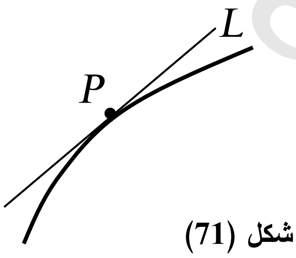
الباب الثالث

المشتقة

بند 3−1 : المماسات ومعدلات التغير

Tangents and Rates of change

أولاً: الخط المماس Tangent line

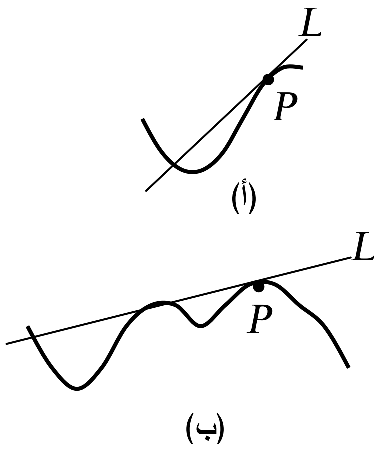


شكل (71)

قد يعرف البعض الخط المماس لمنحنى على أنه الخط المستقيم الذي يقطع المنحنى في نقطة واحدة p كما في شكل (71) إلا أن هذا التعريف ليس مفيداً لجميع بيانات الدوال. لأن المستقيم قد يمس $gr(f)$ عند نقطة معزولة p ثم يعود فيقطع المنحنى أو يمسه مرة أخرى كما في شكل (72) لذلك نجد من الأفضل تعريف ميل المماس عند p ثم إذا أوجدنا الميل m أمكننا إيجاد معادلة المماس L باستعمال معادلة ،

$y - y_1 = m(x - x_1)$ حيث (x_1, y_1)

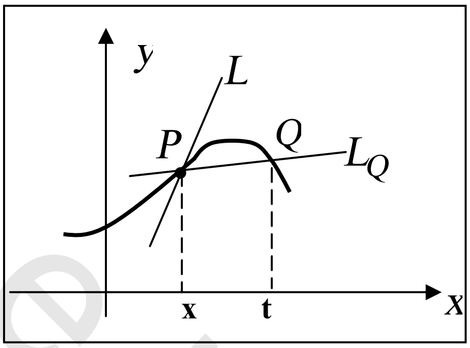
إحداثيا p ، m ميل المماس عندها.



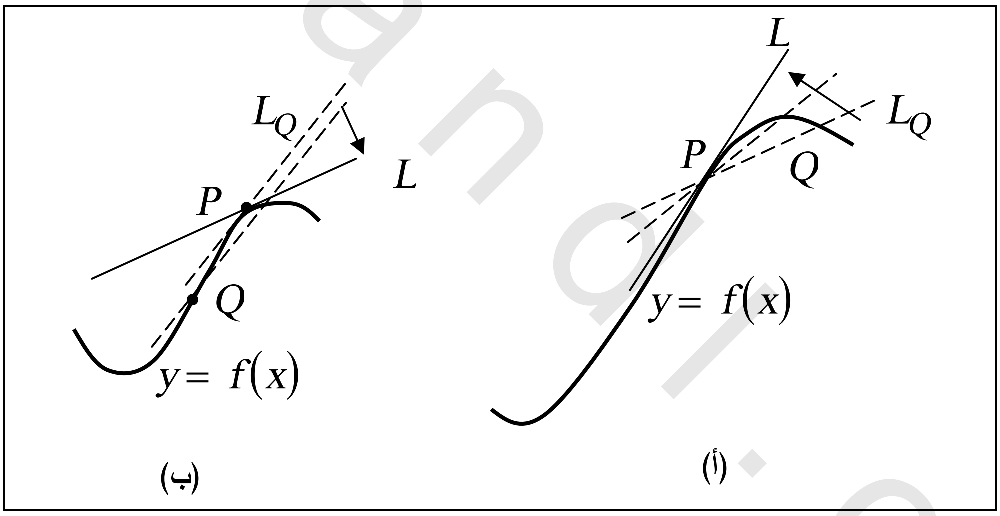
شكل (72)

لنفرض أن $p(x, f(x))$ على بيان f والمطلوب إيجاد ميل المماس عند p .

نختار نقطة أخرى $Q(t, f(t))$ (انظر شكل (73)) ونرمز للقاطع PQ بالرمز L_Q وميل L_Q بالرمز m_Q وميل المماس عند $p(x, f(x))$ بالرمز m. عندما تكون Q قريبة جداً من p يصبح m_Q هو تقريب لقيمة m وكلما اقتربت Q من P أكثر كلما تحسن هذا التقريب فإذا جعلنا Q تقترب من p من اليمين نحصل على الوضع المبين في شكل (74)



شكل (73)



شكل (74)

حيث توضح الخطوط المتقطعة أوضاع L_Q أثناء اقتراب Q من P وفي الشكل (74ب) نقرب Q من P من جهة اليسار أو قد نجعل Q تقترب من P من الجهتين. أي بأخذ نقط على المنحنى احدها على اليمين والأخر على اليسار من P.

إذا كان M_Q لها قيمة تنتهي إليها عندما تصبح Q أقرب ما يمكن من P،
فإن هذه القيمة هي ميل المماس L. لنكتب الآن ما شرحناه بالمعادلات،

$$M_Q = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}$$

ونلاحظ أنه لكي يكون هناك قاطع يجب أن تختلف Q و P.
أي أن $t \neq x$. إذا كانت f مستمرة عند x ، نستطيع أن نجعل $Q(t, f(t))$ تقترب من $p(x, f(x))$ يجعل t تقترب من x. وهذا يؤدي إلى تعريف ميل المماس m للمستقيم L عند $P(x, f(x))$:

$$M = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t \to x}$$

شريطة أن تكون النهاية موجودة.

ويمكن كتابة هذا التعريف بطريقة أخرى أكثر شيوعا، فإذا وضعنا $t - x = h$ أو $t = x + h$ وعندما $t \to x$ فإن $h \to o$ وتصبح المعادلة،

$$m = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال (1):

إذا كانت $f(x) = x^2$ ، c عدد حقيقي

أ) أوجد ميل المماس لبيان f عند $x = c$ وعند $x = -2$

ب) أوجد معادلة المماس عند $p(-2,4)$

الحـــل:

أ) $$m = \lim_{h \to o} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

عند $x = c$

$$m(c)=\lim_{h\to o}\frac{(c+h)^2-c^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to o}\frac{c^2+2ch+h^2-c^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to o}\frac{2ch+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to o}(2c+h)=2c$$

ب) عند $x=-2$ أي $c=-2$

$$m(-2)=2(-2)=-4$$

إذا معادلة المماس

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-4=-4(x+2)$$
$$4x+y+4=0$$

ثانياً : معدل التغير

إذا كانت f دالة في x فإنه كلما تغيرت x تتغير $f(x)$ ولو أن $y=f(x)$ فإن أي تغير في x يناظره تغير في y. فإذا تغيرت x من a إلى b فإن التغير في x هو $\Delta x=b-a$

والتغير المناظر في y هو $\Delta y=f(b)-f(a)$

والنسبة بين التغير في y نتيجة تغير x ، أيْ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

هي متوسط معدل تغير y بالنسبة إلى x خلال الفترة (a,b) وإذا رمزنا لمتوسط معدل التغير بالرمز y'_{av} ، نكتب

$$y'_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

إذا كان التغير في x صغير نسبياً وقدره h أيْ أن x تغيرت من a إلى $a+h$ فإن $\Delta x = h$،

$$y'_{av} = \frac{f(a+b) - f(a)}{h}$$

إذا كانت h تقترب من الصفر، أيْ التغير في x ضئيل جداً فإن معدل التغير يسمى معدل التغير اللحظي عند $x = a$ ويرمز له $y'(a)$

أيْ أن $$y'_{av} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+b) - f(a)}{h}$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

وفي الحالة الخاصة التي تكون x الزمن t، y تمثل موضع نقطة على المحور x أيْ $x = t$، $y = s(t)$

فإن السرعة المتوسطة v_{av}، هي متوسط معدل تغير s بالنسبة للزمن t في فترة زمنية معلومة.

