}$$

ظل الزاوية $\theta$ بين المستقيمين هو

$$\tan\theta = \frac{|m_2 - m_1|}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \pm \frac{\frac{(x-16)}{x-4} - \frac{(x-12)}{x-8}}{1 + \frac{(x-12)(x-16)}{(x-8)(x-4)}}$$

$$= \pm \frac{(x-8)(x-16) - (x-4)(x-12)}{(x-8)(x-4)(x-12)(x-16)}$$

$$= \pm \frac{80}{2x^2 + 16x + 224} = \frac{\pm 40}{x^2 + 8x + 112}$$

ويكون مقدار $\tan\theta$ أكبر ما يمكن عندما يكون المقام أصغر ما يمكن،

أيْ الدالة $f$ نهاية صغرى ، $f(x)=x^2+8x+112$

$$f'(x)=2x+8=0$$

النقطة الحرجة ، $x=-4$

وعندها $f''(x)=+2$

$\therefore$ $x=-4$ نقطة تناظر نهاية للدالة $f(x)$

$$f_{\min}=f(-4)$$

$$=16-32+112$$

$$=96$$

إذن
$$\tan\theta_{\max}=\frac{40}{96}$$

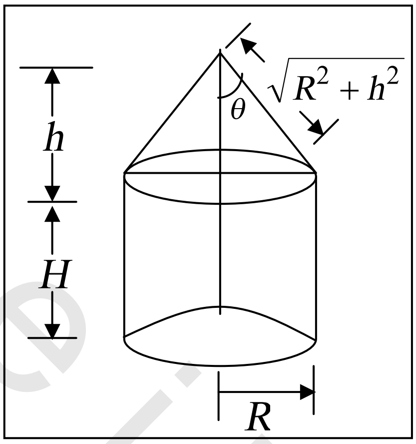
$$\tan\theta_{\max}=\frac{5}{12}$$

(أخذنا مقدار $\tan\theta$ لأن الإشارة هنا ضرورة لها فالمطلوب مقدار أكبر زاوية)

$$\theta_{\max}=\tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right)$$

**مثال (7):**

اسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها $R$ ملتحمة مع مخروط دائري قائم رأسي قاعدته مطابقة لقاعدة الاسطوانة المتصلة به. إذا كان حجم الحديد المستخدم في صناعة هذا المجسم هو $V$، أوجد المساحة السطحية للمجسم $S$ بدلالة $R$، $V$ وزاوية نصف رأس المخروط $\theta$. ثم أثبت أن هذه المساحة أصغر ما يمكن عندما $\theta\approx 48.2^\circ$.




شكل (134)

**الحـــل**

بفرض ارتفاع المخروط هو $h$ ، فإن

$$\tan\theta = \frac{R}{h}$$

$$h = R\cot\theta$$

وبفرض ارتفاع الاسطوانة $H$

$V =$ حجم المخروط + حجم الاسطوانة

$$V = \pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

إذن

$$H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{h}{3}$$

$$H = \frac{V}{\pi R^2} - \frac{R}{3}\cot\theta$$

الآن المساحة الجانبية $S$ ،

$$S = \underbrace{2\pi R\cdot H}_{\text{الإسطوانة}} + \underbrace{\pi R \overbrace{\sqrt{R^2+h^2}}^{\text{طول الراسم}}}_{\text{المخروط}} + \underbrace{\pi R^2}_{\text{القاعدة}}$$

$$S = 2\pi R\left(\frac{V}{\pi R^2} - \frac{R}{3}\cot\theta\right) + \pi R\sqrt{R^2 + R^2\cot^2\theta} + \pi R^2$$

$$= \frac{2V}{R} - \frac{2}{3}\pi R^2\cot\theta + \pi R^2\sqrt{1+\cot^2\theta} + \pi R^2$$

ولكن $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$

$$S = \frac{2V}{R} + \pi R^2\left(1 + \csc\theta - \frac{2}{3}\cot\theta\right)$$

وللحصول على قيمة $S$ القصوى،

$$\frac{dS}{d\theta} = \pi R^2\left(-\csc\theta\cot\theta + \frac{2}{3}\csc^2\theta\right)$$

$$= \pi R^2 \csc\theta\left(\frac{2}{3}\csc\theta - \cot\theta\right)$$

والعدد الحرج عندما $\frac{dS}{d\theta} = 0$ ، $\csc\theta \neq 0$

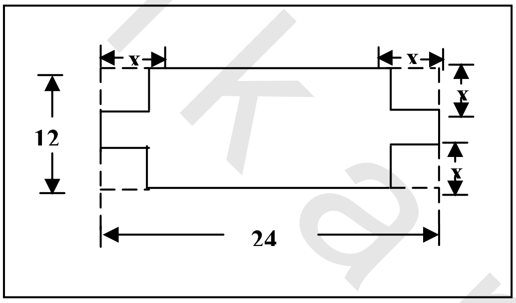
$$\frac{2}{3}\csc\theta - \cot\theta = 0$$

$$\frac{2}{3\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$$

$$\sin\theta \neq 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{3} - \cos\theta = 0 \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \theta = 48.2^\circ$$

## تمارين (6−1)

1) صندوق مفتوح قاعدته مستطيلة يراد صنعه من لوح كرتون مستطيل عرضه 12 بوصة. وطوله 24 بوصة. بقطع مربع من كل ركن ثم ثنى الجوانب الناتجة بزاوية قائمة. أوجد طول ضلع المربع الذي يقطع للحصول على صندوق حجمه أكبر ما يمكن.



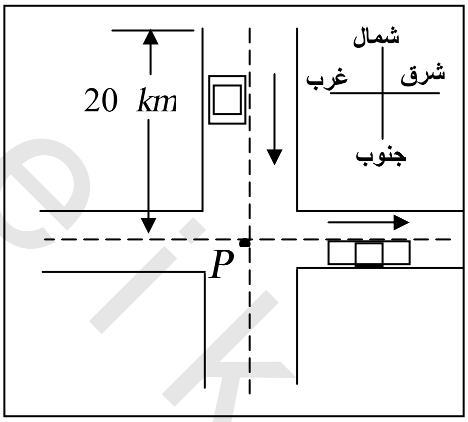

شكل (135)

2) حاوية أسطوانية بدون غطاء يراد أن تسع $24\pi$ بوصة مربعة من سائل. ثمن المادة المستخدمة لصناعة القاعدة الدائرية 15 قرشاً للبوصة المربعة وثمن المادة المستخدمة لصناعة السطح المنحنى 5 قروش للبوصة المربعة. أوجد أبعاد الأسطوانة اللازمة لتقليل التكاليف ما أمكن.

3) أوجد أكبر حجم لأسطوانة دائرية قائمة يمكن أن ترسم داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 12 سم ونصف قطر قاعدته 4 سم ولها نفس محور المخروط.

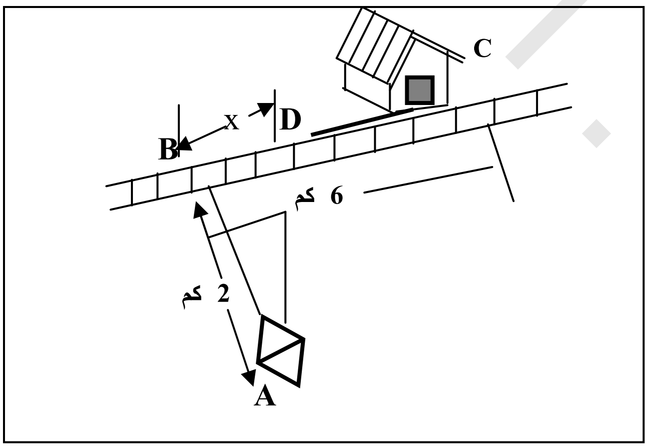
4) طريقان متعامدان أحدهما يمتد من الجنوب إلى الشمال والثاني من الغرب إلى الشرق. وفي الساعة 10:00 صباحاً مرت سيارة بنقطة $P$ متجهة شرقا بسرعة ثابتة 40 كيلومتر في الساعة. وفي نفس اللحظة مرت سيارة أخرى بنقطة شمال $P$ وتبعد عنها 20 كم وهي متجهة جنوبا

بسرعة 50 كم/ساعة. حدد اللحظة التي يكونا أقرب ما يمكن من بعضها. (شكل (136)).



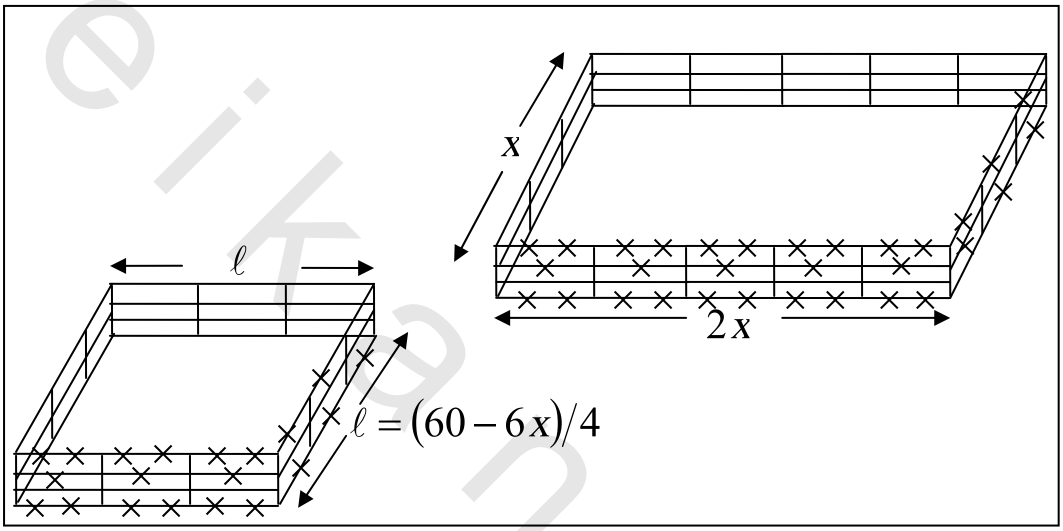

شكل (136)

5) رجل في قارب على بعد 2 كم عن ضفة نهر يرغب الوصول لنقطة على الشاطئ تقع يمينه على بعد 6 كم. إذا كانت سرعة القارب 3 كم/ساعة وسرعة المشي على الطريق 5 كم/ساعة. أوجد أقل زمن لازم الوصول إلى هذه النقطة (شكل (137) ).



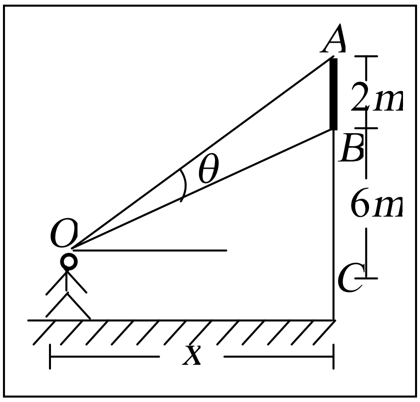

شكل (137)

6) يمتلك فلاح 60 متر طولي من الأسلاك الشائكة يرغب لعمل سور لحقلين منفصلين كما في شكل (138)، أحدهما يكون مستطيلا طوله ضعف عرضه والثاني مربع الشكل. أوجد أبعاد الحقلين إذا علمت أن الفلاح يريد الحصول على أكبر مساحة ممكنة للحقلين.




شكل (138)

7) $AB$ لوحة إعلانية ارتفاعها 2 متر مثبتة بقمة عامود رأسي ارتفاعه 6 متر. ينظر إليها شخص على الأرض. ولكي تتحقق أحسن رؤية يجب أن تكون الزاوية بين الشعاعين من العين لقمة وقاع اللوحة ($\theta$) أكبر ما يمكن. أوجد هذه الزاوية القصوى وبعد الشخص عن قاع العمود عندئذ. (المسافة $x$) شكل (139)




شكل (139)

8) أوجد القيم القصوى للمقدار $z$ إذا كان:

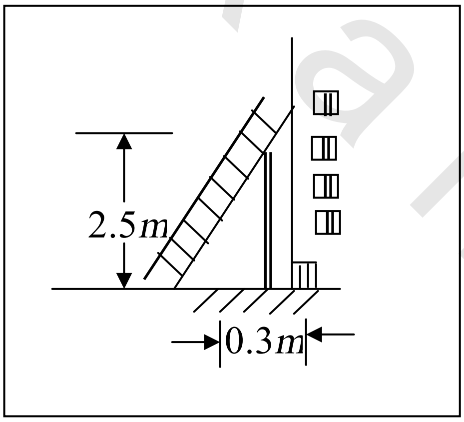
أ- $z = xy$ ، $y + u = 10$

ب- $z = 4y + x^2$ ، $\left(x^2 + 1\right)y = 324$

جـ- $z = x^2 + y^2$ ، $x - y = 40$

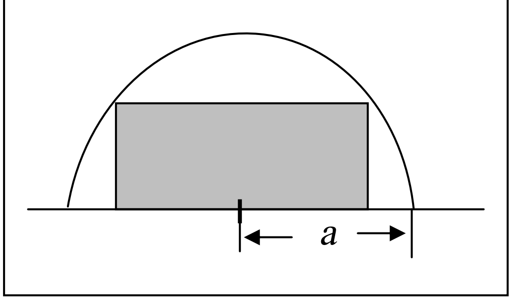
9) يراد صناعة صندوق مربع القاعدة بغطاء حجمه 100سم$^3$ بحيث تكون مساحة الرقيقة المستخدمة في التصنيع أصغر ما يمكن. أوجد أبعاد هذا الصندوق.

10) سور ارتفاعه 2.5 متر مبني عمودي على أرض أفقية ويوازي واجهة منزل ويبعد عنها مسافة 0.3 متر. كما بشكل (140). أوجد السلم ذا أقل طول الذي يمكن أن يستند على الأرض والسور والمنزل.



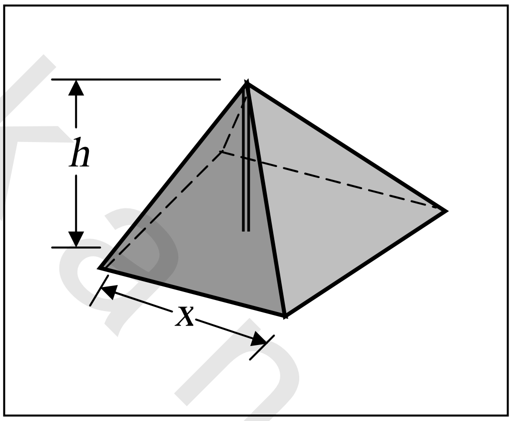

شكل (140)

11) أوجد بعدي مستطيل له أكبر مساحة يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها $a$، شرط وقوع أحد حوافه على قطر النصف دائرة. شكل (141)




شكل (141)

12) خيمة على شكل هرم منتظم مربع القاعدة إذا كان مساحة القماش المستغل في صناعة الأوجه المثلثة الأربعة هي $S$، $x$ طول ضلع القاعدة. أثبت ان حجمها أكبر ما يمكن عندما $x=\sqrt{2}h$ ، حيث $h$ ارتفاعها. شكل (142)




شكل (142)

**بند (6–2): تطبيقات اقتصادية واجتماعية وعلوم الحياة**

إن التغير هو خاصية تحكم معظم المنظومات الطبيعية والمنظومات الاجتماعية، ويعطينا الحسبان أحسن الطرق لدراسة هذه المنظومات. وسنحاول هنا إعطاء صورة لبعض تطبيقات المشتقة لعلوم الاجتماع وعلوم الحياة.

أ– في الاقتصاد

إن الدخل والربح مثلا يعتمدان على تأرجح التكاليف و الأسعار والتي بدورها تعتمد على تغيرات العرض والطلب.

والاقتصاد هو ما يحاول حل مسائل القيم المفضلة التي توفر الاستخدام الفضل للموارد.

**مثال (7):**

مصنع ينتج سلعة تكلفة القطعة منها 12 دينار وعليه تكاليف شهرية ثابتة قدرها 10000 دينار. إذا كان ثمن بيع القطعة 20 دينار. ما هو عدد القطع الواجب إنتاجها شهرياً حتى يضمن عدم الخسارة.

