الباب الرابع

مشتقات الدوال المثلثية

في هذا الباب سوف نفحص النهايات التي تحتوى على دوال مثلثية ومشتقات هذه الدوال وعندما نناقش نهاية تحتوى على نسبة مثلثية مثل $\sin x$، $\cos t$، $\tan\theta$، وهكذا سوف نفترض دائماً أن المتغير x، t أو θ هو زاوية مقاسة بالتقدير الدائري. ولسوف الآن بعض مبرهنات الدوال المثلثية الهامة.

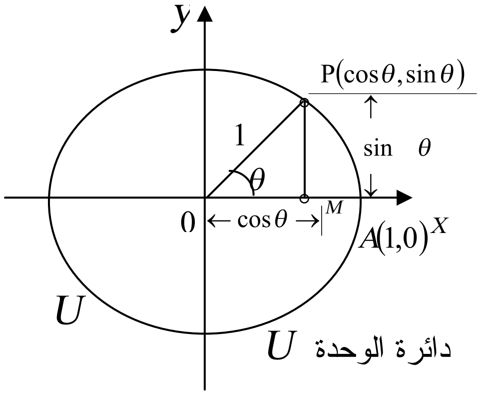
<u>بند 4−1 نهايات الدوال المثلثية.</u>

مبرهنة 1

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1 \quad ، \quad \lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0$$

<u>البرهان</u>

لنعتبر دائرة الوحدة U كما في شكل (86) والزاوية θ في وضعها القياسي المحصورة بين الراسم OP والمحور x موجبة عندما ندور من x عكس عقارب الساعة.



شكل (86)

ومن تعريف الجيب وجيب التمام

(الجيب = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ ، وجيب التمام= $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ وينتج أن

المقابل = الوتر جا θ= جا θ أيْ $\sin\theta$

والمجاور = الوتر جتا θ= جتا θ أيْ $\cos\theta$) نجد أن إحداثي النقطة P هما $(\cos\theta, \sin\theta)$، ويتضح أن إذا $\theta \to 0$ فإن $\sin\theta \to 0$ و $\cos\theta \to 1$

ولبرهان النهايتين، نقول إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ فإن، $0 < \mathrm{MP} < \mathrm{A\widehat{P}}$ حيث MP طول القطعة المستقيمة PM، $\mathrm{A\widehat{P}}$ طول القوس الدائري من A إلى P.

من تعريف الزاوية بالتقدير الدائري،

$$\theta = \frac{\text{طول القوس}}{\text{نصف القطر}}$$

$$= \frac{\mathrm{A\widehat{P}}}{1}$$

أيْ $\mathrm{A\widehat{P}} = \theta$

إذن $0 < \sin\theta < \theta$

يتبع من مبرهنة السندوتش (الانحصار) أن

لما $\theta \to 0$، $0 < \sin\theta < 0$ أيْ

$$\lim_{\theta\to 0} \sin\theta = 0$$

وهو أول مطلوب، كذلك

$$\lim_{\theta\to 0} \cos\theta = \lim_{\theta\to 0} \sqrt{1-\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{1-0} = 1$$

انتهى البرهان.

مبرهنة (2)

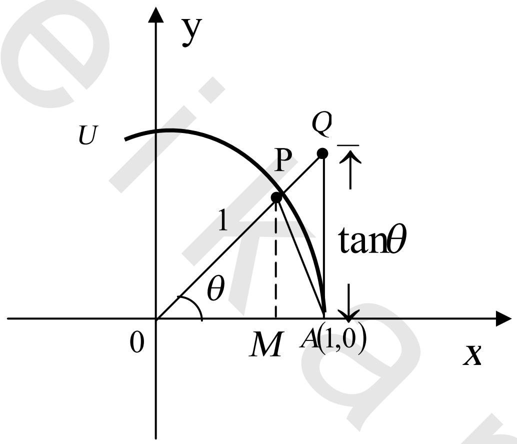
$$\boxed{\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$

<u>**البرهان**</u>

بالرجوع إلى شكل (87) حيث U هي دائرة الوحدة، وبفحص المثلث OAQ، ومن تعريف الظل = $\dfrac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$$\tan\theta = \frac{QA}{oA} = \frac{QA}{1}$$

$$\Rightarrow QA = \tan\theta$$



شكل (87)

ومما سبق،

$$MP = \sin\theta$$

ونلاحظ من الرسم

مساحة المثلث AQQ > مساحة القطاع POA > مساحة المثلث AOP

ولكن من هندسة الشكل،

$$\Delta AOP = \frac{1}{2} OA \times PM = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\Delta AOP = \frac{1}{2} OA \times AQ = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