والسرعة اللحظية v أيْ السرعة عند لحظة معينة t هي معدل التغير اللحظي للموضع s بالنسبة للزمن.

$$t \in (a, a+h) \quad , \quad \upsilon_{av} = \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$ (السرعة المتوسطة)

، $$\upsilon(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$ (السرعة اللحظية)

مثال (2):

سقط جسيم من ارتفاع 512 مترا عن سطح الأرض بحيث يعطى ارتفاعه عن سطح الأرض $s(t)$ عند زمن t ثانية بالقانون،

$$s(t)=512-16t^2$$

أوجد أ) سرعة الجسيم عن ثانية.

ب) سرعة الجسيم عند إرتطامه بالأرض.

جـ) متوسط سرعة الجسيم خلال حركته.

الحـــــل:

$$\upsilon(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

أ) وعندما $t=2$

$$\upsilon(2)=\lim_{h\to 0}\frac{s(2+h)-s(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(512-16(2+h)^2\right)-\left(512-16(2)^2\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{512-16\left(4+4h+h^2\right)-512+64}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-64h-16h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}(-64h-16h)$$

$\upsilon(2)=-64$ m/s (متر / ثانية)

ب) يرتطم الجسم بالأرض عندما $s(t)=0$ أ،

$$-16t^2+512=0\Rightarrow t=4\sqrt{2}\ s$$

$$\upsilon\left(4\sqrt{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{s\left(4\sqrt{2}+h\right)-s\left(4\sqrt{2}\right)}{h}$$

$$\upsilon\left(4\sqrt{2}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[-16\left(4\sqrt{2}+h\right)^2+512\right]-\left[-16\left(4\sqrt{2}\right)^2+512\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-16\left[\left(4\sqrt{2}+h\right)^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-16\left[4\sqrt{2}+h-4\sqrt{2}\right]\left[4\sqrt{2}+h+4\sqrt{2}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-16 \;\; h\left(8\sqrt{2}+h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \;\; -16 \;\; h\left(8\sqrt{2}+h\right)$$

$$\upsilon\left(4\sqrt{2}\right) = -128\sqrt{2} \cong -181 \quad m/s$$

جــ) السرعة المتوسطة خلال الفترة من $t=0$

إلى $t = 4\sqrt{2}$ أيْ $h = 4\sqrt{2}$

$$\upsilon_{av} = \frac{s\left(4\sqrt{2}\right)-s(0)}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-16\left[\left(4\sqrt{2}\right)^2+512\right]-512}{4\sqrt{2}}$$

$$= \frac{0-512}{4\sqrt{2}} = -64\sqrt{2} \quad m/s$$

$$\cong -90.5 \quad m/s$$

مثال (3):

فرق الجهد في دائرة كهربية مقاومتها R هو 100 فولت بحيث يعطى التيار I خلال المقاومة R من قانون أوم، $I = \frac{100}{R}$ حيث R بالأوم، I بالأمبير.

أوجد المعدل اللحظي لتغير بالنسبة إلى R عند أيْ R وعندما $R = 20$.

الحـــــل:

معدل تغير I بالنسبة إلى R هو

$$I'(R)=\lim_{h\to 0}\frac{I(R+h)-I(R)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{100}{R+h}-\frac{100}{R}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{100R-100(R+h)}{hR(R+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{100R-100R-100h}{hR(R+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-100h}{hR(R+h)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-100}{R(R+h)}$$

$$I'(R)=\frac{100}{R^2}$$

وعندما $R=20$ يكون

$$I'(20)=\frac{100}{20^2}=-\frac{1}{4} \qquad Ampere/ohm$$

أيْ أن التيار يتناقص بمعدل $\left(\frac{1}{4}\right)$ أمبير لكل واحد أوم زيادة.

تمارين 3−1

في التمارين من (1) إلى (6)،

أ) أوجد ميل المماس لبيان f عند $p(a, f(a))$ باستعمال التعريف.

ب) أوجد معادلة المماس عندما $a = 2$.

(1)	$f(x) = 5x^2 - 4x$	(2)	$f(x) = x^3$
(3)	$f(x) = 3x + 2$	(4)	$f(x) = 3 - 2x^2$
(5)	$f(x) = x^4$	(6)	$f(x) = 4 - 2x$

(7) إذا كانت $p = \sqrt{at + b}$، $a = 920$، $b = (151.3)^2$، يعطى تقريبا لعدد السكان بالمليون في الولايات المتحدة أثناء الفترة 1990 − 1950، يناظر العام 1950. أوجد المعدل اللحظي لتغير p بالنسبة للزمن t.

أ) عند أي قيمة t. ب) عام 1989 $(t = 39)$

اثبت أن متوسط معدل التغير السنوي خلال هذه الفترة هو 2.32 مليون كل عام.

في التمارين من (8) إلى (11) أوجد ميل ومعادلة المماس للدالة f عند النقطة المعطاة وارسم $gr(f)$ موضحاً عليه المماس عند p

(8)	$f(x) = \sqrt{x}\ ,\ p(4,2)$	(9)	$f(x) = \sqrt[3]{x}\ ,\ p(-8,-2)$
(10)	$f(x) = \dfrac{1}{x}\ ,\ p\left(\dfrac{1}{2},2\right)$	(11)	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ ,\ p\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$

(12) أوجد نقطة المنحنى $y = x^3$ الذي يكون الميل عندها $m = 27$.

في التمارين (13) إلى (16) معلوم موضع نقطة متحركة كدالة في الزمن $s(t)$ حيث t بالثواني، s بالمتر. أوجد في كل تمرين،

أ) السرعة المتوسطة في الفترات $[1,1.2]$، $[1,1.1]$، $[1,1.01]$

ب) السرعة عندما $t=1$.

(13) $s(t)=4t^2+3t$ (14) $s(t)=2t-3t^2$

(15) $s(t)=\sqrt{2-t}$ (16) $s(t)=t+\sqrt{t}$

(17) طائرة إنقاذ تسقط أقفاص منتجات غذائية من ارتفاع $160\ m$. ويصبح ارتفاع القفص عن سطح الأرض عند t ثانية هو $160-16t$. أوجد سرعة القفص عند $t=1$ وأوجد سرعة ارتطام القفص بالأرض.

في التمرينين (18)، (19) أوجد :

أ) متوسط معدل تغير y بالنسبة إلى x في الفترة المعطاة.

ب) المعدل اللحظي لتغير y بالنسبة للزمن t عند الحد الأيسر للفترة.

(18) $y=x^2+2\ ,\ [3,3.5]$ (19) $y=3-2x^2\ ,\ [2,2.4]$

(20) أدت النظرية النسبية إلى حقيقة هامة وهي المسافة L_0 بين نقطتين تنكمش إلى L، $L=L_0\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}$، إذا كان النقطتان داخل مركبة تجرى بسرعة υ، c هي سرعة الضوء $(3\times10^8\ m/s)$، أوجد المعدل اللحظي لتغير طول جسم L بالنسبة للسرعة υ.