**الحـــــل**

$C(x)=10000+12x$ , التكاليف الكلية

$c(x)=\dfrac{C(x)}{x}=12+\dfrac{10000}{x}$ , متوسط تكلفة القطعة

$R(x)=20x$ , العائد الشهري

$P(x)=R(x)-C(x)$ , الربح الشهري

$$=20x-(10000+12x)$$

تكون المنظومة كيت " break-even "، أي بدون خسارة عندما ينعدم الربح،

$$P(x)=0$$

أي عندما $$8x-10000=0$$

$$x=1250$$

$\therefore$ إنتاج 1250 قطعة لا ينجم عنه خسارة ولكن بدون ربح.

وعموماً إذا كان $x$ عدد الوحدات المنتجة، فإن الاقتصاديين يستعملون الدوال $C$ ، $c$ ، $R$ ، $P$ المعرفة على النحو التالي،

1) دالة التكلفة: سعر تكلفة $x$ من الوحدات $=C(x)$

2) دالة متوسط التكلفة: $c(x)=\dfrac{C(x)}{x}$

= متوسط تكلفة الوحدة

3) دالة العائد: العائد عن بيع $x$ من الوحدات $=R(x)$

4) دالة الربح: $P(x)=R(x)-C(x)$

= أرباح بيع $x$ من الوحدات

وإذا كانت $f$ هي أحد الدوال السابقة فإن هامش القيمة المناظرة هو $f'$ . أي أن $C'$ ، $c'$ ، $R'$ ، $P'$ هي دالة هامش التكلفة ودالة متوسط التكلفة ودالة هامش العائد ودالة هامش الربح على الترتيب. أي أن $C'$ هي معدل تغير التكلفة بالنسبة لعدد الوحدات المنتجة وهكذا.

**مثال (8):**

توصلت شركة أن تكلفة إنتاج $x$ من الوحدات يعطى بالعلاقة. (بالدينار)،

$$C(x)=200+0.05x+0.0001x^2$$

أ- أوجد تكلفة ومتوسط التكلفة وهامش التكلفة لإنتاج 500 وحدة ولإنتاج 5000 وحدة.

ب- قارن هامش التكلفة عند إنتاج 1000 وحدة بنظيره عند إنتاج 1001 وحدة.

**الحـــــل**

$$C(x)=200+0.05x+0.0001x^2$$

$$C(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{200}{x}+0.05+0.0001x$$

$$C'(x)=0.05+0.0002x$$ هامش التكلفة

أ- عندما $x=500$

$$C(x)=250\ ,\quad c(x)=0.5\quad ,\ C'(x)=0.15$$

وعندما $x=5000$

$$C(x)=2950\ ,\quad c(x)=0.59\quad ,\ C'(x)=1.05$$

ب- عندما $x=1000$

$$C(x)=350\ ,\quad c(x)=0.35\quad ,\ C'(x)=0.25$$

عندما $x=1001$

$$C(x)=350.25$$

الفرق في $C(x)$

$$C(1001)-C(1000)=0.25$$

ولكن

$$C'(1000)=0.25$$

أي أن

$$C(1001)-C(1000)=C'(1000)$$

إذا كان عدد الوحدات المباعة $x$ عندما يكون سعر البيع هو $P(x)$. أي أن $P(x)$ هو ثمن السلعة عندما يكون الطلب هو $x$ من الوحدات.

$P(x)$ تسمى دالة الطلب، ويكون العائد عندئذ، $R(x)=xP(x)$

$P'(x)$ يسمى هامش دالة الطلب.

وحيث أن نقصان $P(x)$ يصاحبه عادة زيادة عدد السلع المباعة $x$. أي أن $P(x)$ هي دالة متناقصة.

أي أن $P'(x)<0$ لكل $x$. عادة نرمز لــ $P(x)$ بالرمز $S$ وعادة ما تكون $S$، $x$ معرفتان من خلال دالة ضمنية.

**مثال (9):**

الطلب لــ$x$ وحدة يرتبط بسعر بيع القطعة $S$ تبعاً للعلاقة $2x+S^2-12000=0$. أوجد دالة الطلاب ودالة هامش الطلب ودالة العائد وهامش العائد. أوجد $x$ من أجل أكبر عائد ممكن وأوجد هذا العائد.

**الحـــــل**

أ ) $2x+S^2-12000=0$

دالة الطلب، $P(x)=S=\sqrt{12000-2x}$

، $R(x)=xP(x)$

دالة العائد، $=x\sqrt{12000-2x}$

هامش الطلب، $P'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{12000-2x}}$

هامش العائد، $R'(x)=\dfrac{12000-3x}{\sqrt{12000-2x}}$

أكبر عائد عندما $R'(x)=0$

$$12000-3x=0$$

إذن يوجد عدد حرج هو،

$$x=4000$$

ولما كانت $R'(x)$ موجبة لما $0\le x<4000$ وسالبة لما

$$4000<x<6000$$

$\therefore$ عند $x = 4000$ يوجد نهاية عظمى للعائد، هي

دينار $R_{\max} = R(4000) = 253000$

**مثال (10)**

اكتشفت شركة إلكترونات أن تكلفة إنتاج $x$ آلة حاسبة في اليوم هي (بالدينار).

$$C(x) = 400 + 5x + 0.03x^2$$

إذا بيع كل آلة حاسبة بمبلغ $20\ D.L$ أوجد،الإنتاج اليومي الذي يؤدي لأعلى ربح.

**الحـــــل**

$$\text{سعر التكلفة} = C(x) = 400 + 5x + 0.03x^2$$

$$\text{سعر البيع} = 20x = R(x)$$

$$\text{الربح اليومي} = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$= 15x - 400 - 0.03x^2$$

وتكون $P(x)$ عظمى عندما

$$P'(x) = 0$$

$$= 15 - 0.06x = 0$$

$$x = 250 \quad \text{Calculators}$$

ويلاحظ أن، $P''(x) = -0.06$

$\therefore$ عند العدد الحرج $x = 250$ توجد فعلا نهاية عظمى،

$$P_{\max} = P(250)$$

$$= 1{,}475\ D.L$$

## ب – في العلوم الاجتماعية والجغرافية

يدرس كل من الاجتماعيين والجغرافيين ظاهرة الانتشار الاجتماعي Social diffusion، أي انتشار معلومة معينة، أو اختراع تكنولوجي أو بدعة ما عبر السكان. إن أفراد المجتمع يمكن أن ينقسموا إلى هؤلاء الذين يعرفون المجموعة والآخرين اللذين لا يعرفنها.

ومعدل الانتشار يتناسب مع عدد الأفراد اللذين يملكون المعلومة وعدد الأفراد اللذين مازالوا لم تصلهم.

إذا كان $x$ هو عدد الأفراد المالكين للمعلومة، وعدد السكان هو $N$، وكان معدل الانتشار هو $r(x)$ ، $r(x)=\dot{x}$ فإن،

$$r(x)\propto x(N-x)$$

أو

$$r(x)=kx(N-x)$$

حيث $k$ ثابت التناسب. ويبلغ هذا المعدل أقصى قيمة عندما $r'(x)=0$ أي $x=\frac{N}{2}$ .

أيْ أن معدل انتشار المعلومة يتزايد حتى يصبح نصف الناس على علم بها ثم يبدأ في النقصان.

## جـ – في علم الأوبئة:

نفس مبدأ انتشار المعلومة ينطبق على كيفية انتشار الأمراض المعدية. إذا كان $S$ عدد المرضى، $\ell$ عدد اللذين مازال المرض لم يصلهم، $N$ عدد السكان. فإن

$$\frac{ds}{dt}=-ks(t)\ell(t)$$

ولكن

$$\ell(t)=N-s(t)$$

لذلك

$$\begin{aligned}\dot{S}&=-\beta s\ell\\&=-\beta s(N-s)\end{aligned}$$

**<u>د– في علم البيئة :</u>**

إذا فرضنا بيئة بسيطة بها عينتان من الحيوانات، أحدهما يفترس الآخر ولتصوير هذا النموذج تصور ثعالب مفترسة تفترس أرانب.

الأرانب تعيش على البرسيم وهو متوفر ولكن الثعالب لها إلا الأرانب كغذاء.

فإذا كان

$R(t)$ ، $F(t)$ هو تعداد الأرانب والثعالب على الترتيب عند لحظة $t$.

نجد أنه إذا لم يكن هناك ثعالب أيْ $F(t)=0$ فإن دالة النمو للأرانب،

$$R'(t)=aR(t)$$

حيث $a$ مقدار ثابت.

أيْ أن نسبة تزايد الأرانب $R'/R$ ثابتة وتساوي $a$.

أما إذا لم يكن هناك أرانب أيْ $R(t)=0$ فإن الثعالب تكون في تناقص مستمر

$$F'(t)=-nF(t)$$

، $n$ مقدار ثابت، أيْ أن الثعالب ستواجه تناقص مستمر بنسبة ثابتة $-n=\dfrac{F'(t)}{F(t)}$.

ولكن الحالة الهامة ولأكثر إثارة هي عند وجود النوعين.

فإن معادلتي النمو يحتويان على الجداء $R(t)F(t)$. لأن عدد مرات قتل الأرانب بواسطة الثعالب يتناسب مع عدد مرات المواجهة بينهما، الذي بدوره يتناسب مع كل من $R(t)$ و $F(t)$ أيْ مع $F(t)R(t)$. وكل عملية قتل تقلل عدد الأرانب $R(t)$
ويقلل من قابلية نمو الثعالب أيْ أن،

$$R'(t) = R(t)(a - bF(t))$$
$$F'(t) = F(t)(mR(t) - n)$$

حيث $m$، $b$ ثوابت.
وبما أن $R(t) > 0$ ، $F(t) > 0$ فإن إشارتي $R'(t)$، $F'(t)$ مثل إشارتي $a - bF(t)$ و $mR(t) - n$ على الترتيب.
ويحدث استقرار عندما $R'(t) = 0$ ، $F'(t) = 0$
أيْ عندما،

$$R(t) = \frac{n}{m} \text{ ، } F(t) = \frac{a}{b}$$

## تمارين 6−2

1) تتوقع شركة معدات إلكترونية أن تكلفة $x$ من الآلات الحاسبة يومياً هي

$$C(x)=500+6x+0.02x^2$$

إذا بيع كل آلة حاسبة بسعر 18 دينار. أوجد :

أ) دالة العائد.

ب) دالة الربح.

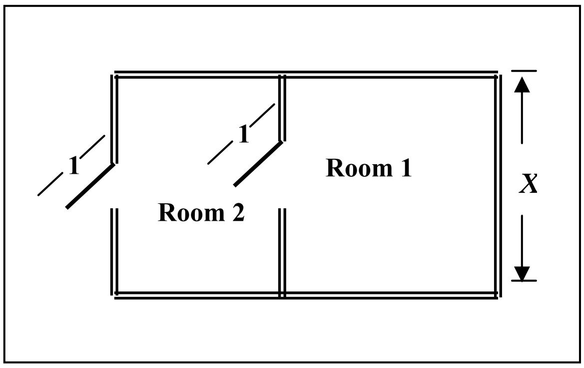
ج) الإنتاج اليومي اللازم لجعل الربح أكبر ما يمكن.

د) النهاية العظمى للربح اليومي.

2) مكتب يتكون من حجرتين ومساحته الكلية 100 متر مربع. يوجد بابان أحدهما بين الحجرتين والآخر باب الخروج. كما بالشكل. عرض كل باب 1 متر. إذا كانت تكاليف دهان المتر الطولي من الحائط هي 10 دينار (مع حذف الأبواب) اثبت أن تكاليف دهان الحوائط $C(x)$ حيث $x$ عرض المكتب هي

$$C(x)=10+\left(3x-2+\frac{200}{x}\right)$$

أوجد الخطين التقاربيين الرأسي والمائل وارسم بيان $C(x)$ لكل $x>0$ أوجد التصميم الذي يقلل التكاليف لأدنى حد.




شكل (143)

3) في علم الكيمياء الحيوية تعطى الاستجابة الحدية العامة بالمنحنى

$$R = ks^n/\left(s^n + a^n\right)$$

حيث $R$ هي الاستجابة الكيميائية المناظرة للتركيز $S$ من مادة كل من $k$ ، $n$ ، $a$

ثوابت موجبة. ومثال على ذلك هو المعدل $R$ الذي يزيل به الكبد الكحول من تيار الدم عندما يكون تركيز الكحول $S$ .

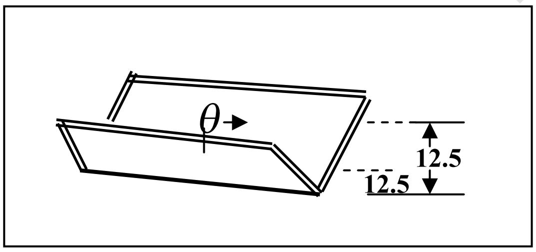
وضح أن $R$ دالة تزايدية في $S$ وأن $R = k$ هو خط تقاربي أفقي للمنحنى.

4) صانع أفران ميكرويف يعين تكاليف إنتاج $x$ من الأفران من المعادلة

$$C(x) = 4000 + 100x + 0.05x^2 + 0.0002x^3$$

قارن هامش تكاليف إنتاج 100 فرن بتكاليف إنتاج الفرن رقم 101.

5) مجرى مائي للصرف مقطعه على شكل حرف $V$ يصنع من ألواح معدنية عرضها 25 سم أوجد زاوية الرأس بين جانبي المجرى التي سوف تجعل كمية الماء التي يحملها أكبر ما يمكن.




شكل (144)

**بند (6-3): تطبيقات في الديناميكا.**

نستعمل في هذا البند المشتقات لوصف وتحليل أنواع مختلفة من الحركة، فغالبا ما ساعد الحسبان في دراسة الأجسام المتحركة وسوف نكتفي هنا بحركة الأشياء في خط مستقيم. حيث سوف نعتبر أي جسم متحرك، كبيرا كالسيارة والقطار أو صغيرا مثل إلكترون متحرك، كأنه نقطة $P$ والطريق الذي تتحرك فيه هذه النقطة كمستقيم $\ell$. فإذا كان إحداثي النقطة $P$ على هذا الخط عند زمن $t$ هو $s(t)$، فإن $s(t)$ تسمى دالة الموضع للنقطة $P$. إذا كان $\ell$ رأسيا فإن $s(t)$ تستبدل $y(t)$ وإذا كان $\ell$ أفقيا استبدلت $s(t)$ بـــ $x(t)$. وسرعة النقطة $P$ هي معدل تغير $s(t)$ بالنسبة للزمن، $\dot{s}(t)$، ويرمز لها بالرمز $v(t)$.

$$\text{السرعة} = v(t) = \dot{s}(t)$$

وتسمى $v(t)$ دالة السرعة، وإذا كانت $v(t)$ موجبة على فترة معينة فإن $\dot{s}(t) > 0$ أيْ أن $s(t)$ متزايدة وتتحرك نقطة $P$ في الاتجاه الموجب للمستقيم $\ell$. أما إذا كانت $v(t)$ سالبة فإن $\dot{s}(t) < 0$، $s(t)$ متناقصة فتتحرك $P$ في الاتجاه السالب وتكون $v(t) = 0$، عندما تغير $P$ اتجاه حركتها. أما مقدار السرعة بصرف النظر عن إشارتها أيْ $|v(t)|$ فيسمى "الإرقال speed" أو حتى يسمى مقدار السرعة كما هو.

العجلة $a(t)$ للنقطة $P$ عند زمن $t$ هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن.

$$\text{العجلة} = a(t) = \dot{v}(t)$$

أو

$$a(t) = \ddot{s}(t)$$

تسمى $a(t)$ دالة العجلة. ويمكننا إعادة كتابة $v(t)$، $a(t)$ على النحو،

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad , \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

وتكون العجلة موجبة عندما تكون السرعة متزايدة وعندئذ تسمى تزايد وتكون سالبة عندما تكون السرعة متناقصة وعندئذ تسمى تقصير،

$a(t)$ تسمى تزايد أو تعجيل $\Rightarrow\ a(t) > 0$
$a(t)$ تسمى تقصير أو تباطؤ $\Rightarrow a(t) < 0$
عندما تكون السرعة قصوى $\Rightarrow\ a(t) = 0$

**مثال (11):**

تتحرك نقطة $P$ في خط مستقيم بحيث تعطى دالة الموضع $s$ بالعلاقة،

$$s(t) = t^3 - 15t^2 + 63t + 10$$

أوصف الحركة أثناء الفترة $[1,9]$. وأوجد إزاحة الجسم في هذه الفترة والمسافة الفعلية التي تحركها.