AOP مساحة القطاع الدائري $= \dfrac{1}{2} r^2\theta = \dfrac{1}{2}\theta$

إذن $\quad \div \sin\theta \neq 0 \quad \dfrac{1}{2}\sin\theta < \theta < \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

أو $1 < \frac{\sin\theta}{\theta} < \cos\theta$

وحيث أن $\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$ ، فإن عندما $\theta \to 0$

$$1 < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

أيْ أن

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

انتهى البرهان

مبرهنة (3)

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0}$$

<u>البرهان</u>

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)}{\theta}\cdot\frac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= 1\cdot\frac{0}{1+1} = 0$$

مثال (1)

أوجد النهايات الآتية :

1) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta}$ 2) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{4\theta}$

3) $\lim_{x\to 0}\frac{2x+3-3\cos x}{4x}$ 4) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

الحـــل:

1)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{5}{2}\frac{\sin(5\theta)}{(5\theta)}$$
$$=\frac{5}{2}\lim_{5\theta\to 0}\frac{\sin 5\theta}{5\theta}$$
$$=\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{2}$$

2)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{4\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$
$$=\frac{1}{4}\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

3)
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+3-3\cos x}{4x}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(2+\frac{3(1-\cos x)}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(2+3\times 0)=\frac{1}{2}$$

4)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=(1)^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

مثال (4) أوجد النهايات

1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\pi/2}$ 　　　　 2) $\displaystyle\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta^3 \sin\theta}{\sin^4\theta}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\cos x}{x^2+1}$ 　　　　 4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\csc x}{x^2+1}$

الحـــــل:

1) بوضع $x-\dfrac{\pi}{2}=t$ ، $t\to 0 \Leftarrow x\to\dfrac{\pi}{2}$

، $x=t+\dfrac{\pi}{2}$ إذن،

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{t}$$

$\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ زاويتها منسوبة إلى $\dfrac{\pi}{2}$ تتحول إلى $\sin t$ ولكن $t+\dfrac{\pi}{2}$ في الربع الثاني $\cos\theta$ سالب

$$\therefore\ \cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin t$$

النهاية $= \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t} = -1$

2)
$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3\tan\theta}{\sin^4\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3\sin\theta}{\sin^4\theta\cos\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta^3}{\sin^3\theta\cos\theta}$$

$$= \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\theta}{\sin\theta} \right)^3 \cdot \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 1^3 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

(3
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2\cos x}{x^2 + 1} = \frac{0 + 2(1)}{0 + 1} = 2$$

(4
$$\lim_{x \to 0} \frac{x \csc x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \frac{1}{\sin x}}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)}{\lim_{x \to 0} \left(x^2 + 1 \right)} = \frac{1}{0 + 1}$$

$$= 1$$

مثال (5)

أوجد
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x}$$

الحـــــل:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x} = \frac{0}{0}$$ (غير معينة)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x} \cdot \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)}{x}$$

النهاية الأولى نجد أن بوضع

$$u=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$$

فإن

$$\lim_{x\to 0} \ u=0$$

أيْ $x\to 0$ تؤدي إلى $u\to 0$

$$\lim_{u\to 0} \ \frac{\sin u}{u}=1$$

والنهاية الثانية، نضرب في المرافق،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0} \ \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}\cdot\lim_{x\to 0} \ \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}=1$$

إذن

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}=1\times 1=1$$

تمارين (4−1)

في التمارين من (1) إلى (38) أوجد النهاية إذا كانت موجودة.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt[3]{x}}$

(3) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin^3\theta}{(2\theta)^3}$

(4) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t+\sin 2t}{t}$

(5) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\theta\sin\theta}{\tan^2\theta}$

(6) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos 3t}{t}$

(7) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{3\cos-3}{\theta^2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x+\cos x}$

(9) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t\sin 7t}{\cos t\tan 14t}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x^2+x^3}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(12) $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{4u^2+3u\sin u}{u^2}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-2x^2-2\cos x+\cos x^2}{x^2}$

(14) $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{x\cos x-x^2}{2x}$

(15) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$

(16) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$

(17) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{\sin t}$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{2}x}{x}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\tan x}{\sin x}$

(20) $\lim\limits_{t\to 0} t\cot t$

(21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\csc 3x}{\cot 7x}$

(22) $\lim\limits_{\eta\to 0} \eta^2 \csc \eta^2$

(23) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)}{x}$

(24) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(25) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} \dfrac{\sin(3x-2)}{6x-4}$

(26) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x-\pi}$

(27) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin\left(x^2-5x+6\right)}{x^2-2x}$