أ) عند أيْ υ ب) عندما $\upsilon=0.9c$

(21) استعمل تقريب متوسط معدل تغير y بالنسبة إلى x لإيجاد المعدل اللحظي لتغير y بالنسبة إلى x، عند $x=a$، مستخدما مرة، مرة أخرى.

أ) $y=\dfrac{10\cos x}{x^2+4}$ ، $a=-1/2$

ب) $y=\dfrac{\cos^2 x+x^2\sin x}{x^2+1}$ ، $a=2$

بند 3-2 تعريف المشتقة Definition of Derivative

تعاملنا في البند السابق مع معدل التغير أو السرعة أو ميل المماس معا نهايات على الشكل،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

أ، ما يعادلها

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

وهذه النهاية هي حجر الأساس للمبادئ الأساسية للحسبان، وهي المشتقة. نقابلنا المشتقة خلال دراستنا للحسبان في المسائل التي تتعرض لمعدلات التغير ومن ثم فلها تطبيقات في معظم فروع العلوم التطبيقية. ونحن نقدم في هذا البند بتعريف مشابه لهذه النهايات للمشتقة ونعطى بعض القواعد البسيطة التي تمكننا من إيجاد المشتقات بدون حساب النهايات مع بعض الخواص للمشتقة وترميزاتها.

تعريف المشتقة

" مشتقة الدالة f هي الدالة f' تعطى بالمعادلة

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

بشرط وجود هذه النهاية "

فإذا ما حصلنا على $f'(x)$ نستطيع إيجاد $f'(a)$ عند أيْ نقطة $x=a$ في نطاق الدالة f .

قابلية التفاضل: ذكرنا في تعريف المشتقة أن النهاية لابد أن تكون موجودة لكي تكون $f'(x)$ موجودة عندئذ يقال أن f قابلة للتفاضل عند x. أما إذا كانت النهاية غير موجودة فإن f تكون غير قابلة للتفاضل عند x. وعندما

نقول فاضل f أو أوجد مشتقة f نعنى اوجد $f'(x)$. وبالمناسبة نجد أنه يجب أن نعرف الشكل الآخر لتعريف $f'(a)$ وهو

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ومن ثم نجد أن من تطبيقات المشتقة التي نحن الآن على علم بها:

1) المستقيم المماس: ميل المماس للمنحنى $gr(f)$ عند نقطة $(a, f(a))$ هو $f'(a)$.

2) معدل التغير : إذا $y=f(x)$ ، لأن معدل تغير y بالنسبة إلى x عند $x=a$ هو $f'(a)$.

وحالة خاصة تكون سرعة نقطة p عند زمن $t=a$.

هي $s'(a)$ ، حيث $s(t)$ هو موضع النقطة عند زمن t.

مثال (1):

إذا كان $f(x)=3x^2-12x+1$ فأوجد :

أ) $f'(x)$ ب) $f'(4)$ جـ) $f'(-2)$ د) $f'(a)$

الحـــل:

أ) باستعمال التعريف

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3\left[(x+h)^2-x^2\right]-12[(x+h)-x]+(1-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3h(2x+h)-12h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\ 3(2x+h)-12$$

$$=6x-12$$

ب) بالتعويض عن $x=4$ في $f'(x)=6x-12$

$$f'(4)=6(4)-12=12$$

جـ) بالمثل $f'(-2)=6(-2)-12=-24$

د) $f'(a)=6a-12$

مثال (2):

أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ من المبادئ الأولية :

أ- $f(x)=x^2$

ب- $f(x)=\frac{1}{x}$

جـ- $f(x)=\sqrt{1+x}$

الحـــل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

أ- $f(x+h)=(x+h)^2$ ، $f(x)=x^2$

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2$$
$$=x^2-2xh+h^2-x^2$$
$$=2xh+h^2$$
$$=h\ (2x+h)$$
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x+h$$
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\ 2x+h=2x$$

إذن

$$f'(x)=2x$$

ب− $f(x)=\frac{1}{x}$ ، $f(x+h)=\frac{1}{x+h}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}$$

$$=\frac{x-(x-h)}{x(x+h)}=\frac{x-x-h}{x(x+h)}$$

$$=\frac{-h}{x(x+h)}$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{-1}{x(x+h)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

إذن $f'(x)=\frac{-1}{x}$

جـ− $f(x)=\sqrt{1+x}$ ، $f(x+h)=\sqrt{1+x+h}$

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}}{h}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{1+x+h}-\sqrt{1+x}\right)}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right)}{\left(\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\frac{(1+x+h)-(1+x)}{h\left[\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right]}$$

$$=\frac{h}{h\left[\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right]}=\frac{1}{\left[\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}\right]}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x+h}+\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x}}$$

إذن $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

مثال(3): أوجد مشتقة الدالة $f(x)$ عندما $x=1$ ،

$$f(x)\begin{cases} x^2 & , \quad x<1 \\ 2x-1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

الحـــــل:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(x)}{h}$$

عند $x=1$ نجد أن

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x^2=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} (2x-1)=1$$

$$f(1)=1$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=1$.

كذلك،

<u>أولاً:</u>

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[2(1+h)-1]-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2\_2h-1-1}{h}=2$$

<u>ثانيا:</u>

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2h-h^2-1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2$$

من أولاً وثانياً، نجد أن كلا النهايتين من اليمين ومن اليسار متساويتان، أي أن النهاية، موجودة،

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 2$$

إذن
$$f'(1) = 2$$

مثال (4):

اثبت أن مشتقة الدالة $f(x)$ موجودة عند $x=2$ وأوجدها بينما غير موجودة $x=3$ أيْ أن $f(x)$ قابلة للتفاضل عند $x=2$ وغير قابلة للتفاضل عند $x=3$.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+4x-2 & , \quad x<2 \\ [x] & , \quad 2 \le x < 3 \\ 2x-4 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

الحـــل:

أولاً : عند $x=2$

$$\lim_{h\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 2} \left(-x^2+4x-2\right) = 2$$
$$\lim_{h\to 2^+} f(x) = \lim_{h\to 2^+} [x] = 2$$
$$f(2) = [2] = 2$$

إذن الدالة مستمرة عند $x=2$.

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

نبحث وجود النهاية،

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{[2+h]-[2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{2-2}{h}$$

$$=0$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(2+h)^2+4(2+h)-2-[2]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{-4-4h+h^2+8+4h-2-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\ h=0$$

النهاية من اليمين = النهاية من اليسار، أيْ أن النهاية موجودة وتساوي 0،

الدالة قابلة للتفاضل و، $f'(2)=0$

ثانياً : عند $x=3$

$$\lim_{h\to 3^-}\ f(x)=\lim_{h\to 3^-}\ [x]=2$$

$$\lim_{h\to 3^+}\ f(x)=\lim_{h\to 3^+}\ (2x-4)=2$$

$$f(3)=2(3)-4=2$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=3$

ثم نبحث وجود النهاية

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

نجد أن،

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{[3+h]-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{2-2}{h}$$

$$= 0$$

و

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2(3+h)-4-2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{6+2h-6}{h}$$

$$= 2$$

أيْ أن النهاية من اليسار =0 والنهاية من اليمين = 2 إذن النهاية غير موجودة، ومن ثم $f'(3)$ غير موجودة والدالة غير قابلة للتفاضل عند $x=3$.