**الحـــــل**

بالتفاضل، نحصل على،

$$v(t) = \dot{s}(t) = 3t^2 - 30t + 63$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = 6t - 30$$

نجد أن $v(t) = 0$ عندما

$$3t^2 - 30t + 63 = 0$$
$$t^2 - 10t + 21 = 0$$
$$(t-3)(t-7) = 0$$

أيْ عندما $t = 3$ ، $t = 7$

أيْ أن الجسم غير اتجاه حركته مرتان عند $t = 3$، عند $t = 7$

وببحث إشارة $v(t)$، على الفترات الجزئية $(7,9)$ , $(3,7)$ , $(1,3)$

نجد السرعة تغيرت إشارتها من + , − , + على الترتيب

أي أن الجسم تحرك إلى اليمين من $t = 1$ إلى $t = 3$ ثم إلى اليسار من $t = 3$ إلى $t = 7$ وأخيرا إلى اليمين من $t = 7$ إلى $t = 9$.

المواضع $s(1)$ ، $s(3)$ ، $s(7)$ ، $s(9)$ هي كما يلي:

$s(1) = 59$ ، $s(3) = 91$ ، $s(7) = 59$ ، $s(9) = 91$

أزيح الجسم في هذه الفترة من $s(1)$ إلى $s(9)$ أيْ الإزاحة الناتجة هي $s(9)-s(1)$

$s_{1-9} = 91 - 95 = 32$     الإزاحة = $D_{19}$

أيْ أزيح الجسم يمينا مسافة 32.

ولكن الواقع أن الجسم تحرك من $s(1)$ إلى $s(3)$ لليمين

ثم تحرك من $s(3)$ إلى $s(7)$ إلى اليسار

ثم من $s(7)$ إلى $s(9)$ إلى اليمين

يمينـــا، $D_{13} = s(3) - s(1) = 32$

يسارا، $D_{37} = s(7) - s(3) = -32$

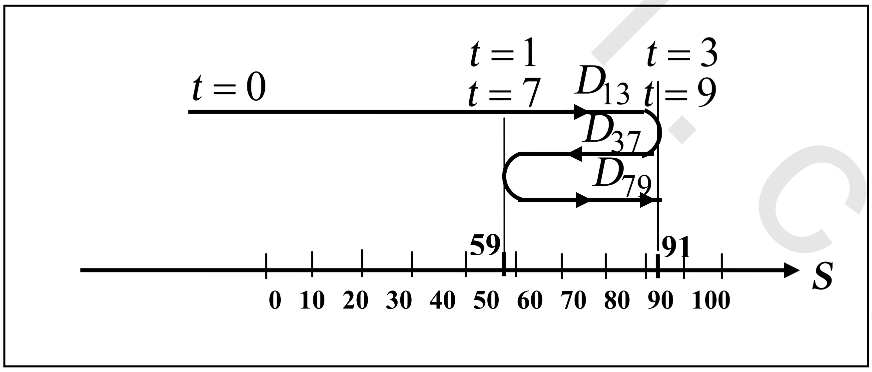
ثم

يمينا، $D_{79} = s(9) - s(7) = 32$

متر $d_{19} = |D_{13}| + |D_{37}| + |D_{79}| = 96$ المسافة الفعلية

لاحظ أن الإزاحة الكلية

متر $D_{19} = D_{13} + D_{37} + D_{79} = 32$ ( أنظر شكل (145) )




شكل (145)

**مثال (12):**

قذف صاروخ رأسيا إلى أعلى بسرعة $140\ m/s$ فوجد أن المسافة الرأسية فوق سطح الأرض بعد زمن $t$ ثانية هي بالمتر، $y$ ،

$$y(t) = 140t - 4.9t^2$$

أ – أوجد الزمن والسرعة عندما يصل الصاروخ للأرض.

ب – أوجد أقصى ارتفاع للصاروخ عن سطح الأرض.

ج – أوجد العجلة عند أيْ لحظة زمنية $t$.

**الحـــل**

أ– يتحرك الصاروخ على محور $y$ ، ونقطة الأصل على الأرض. وسنعتبر الصاروخ كجسيم صغير يكون الجسيم على الأرض عندما $y(t) = 0$

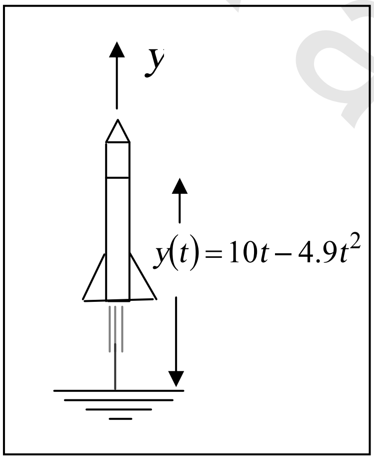
أي $\quad 140t - 4.9t^2 = 0$

$$t(140 - 4.9t) = 0$$

أي عند اللحظتين

$t = 0$ ، $t = 28.57s$

$t = 0$ هي لحظة الإطلاق، $t = 28.57s$ هي لحظة وصول الصاروخ مرة أخرى للأرض. والسرعة التي يطرق بها الأرض هي إذن، $v(28.57)$




شكل (146)

ولكن $\quad v(t) = \dot{y}(t) = 140 - 9.8t$

إذن، $\quad v(28.57) = -140\ m/s$

والإشارة السالبة تعني أن الصاروخ عندئذ متحرك إلى أسفل.

نلاحظ أن سرعة الإطلاق وسرعة الوصول متساويتي الأرقال.

$$|v(0)| = |v(28.57)| = 140\ m/s$$

ب− أقصى ارتفاع، $y_{\max}$ يحدث عندما $\dot{y}=0$ أي $v=0$،

$$140-9.8t=0$$

أي عند، $t=\frac{100}{7} \Rightarrow t=14.29s$

ولذلك أقصى ارتفاع هو

$$\begin{aligned} y_{\max} &= y(14.29) \\ &= 140\left(\frac{100}{7}\right)-4.9\left(\frac{100}{7}\right)^2 \\ &= 1000\ m \end{aligned}$$

جـ− $o(t)=\dot{v}(t)=-9.8\,m/s$

وهي عجلة ثابتة ناتجة عن قوة جذب الأرض للأجسام.

**<u>الحركة التوافقية البسيطة ( Simple harmonic motion ( S.H.M</u>**

يقال لنقطة $P$ متحركة على مستقيم $\ell$ أنها في حركة توافقية بسيطة إذا كان إزاحتها عن نقطة الأصل $s(t)$ معطاة بإحدى العلاقتين

$$s(t)=A\cos(\omega t+\phi) \quad \text{أو} \quad s(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

حيث $A$ ، $\omega$، $\phi$ ثوابت.

وفي هذه الحالة

$$\dot{s}(t)=-A\omega\sin(\omega t+\phi) \quad \text{أو} \quad \dot{s}(t)=\omega A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\ddot{s}(t)=-\omega^2 A\cos(\omega t+\phi) \quad \text{أو} \quad \ddot{s}(t)=-\omega^2 A\sin(\omega t+\phi)$$

أي

$$\ddot{s}(t)=-\omega^2 s(t) \quad \text{أو} \quad \ddot{s}(t)=-\omega^2 s(t)$$

أي أن كلا الحالتين أدت إلى أن العجلة،

$$a(t) = -\omega^2 s(t)$$

وهذه العلاقة أيضاً تعرف الحركة التوافقية البسيطة. فالحركة التوافقية البسيطة هي إذن حركة جسيم بعجلة مقدارها يتناسب طرديا مع مقدار $s$ ودائماً إشارتها مخالفة لإشارة $s$.

وفي الحركة التوافقية البسيطة تتذبذب $P$ بين نقطتين على $\ell$.

إحداثياهما $A+$، $A-$. ولذلك فإن سعة الذبذبة هي أكبر إزاحة عن نقطة الأصل $|A|$. وزمن الذبذبة هو $\frac{2\pi}{\omega}$ أما عدد الذبذبات كل ثانية أو ما نسميه التردد فهو $\frac{\omega}{2\pi}$.

تسمى الزاوية $\phi$ زاوية الطور.

وبما أن عندما،

$$s(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad ، \quad v = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$$

ومن حساب المثلثات،

$$\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1$$

نحصل على

$$\frac{s^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

ومنها

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - s^2}$$

السرعة أكبر ما يمكن عندما $s = 0$ والعجلة$=0$ بينما $v = 0$ عندما $s = A$، $a = -\omega^2 A$

**مثال (13):**

يتحرك جسيم على خط مستقيم حركة توافقية بسيطة بين الموصفين $s = 2m$ ، $s = 10m$ فبلغت أقصى سرعة له $50\, m/s$. أوجد سعة الذبذبة، التردد والزمن الدوري وأقصى عجلة له. أين ومتى تصبح سرعته لأول مرة $25\, m/s$. علماً بأن بدء الحركة عند $s = 2m$ .

**الحـــل**

$$\text{سعة الذبذبة} = \frac{10-2}{2} = 4m = A$$

$$\text{أقصى سرعة} = \omega A$$

$$50 = \omega 4 \;\Rightarrow\; \omega = 12.5 \;\; rad/s \text{ [1]}$$

$$\text{الزمن الدوري} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{12.5} = 0.503s$$

نفرض أن

$$u = A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$u = 4\sin(12.5t + \varphi)$$

حيث $u$ الإزاحة بالنسبة لمركز الحركة التوافقية البسيطة وهي نقطة التنصيف بين $s = 2$ ، $s = 10$ أي عند $s = 6$ فيكون موضع الجسيم عند أي لحظة هو

$$S = 6 + 4\sin(12.5t + \varphi)$$

بوضع $t = 0$ ، $s = 2$

$$S = 6 + 4\sin\varphi \;\Rightarrow\; \sin\varphi = -1 \;\Rightarrow\; \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow\; S = 6 - 4\cos 12.5t$$
$$v(t) = \dot{s} = 50\sin 12.5t$$

---

(1) $rad/s$ تعني $radian/second$ أي زاوية نصف قطرية/ ثانية.

بوضع $v = 25\, m/s$ نجد أن،

$$25 = 50\sin(12.5t)$$

$$\sin(12.5t) = \frac{1}{2}$$

$$12.5t = \frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{\pi}{75}\, s$$

وعندئذ،

$$S = 6 - 4\cos\frac{\pi}{6}$$

$$= 6 - 4\frac{\sqrt{3}}{2}$$

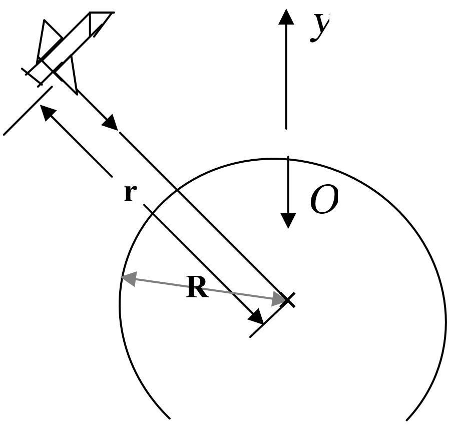
$$S = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$S \approx 2.536 \;\; m$$

**السقوط الحر Free Fall**

تبعاً لقانون نيوتن للجذب العام فإنه أية كتلة $m$ تتجذب نحو مركز الأرض بقوة تتناسب مع كل من $m$ وكتلة الأرض M وعكسياً مع مربع المسافة من $m$ إلى مركز الأرض، $r$،

$$F = G\frac{m\mathrm{M}}{r^2}$$




شكل (147)

وينص قانون نيوتن الثاني على أن حاصل ضرب الكتلة $m$ وعجلة حركتها نحو مركز الأرض يساوي القوة المسببة للحركة. أي أن

$$F = ma(t) = \frac{GmM}{r^2}$$

$$a(t) = \frac{G \cdot M}{r^2}$$

بوضع $r = R + y$ حيث $R$ نصف قطر الأرض، $y$ ارتفاع الجسم عن سطح الأرض فإن،

$$a(t) = \frac{G \cdot M}{(R + y)^2}$$

وعندما يكون الجسيم على سطح الأرض، $y = 0$ ، فإن

$$a(t)\Big|_{y=0} = \frac{G \cdot M}{R^2} = g$$

وبالتعويض عن ثابت الجذب العام $G$، ونصف قطر الأرض $R$ وكتلتها $M$ نجد أن $g \approx 9.8\, m/s^2$

وتصبح العجلة عند أي ارتفاع هي

$$a(t) = g\left(\frac{R}{R + y}\right)^2$$

ولجميع الأجسام سواء على سطح الأرض أو بالقرب من سطح الأرض حيث ( $y << R$ ) تكون،

$$a(t) = g$$

وهي عجلة ثابتة تسمى عجلة الجاذبية الأرضية متجهة دائماً لأسفل نحو مركز الأرض. فإذا اعتبرنا محور الإحداثيات بنقط أصل عند سطح الكوكب واتجاهه الموجب لأعلى فإن العجلة تكون سالبة

أي $a(t) = -g$

وحيث أن $a(t) = v'(t)$ فإن دالة السرعة يجب أن تكون على الصورة

$$v(t) = -gt + c$$

إذا اعتبرنا السرعة الابتدائية $v_0$ عندما، $t = 0$ فإن

$$v_0 = 0 + c$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

ودالة الموضع التي لو فاضلناها أعطت هذه السرعة يجب أن تكون على الصورة

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + c$$

فإذا بدأ الجسيم حركته عندما كانت $y(0) = y_0$ ، $t = 0$ فإن

$$y_0 = 0 - 0 + c$$

وبالتالي

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

وهذه الدالة تعطي موضع جسيم ساقطاً بحرية تحت تأثير الجاذبية فقط. فإذا ترك جسيم يسقط بحرية من ارتفاع 10 متر مثلاً. فإن،

$$y(t) = 10 + 10 - \frac{1}{2} 9.8 t^2$$

$$y(t) = 10 - 4.9 t^2$$

أي أن ارتفاعه أثناء السقوط يتناقص حتى يصبح صفرا (يرتطم بالأرض) عندما،

$$y(t) = 0$$

$$10 - 4.9 t^2 = 0$$

$$t = 2.04 s$$

**مثال (14):**

قذف جسيم من قمة برج ارتفاعه 100 متر رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية $50\,m/s$. متى يصل إلى الأرض.

**الحـــــل**

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$g = 9.8 \quad ، \quad y_0 = 100 \quad ، \quad v_0 = 50\,m/s$$

$$y(t) = 9.8 + 50t - 4.9t^2$$

وعندما يصل للأرض، أي عندما $y(t) = 0$

يكون

$$9.8 + 50t - 4.9t^2 = 0$$

$$4.9t^2 - 50t - 9.8 = 0$$

$$49t^2 - 500t - 98 = 0$$

$$t = \frac{500 \pm \sqrt{500^2 + 4 \times 49 \times 98}}{98}$$

$$t = 10.4s$$

**مثال (15):**

يتحرك جسيم في خط مستقيم رأسي بحيث يعطي ارتفاعه عند أي لحظة $t(s)$ بالمتر، $y$ ، على النحو

$$y(t) = 2t + 3\left(t^3 + \frac{152}{3t}\right)$$

متى تنعدم سرعته وعلى أي ارتفاع ؟ أوجد العجلة عند منتصف هذا الزمن.

**الحـــــل**

$$v(t) = \dot{y}(t)$$

$$v(t)=2+3\left(3t^2-\frac{152}{3t^2}\right)$$

وتنعدم السرعة عندما $v(t)=0$، أي

$$0=2+3\left(3t^2-\frac{152}{3t^2}\right)$$

نضع $3t^2=u$

$$0=2+3\left(u-\frac{152}{u}\right)$$

$$0=2u+3u^2-456$$

$$3u^2+2u-456=0$$

$$(u-12)(3u+38)=0$$

$$u=12\ ,\ u=-\frac{38}{3}$$

$$\Rightarrow\quad 3t^2=12\quad\Rightarrow\quad t=2s$$

∴ تنعدم سرعته بعد 2 ثانية. وعندئذ يكون،

$$y(t)=2(2)+3\left(2^3+\frac{152}{3\times 2}\right)$$

$$=4+3\left(8+25\frac{1}{3}\right)$$

$$=4+24+76$$

$$=94m$$

∴ أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم هو 94 مترا.