(28) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1-\cos(x+1)}{x^2-3x+2}$

(29) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sin\left(\sqrt{x-2}-1\right)}{(x-3)}$

(30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x}$

(31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sin^2 x}{4\tan^2 x}$

(32) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x+\sin 2x}{3x}$

(33) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x+3x-2}{5x}$

(34) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+1-\cos^2 x}{\sin^2 x}$

(35) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$

(36) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-1}{2x^2}$

(37) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sec x-1}{x^2}$

(38) $\lim\limits_{x\to 0} x(\csc x-1)$

(39)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)}{2x-3} & , x<3/2 \\ \pi/2 & , x=\pi/2 \\ \dfrac{\sin\left\{\dfrac{\pi}{2}(2x-3)\right\}}{2x-3} & , x>3/2 \end{cases}$$

عند النقطة $x=\dfrac{\pi}{2}$.

بند 4−2 : تفاضل الدوال المثلثية

الآن نستطيع إنشاء المعادلات الخاصة بتفاضل الدوال المثلثية حيث نحتاج زيادة على مبرهنات البند السابق أن نسترجع بعض المعطيات المثلثية الهامة. ومن المتطابقات التي استخدمناها في البند السابق مجموعات هما.

<u>المجموعة الأولى</u>: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ، $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ ،

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ ، } \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

<u>والمجموعة الثانية</u>: $1+\tan^2 x = \sec^2 x$,

$$1+\cot^2 x = \csc^2 x \ ,$$

ونضيف الآن متطابقات الزاوية المركبة من مجموع أو فرق بين زاويتين

<u>المجموعة الثالثة</u>: $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

وبوضع $A = B = \theta$ نحصل على

<u>المجموعة الرابعة</u>: $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

أو $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

أو $\cos 2\theta = 1 - \sin^2\theta$

ويمكن كتابة المتطابقة الأخيرتين في صورتين هامتين

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \text{ ، } \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

وسوف نبرهن الآن في المبرهنة الآتية

مبرهنة : (مشتقات الدوال المثلثية)

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x,$$
$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\csc x)=-\csc x\cot x,$$
$$\frac{d}{dx}(\tan x)=-\sec^2 x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\cot x)=-\csc^2 x,$$

البرهان

من التعريف

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

نجد أن،

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x)&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\sin x\frac{(\cos h-1)}{h}+\cos x\frac{\sin h}{h}\\&=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\&=\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\end{aligned}$$

إذن $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$

وبنفس الطريقة،

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\cosh+\sin x\sinh-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos x\left(\frac{\cosh-1}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sinh}{h}\right)$$

$$=\sin x\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}+\cos x\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}$$

$$=\cos x(0)-\sin x(1)$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

وكذلك

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos}\right)$$

$$=\frac{\cos x(\cos x)-\sin x(\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\sec^2 x$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\tan x)=-\sec^2 x$$

ولإيجاد مشتقة قاطع الزاوية، نكتب أولاً

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{-1}{\cos^2 x}\cdot(-\sin x)$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

إذن

$$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$$

وبنفس الطريقة

$$\frac{d}{dx}(\csc x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot\cos x$$

$$=-\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$=-\csc x\ \cot x$$

وكذلك

$$\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

انتهى البرهان.

مثال (6)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $y=\frac{\cos\sqrt{x}}{1+\sin x}$

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}\left(\cos\sqrt{x}\right)-(1+\sin x)\frac{d}{dx}\left(\cos\sqrt{x}\right)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{(1+\sin x)\left[-\sin x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]-\cos\sqrt{x}[\cos x]}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sin x\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\cos\sqrt{x}\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\left(\sin x+\sin x\sin\sqrt{x}+\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cos x\right)}{2\sqrt{x}(1+\sin x)^2}$$

مثال (7)

أوجد $\frac{dy}{dx}$ ، $y=\sec x(1+\tan x)^{1/2}$

الحـــل:

$$\frac{dy}{dx}=\sec x\left[\frac{1}{2\sqrt{1+\tan x}}\cdot\sec^2 x\right]+\sqrt{1+\tan x}\cdot\sec x\tan x$$

$$=\frac{\sec x}{2\sqrt{1+\tan x}}\left(\sec^2 x+2(1+\tan x)\tan x\right)$$

$$=\frac{\sec x\left(1+2\tan x+3\tan^2 x\right)}{2\sqrt{1+\tan x}}$$

مثال (8)

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ ، $y=\sin(x\cos x)+\sin x\cos x\tan^2 x$