مما سبق نبحث أن $f(x)$ هي دالة مستمرة على R وقابلة للتفاضل ماعدا عند $x=3$.

القواعد الأساسية للتفاضل

عملية إيجاد المشتقة قد تصبح بالغة الصعوبة إذا ما استعملنا التعريف في حالة الدوال التركيبية المعقدة، ولكن نحمد الله أنه أمكن إنشاء معادلات عامة وقواعد تمكننا من إيجاد $f'(x)$

بدون استعمال النهايات. وفيما يلي نتدرج في ذكر هذه القواعد والمبرهنات.

1) **مشتقة الدالة الخطية**

إذا $f(x) = ax + b$

فإن $f'(x) = a$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[a(x+h)+b]-[ax+b]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$

2) **مشتقة المقدار الثابت**

إذا $f(x) = b$

$f'(x) = 0$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{b-b}{h} = 0$$

3) **قاعدة القوة:**

أ) إذا كانت n عدد صحيح، $f(x) = x^n$

فإن $f'(x) = nx^{n-1}$

شريطة أن $x \neq o$ عندما $n \leq o$

البرهان

إذا كان n عدد صحيح موجب من السهل إثبات أن

$$(x-a)\left(x^{n-1}+ax^{n-2}+.....+a^{n-1}\right)=x^n-a^n$$

أيْ أن

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+ax^{n-2}+......+a^{n-1}$$

وباستعمال التعريف

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\ f(x)=x^n$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\left(t^{n-1}+xt^{n-2}+.......+x^{n-1}\right)$$

$$=x^{n-1}+x^{n-1}+.....+x^{n-1}$$

$$=nx^{n-1}$$

وإذا كان n عدد صحيح سالب فإن، بوضع $n=-k$، k موجب، $x\neq 0$ يكون

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\frac{t^{-k}-x^{-k}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{\frac{1}{t^k}-\frac{1}{x^k}}{t-x}$$

$$=\lim_{t\to x}\frac{x^k-t^k}{t^kx^k(t-x)}$$

$$=\lim_{t\to x}\ \frac{-1}{t^kx^k}\cdot\frac{t^k-x^k}{t-x}$$

$$= \frac{-1}{x^k x^k} . kx^{k-1}$$
$$= (-k) x^{-k-1}$$
$$= nx^{n-1}$$

وعندما $n = 0$ تظل قاعدة القوة صحيحة لأن

$(x \neq 0)\ f'(x) = 0x^{-1} = 0$ ، $f(x) = x^0 1$

إذا مشتقة x^n هي nx^{n-1} لجميع الأعداد الصحيحة.

ب) إذا كان الأس هو $\frac{1}{n}$، n عدد صحيح موجب فإن لأجل، $f(x) = x^{1/n}$

يكون $f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

البرهان

$$f'(x) = \lim_{h \to o} \frac{(x+h)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}}{h}$$
$$(u-v)\left(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}\right) = u^n - v^n$$

إذا $u \neq v$ فإن،

$$\frac{u-v}{u^n - v^n} = \frac{1}{u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + uv^{n-2} + v^{n-1}}$$

بتعويض $u = (x+h)^{1/n}$ ، $v = x^{1/n}$

$$\frac{(x+h)^{1/n} - x^{1/n}}{\cancel{x} + h - \cancel{x}} = \frac{1}{(x+h)^{\frac{n-1}{n}} + (x+h)^{\frac{n-2}{n}} x^{\frac{1}{n}} + \dots + x^{\frac{n-1}{n}}}$$

وبجعل $h \to o$ ينتج أن

$$f'(x)=\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}+x^{\frac{n-1}{n}}+....+x^{\frac{n-1}{n}}}$$

$$=\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}=\frac{1}{n}x^{\frac{-n+1}{n}}$$

إذا $f'(x)=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$

جــ- إذا كان الأس على صورة $\frac{m}{n}$ ، $n\neq 0$

إذاً $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ ، $f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

البرهان نستعمل نفس المتطابقة المستخدمة في (أ)، (ب)

بوضع ، $u=(x+h)^{\frac{m}{n}}$ ، $\upsilon=x^{\frac{m}{n}}$

$$\frac{(x+h)^{\frac{m}{n}}-x^{\frac{m}{n}}}{(x+h)^{m}-x^{m}}=\frac{1}{(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-2)}x^{\frac{m}{n}}+...+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{m}{n}}-x^{\frac{m}{n}}}{(x+h)^{m}-x^{m}}=\frac{1}{(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-2)}x^{\frac{m}{n}}+...+(x+h)^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

$$=\frac{1}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

إذن

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h)^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}}{h}}{\dfrac{(x+h)^m - x^m}{h}} = \frac{1}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x+h)^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}}{h}}{mx^{m-1}} = \frac{1}{nx^{\frac{m}{n}(n-1)}}$$

إذن

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{\frac{m}{n}} - x^{\frac{m}{n}}}{h} = \frac{m\ x^{m-1}}{n\ x^{m-\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

مما سبق نجد أن مبرهنة القوة صحيحة لجميع القوى الحقيقية صحيحة أو قياسية. وسوف نثبت فيما بعد صحتها لقيم القوة غير القياسية. ويصبح على وجه العموم،

إذا $\alpha \in R$ ، $f(x) = x^{\alpha}$ فإن

$$f'(x) = \alpha\ \ x^{\alpha - 1}$$

ومن ثم انظر الجدول التوضيحي،

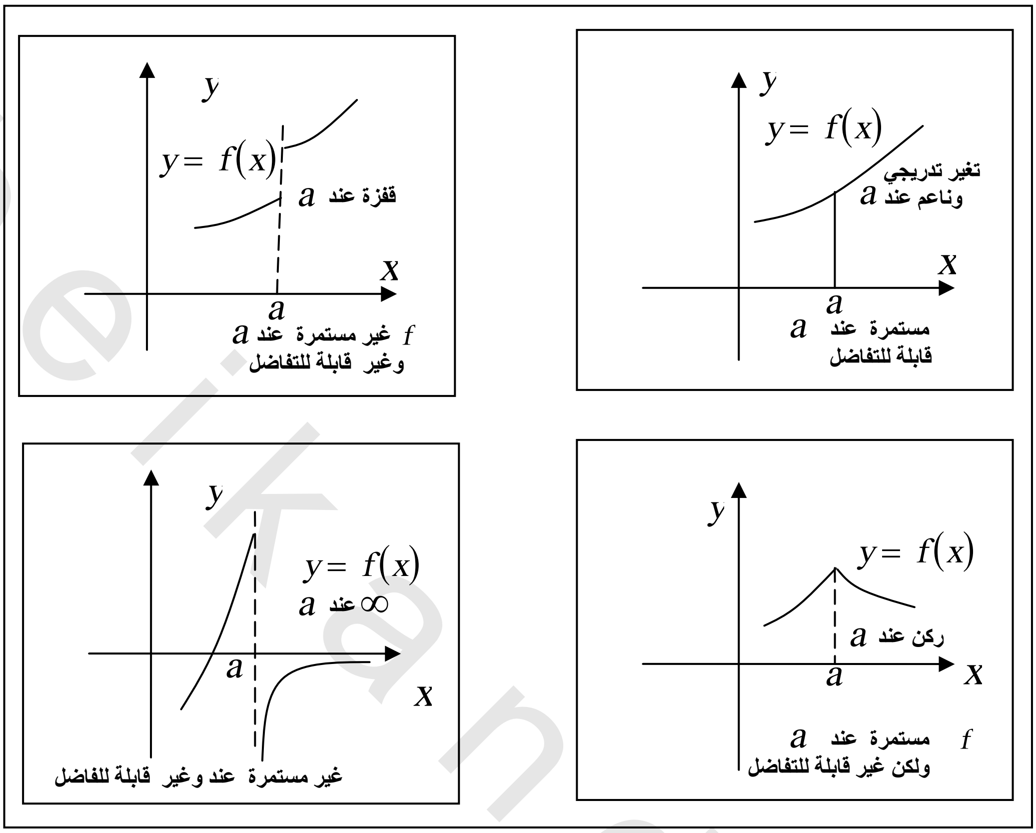
$f'(x)$	$f(x)$
$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} = x^{1/2}$
$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$	$\sqrt[3]{x} = x^{2/3}$
$6x^5$	x^6
0	7
$-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = \frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$
$-x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$