أما العجلة،

$$a(t)=\dot{y}(t)$$

$$= 3\left(6t + \frac{304}{3t^3}\right)$$
$$= 18t + \frac{304}{t^3}$$
والعجلة عند منتصف زمن الصعود، أي عند $t = 1s$ هي
$$a(1) = 18(1) + \frac{304}{(1)^3}$$
$$= 322\, m/s^2$$

**مثال (16):**

يتحرك جسيم في خط مستقيم ويتحدد الموضع $s(t)$ عند $t$ ثانية بالعلاقة،
$$s(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$
اشرح حركة الجسيم منذ أن مر بنقطة الأصل عندما $t = 0$ إلى $t \to \infty$. أين يكون الجسيم عندما $t = 1000s$ ؟ ضمن الشرح شكل وقيمة الموضع والسرعة والعجلة، وارسم بيانات تغيرهم مع الزمن.

**الحـــل**

$$v(t) = \dot{s}(t) = \frac{\left(1+t^2\right)(2) - 2t(2t)}{\left(1+t^2\right)^2}$$
$$v(t) = \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}$$
$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{\left(1+t^2\right)^2(-4t) - \left(2-2t^2\right)2\left(1+t^2\right)(2t)}{\left(1+t^2\right)^4}$$

$$= \frac{-4t(1+t^2)[1+t^2+2-2t^2]}{(1+t^2)^3}$$

$$= \frac{4t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$$

تتعدم السرعة عندما، $v(t)=0$

$$2-2t^2=0 \quad \Rightarrow \quad t=1s$$

وتكون عندئذ،

$$s(1)=1m$$

وعند هذه اللحظة يغير الجسيم اتجاه حركته.

ولكن متى يعود إلى نقطة الأصل ؟ يعود عندما $s=0$

$$\frac{2t}{1+t^2}=0$$

والطرف الأيسر ينعدم في حالتين، أولاً لما، $t=0$ أي في بدء الحركة (حيث بدأ الحركة عند نقطة الأصل)

وعندما $t \to \infty$. أي أن الجسيم يعود بعد أن يكون قد قطع مسافة 1 متر في زمن 1 ثانية ولكنه لن يصل إلى نقطة الأصل إلا بعد زمن لا نهائي.

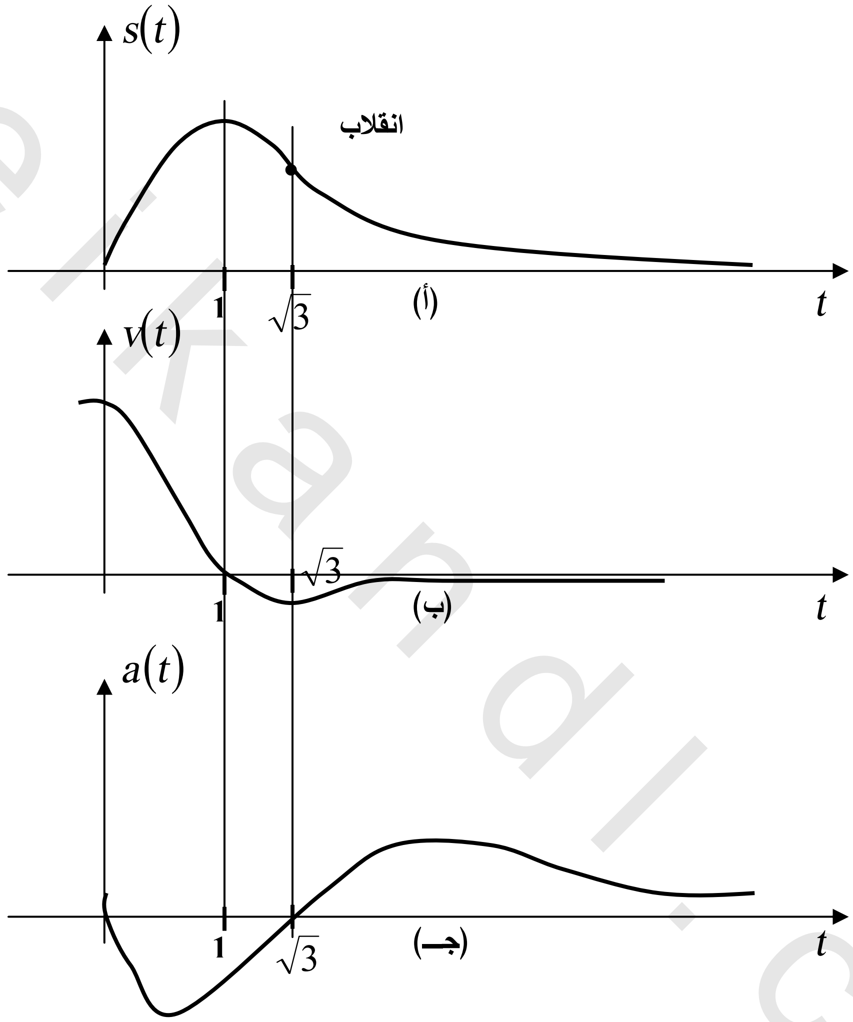
وبالرجوع للعجلة نجد أنها تنعدم عندما

$$t=0 \quad , \quad t=\sqrt{3} \ s$$

أي أن السرعة بلغت قيم قصوى عند بدء الحركة وعند $t=\sqrt{3}$ فنجدها كانت أكبر ما يمكن عند بدء الحركة ثم تناقصت حتى انعدمت عند $t=1s$ حيث غير الجسيم اتجاه حركته. ثم بدأت في التزايد في الاتجاه المعاكس (نحو اليسار) حتى بلغت قيمة عظمى عند $t=\sqrt{3} \ s$.

إذن عند $t=\sqrt{3}$ بدأت السرعة تتناقص وتحرك الجسيم بتقصير لم يمكنه من العودة إلى ($s=0$).

وبيانات العلاقات $s(t)$ ، $v(t)$، $a(t)$ موضحة في شكل (148)




شكل (148)

## تمارين (6−3)

في التمارين من (1) إلى (11)، تتحرك نقطة في خط مستقيم وموضعها $s$. أوجد السرعة والعجلة عند أي لحظة زمنية $t$. صف حركة النقطة في الفترة الزمنية المعطاة. وضح الحركة برسم من النوع الموضح في شكل (145).

1) $s(t)=3t^2-12t+4$ ، $[0,6]$

2) $s(t)=t^2+5t-6$ ، $[0,3]$

3) $s(t)=t^2+3t-6$ ، $[-2,2]$

4) $s(t)=2t^3-9t^2+12t$ ، $[0,4]$

5) $s(t)=t^3-9t+1$ ، $[-3,3]$

6) $s(t)=10-36t+15t^2-2t^3$ ، $[1,4]$

7) $s(t)=12+6t-t^3$ ، $[-2,3]$

8) $s(t)=-2t^3+15t^2+24t-6$ ، $[0,5]$

9) $s(t)=2t^3-12t^2+6$ ، $[0,6]$

10) $s(t)=2t^4-6t^2$ ، $[-2,2]$

11) $s(t)=2t^3-3t^2$ ، $[0,2]$

في التمارين من (12) إلى (16)، تقطع نقطة متحركة على مستقيم المسافة $s(t)$ في زمن $t$ وحدة. أوجد السرعة بعد 3 ثواني وأذكر في كل مرة متى تصبح السرعة $k$ متر/ث$^2$.

12) $s(t)=5t^2+2 \quad , \quad k=28$

13) $s(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \quad , \quad k=0$

14) $s(t)=3t^2+7 \quad , \quad k=88$

15) $s(t)=5t^3+3t+2 \quad , \quad k=63$

16) $s(t)=\sqrt{16+t^2} \quad , \quad k=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

قذف جسيم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية $u$ متر/ث وارتفاعه بالمتر عن سطح الأرض بعد $t$ ثانية هو $Y(t)$. أوجد في كل التمارين من (17) إلى (19):

أ- السرعة والعجلة عند $t$ ثانية.

ب- أقصى ارتفاع

جـ- فترة الرحلة

(17 $s(t)=144t-16t^2 \quad , \quad u=144$

(18 $s(t)=100+192t-16t^2 \quad , \quad u=192$

(19 $s(t)=b-bt-at^3 \quad , \quad u=b$

يتحرك جسيم حركة توافقية بسيطة وموضعه عند زمن $t$ هو $s(t)$ أوجد سعة الذبذبة وزمن الذبذبة والتردد ( من 20 إلى 25 )

(20 $s(t)=8\sin \pi t$   (21 $s(t)=5\cos\frac{\pi}{4}t$

(22 $s(t)=3\cos 2t$   (23 $s(t)=6\sin\frac{2\pi}{3}t$

(24 $\dot{s}(t)=8\sqrt{16-s^2}$   (25 $\ddot{s}(t)=-16s$ ، $\dot{s}_{\max}=20$

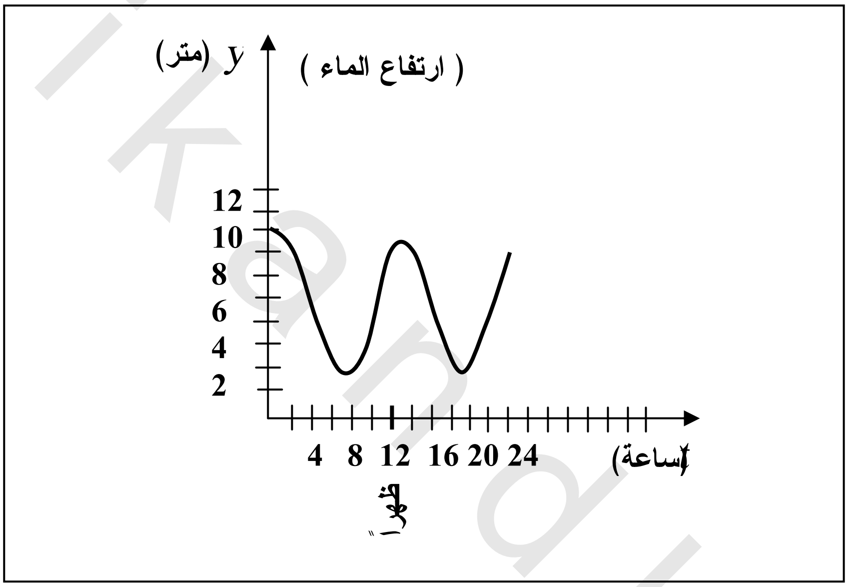
26) التغيير السنوي في درجة الحرارة $T$ ($c^0$) في ستاتن ايند يمكن تقريبه بالمعادلة $T=14.8\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-3)\right)+10$

حيث $t$ بالشهور، $t=0$ تناظر أول يناير. أوجد قيم تقريبية للمعدل الذي به درجة الحرارة في أول أبريل وفي أول نوفمبر. في أي من شهور السنة يكون تغير درجة الحرارة أسرع ما يمكن.

27) شكل (149) يوضح ارتفاع وانخفاض مستوى الماء في ميناء طرابلس خلال 24 ساعة معينة.

أ- قرب مستوى سطح الماء $y$ بتعبير على شكل $y = a\sin(bt+c)+d$ ، $t=0$ تناظر منتصف الليل.

ب- أوجد سرعة ارتفاع سطح الماء عند الظهيرة. (الساعة 12 ظهرا).



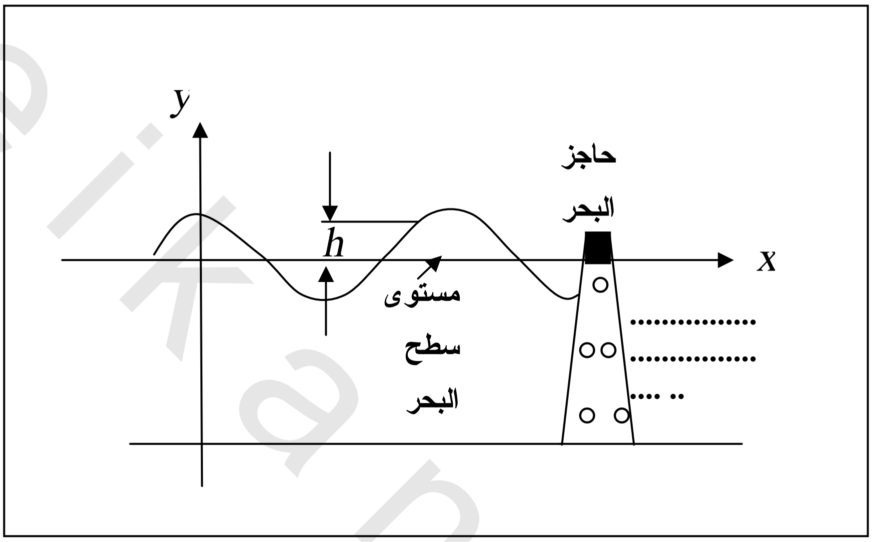

شكل (149)

28) السونامي هو موجة بحرية تنجم عن زلزال تحت سطح البحر مثل الذي حدث في شريط آسيا. هذه الموجات قد تصل لأكثر 100 قدم ارتفاعا وتنتشر بسرعات هائلة. يمثل المهندسين السونامي بمعادلة على شكل $y = a\cos bt$ .

أفترض أن موجة ارتفاعها (قدم) $h = 25$ وزمنها الدوري 30 دقيقة تنتشر بسرعة 180 قدم/ثانية.

أ- إذا كان $(x, y)$ نقطة على الموجة المبينة في شكل (150). عبر عن $y$ كدالة في $t$ علماً بأن $y = 25$ عندما $t = 0$.

ب- ما سرعة ارتفاع (أو هبوط) سطح الموجة عندما $y = 10\ ft$.



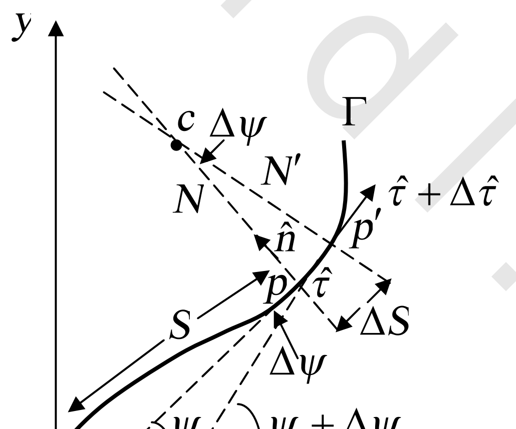

شكل (150)

**<u>بند (6–4): الانحناء CURVATURE</u>**

عندما تتحرك نقطة على منحنى $\Gamma$، قد يتغير اتجاهها بسرعة أو ببطء على حسب ما إذا كان $\Gamma$ ينثني بجدية أو بالتدريج. ولقياس معدل انثناء أو تغير شكل المنحنى $\Gamma$، نستعمل مصطلح " الانحناء " أو " التقوس ".

وفي هذا البند سوف نعتبر وحدة المتجه المماس ووحدة المتجه العمودي على المنحنى اللذان سيكونا عوناً لمناقشتنا مبدأ الانحناء.

نفرض أن الجسيم كان عند لحظة معينة عند نقطة $P$. شكل (151) على المنحنى $\Gamma$ وأن متجه الوحدة المماس عند هذه النقطة هو $\hat{\tau}$ يصنع زاوية $\psi$ مع المحور $x$. وهو في نفس الوقت في اتجاه السرعة $\dot{s}(t)$ حيث $s(t)$ موضع الجسيم على المنحنى عندئذ. العمودي على المنحنى عند $P$ نرمز له $N$ ومتجه الوحدة في اتجاهه هو $\hat{n}$ ويصنع زاوية $\psi + \frac{\pi}{2}$ مع المحور $x$.