الحـــــل:

$$\frac{dy}{dx}=\cos(x\cos x)[x(-\sin x)+\cos x]$$
$$+(\ \sin x\cos x+x\cos x\cos x+x\sin x(-\sin x))+\sec^2(x^2)\cdot 2x$$
$$\frac{dy}{dx}=(\cos x-x\sin x)\cos(x\cos x)+x(\cos^2 x-\sin^2 x)$$
$$+\sin x\cos x+2x\sec^2 x(x^2)$$

مثال (9)

إذا كان $y=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{x+y\sin x}{y+x\sin y}\right)$

أوجد معادلة المماس عند النقطة $P\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

الحـــــل:

يفضل ضرب الطرفين والوسطين لنحصل على

$$y^2+yx\sin y=\frac{\pi}{2}(x+y\sin y)\quad , \quad y+x\sin y\neq 0$$

أيْ $x\neq 0\ ,\ \ y\neq 0$

فاضل بالنسبة إلى x ،

$$2yy'+y'x\sin y+y\sin y+yx\cos y\cdot y'=\frac{\pi}{2}(1+y'\sin x+y\cos x)$$

جمع في الطرف الأيسر،

$$y'\left[2y + x\sin y + yx\cos y - \frac{\pi}{2}\sin x\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}(1 + y\cos x) - y\sin y$$

$$y' = \frac{\frac{\pi}{2}(1 + y\cos x)y\sin y}{2y + x\sin y + xy\cos y - \frac{\pi}{2}\sin x}$$

وميل المماس عند $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ هو

$$m = y'\Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\frac{\pi}{2}(1+0) - \frac{\pi}{2}(1)}{\pi + \frac{\pi}{2}(1) + \frac{\pi}{2}(1+0)}$$

$$= \frac{0}{\pi} = 0$$

$\therefore$ المماس يوازي المحور x ومعادلته، $y = \frac{\pi}{2}$

مثال (10)

أوجد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}$ ، $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{\theta=\pi/2}$

$$x = \theta - \sin\theta \quad ، \quad y = \theta^2 + 2\cos\theta$$

الحـــل:

$$\dot{x} = 1 - \cos\theta \quad , \quad \dot{y} = 2\theta - 2\sin\theta$$

$$\ddot{x} = \sin\theta \quad , \quad \ddot{y} = 2 + 2\cos\theta$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2(\theta - \sin\theta)}{1 - \cos\theta}$$

$$y'\bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{1 - 0} = \pi$$

$$(y')^{\cdot} = 2\frac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta) - (\theta - \sin\theta)\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2}$$

$$(y')^{\cdot} = 2\frac{(1 - \cos\theta)^2 - \sin\theta(\theta - \sin\theta)}{(1 - \cos\theta)^2}$$

$$y'' = \frac{(y')^{\cdot}}{\dot{x}}$$

$$y''^{\cdot} = 2\frac{(1 - \cos\theta)^2 - \sin\theta(\theta - \sin\theta)}{(1 - \cos\theta)^3}$$

$$y''\bigg|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 2\frac{(1 - 0)^2 - 1\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{(1 - 0)^3}$$

$$= 2\frac{1 - \frac{\pi}{2} + 1}{1}$$

$$= 4 - \pi$$

تمارين (2−3)

اوجد المشتقة الأولى في التمارين من (1) إلى (53):