3- الاستمرارية وقابلية التفاضل

سنبين هنا أنه ليس كل دالة f قابلة للتفاضل عند كل قيمة لــ x في نطاقها وأنه إذا كانت f غير مستمرة عند a فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عند a. زد على ذلك أن كثير من الدوال المستمرة غير قابلة للتفاضل. ولبحث قابلية التفاضل علينا أن نبحث وجود أو عدم وجود النهاية،

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

من عدمه. ومن الناحية الهندسية نستطيع القول أن الدالة f مستمرة عند نقطة على بيانها إن لم يكن هناك أي قفزة أو كسر عند هذه النقطة. أما إذا كانت بالإضافة إلى ذلك نفاضل فإن بيان f يمر خلال النقطة بطريقة تدريجية ناعمة بدون أركان أو مماسات رأسية. شكل (75) يوضح بعض بيانات دوال في الحالات مختلفة.



شكل (75)

على الرغم أن ليس كل دالة مستمرة تكون قابلة للتفاضل إلا أنه على العكس كل دالة قابلة للتفاضل تكون مستمرة.

مبرهنة:

" إذا كانت f قابلة للتفاضل عند a، فإنها تكون مستمرة عند a "

البرهان، لنفرض f قابلة للتفاضل، فإن

موجودة $$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x\to a}$$

ولكن $$\frac{f(x)-f(a)}{x\to a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f(x)-f(a)=\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a)$$

$$f(x)=f(a)+\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} f(a)+\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$

$$= f(a)+f'(a)\cdot\lim_{x\to a}(x-a)$$

بما أن $f'(a)$ موجودة،

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)+f'(a)\cdot 0$$

$$= f(a)$$

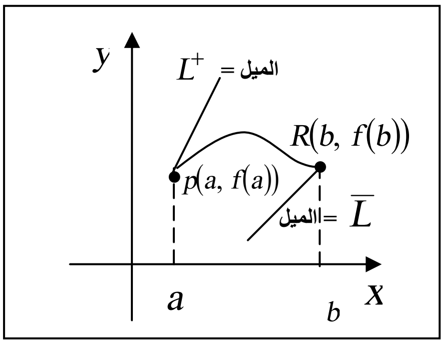
$\therefore$ مستمرة عند a انتهى البرهان.

تعريف (قابلية التفاضل على فترة)

" يقال للدالة f أنها قابلة للتفاضل على فترة مغلقة $[a,b]$ إذا كانت f قابلة للتفاضل على الفترة المفتوحة (a,b) وكانت النهايتان، L^+ ، $\overline{L}$موجودتان، حيث

$$"\ L^+=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(x)}{h},\ L^-=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

تسمى L^+ المشتقة اليمنى، L^-المشتقة اليسرى انظر شكل (76)



شكل (76)

تعريف (الناب Cusp)

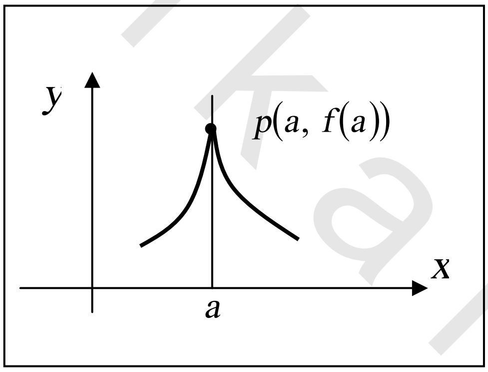
" يقال أن $gr(f)$ له " ناب " عند $x = a$ إذا كان f مستمرة عند a مستمرة وتحقق الشرطين:

$$-1 \quad f'(x) \to \infty \qquad \text{عندما} \quad x \to \bar{a}$$

$$-2 \quad f'(x) \to -\infty \qquad \text{عندما} \quad x \to a^{+}$$

أو العكس $-\infty$ لما $x \to \bar{a}$ ، $+\infty$ لما $x \to a^{+}$ "

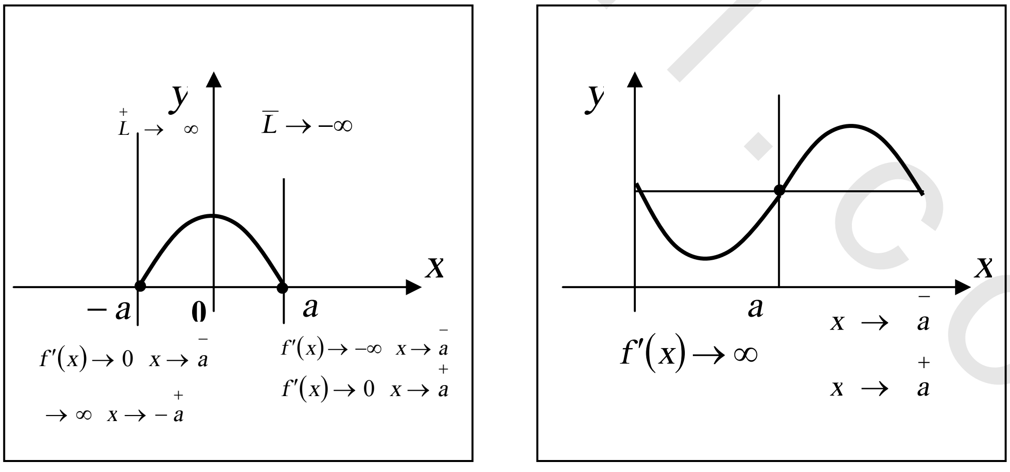
كالمثال الموضح في شكل (77)



لاحظ أنه إذا كان $f'(x) \to +\infty$ عندما $x \to a^{-}$ ، $x \to a^{+}$ لن يكون هناك ناب وإنما فقط مماس رأسي.