شكل (151)

بعد زمن قدره $\Delta t$ انتقل الجسيم إلى $P'$ تبعد $P$ مسافة $\Delta s$ على المنحنى ويصبح متجه الوحدة المماس عندئذ $\hat{\tau}'$ أو $\hat{\tau}+\Delta\hat{\tau}$ يصنع زاوية $\psi+\Delta\psi$ مع المحور $x$ والعمودي عليه $N'$ يصنع زاوية $\psi+\Delta\psi+\dfrac{\pi}{2}$ مع المحور $x$. يتقاطع العمودان مع بعضهما في نقطة $c$ هي مركز الانحناء (التقوس) عند هذه النقطة $P$. ومن الشكل نجد أن

$$\Delta s = \rho \Delta t$$

حيث $\rho = cP \approx cP'$ هو نصف قطر الانحناء (التقوس).

إذن

$$\rho = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

أو

$$\rho = \frac{ds}{d\psi}$$

أ- فإذا كان المنحنى $\Gamma$ معرف بمعادلته الديكارتية. فإن من شكل (152) وهو يكبر المسافة من $P$ إلى $P'$، نجد أن،

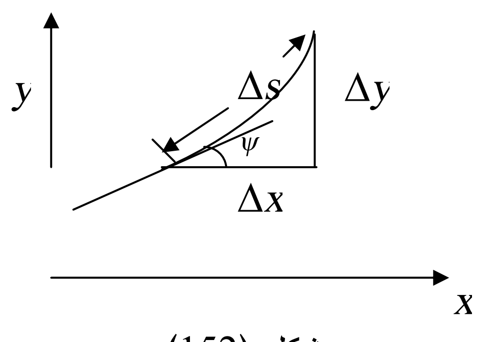
$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

أو

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

كذلك $\tan\psi = \dfrac{dy}{dx}$



شكل (152)

بالتفاضل،

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d\psi}{dx}\sec^2\psi = y''$$

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{y''}{1+\tan^2\psi} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)}$$

إذن

$$\rho = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{d\psi}{dx}} = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)}}$$

$$\rho = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

**تعريف:** الانحناء $k$ للمنحنى $\Gamma$ عند نقطة $P(x,y)$ هو

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds}$$

$\therefore$ الانحناء (التقوس) هو مقلوب نصف قطر الانحناء، إذن

$$k = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

ب- أما إذا كان المنحنى معرف بمعادلتين بارامتريتين

$x = x(t)$ ، $y = y(t)$ فإن

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

كذلك

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt} = y''\dot{x}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{y''\dot{x}}{1+\tan^2\psi} = \frac{y''\dot{x}}{1+\frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}}$$

$$= \frac{y''\dot{x}^3}{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \quad , \quad y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

$$\rho = \frac{ds/dt}{d\psi/dt}$$

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)}}$$

$$\rho = \frac{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}$$

$$\frac{1}{\rho} = k = \frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

جـــ– مركز الانحناء (مركز التقوس) نجد من شكل (153) أن الإحداثي $X$ لنقط $c$، مركز لانحناء هو

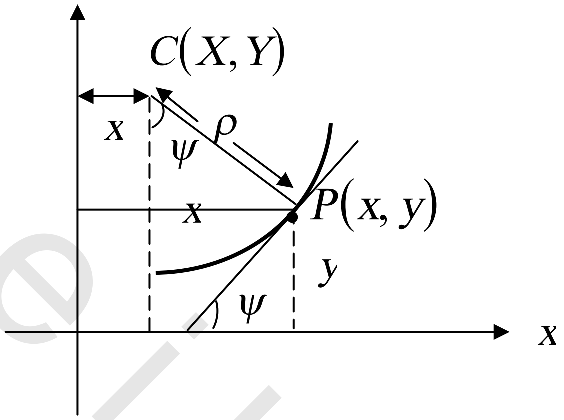
$$X = x - \rho \sin\psi$$

$$X = x - \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''}$$

كذلك،

$$Y = y + \rho \cos\psi$$

$$Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$




شكل (153)

كذلك في الصورة البارمترية نجد أن

$$X = x - \frac{\dot{y}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

$$Y = y + \frac{\dot{x}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}$$

ومن الأبسط أن نكتفي بتذكر أن مركز الانحناء هو

$$c\left(x - \rho \sin\psi, y + \rho \cos\psi\right)$$

**مثال (17):**

منحنى $\Gamma$ تمثله المعادلتان البارامتريتان $x = t^2$ ، $y = t^3$ ، $t \in R$. أوجد التقوس عند نقطة $P$ بارامترها $t = 0.5$ وأوجد مركز ونصف قطر دائرة الانحناء عند $t = 0.5$ على رسمة واحدة.

**الحـــل**

$$\dot{x}(t) = 2t \text{ ، } \dot{y}(t) = 3t^2 \quad \Leftarrow \quad \dot{x}(0.5) = 1 \text{ ، } \dot{y}(0.5) = \frac{3}{4}$$

$$\ddot{x}(t) = 2 \text{ ، } \ddot{y}(t) = 6t \quad \Leftarrow \quad \ddot{x}(0.5) = 2 \text{ ، } \ddot{y}(0.5) = 3$$

$$k=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1\times 3-\frac{3}{4}\times 2}{\left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{3/2}{125/64}=\frac{96}{125}$$

$$\rho=\frac{1}{k}=\frac{125}{96}\approx 1.302$$

$$y'=\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad\Rightarrow\quad \dot{y}(0.5)=\frac{3}{4}$$

$$\tan\psi=\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad \sin\psi=\frac{3}{5} \quad , \quad \cos\psi=\frac{4}{5}$$

$$X=x-\rho\sin\psi$$

$$=0.25-\frac{125}{96}\cdot\frac{3}{5}$$

$$=0.25-\frac{25}{32}=0.531$$

$$Y=y+\rho\cos\psi$$

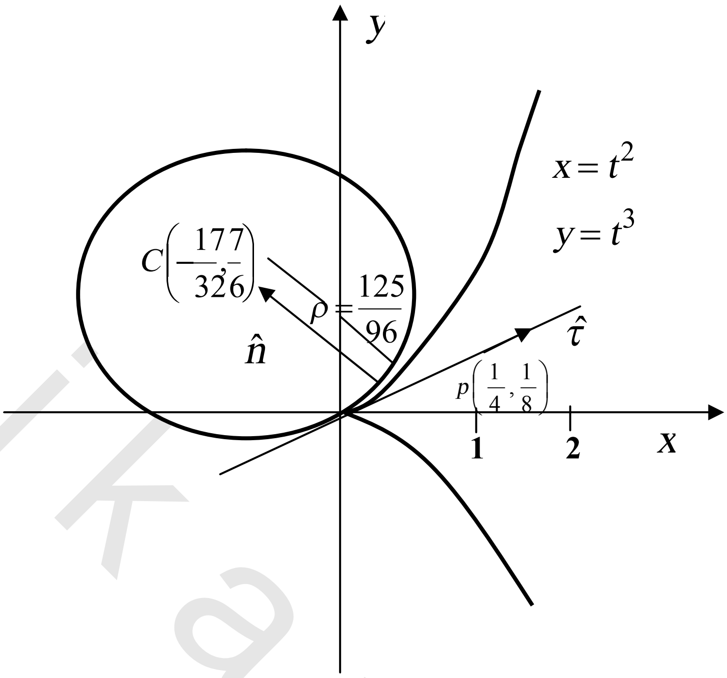
$$=0.125-\frac{125}{96}\cdot\frac{4}{5}$$

$$=0.125-\frac{25}{24}=1.167$$

إذن $c(-0.531,1.167)$

معادلة دائرة لانحناء هي،

$$\left(x+\frac{17}{32}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2=\left(\frac{125}{96}\right)^2$$




شكل (154)

**مثال (18):**

أوجد معادلة دائرة تقوس المنحنى، $y^2 = 4ax$ عند النقطة $y = 2a$ .

**الحـــل**

$$y^2 = 4ax$$

$$2yy' = 4a \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2a}{y}$$

$$y'' = \frac{-2a}{y^2}\, y' = \frac{-2a}{y^2} \cdot \frac{2a}{y}$$

$$y'' = \frac{-4a^2}{y^3}$$

عند $y = 2a$ ، $y' = 1$ ، $y'' = \dfrac{-1}{2a}$ ، $x = a$

$$\rho = \frac{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$\rho = \frac{(1+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{-1}{2a}} = -4\sqrt{2}a$$

نصف قطر الانحناء $|\rho| = -4\sqrt{2}a$

الإشارة السالبة تعني أن المنحنى مقعر لأسفل، وهي نفس إشارة $y''$ .

$$\tan\psi = 1 \;\Rightarrow\; \psi = \frac{\pi}{4}$$

$$X = x - \rho\sin\psi$$

$$= a - \left(-4\sqrt{2}a\right)\frac{1}{\sqrt{2}} = 5a$$

$$Y = y + \rho\cos\psi$$

$$= 2a - -4\sqrt{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2a$$

مركز دائرة الانحناء $c(5a,-2a)$

معادلة دائرة الانحناء،

$$(x+5a)^2 + (y+2a)^2 = 32a^2$$

$$x^2 + y^2 - 10ax + 4ay - 3a^2 = 0$$

## تمارين (6-4)

في التمارين من (1) إلى (15) أوجد

أ- الانحناء عند النقطة $P$

ب- مركز الانحناء

جـ- ارسم بيان المنحنى ودائرة الانحناء.

1) $y=2-x^3\ ,\ P(1,1)$

2) $y=x^4\ ,\ P(1,1)$

3) $y=\cos 2x\ ,\ P(0,1)$

4) $y=\sec x\ ,\ P(\pi/3,2)$

5) $x=t-1\ ,\quad y=\sqrt{t}\ ,\ P(3,2)$

6) $x=t+1\ ,\quad y=t^2+4t+3\ ,\ P(t=0)$

7) $x=t-t^2\ ,\quad y=1-t^3\ ,\ P(0,1)$

8) $x=t-\sin t\ ,\quad y=1-\cos t\ ,\ P\left(\frac{\pi}{2}-1,1\right)$

9) $x=2\sin t\ ,\quad y=3\cos t\ ,\ P\left(1,\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

10) $x=\cos^3(t)\ ,\quad y=\sin^3(t)\ ,\ P\left(t=\frac{\pi}{4}\right)$

11) $y=\sin x\ ,\ P\left(\frac{\pi}{2},1\right)$

12) $y=\sec x\ ,\ P(0,1)$

13) $xy=1\ ,\ P(1,1)$

14) $x=\cos t\ ,\quad y=\sin\frac{4t}{5}\ ,\ P\left(t=\frac{\pi}{3}\right)$

15) $x=5t^2\ ,\quad y=8t-7t^2\ ,\ P\left(\frac{5}{4},\frac{9}{4}\right)$

16) أوجد نقط المنحنى التي عندها الانحناء أكبر ما يمكن،

أ- $9x^2+4y^2=36$ ب- $9x^2+4y^2=36$

جـ- $y=\sin x$

17) أوجد نقط على بيان المعادلة المعطاة ينعدم عندها الانحناء.

أ- $y=x^4-12x^2$ ب- $y=\tan x$

جـ- $y=1+x^3$ د- $y=2x^3-3x^2$

18) أثبت أن الانحناء في نظام الإحداثيات القطبية المستوية $(r,\theta)$ هو

$$k=\frac{\left|2r'-rr'+r^2\right|}{\left[(r')^2+r^2\right]^{3/2}}\ ,\quad r'=\frac{dr}{d\theta}\quad ,\quad r''=\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

في التمارين من (19) إلى (20)، وباستعمال نتيجة تمرين (18) أوجد انحناء المنحنيات القطبية عند $P(r,\theta)$.

19) $r=a(1-\cos\theta)\ ,\quad 0<\theta<2\pi$

20) $r=\sin 2\theta\ ,\quad 0<\theta<2\pi$

في التمارين من (21) إلى (24) أوجد مركز التقوس لنقطة $P$ على بيان المعادلة المعطاة.

21) $y=2-x^3\ ,\ P(1,1)$

22) $y=x^4\ ,\ P(1,1)$

23) $y=\cos 2x\ ,\ P(0,1)$

24) $x=t^3\ ,\quad y=2t^2\ ,\ P(t=1)$

**بند (6–5): التقريب الخطي والتفاضلات**

إذا كان المتغير $x$ له قيم ابتدائية $x_0$ ثم تغير إلى $x_1$ فإن التغير أو الفرق $x_1 - x_0$ يرمز له $\Delta x$ ( دلتا $x$ ). التغير المناظر في قيمة $y = f(x)$ هو $f(x_1) - f(x_0)$ ، ويرمز له $\Delta y$.

**تعريف:**

إذا كان $y = f(x)$ وكان للمتغير $x$ قيمة ابتدائية $x_0$ تغيرت إلى $x_1$ فإن

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

والتغير المناظر في قيمة $y$ هو

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

بالرجوع إلى شكل (155) نجد أن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ هي ميل الوتر $PQ$، يرمز لها $m_{PQ}$.

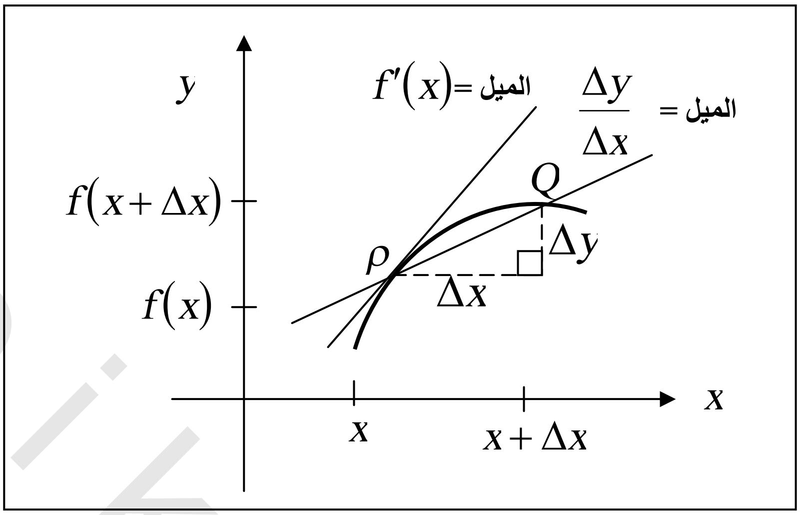
إذن

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أو

$$\Delta y = m_{PQ} \Delta x$$

ونحن نعلم أن، $\Delta x = x_1 - x_0$، لذلك إذا علمت قيمة تقريبية لمقدار $m_{PQ}$، يمكننا استنتاج $\Delta y$ و $f(x_1)$ . سبق وعرفنا ميل المماس على أنه نهاية ميل الوتر (القاطع) المار من $P$ إلى $Q$. كما عرفنا $f'(x_0)$ كرمز لهذه النهاية. أي أن $m_{PQ}$ تقريباً يساوي $f'(x_0)$ إذا كانت $x_1$ ليست بعيدة عن $x_0$.




شكل (155)

فيكون لدينا

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta y$$
$$\approx f(x_0) + m_{PQ}\Delta x$$

$$\boxed{f(x_1) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

وهذه المعادلة تمكننا من استنتاج قيمة تقريبية $f(x_1)$ باستعمال القيم المعلومة $f(x_0)$ ، $f'(x_0)$ . ولابد من التأكد على أن هذا التقريب أكثر مواءمة عندما تكون $x_1$ قريبة من $x_0$ ، وعندما يكون إيجاد $f(x_0)$ ، $f'(x_0)$ أسهل من إيجاد $f(x_1)$ مباشرة وإذا أردنا توخي الدقة في هذه المناقشة علينا أن نعيد كتابة تعريف المشتقة على النحو،

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

أي أنه كلما اقتربت $\Delta x$ من 0، تقترب النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ من $f'(x_0)$ كما هو واضح في شكل (155).

أي أن

$$\boxed{\Delta y = f'(x_0)\Delta x \quad , \quad \Delta x \approx 0}$$

**مثال (19):**

إذا كانت $y = f(x) = \sqrt{3+x}$ أوجد التقريب الخطي عند $x_0 = 6$ ثم استعمله في حساب تقريبي للقيم $\sqrt{8}$، $\sqrt{8.9}$، $\sqrt{9.3}$. قارن النتائج بالقيم التي تعطيها الآلة الحاسبة.