1) $f(x)=4\cos x$

2) $H(t)=7\tan t$

3) $G(v)=5v\csc v$

4) $f(x)=x\sin x$

5) $f(x)=x-x^2\cos x$

6) $y(x)=x^2-x\sin x$

7) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

8) $g(t)=\dfrac{1-\cos t}{t}$

9) $g(t)=t^4\sin t$

10) $f(x)=x^2\sec x$

11) $u(\theta)=2\theta\cot\theta+\theta^2\tan\theta$

12) $R(\alpha)=3\alpha^2\sec\alpha-\alpha^3\tan\alpha$

13) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$

14) $R(\beta)=\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$

15) $g(x)=\dfrac{1}{\sin x\tan x}$

16) $k(u)=\dfrac{1}{\cos u\cot u}$

$$g(x)=(x+\csc x)\cot x \quad (17$$

$$k(\phi)=(\sin\phi+\cos\phi)^2 \quad (18$$

$$f(r)=\frac{\tan r}{1+r^2} \quad (19$$

$$k(\theta)=\frac{1+\sec\theta}{1-\sec\theta} \quad (20$$

$$u(t)=\frac{\csc t}{\sec t} \quad (21$$

$$H(x)=(\cot x+\csc x)(\tan x-\sin x) \quad (22$$

$$f(z)=\frac{1+\sec z}{\tan z+\sin z} \quad (23$$

$$H(\theta)=\cos^5 3\theta \quad (24$$

$$g(x)=\sin^4\left(x^3\right) \quad (25$$

$$g(z)=\sec(2z+1)^2 \quad (26$$

$$k(t)=\csc\left(t^2+4\right) \quad (27$$

$$y(x)=\cot\left(x^3-2x\right) \quad (28$$

$$f(x)=\tan\left(2x^2+3\right) \quad (29$$

$$f(x)=\cos\left(3x^2\right)+\cos^2(3x) \quad (30$$

$$g(\omega)=\tan^3 6\omega \quad (31$$

$$F(x)=\csc^2 2s \quad (32$$

$$M(t)=\sec\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad (33$$

$$y(x)=x^2\cot 3x \quad (34$$

$$f(x)=x\csc\left(x^2\right) \quad (35$$

36) $h(\theta)=\tan^3\theta\sec^2\theta$

37) $H(u)=u^2\sec^3 4u$

38) $N(x)=(\sin 5x-\cos 5x)^5$

39) $f(x)=\cot^3(2x+1)$

40) $g(x)=\sin(2x+3)^4$

41) $f(x)=\dfrac{\cos 4x}{1-\sin 4x}$

42) $f(x)=\left(\tan^3 3x-\sec^3 3x\right)$

43) $h(\phi)=(\tan 2\phi-\sec 2\phi)$

44) $f(x)=\sin\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}$

45) $f(x)=\tan\sqrt[3]{3-8x}$

46) $r(t)=\sqrt{\sin 2t-\cos 2t}$

47) $h(\phi)=\dfrac{\cot 4\phi}{\sqrt{\phi^2+4}}$

48) $g(x)=\sqrt{x^2+1}\tan\sqrt{x^2+1}$

49) $M(x)=\sec\sqrt{x}+\sqrt{4x+1}$

50) $h(x)=\sqrt{4+\csc^2 3x}$

51) $f(t)=\sin^2 2t\sqrt{\cos 2t}$

52) $y(x)=3x+\sin 3x$

53) $f(x)=\sin^3\sqrt{x}$

من (54) إلى (61) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

54) $\sin^2 3y=x+y-1$

55) $x = \sin(xy)$

56) $y = \csc(xy)$

57) $y^2 + 1 = x^2 \sec y$

58) $y^2 = x \cos y$

59) $xy = \tan y$

60) $x^2 + \sqrt{\sin y} - y^2 = 1$

61) $\cos\sqrt{y} - 4x = 2y$

62) أوجد معادلة المماس والعمودي للمنحنى

$4y^4 + 4x - x^2 \sin y - 4 = 0$ عند النقطة $P(1,0)$

63) إذا كان $y = x^2 \sin y$ أثبت أن $y' = \dfrac{2x\sin y}{1 - x^2 \cos y}$

64) إذا كان $y = u \sin u$ ، $u = x^3$ أوجد $\dfrac{dy}{dx}$.

65) إذا كان $f(x) = \cos 2x + 2\cos x \ , \ 0 \le x \le 2\pi$

أوجد النقط التي عندها المماس أفقياً.

66) إذا كان $y = \tan^3 4x$ أثبت أن $y' = 12\left(y^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right)$

67) أوجد معادلة المماس والعمودي لمنحنى الدالة f عند $P\left(\dfrac{\pi}{4}, f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

أ) $f(x) = \sec x$

ب) $f(x) = \csc x + \cot x$

68) أوجد النقط التي يكون عندها مماس $gr(f)$ أفقياً

أ) $f(x) = \cos x + \sin x \ , \ 0 \le x \le 2\pi$

ب) $f(x)=\cos x-\sin x\ ,\ 0\le x\le 2\pi$

جـ) $f(x)=\csc x+\sec x\ ,\ 0< x<\dfrac{\pi}{2}$

د) $f(x)=2\sec x-\tan x\ ,\ -\dfrac{\pi}{2}< x<\dfrac{\pi}{2}$

هـ) $f(x)=x+2\cos x$

و) $f(x)=x+\sin x$

69) أوجد معادلة المماس والعمودي على C عند $t=\dfrac{\pi}{2}$

أ) $C:\ \ x=2\sin t\ ,\ y=3\cos t\ ,\ 0\le t\le 2\pi$

ب) $C:\ x=\cos t-2\ ,\ y=\sin t+3\ ,\ 0\le t\le 2\pi$

جـ) $C:\ \ x=\cos^3 t\ ,\ y=\sin^3 t\ ,\ 0\le t\le 2\pi$

د) $C:\ \ x=t-\cos t\ ,\ y=t\sin t\ ,\ t\in R$