وبالمثل لو أن $f'(x) \to -\infty$ من الجانبين كما في الشكلي (78)

شكل (77)



شكل (78)

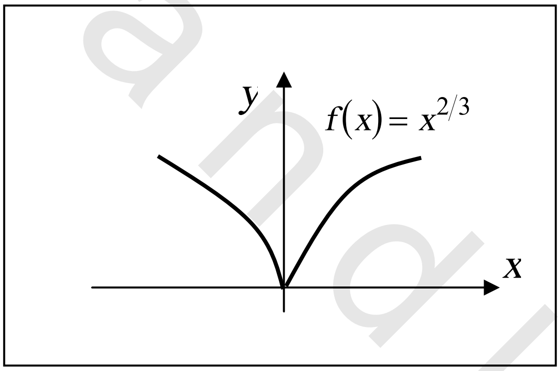
إذا اتخذنا الدالة $f(x)=x^{2/3}$ ، نجد أن $f'(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$ أيْ

، $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=+\infty$$

$\therefore$ الدالة لها ناب عند $x=0$ (لاحظ أنها مستمرة عند $x=0$ ، $y=0$ كما في شكل (79)



شكل (79)

<u>ترميز المشتقة</u>

إذا كان $y=f(x)$ فإن المشتقة الأولى يرمز لها بأحد الرموز الآتية،

$$f'(x), y', \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx} f(x), D_x y, D_x f(x)$$

يسمى كل من D_x ، $\frac{d}{dx}$ مؤثر تفاضلي وكل من $D_x y$ أو $\frac{dy}{dx}$ مشتقة y بالنسبة إلى x أو تفاضل y بالنسبة إلى x .

إذا كان المراد حساب المشتقة عند $x = a$ مثلا، قد نكتب

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}$ ، iv $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ ، iii $\left.D_x y\right|_{x=a}$ ، ii $f'(a)$ ، i

فمثلا

$$D_x\left(x^2\right) = 2x$$
$$\frac{d}{d_x}\left(x^{5/3}\right) = 5/3\, x^{2/3}$$
$$\frac{d}{dt}\left(2t^{-4}\right) = 8t^{-5} = -\frac{8}{t^5}$$
$$\left.\frac{d}{d\vartheta}\left(\vartheta^3\right)\right|_{\vartheta=2} = \left.3\vartheta^2\right|_{\vartheta=2} = 12$$
$$\left[\frac{d}{dx},\left(x^3\right)\right]_{x=1} = \left[3x^2\right]_{x=1} = 3$$
$$\left[\frac{d}{du}\left(9u^{4/3}\right)\right]_{u=8} = \left[12u^{1/3}\right]_{u=8} = 12\left(8^{1/3}\right) = 24$$

قد نحتاج إلى إيجاد مشتقة المشتقة، فنسميها المشتقة الثانية أو التفاضل الثاني للدالة f ويرمز لها بالرمز f'' ،

$$f''(x) = \left[f'(x)\right]' = \frac{d}{dx}\, f'(x)$$
$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(f(x)\right)$$
$$f''(x) \equiv \frac{d^2}{dx^2}\, f(x) \equiv D^2{}_x y$$

وبالمثل نستطيع الترميز للمشتقة الآتية (رقم n ، n عدد صحيح موجب) بالرموز الآتية

$$f^{(n)}(x) \equiv \frac{d^n}{dx^n}\, f(x) \equiv D_x{}^n f \equiv D_x{}^n y$$

حيث n رتبة المشتقة $f^{(n)}(x)$ وكلما كانت $n>1$ سميت المشتقات بالمشتقات العليا. فمثلا إذا كان

$$f(x)=2x^{7/3}$$

فإن

$$f'(x)=\frac{14}{3}x^{4/3}$$

$$f''(x)=\frac{56}{9}x^{1/3}$$

$$f'''(x)=\frac{56}{27}x^{-2/3}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{112}{81}x^{-5/3}$$

$$f^{(5)}(x)=\frac{560}{243}x^{-8/3}$$

وهكذا.....

4- أساليب التفاضل

نورد في هذا الجزء بعض القواعد العامة التي تساهم في تبسيط عملية الاشتقاق.

إذا كان f ، g دالتين قابلتين للاشتقاق، كل من a ، b ، c ، ثوابت حقيقية، n عدد قياسي فإن:

مبرهنة (1)

أ- $$\frac{d}{dx}\left(a\ \ f(x)\right)=a\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$$

ب- $$\frac{d}{dx}\left(f(x)+g(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)+\frac{d}{dx}\left(g(x)\right)$$

جـ- $\frac{d}{dx}(f(x)-g(x))=\frac{d}{dx}(f(x))-\frac{d}{dx}(g(x))$

البرهان

أ-

$$\frac{d}{dx}\left(a\ \ f(x)\right)=\lim_{h\to 0}\frac{a\ \ f(x+h)-a\ \ f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=c\frac{d}{dx}(f(x))$$

انتهى برهان (أ)

ب-

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x))=\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$$

انتهى برهان (ب)

جـ- يتم البرهان تماماً كما في (ب).

فمثلاً

$$\frac{d}{dx}\left(2x^4\right)=2\frac{d}{dx}x^4=2\left(4x^3\right)=8x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(5x^5\right)=5\left(3x^2\right)=15x^2$$ ،

$$\frac{d}{dx}\left(2x^4+5x^3\right)=8x^3+15x^2$$ ،

$$\frac{d}{dx}\left(2x^4-5x^3\right)=8x^3-15x^2$$ ،

مثال (5): أوجد

$$\frac{d}{dx}\left(2x^4-5x^3+x^2+\sqrt{x}-3x+33\right)$$

الحـــل:

$$\frac{d}{dx}\left(2x^4-5x^3+x^2+\sqrt{x}-3x+33\right)$$
$$=8x^3-15x^2+2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}-3$$

مثال (6):

أوجد معادلة المماس لبيان الدالة

$$y=2\ \sqrt[3]{x^2}-3/\sqrt{x}$$

عند النقطة $(x=1)$

الحـــل:

$$y=2x^{2/3}-3x^{-1/2}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{4}{3}x^{-1/3}+\frac{3}{2}x^{-3/2}$$

ميل المماس عند النقطة $x=1$

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{17}{6}$$

، $$\left.y\right|_{x=1}=2^{3}\sqrt{1}-\frac{3}{\sqrt{1}}$$

$$=2-3=-1$$

معادلة المماس،

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-(-1)=\frac{17}{6}(x-1)$$

$$6y+6=17x-17$$

$$17x-6y-23=0$$

مبرهنة (2): (قاعدة حاصل ضرب دالتين)

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]=\frac{d\ \ f(x)}{dx}g(x)+f(x)\frac{d\ \ g(x)}{dx}$$

أيْ تفاضل حاصل الضرب = الأول × تفاضل الثاني + الثاني × تفاضل الأول.

البرهان: لنعتبر $y=f(x)\ g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\ g(x+h)-f(x)\ g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\ g(x+h)-f(x+h)\ g(x)+f(x+h)\ g(x)-f(x)\ g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\ f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= f(x)\frac{d}{dx}(g(x)) + g(x)\frac{d}{dx}(f(x))$$

انتهى البرهان.

ويمكن الصياغة على النحو،

$$(y_1 y_2)' = y_1 y_2' + y_1' y_2$$

مثال (6):

إذا كانت $y=\left(x^3-4x^2\right)\left(x^5+x^2-11x+7\right)$ أوجد dy/dx .

الحــــل:

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^3-4x^2\right)\left(5x^4+2x-11\right)+\left(3x^2-8x\right)\left(x^3+x^2-11x+7\right)$$

$$= \left(5x^7+2x^4-11x^3-20x^6-8x^3+44x^2\right)$$

$$+\left(3x^5+3x^4-33x^3+21x^2 -8x^4-8x^3+88x^2-56x\right)$$

$$= 5x^7-20x^6+3x^5-3x^4-52x^3+153x^2-56x$$

مثال (7):

أوجد نقط بيان المعادلة $y=x^{1/3}\left(x^2-3x+2\right)$ التي يكون عندها المماس أفقياً أو رأسياً.