**الحـــــل**

$$f(x) = \sqrt{3+x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3+x}}$$

وعندما $x_0 = 6$ ،

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6} \quad ، \quad f(x_0) = \sqrt{9} = 3$$

إذن

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$
$$f(x) \approx 3 + \frac{1}{6}(x-6)$$
$$\approx 2 + \frac{x}{6}$$

الآن

$$\sqrt{8} = \sqrt{3+5} = f(5) = 2 + \frac{5}{6} = 2.83333$$

$$\sqrt{8.9} = \sqrt{3+5.9} = f(5.9) = 2 + \frac{5.9}{6} = 2.98333$$

$$\sqrt{9.3} = \sqrt{3+6.3} = f(6.3) = 2 + \frac{6.3}{6} = 3.05$$

| الجذر | بالتقريب الخطي | بالآلة الحاسبة |
|---|---|---|
| $\sqrt{8}$ | 2.83333 | 2.828427 |
| $\sqrt{8.9}$ | 2.98333 | 2.983287 |
| $\sqrt{9.3}$ | 3.05 | 3.049590 |

**<u>تعريف:</u>** إذا كان $y = f(x)$ ، $f$ قابلة للاشتقاق، فإن التفاضلة $dy$ تعرف بالمعادلة $dy$ تعرف بالمعادلة

$$dy = f'(x)\Delta x$$

**مثال (20):**

إذا كانت $y = 3x^2 - 5$

أ- أوجد معادلة لأجل $\Delta x$ و $dy$

ب- إذا تغيرت $x$ من 2 إلى 2.1 احسب كل من $\Delta y$ ، $dy$.

**الحـــل**

أ-

$$y = f(x) = 3x^2 - 5$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= \left[3(x+\Delta x)^2 - 5\right] - \left(3x^2 - 5\right) \\ &= 3\left(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2\right) - 5 - 3x^2 + 5 \\ &= 6x(\Delta x) + 3(\Delta x)^2\end{aligned}$$

أما

$$dy = f'(x)dx$$
$$= f'(x)\Delta x$$
$$= 6x\Delta x$$

ب- باستعمال $x = 2$ ، $\Delta x = 0.1$

$$\Delta y = f(2.1) - f(2)$$
$$\Delta y = 6 \times 2 \times 0.1 + 3(0.1)^2$$
$$= 1.2 + 0.03 = 1.23$$
$$dy = (6 \times 2)(0.1)$$
$$dy = 1.2$$

لأقرب علامة عشرية واحدة.

$$dy = \Delta x$$

يلاحظ أنه يمكننا كتابة

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y$$
$$\approx f(x) + dy$$
$$dy = f'(x)\Delta x$$

**مثال (21):**

أوجد بالتقريب الخطي التغير في $\sin\theta$ عندما تتغير $\theta$ من $\pi/3$ إلى $61\pi/180$، ثم أوجد تقريبا لقيمة $\sin\left(\frac{61\pi}{180}\right)$.

**الحـــل**

$$y = f(\theta) = \sin\theta$$
$$dy = \cos\theta\Delta\theta$$

بوضع $\theta = \pi/3$ ،$\Delta\theta = \frac{\pi}{180}$

$$dy = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0.0087$$

الآن

$$\sin(\theta + \Delta\theta) = \sin\theta + dy$$
$$\sin\left(\frac{61\pi}{180}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 0.0087$$
$$\approx 0.8660 + 0.0087$$
$$\approx 0.8747$$

القيمة الحقيقية من الآلة الحاسبة، $\sin\left(\frac{61\pi}{180}\right) = 0.8746$ الخطأ لا يتجاوز 0.0001 تقريبا.

إذا كانت $\Delta y$ إلى التغير في $y$ المناظر لــ $\Delta x$. فقد نعتبر $\Delta y$ هو الخطأ في حساب $y$ الناجم عن الخطأ $\Delta x$ في قياس $x$. ويمكن تقريب $\Delta y$ بـــ $dy$ كما يلي

$$\Delta y \approx dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)(\Delta x)$$

فمثلا إذا كان $y = \frac{4}{3}\pi x^2$ ، وتم قياس $x$ ، على أن $x = 12cm$ بخطأ أقصاه $\pm 0.06cm$ فإن الخطأ المناظر في حساب $y$ هو

$$\Delta y = 4\pi x^2 \Delta x$$
$$= 4\pi(12)^2(\pm 0.06) \approx \pm 109$$

$\therefore$ أقصى خطأ في حساب $y$ هو تقريباً $\pm 109 cm^3$.

هذا الخطأ يسمى الخطأ المطلق. أما نسبة الخطأ $\pm 0.06$ في $x$ بالنسبة إلى $x = 12$ فيسمى الخطأ النسبي في قياس $x$ وبالمثل الخطأ النسبي في حساب $y$ هو

$$\pm 0.015 = \frac{\pm 109}{\frac{4}{3}\pi(12)^3} = \frac{\Delta y}{y}$$

**<u>تعريف:</u>** إذا كانت $y = f(x)$ وتغيرت من $y_0$ إلى $y_1$ بالتناظر مع تغيير $x$ من $x_0$ إلى $x_1$ فإن:

1) الخطأ المطلق $\Delta y = y_1 - x_0$ ويقرب إلى $dy = f'(x_0)\Delta x$

2) الخطأ النسبي $\frac{\Delta y}{y_0}$ ويقرب إلى $\frac{dy}{y_0}$

3) الخطأ المئوي $\frac{\Delta y}{y_0} \times 100\%$ ويقرب إلى $\frac{dy}{y_0} \times 100\%$

**مثال (22):**

يتغير حجم الغاز $V$ وع الضغط $P$ تغيرا أديباتيكيا تبعاً للعلاقة ($PV^{\gamma} =$ ثابت) حيث $\gamma = 1.4$. فإذا كان حجم الغاز $2m^3$ والخطأ في حسابه هو $10cm^3$. أوجد الخطأين النسبي والمئوي في حساب الضغط.

**الحــــل**

$$P = \frac{(\text{ثابت})}{V^{\gamma}} = \frac{k}{V^{\gamma}}$$

$$P = \frac{-\gamma \ k}{V^{\gamma+1}} \Delta V$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{-\gamma}{V} \Delta V$$

عندما $V = 2m^3$ ، $\Delta V = \frac{10}{10^6} m^3$

$$\frac{\Delta V}{V} = 5 \times 10^{-6}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = -1.4 \times 5 \times 10^{-6}$$

الخطأ النسبي،

$$\frac{\Delta P}{P} = -7 \times 10^{-6}$$

الخطأ المئوي،

$$\frac{\Delta P}{P} \times 100\% = -7 \times 10^{-4}\%$$

$$= -0.0007\%$$

## تمارين (5−6)

في التمارين من (1) إلى (12) أوجد تقريباً لمقدار $f(b)$ عندما تتغير $x$ من $a$ إلى $b$.

(1) $f(x)=3x^2-5x+11$ ، $a=4$ ، $b=1.02$

(2) $f(x)=3x^3-8x+7$ ، $a=4$ ، $b=3.98$

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ، $a=7$ ، $b=7.05$

(4) $f(x)=x^4$ ، $a=1$ ، $b=1.02$

(5) $f(x)=x^4$ ، $a=1$ ، $b=0.98$

(6) $f(x)=2\sin x+\cos x$ ، $a=\dfrac{\pi}{6}$ ، $b=\dfrac{9\pi}{60}$

(7) $f(x)=\csc x+\cot x$ ، $a=45^\circ$ ، $b=44^\circ$

(8) $f(x)=\dfrac{1}{\csc x-\cot x}$ ، $a=45^\circ$ ، $b=46^\circ$

(9) $f(x)=\sec x$ ، $a=60^\circ$ ، $b=62^\circ$

(10) $f(x)=\tan x$ ، $a=30^\circ$ ، $b=28^\circ$

(11) $f(x)=\sqrt{1+\cos x}$ ، $a=180^\circ$ ، $b=181^\circ$

(12) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $a=0.1$ ، $b=0.101$

في التمارين من (13) إلى (18) أوجد:

أ− معادلة عامة لكل من $\Delta y$ ، $dy$

ب− عندما تتغير $x$ من $a$ إلى $a+\Delta x$ احسب $\Delta y$ ، $dy$ ، $dy-\Delta y$

(13) $y=x^2-2\sqrt{2}x+5$ ، $a=2\sqrt{2}$ ، $\Delta x=-0.2\sqrt{2}$

(14) $y=x^3-4$ ، $a=-1$ ، $\Delta x=0.1$

(15) $y=\dfrac{1}{1+x}$ ، $a=1$ ، $\Delta x=-0.03$

(16) $y=4-9x$ ، $a=-2$ ، $\Delta x=-0.02$

(17) $y=7x+12$ ، عند أي $x$ ، $\Delta x$

(18) $y=\dfrac{1}{x^2}$ ، $a=3$ ، $\Delta x=0.3$

في التمارين من (19) إلى (24) إذا كان أكبر خطأ في قياس $x$ هو $\Delta x$، استعمل التفاضلات لإيجاد الخطأ النسبي والخطأ المئوي في حساب $y$ :

(19) $y=4x^3$ ، $x=3$ ، $\Delta x=\pm 0.01$

(20) $y=3x^4$ ، $x=1$ ، $\Delta x=\pm 0.01$

(21) $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}$ ، $x=4$ ، $\Delta x=\pm 0.02$

(22) $y=x^3+5x$ ، $x=1$ ، $\Delta x=\pm 0.01$

(23) $y=2\sqrt[3]{x}$ ، $x=27$ ، $\Delta x=\pm 0.3$

(24) $y=3x^2-x$ ، $x=2$ ، $\Delta x=0.1$

(25) إذا كان $P=6t^{2/3}+t^2$ فأوجد $dP$ عند $t=8$ ، $dt=0.2$ .

(26) إذا كان $y=40\sqrt[5]{x^2}$ والخطأ المسموح به لا يزيد عن ما نسبته $\pm 0.08$ في قياس $x$ . أوجد الخطأ النسبي والمئوي الممكن في $y$ .

(27) المساحة السطحية لأسطوانة مغلقة هي $S=10\pi r^2$ والخطأ المئوي المسموح به في $S$ لا يزيد عن $\pm 10\%$، أوجد أكبر خطأ نسبي مسموح به في $r$ .

(28) إذا قذف جسيم من سطح الأرض بسرعة ابتدائية $v_0$ في اتجاه يصنع $\alpha$ درجة مع الأفقي فإن أقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف هو $h$ وأقصى مدى يصل إليه المقذوف على الأفقي هو $R$ حيث

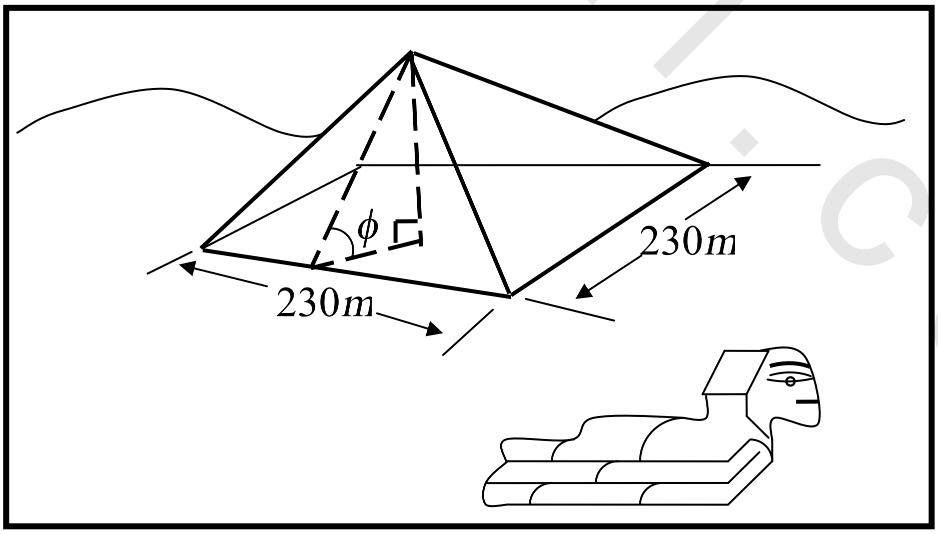
$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} \quad , \quad R = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$$

حيث $g$ عجلة الجاذبية الأرضية. فإذا كان

$$v_0 = 100\, m/s \text{ (متر/ثانية)} \quad , \quad g = 9.8\, m/s^2$$

وتغيرت $\alpha$ من $30^\circ$ إلى $30.5^\circ$. استعمل التفاضلات لإيجاد قيم تقريبية للتغير في كل $h$، $R$.

(29) الهرم الأكبر له قاعدة مربعة طول ضلعها $230m$. (أنظر شكل (156)) ولإيجاد قيم تقريبية لارتفاع وقف رجل عند منتصف أحد أحرف القاعدة ونظر لرأس الهرم فوجد أن زاوية الارتفاع هي $\phi = 52^0$.
إلى أي مدى من الدقة يجب أن يكون قياس هذه الزاوية لكي يكون الخطأ في حساب $h$ واقعاً بين $1-$ متر إلى $1+$ متر ؟

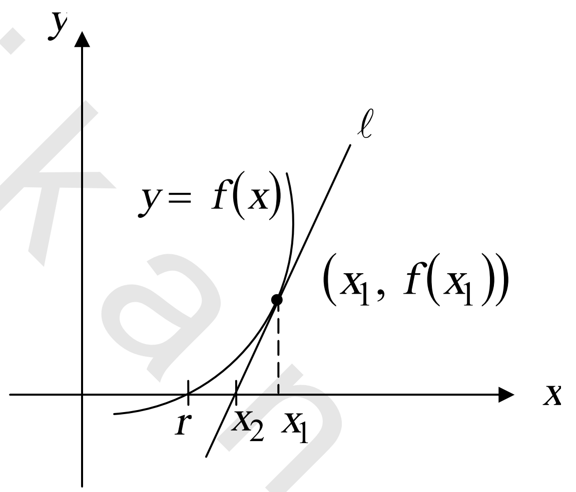



شكل (156): تمرين (29)

## بند (6−6): طريقة نيوتن− رافسون

تبني طريقة نيوتن− رافسون، لإيجاد تقريب للجذر "$r$" لدالة قابلة للاشتقاق " $f$ "، لى فكرة أن المماس هو مستقيم قريب من المنحنى بالقرب من نقطة التماس.

في هذه الطريقة نبدأ بتقريب $x_1$ للجذر $r$، ونعتبر الخط المماس $\ell$ لبيان $y = f(x)$ عند $(x_1, f(x_1))$ ( أنظر شكل (157).




شكل (157)

الخط المماس وبيان $f$ يجب أن يقطعا المحور $x$ بالقرب من بعضهما لأن الخط المماس يظل قريب من بيان $f$ . ومن ثم يمكننا تقريب جذر $f$ بإيجاد جذر للخط المماس. لأن معادلة الخط المماس خطية ومن السهل حساب جذرها.

ونستطيع أن نوجد أول تقريب لــ $f$ باستعمال مبرهنة القيمة الوسطى التي تضمن وجود جذر في أي فترة $(a, b)$ إذا كان إشارتي $f(a)$ ، $f(b)$ مختلفتين.

لنعتبر المماس $\ell$ لبيان $f$ عند $(x_1, f(x_1))$. إذا كانت $x_1$ قريبة بالقدر الكاف من $r$ ، إذن، وكما هو واضح في شكل (157)، تقاطع $\ell$ مع المحور $x$ أي $x_2$ يجب أن تكون تقريبا جيدا للجذر $r$. وحيث أن ميل $\ell$ هو $f'(x_1)$ ، فإن معادلة المماس هي

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

ولإيجاد $x_2$ ، ضع $y = 0$ ،

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

ومنها،

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad , \quad f'(x_1) \neq 0$$

وبأخذ $x_2$ كتقريب ثان لـ $r$ ، نستطيع تكرار العملية باستعمال المماس عند $(x_2, f(x_2))$. وعلى ذلك فالتقريب الثالث هو

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \quad , \quad f'(x_2) \neq 0$$

ونستمر في تكرار العملية حتى نصل للدرجة المطلوبة من التقريب. هذه الطريقة في استعمال تقريبات متتابعة من الجذور الحقيقية تسمى طريقة نيوتن– رافسون.

**طريقة نيوتن– رافسون**

لتكن $f$ دالة قابلة للاشتقاق، $r$ هو جذر حقيقي لها.