الحــــل:

$$\frac{dy}{dx} = x^{1/3}(2x-3)+\frac{1}{3}x^{-2/3}\left(x^2-3x+2\right)$$

$$= x^{1/3}(2x-3) + \frac{x^2-3x+2}{3x^{2/3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x(2x-3) + x^2 - 3x + 2}{3x^{2/3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7x^2 - 12x + 2}{3x^{2/3}}$$

يكون المماس أفقياً، لما $\frac{dy}{dx} = 0$

$$7x^2 - 12x + 2 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{22}}{7}$$

ويكون المماس رأسياً، لما $\frac{dy}{dx} \to \pm\infty$ أي عندما المقام يساوى 0

$$x = 0$$

ولما كان عند $x = 0$ ، f مستمرة، إذن يوجد مماس رأسي عند $(0,0)$

مبرهنة 3: (قاعدة خارج القسمة)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\,f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

ونتذكرها، مشتقة خارج القسمة هي المقام × تفاضل البسط ناقص البسط في تفاضل المقام مقسوماً على مربع المقام.

البرهان

إذا كان، $y = f(x)/g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\,f(x+h)-f(x)g(x+h)}{h\;g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\,f(x+h)-g(x)\,f(x)+g(x)\,f(x)-f(x)g(x+h)}{h\;g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)[f(x+h)-f(x)]+f(x)[g(x+h)-g(x)]}{h\;g(x+h)g(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)\;g(x)}$$

$$=\frac{g(x)\;f'(x)-f(x)\;g'(x)}{(g(x))^2}$$

انتهى البرهان.

<u>نتيجة</u>:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)=\frac{-g'(x)}{(g(x))^2}$$

فمثلاً

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\quad,\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)=-\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

مثال (7):

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ ، أ - $y=\dfrac{3x^4-3x^3+1}{2x^2+3}$ ب- $y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

الحـــــل:

أ–

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2x^2+3)(12x^3-9x^2)-(3x^4-3x^3+1)(4x)}{(2x^2+3)^2}$$

$$=\frac{24x^5-18x^4+36x^3-27x^2-12x^5+12x^4-4x}{(2x^2+3)^2}$$

$$=\frac{12x^5-6x^4+36x^3-27x^2-4x}{(2x^2+3)^2}$$

ب–

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-1}{(1+\sqrt{x})^2}\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

مثال (8):

أوجد معادلة المماس عند $x=1$ ، $x=2$ لبيان العلاقة، $y=\frac{2x}{x-2}$.

الحـــــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-2)(2)-2x(1)}{(x-2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-4}{(x-2)^2}$$

عند $x=1$

$$y=\frac{2(1)}{1-2}$$

$$y=-2$$

، ميل المماس

$$m=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=\frac{-4}{(1-2)^2}=-4$$

معادلة المماس هي

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y+2=-4(x-1)$$
$$y+2=-4x+4$$
$$4x+y-2=0$$

عند $x=2$

$$y=\frac{2(2)}{2-2}\to\pm\infty$$

الدالة غير مستمرة عند $x=2$ وبالطبع لا يوجد مماس. لأنها غير قابلة للتفاضل أصلاً.

<u>مبرهنة (4)</u> (قاعدة السلسلة)

" إذا كان $y=f(u)$ ، $u=g(x)$ وكلا من $\frac{dy}{du}$ ، $\frac{du}{dx}$ موجودان فإن تفاضل الدالة التركيبية $y=f(g(x))$ هو $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)g'(x)$ "

البرهان

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\end{aligned}$$

لكن،

عندما $h\to0$ ، $g(x+h)\to g(x)$

بجعل $g(x)=a$ ، $g(x+h)=t$ أيْ $t\to u$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to u}\frac{f(t)-f(u)}{t-u}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(u)g'(x)$$

انتهى البرهان.

مثال (9):

أوجد $\frac{du}{dx}$ إذا كان $y=u^{3/2}$ ، $u=x^2-2x$

الحـــل:

$$\frac{du}{dx}=\frac{3}{2}u^{1/2} \quad \text{و} \quad \frac{du}{dx}=2x-2$$

إذن،

$$\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$
$$=\frac{3}{2}u^{1/2}(2x-2)$$
$$=3\left(x^2-2x\right)^{1/2}(x-1)$$

أيْ أن

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-2x\right)^{3/2}=\frac{3}{2}\left(x^2-2x\right)^{1/2}(2x-2)$$
$$=3\left(x^2-2x\right)^{1/2}(x-1)$$

وعموماً

إذا كان $y=u^n$ ، $u=g(x)$

فإن

$$\frac{dy}{dx}=n\ u^{n-1}\cdot g'(x)$$

أو نكتب،

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

مثال (10):

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$. أ) $y=\left(x^3-4x^2+6\right)^5$ ب- $y=\sqrt{x^2+2x-7}$

الحـــــل:

أ) $$\frac{dy}{dx}=5\left(x^3-4x^2+6\right)^4\left(3x^2-8x\right)$$

ب) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(x^2+2x-7\right)^{-1/2}(2x+2)$$
$$=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-7}}$$

مثال (11):

أوجد $f'(x)$ عندما $f(x)=(ax+b)^5(cx+d)^6$

ثوابت حقيقية a,b,c,d .

الحـــــل:

$$f'(x)=(ax+b)^5\frac{d}{dx}(cx+d)^6+(cx+d)^6\frac{d}{dx}(ax+b)^5$$
$$=(ax+b)^5 6(cx+d)^5(c)+(cx+d)^6 5(ax+b)^4(a)$$
$$=(ax+b)^4(cx+d)^5[6c(ax+b)+5a(cx+d)]$$
$$=(ax+b)^4(cx+d)^5[(6ca+d)x+6cb+5ad]$$
$$=(ax+b)^4(cx+d)^5(11cax+6cb+5ad)$$

$f'(x)$ قد تسمى أيضاً المعامل التفاضلي. ومن المستحب أن يتذكر الطالب

تفاضل x^n في الحالات الخاصة $n^{1/2}$ ، $n=-1$ ، $n=0$ على النحو،

أ) تفاضل جذر x = $\dfrac{1}{\text{ضعف الجذر}}$

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

ب) تفاضل واحد على x = ناقص واحد على x تربيع

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x^2}\right)$$

جـ) تفاضل المقدار الثابت = 0

$$\left(\frac{d}{dx}(c)=0\right)$$

وبإدخال قاعدة السلسلة نجد أن،

1) تفاضل الجذر = واحد على ضعف الجذر × تفاضل ما تحت الجذر

$$\left(\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{-1}{2\sqrt{u}}\cdot\frac{du}{dx}\right)$$

2) تفاضل واحد على دالة = ناقص واحد على مربع الدالة × تفاضل الدالة

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right)=\frac{-1}{[g(x)]^2}\,g'(x)$$

مثال (12)

أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ ، ومعادلة المماس لما $x=0$

$$y=\sqrt{\left(x^2+1\right)^3+\frac{1}{x^2+1}}$$

الحـــــل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3+\frac{1}{x^2+1}}}\cdot\left[3\left(x^2+1\right)^2(2x)-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}(2x)\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3+\frac{1}{x^2+1}}}\cdot 2x\left(3\left(x^2+1\right)^2-\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^4+1}}\left(\frac{3\left(x^2+1\right)^4-1}{\left(x^2+1\right)^2}\right)$$

$$=\frac{x\left[3\left(x^2+1\right)^4-1\right]}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^4}\;\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

عندما $x=0$

$$y=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$y'=0$$

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

$$y-\sqrt{2}=0$$

معادلة المماس $y=\sqrt{2}$ وهو مستقيم يوازى المحور x .