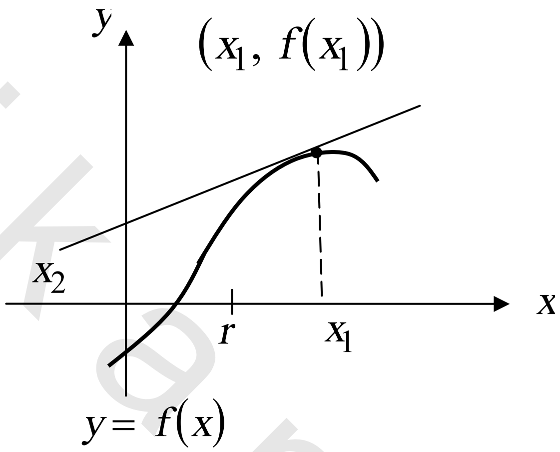
فإذا كان $x_n$ هو تقريب لـ $r$ ، فإن التقريب التالي $x_{n+1}$ يعطى على النحو،

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad f'(x_n) \neq 0$$

يراعى أنه ليس من المضمون أن تكون $x_{n+1}$ لكل تقريباً أفضل لـ $r$ عن $x_n$ لكل $r$. فإذا كانت $x_1$ ، التقريب الأول ليست قريبة بالقدر الكاف من $r$ ، فمن الممكن أن يكون التقريب الثاني $x_2$ أسوأ من $x_1$. وشكل (158) يوضح مثل هذه الحالة. فمن الواضح عند اختيار $x_n$ أن لا يكون $f'(x_n)$ قريبة من صفر. وإلا سيكون المماس $\ell$ تقريباً أفقي.

وسوف نتبع القاعدة التالية عند تطبيق طريقة نيوتن− رافسون،

" إذا كان المطلوب تقريب إلى $k$ من الأعداد العشرية، فإننا نكرر طريقة نيوتن− رافسون إلى أن نجد أن تقريباً متتاليان متساويان تماماً في $k$ من الأعداد العشرية".




شكل (158)

**مثال (23):**

أوجد أكبر جذر موجب للمعادلة،

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

لأربعة أرقام عشرية.

**الحـــــل**

نفرض أن

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

نجد أن

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| $f(x)$ | $-17$ | $-1$ | $3$ | $1$ | 1− | $3$ | $19$ |

وبملاحظة تغيير إشارات $f(x)$ نجد أن للدالة $f(x)$ جذور ثلاثة. الأول يقع في الفترة $(-2,-1)$، والثاني في الفترة $(0,1)$ والأخير في الفترة $(1,2)$

$\therefore$ يوجد جذران موجبان أكبرهما هو الواقع في الفترة $(1,2)$.

وبملاحظة أن $|f(1)|=1$، $|f(2)|=3$، نستنتج أن الجذر الواقع بين 1، 2 أقرب للعدد 1.

نستطيع إذن أن نتخذ

$$x_1 = 1.25$$

ولكن

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

إذن من معادلة نيوتن− رافسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n + 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$= \frac{3x_n^3 - 3x_n - x_n^3 + 3x_n - 1}{3x_n^2 - 3}$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 - 1}{3(x_n^2 - 1)}$$

$$x_2 = \frac{2(1.25)^3 - 1}{3((1.25)^2 - 1)}$$

$$x_2 = 1.7222222$$

ثم

$$x_3 = \frac{2(1.7222222)^3 - 1}{3[(1.7222222)^2 - 1]}$$

$$x_3 = 1.5625908$$

$$x_4 = \frac{2(1.5625908)^3 - 1}{3\left[(1.5625908)^2 - 1\right]}$$

$$x_4 = 1.5330907$$

بالمثل

$$x_5 = 1.5320888$$

$$x_6 = 1.5320888$$

إذن

$$r = 1.5321$$

**مثال (24):**

أوجد تقريبا للجذر الحقيقي للمعادلة

$$x + 1 - 3\cos x = 0$$

**الحـــل**

نفرض أن

$$f(x) = x + 1 - 3\cos x$$

| $x$ | $0$ | $\pi/6$ | $\pi/3$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-2$ | $-1.074$ | $+0.5472$ |

$\therefore$ يوجد جذرين $x = \frac{\pi}{3}$ ، $x = \frac{\pi}{6}$ .

نعتبر،

$$x_1 = \pi/3 = 1.0472$$

$$f'(x) = 1 + 3\sin x$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n + 1 - 3\cos x_n}{1 + 3\sin x_n}$$

$$= \frac{x_n + 3x_n \sin x_n - x_n - 1 + 3\cos x_n}{1 + 3\sin x_n}$$

$$= \frac{3(x_n \sin x_n + \cos x_n) - 1}{3\sin x_n + 1}$$

$$x_2 = \frac{3\left(\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right) - 1}{3\sin\frac{\pi}{3} + 1}$$

$$= \frac{3\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}\right) - 1}{3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}$$

$$x_2 = 0.8951155$$

## تمارين (6−6)

1) أوجد باستعمال طريقة نيوتن− رافسون قيم الجذور مقربة لأقرب 4 علامات عشرية،

$$\sqrt{7}\ ,\ \sqrt{29}\ ,\ \sqrt[3]{5}\ ,\ \sqrt[5]{3}$$

2) قرب إلى أربع أماكن عشرية جذر المعادلة الواقع في الفترة المعطاة.

أ) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 1 = 0 \quad , \quad [1,2]$

ب) $x^4 - 5x^2 + 2x - 5 = 0 \quad , \quad [2,3]$

جـ) $x^5 + x^2 - 9x - 3 = 0 \quad , \quad [-2,-1]$

د) $\sin\theta + \theta\cos\theta = \cos\theta \quad , \quad [0,1]$

3) أوجد أكبر جذر للمعادلة $f(x) = 0$ ،

أ) $f(x) = x^4 - 11x^2 - 44x - 24$

ب) $f(x) = x^3 - 36x - 84$

4) أوجد لرقمين عشريين

أ) جذر المعادلة $x^3 + 5x - 3 = 0$

ب) أكبر جذر للمعادلة $2x^3 - 10x^2 + 11x - 2 = 0$

جـ) الجذر الموجب للمعادلة $\pi - 2x - 3\cos x = 0$

د) جذر المعادلة $\dfrac{\pi}{2} + x - \sin x = 2$

في التمارين من (5) إلى (18) أوجد القيم التقريبية لجميع الجذور الحقيقية للمعادلة مقربة لرقمين عشريين.

5) $x^4 = 240$

6) $x^4 - x - 13 = 0$

7) $20x^2 - 1 = 0$

8) $x^5 - 2x^2 + 4 = 0$

9) $x^3 + 2x^2 - 8x - 3 = 0$

10) $x^3 - 3x - 1 = 0$

11) $2\theta - 5 - \sin\theta = 0$

12) $x^2 - \cos 2x = 0$

13) $x^2 = \sqrt{x+3}$

14) $x^3 + x^2 - 7 = 0$

15) $x^2 + \cos\frac{1}{2}x - 9 = 0$

16) $\sin 2x - 6x + 6 = 0$

17) $\sin^2 x = \frac{1}{4}x^3 + x - 1$

18) $2x^3 + 0.1x^2 + 2x + 0.9 = 0$

## تمارين عامـــة

1) أوجد من التعريف مباشرة المشتقة $f'(x)$

أ) $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+1}$ ب) $f(x)=\sqrt{2-5x}$

2) أوجد المشتقة الأولى

أ) $f(x)=1/\left(x^4-x^2+1\right)$ ب) $f(x)=\sqrt[3]{7x^2-4x+3}$

جـ) $f(x)=\dfrac{6}{\left(3x^2-1\right)^4}$ د) $f(t)=\left(t^2-t^{-2}\right)^{-2}$

هـ) $g(x)=\sqrt[5]{(3x+2)^4}$ و) $f(x)=\left(\dfrac{8x^2-4}{1-9x^3}\right)^4$

ز) $f(x)=\left(x^6+1\right)^5(3x+2)^3$ ح) $f(x)=\left(2x^2-3x+1\right)(9x-1)^4$

ط) $f(x)=6x^2-\dfrac{5}{x}+2x^{-2/3}$ ى) $f(u)=\sqrt{\dfrac{2u-5}{7u-9}}$

3) أوجد النهاية إن وجدت:

أ) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta^2}{\sin\theta}$ ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\sin 2x}{3x}$

جـ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+3x-2}{5x}$ د) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta\sin\theta}{1-\cos\theta}$

4) أوجد المشتقة الأولى

أ) $u(x)=\sqrt{1+\cos 2x}$ ب) $f(x)=\sin^2\left(4x^3\right)$

جـ) $f(x)=(\sec x+\tan x)^5$ د) $f(x)=x^2 \cot x$

هـ) $s(t)=\dfrac{\sin 2t}{1+\cos 2t}$ و) $h(x)=\left(\cos x^{\frac{1}{3}}+\sin^{\frac{1}{3}} x\right)^3$

ز) $f(t)=\dfrac{\csc t+1}{\cot 2t+1}$ ح) $f(x)=\sec 5x \tan 5x \sin 5x$

ط) $f(x)=\tan^4\left(\sqrt[4]{x}\right)$ ى) $y(x)=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

5) بفرض أن المعادلة تعين دالة قابلة لاشتقاق $f$ بحيث $y=f(x)$ أوجد، $y'$

أ) $5x^3+2x^2y+4y^3-7=0$ ب) $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{y}+1}$

جـ) $xy^2=\sin(x+2y)$

6) أوجد معادلة المماس والعمودي لبيان $f$ عند $P$.

$$y=2x-\frac{4}{\sqrt{x}} \quad , \quad P(4,6)$$

7) أوجد نقط المنحنى $y=3x-\cos 2x$ التي عندها المماس عمودي على المستقيم $2x+4y=25$ (الإحداثيات $x$ فقط).

8) أوجد $y'$ ، $y''$ ، $y'''$ ،

أ) $y=5x^3+4\sqrt{x}$ ب) $x^2+4xy-y^2=8$

9) إذا كانت $y=3x^2-7$ فأوجد $dy$ ، $\Delta y$ ، $dy-\Delta y$

10) قيس ضلع مثلث متساوي الأضلاع فوجد 4 سم بخطأ أقصاه $\pm 0.03cm$.
استخدم التفاضلات لإيجاد أقصى خطأ في حساب المساحة وأوجد قيمة تقريبية للخطأ المئوي.

11) إذا كانت $f(x)=2x^3+x^2-x+1$ ، $g(x)=x^5+4x^3+2x$
استعمل التفاضلات لاستنتاج تقريب للتغير في $g(f(x))$ المناظر لتغير $x$ من $-1$ إلى $-1.01$ .

12) إذا كان $f$ ، $g$ تحقق أن $f(2)=-1$ ، $f'(2)=4$ ، $g(2)=-3$ ، $f''(2)=-2$ ، $g'(2)=2$ ، $g''(2)=1$ . أوجد قيمة كل من ما يأتي عند $x=2$ .
$(2f-3g)'$ ، $(2f-3g)''$ ، $(fg)'$ ، $(fg)''$ ، $(f/g)'$ ، $(f/g)''$ .

13) أذكر ما إذا كان بيان $f$ له مماس رأسي أم حافة مدببة
أ) $f(x)=3(x+1)^{\frac{1}{3}}-4$ ب) $f(x)=2(x-8)^{\frac{2}{3}}-1$

14) قانون ستيفان وبولتزمان للطاقة الحرارية المشعة من وحدة مساحات سطح أسود درجة حرارته $T$ هو $R=\sigma T^4$ حيث $R$ معدل الإشعاع من وحدة المساحات ، $k$ مقدار ثابت. إذا كان الخطأ في قياس $T$ هو $0.6\%$ فما هو الخطأ المئوي في قياس $R$ .

15) مخروط دائري قائم ارتفاعه 8 قدم ونصف قطر قاعدته $r$ يتزايد. أوجد معدل تغير مساحة سطحه $S$ بالنسبة إلى $r$ عندما ($r=6$ قدم).

16) حوض مائي طوله 10 متر ومقطعه عبارة عن شبه منحرف متساوي الساقين قاعدته السفلى 3 متر والعليا 5 متر وارتفاعه 2 متر.
فإذا كان الماء يرتفع بمعدل $\frac{1}{48}$ متر/دقيقة عندما كان عمق الماء 1 متر.
أوجد معدل دخول الماء إلى الحوض.

17) استعمل طريقة نيوتن ورافسون يجاد جذر المعادلة $\sin x - x\cos x = 0$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية. علماً بأن الجذر المطلوب يقع بين $\pi$ ، $3\pi/2$ .

18) أوجد النهاية إن وجدت

أ) $\lim_{x\to 3} \frac{5x+11}{\sqrt{x+1}}$ ب) $\lim_{x\to -2} \left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$

جـ) $\lim_{x\to 3/2} \frac{2x^2+x-6}{4x^2-4x-3}$ د) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^2-x-2}$

هـ) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ و) $\lim_{x\to 1/2} \frac{8x^3-1}{2x-1}$

ز) $\lim_{u\to 0} \frac{(a+u)^4-a^4}{u}$ ح) $\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{\frac{x+3}{x^3+27}}$

ط) $\lim_{x\to -\infty} \frac{(2x-5)(3x+7)}{(x-11)(4x+9)}$ ى) $\lim_{x\to -\infty} \frac{6-7x}{(3+2x)^4}$

ك) $\lim_{x\to (2/3)^+} \frac{x^2}{4-9x^2}$ ل) $\lim_{x\to 0^+} \left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

19) ارسم بيان الدالة $f$ واحسب النهايات الآتية

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \text{ ، } \lim_{x\to a^+} f(x) \text{ ، } \lim_{x\to a} f(x)$$

أ) $$f(x)=\begin{cases} 3x & , x\le 2 \\ x^2 & , x>2 \end{cases} \quad , \quad a=2$$

ب) $$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2-3x} & , x<-3 \\ \sqrt[3]{x+2} & , x\ge -3 \end{cases} \quad , \quad a=-3$$

جـ) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & , x<1 \\ 2 & , x=1 \\ 4-x^2 & , x>1 \end{cases} \quad , \quad a=1$$

20) باستعمال التعريف $\in$ ، $\delta$ أثبت أن $\lim_{x\to 6}(5x-21)=9$

21) أوجد الأعداد التي عندها $f$ غير مستمرة.

أ- $f(x)=\dfrac{|x^2-16|}{x^2-16}$ ب- $f(x)=\dfrac{x^2+6x-2}{x^2-2x}$

22) أوجد الأعداد التي عندها $f$ مستمرة.

أ- $f(x)=2x^4-\sqrt{x}+1$ ب- $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-16}$

23) أثبت أن $f$ مستمرة عند $a$ :

$$f(x)=\sqrt{5x+9} \quad , \quad a=8$$

24) أوجد نقط عدم لاستمرار :

أ) $f(x)=\dfrac{2}{x^4-x^3-2x-3}$ ب) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x^2+x-1}$

25) أوجد القيم القصوى للدالة $f$ في الفترة المعطاة

$$f(x)=-x^2+6x-8 \;;\; [1,6]$$

26) أوجد الأعداد الحرجة للدالة $f$ ،

$$f(x)=-(x+2)^3+(3x-1)^4$$

27) استخدم اختبار المشتقة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f$ . ثم أوجد الفترات التي عليها $f$ متزايدة أو متناقصة ووضح بيان $f$ .

أ) $f(x)=-4x^3+9x^2+12x$ ب) $f(x)=(4-x)\;x^{1/3}$

28) استعمال اختبار المشتقة الثانية ما أمكن لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة $f$ . أوجد الفترات التي يكون فيها بيان $f$ مقعر لأعلى أو مقعر لأسفل وأوجد الإحداثي $x$ لنقط الانقلاب . ثم خطط بيان $f$ .

أ) $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$ ب) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

29) إذا كانت $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ ، أوجد القيم القصوى المحلية وخطط بيان $f$ للفترة $0\le x\le 2\pi$.

30) خطط بيان الدالة المستمرة $f$ التي تحقق الشروط الآتية :

$$f(0)=2,\ f(-2)=\ f(2)=0;$$
$$f'(-2)=\ f'(0)=\ f'(2)=0;$$
$$f'(x)>0;(-2<x<0)\ ;$$
$$f'(x)<0;\left(x<-2 \text{ أو } x>0\right)\ ;$$
$$f''(x)>0;\left(x<-1 \text{ أو } 1<x<2\right)\ ;$$
$$f''(x)<0;\left(-1<x<1 \text{ أو } 1>x>2\right)$$

31) القيم القصوى وبيان $f$ :

أ) $f(x)=\dfrac{3x^2}{9x^2-25}$ ب) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-8}{x+3}$

جـ) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+2x-8}$

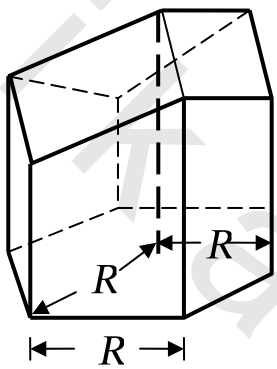
32) إذا كانت $f(x)=x^3+x^2+x+1$ ، أوجد عدد $c$ يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[0,4]$ .

33) منشور مسدس منتظم نصف قطره وحرف قاعدته R ملحوم من أعلى مع

ثلاثة أوجه معينة الشكل متقابلة في رأس مشتركة كما في شكل (159) وقاعدة المنشور مفتوحة ويسع حجم قدره V. بحيث تعطى مساحته السطحية بالعلاقة :

$$S = \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{V}{R} - \frac{3}{2}R^2 \cot\theta + \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2 \csc\theta$$

اثبت أن $S$ تصل نهاية صغرى عندما $\theta = 54.7^\circ$ .




شكل (159): تمرين (33)

34) يرغب رجل لعمل سور حول حقل مستطيل إلى ثلاثة بقاعها مستطيلة بعمل سورين موازيين لأحد الجوانب . فإذا كان قد حصل على 1000 متر سور فما هي الأبعاد اللازمة للحصول على أكبر مساحة .

35) حديقة مستطيلة ومتصلة بعرضيها نصفى دائرتين ومحيطها 880 متراً ما هي الأبعاد التي تجعل مساحة المستطيل أكبر ما يمكن .

36) سلك طوله 5 متر يراد تقسيمه لجزئين احدهما يصنع منه طوق دائري والثاني يصنع منه مربع . أوجد طول كل من الجزئين بشرط أن يكون مجموع مساحتي الدائرة والمربع أ) نهاية عظمى ب) نهاية صغرى.

37) تتحرك نقطة في خط مستقيم بحيث يتحدد موضعها عند أي لحظة $t$ بالعلاقة $x(t) = (t^2 + 3t + 1)/(t^2 + 1)$ ، أوجد السرعة والعجلة عند أيْ لحظة $t$ واشرح حركة النقطة في الفترة $[-2,2]$ .

## أجوبة التمارين العامة

1) أ) $\frac{-4x}{\left(2x^2+1\right)^2}$  ب) $-\frac{5}{2}(2-5x)^{-\frac{1}{2}}$

2) أ) $\frac{2x\left(1-2x^2\right)}{\left(x^4-x^2+1\right)^2}$  ب) $\frac{2(7x)}{3\left(7x^2-4x+3\right)^{2/3}}$

جـ) $\frac{-141x}{\left(3x^2-1\right)^5}$  د) $-\frac{4\left(t+t^{-3}\right)}{\left(t^2-t^{-2}\right)^3}$

هـ) $\frac{12}{5(3x+2)^{1/5}}$  و) $\frac{1024x\left(2x^2-1\right)^3\left(18x^3-27x+4\right)}{\left(1-9x^3\right)^5}$

ز) $3\left(x^6+1\right)^4(3x+2)^2\left(33x^6+20x^5+3\right)$

ح) $(9x-1)^3\left(108x^2-139x+39\right)$

ي) $12x+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{3x^{5/3}}$  ك) $\frac{-53}{2\sqrt{(2u+5)(7u-9)^3}}$

3) أ) $0$  ب) $\frac{2}{3}$  جـ) $\frac{3}{5}$  د) $2$

4) أ) $-\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$  ب) $12x^2\sin 8x^3$

جـ) $5\sec x(\sec x+\tan x)^5$

و) $\frac{\left(\cos\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}\right)\left(\cos\sqrt[3]{x}+\sin\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x^2}}$

ح) $\frac{\csc t(1-\cot t+\csc t)}{(\cot t+1)^2}$  ط) $10\tan 5x\sec^2 5x$

ي) $\frac{\tan^3\left(\sqrt[4]{x}\right)\sec^2\left(\sqrt[4]{x}\right)}{\sqrt[4]{x^3}}$ ك) $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$

5) أ) $\frac{4xy^2-15x^2}{12y^2-4x^2y}$ ب) $\frac{1}{\sqrt{x}\left(3\sqrt{y}+2\right)}$

جـ) $\frac{\cos(x+2y)-y^2}{2xy-2\cos(x+2y)}$

6) $y=\frac{9}{4}x-3\ ;\ y=-\frac{4}{9}x+\frac{70}{9}$

7) $\frac{7\pi}{12}+\pi n\ ,\ \frac{11\pi}{12}+\pi n$

8) أ) $15x^2+\frac{2}{\sqrt{x}}\ ;\ 30x-\frac{1}{\sqrt{x^3}}\ ;\ 30+\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

ب) $y'=\frac{x+2y}{y-2x}\ ,\ y''=\frac{5\left(y^2-4xy-x^2\right)}{(y-2x)^3}=-\frac{40}{(y-2x)^3}$

$y'''=\frac{600x}{(y-2x)^5}$

9) $6x\Delta x+3(\Delta x)^2$ ، $6xdx$ ، $-3(\Delta x)^2$

10) $\pm 0.06\sqrt{3}\approx \pm 0.104cm^2$ ، $\neq 1.5\%$

11) $-0.57$

12) $2$ ، $-7$ ، $-14$ ، $21$ ، $-\frac{10}{9}$ ، $-\frac{19}{27}$

13) أ) مماس رأسي عند $(-1,-4)$ ب) حافة مدببة عند $(8,-1)$

14) $2.4\%$

15) $\frac{5}{6}\ ft^3/\min$

16) $\frac{5}{6}m^3/\min$

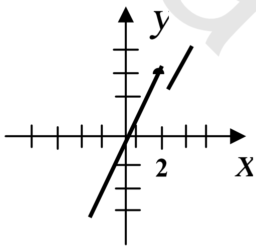
17) 4.493

18) أ) 13 ب) $-4-\sqrt{14}$ جـ) $\frac{7}{8}$ د) $\frac{32}{3}$

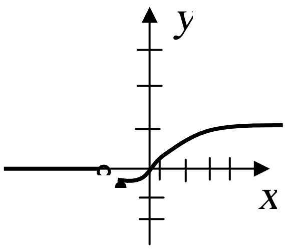
هـ) $\infty$ و) 3 ز) $4a^3$ ح) $\frac{1}{3}$

ط) $\frac{3}{2}$ ي) 0 ك) $-\infty$ ل) $-\infty$

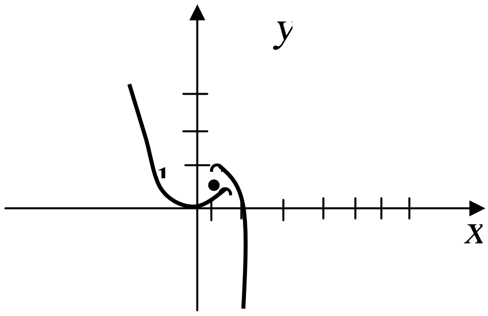
19) أ) 6، 4 ، غير موجودة




ب) $\frac{1}{11}$ ، $-1$ ، غير موجودة




جـ) 1 ، 3 غير موجودة



21) أ) $\pm 4$ ب) $0,2$

22) أ) $R$ ب) $[-3,-2)\cup(-2,2)\cup(2,3]$

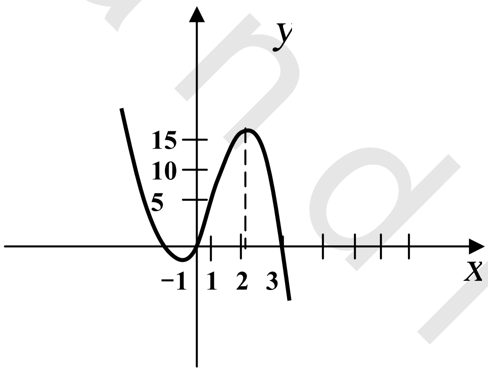
24) أ) $-0.874,1.941$ ب) $-1.618,0.618$

25) عظمى : $f(3)=1$ ، صغرى : $f(6)=-8$

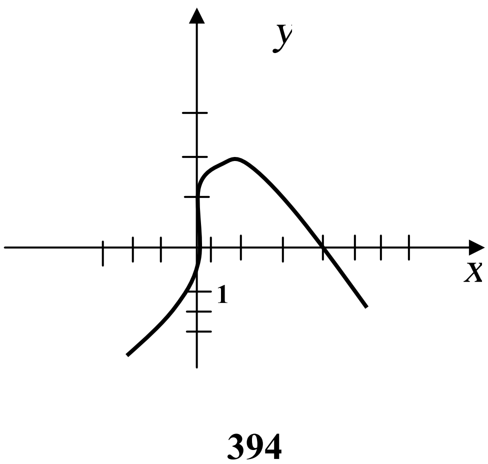
26) $-2$ ، $-1$ ، $\frac{1}{3}$

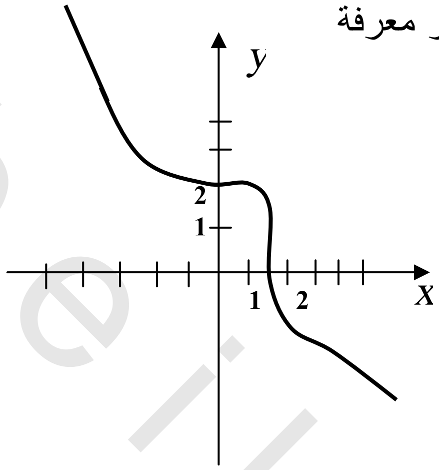
27) أ) عظمى : $f(2)=28$ ، صغرى : $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{13}{4}$

متزايدة على $\left[-\frac{1}{2},2\right]$ ، متناقصة على $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[2,\infty)$

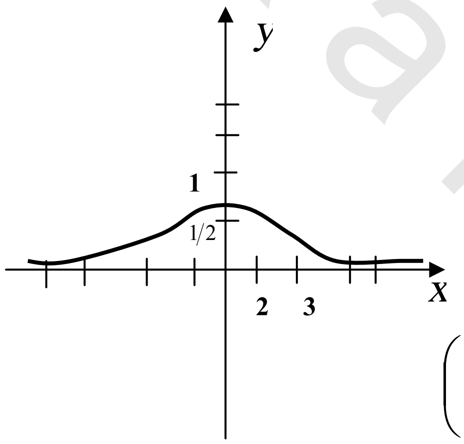



ب) عظمى: $f(1)=3$ ، متزايدة على $(-\infty,1]$، متناقصة على $[1,\infty)$

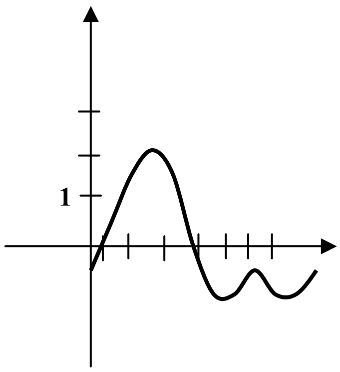





28) أ) بما أن $f''(0)=0$ ، $f''(2)$ غير معرفة
استعمل اختبار المشتقة الأولى
لتريك أنه لا يوجد قيم قصوى ،
مقعر لأعلى على $(-\infty,0)$
و $(2,\infty)$ ، مقعر لأسفل
على $(0,2)$ ، الإحداثيات
$x$ لنقط الانقلاب هي 0 و 2.

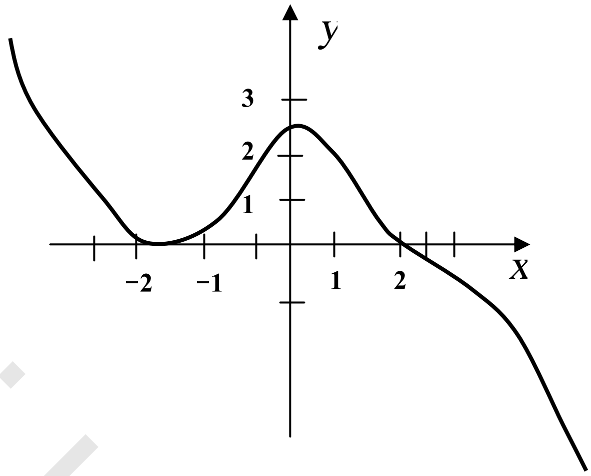



ب) بما أن $f''(0)-2<0$
، عظمى $\to f(0)=1$
التقعر لأعلى على $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
وعلى $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3},\infty\right)$
– التقعر لأسفل على $\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3},\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)$
– الإحداثيات $x$ لنقط الانقلاب هي $\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$

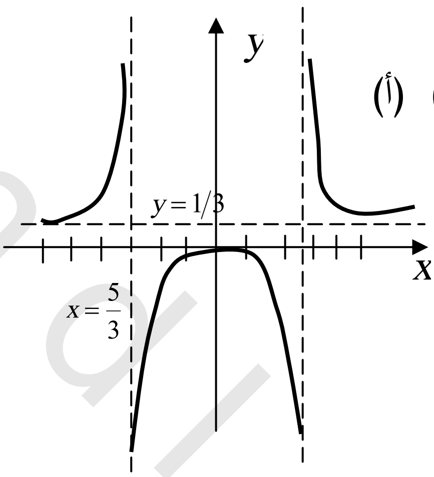



29) عظمى : $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ ، $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$
صغرى : $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=-\frac{3}{2}$

(30

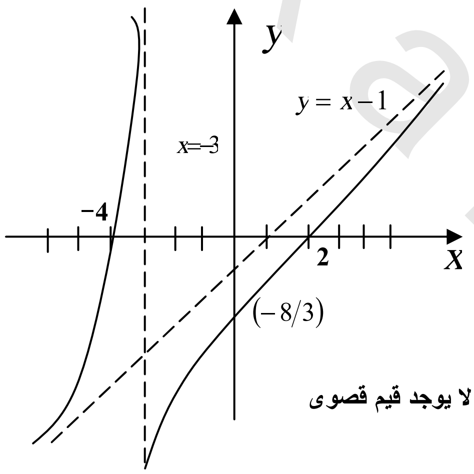



(31 (أ)



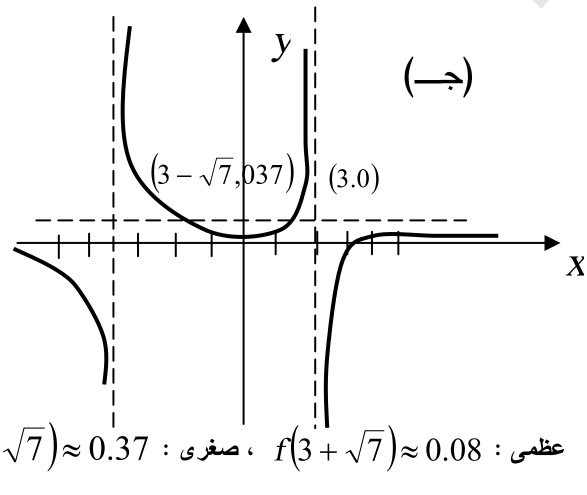

عظمى : $f(0)=0$

(ب)




لا يوجد قيم قصوى

(جـ)




عظمى : $f\left(3+\sqrt{7}\right)\approx 0.08$ ، صغرى : $f\left(3-\sqrt{7}\right)\approx 0.37$

32) 2.27

34) 125 متر×250 متر

35) نصف قطر نصف الدائرة $\frac{220}{\pi}m$ وطول المستطيل $220m$.

36) أ) استعمل كل السلك للدائرة

ب) استعمل طول $\frac{5\pi}{4+\pi}=2.2$ قدم للدائرة والباقي للمربع.

37) $v(t)=\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$ ، $a(t)=\frac{6t(t^2-3)}{(1+t^2)^3}$ ، الحركة لليسار على $[-2,-1)$ إلى اليمين على $(-1,1)$ وإلى اليسار في $(1,2]$.