<u>بند 3.3: التفاضل الضمني والتفاضل البارامتري:</u>

1: التفاضل الضمني: implicit differentiation

إذا كان $y = f(x)$ فإن y تسمي دالة صريحة في x وكذلك المعادلة $y - f(x) = 0$ تعين نفس الدالة f .

فإذا كتبنا $y = 3x^2 - 5/x$ نقول y دالة صريحة في x

المعادلة $xy - 3x^3 + 5 = 0$ تعين نفس الدالة $f(x) = 3x^2 - 5/x$

لأننا لو عوضنا $y = f(x)$ ، نحصل على:

$$x(3x^2 - 5/x) - 3x^2 + 5 = 0$$

$$3x^3 - 5 - 3x^2 + 5 = 0$$

$$0 = 0$$

وهي متطابقة لأنها صحيحة مهما كانت x

ولكن في المعادلة $xy - 3x^3 + 5 = 0$ ، نقول أن y تتعين ضمنا من هذه المعادلة. أو أن y هي دالة ضمنية وبالطبع ليس في جميع الأحوال يمكن تحويل الدالة المعرفة ضمنيا إلى دالة صريحة، فمثلا، المعادلة:

$$y^2 - 2yx + \sqrt{x^2 + y^2} = 2x$$

تتضمن دالة ضمنية y ولكن يصعب إيجاد y كدالة صريحة في x ، وهدفنا في هذا الجزء من البند 3.4 هو إيجاد مشتقة الدالة الضمنية دون الحاجة إلى تحويلها لدالة صريحة وأحيانا ما تتضمن المعادلة أكثر من دالة ضمنية فمثلا المعادلة:

$$y^2 + x^2 = 16$$

يمكن تحويلها إلى دالتين صريحتين هما:

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

أي: $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ ، $g(x) = -\sqrt{16 - x^2}$

ولإيجاد تفاضل دالة f معرفة ضمنيا، نستعمل طريقة تسمى التفاضل الضمني، وفيها نفاضل كل حد من حدود المعادلة بالنسبة للمتغير المستقل (x) ثم نوجد $\frac{dy}{dx}$

من الناتج مع ملاحظة أن:

$$\frac{d}{dx}g(y)=\frac{dg(y)}{dy}.y'$$

مثال (13):

إذا كان: $x^4+y^4-3y^2+5x^2=2y-x$

تعرف دالة f ضمنيا، و f قابلة للتفاضل أوجد $f'(x)$

الحـــل:

فاضل مباشرة بالنسبة إلى x

$$4x^3+4y^3y'-6yy'+10x=2y'-1$$

أنقل جميع الحدود التي تحتوى y' إلى الطرف الأيسر وباقي الحدود إلى الطرف الأيمن:

$$3y^3y'-6yy'-2y'=-1-10x-4x^3$$

خذ y' عاملا مشتركا ,

$$y'(3y^2-6y-2)=-(1+10x+4x^3)$$

أوجد y' ،

$$y'=\frac{-(1+10x+4x^3)}{3y^2-6y-2},\ y\neq 1\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$$

أو

$$f'(x)=\frac{-(1+10x+4x^3)}{3(f(x))^2-6f(x)-2}$$

مثال14:

اوجد معادلة المماس لبيان المعادلة:

$$y^4+3y-4x^2=5x+1$$

عند النقطة $x=1$

الحـــــل:

فاضل بالنسبة إلى x ،

$$3y^3y'+3y'-8x=5$$

$$y'\left(4y^3+3\right)=8x$$

$$y'=\frac{8x}{4y^3+3},4y^3+3\neq 0 \quad \text{أو} \quad y\neq-\sqrt{\frac{3}{4}}$$

<u>عند $x=1$</u>

$$y^2+3y-4=5+1$$

$$y^2+3y-10=0$$

$$(y-2)(y+5)=0$$

$$y=2 \text{ ، } y=-5$$

إذاً يوجد نقطتان عندهما $x=1$ ، هما:

$$P_2(1,-5) \quad \text{،} \quad P_1(1,2)$$

ميل المماس: عند P_1، P_2 على الترتيب

$$m_2=\frac{8(1)}{4(-5)^3+3} \quad \text{،} \; m_1=\frac{8(1)}{4(2)^3+3}$$

$$m_2=\frac{8}{-479} \qquad \text{،} \; m_1=\frac{8}{35}$$

معادلتا المماسين عند P_1، P_2 هما إذن:

<u>عند P_1</u>

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-2=\frac{8}{35}(x-1)$$

$$35y-70=8x-8$$

$$8x-35y+62=0$$

وعند P_2

$$y+5=\frac{-8}{497}(x-1)$$

$$497y+2395=-8x+8$$

$$8x+497y+2387$$

مثال(15):

أوجد النقط، الواقعة على بيان الدالة $y=f(x)$ والمعرفة ضمنيا بالمعادلة $x^2+y^2=25$ ، التي يكون عندها المماس موازي للمستقيم $3x+4y+5=0$.

الحـــل:

نوجد ميل المماس بالتفاضل مباشرة بالنسبة لـــ x

$$2x+2yy'=0$$

$$2yy'=-2x$$

$$y'=-\frac{x}{y}$$

وميل المستقيم: نوجده ولو بنفس الطريقة

$$3+4y'=0 \Rightarrow y'=-\frac{3}{4}$$

المماس // المستقيم عندما يتساوى الميلان،

$$-\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$$

أي،

$$y=\frac{4x}{3}$$

بالتعويض في معادلة $x^2 + y^2 = 25$

$$x^2 + \frac{16x^2}{9} = 25$$

$$\frac{25x^2}{9} = 25$$

$$x^2 = 9$$

إذن $x = 3$ ، $x = -3$

$y = 4$ ، $y = -4$

المماسان عند $(3,4)$، $(-3,-4)$ يوازيا المستقيم المعلوم

مثال (16):

إذا كان

$$x + y + \sqrt{y^2 - x^2} = 2$$

أوجد، $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$ ومعادلة المماس عند $x = 0$

الحـــــل:

فاضل الطرفين بالنسبة إلى: x

$$1 + y' + \frac{2(yy' - x)}{2\sqrt{y^2 - x^2}} = 0$$

$$2\sqrt{y^2 - x} + 2y'\sqrt{y^2 - x^2} + 2yy' - 2x = 0$$

$$y'\left(\sqrt{y^2 - x^2} + y\right) = x - \sqrt{y^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{x - \sqrt{y^2 - x^2}}{y + \sqrt{y^2 - x^2}}$$

من معادلة المنحنى عندما $x = 0$ ،

$$0 + y + y = 2$$

$$y = 1$$

وميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = m(0) = y'(0,1) = \frac{0-\sqrt{1-0}}{1+\sqrt{1-0}}$$

$$m = \frac{-1}{2}$$

معادلة المماس هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x-0)$$

$$2y - 2 = -x$$

$$x + 2y - 2 = 0$$

مثال(17):

إذا كان $y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$ اوجد y''.

الحـــل:

$$4y^3 y' + 3y' - 12x^2 = 5$$

$$y'(4y^3 + 3) = 12x^2 + 5 \qquad (1)$$

$$y' = \frac{12x^2 + 5}{4y^3 + 3} \qquad (2)$$

بتفاضل (1) مرة أخرى نسبة إلى x ،

$$y'(12y^2)y' + y''(4y^3 + 3) = 24x$$

$$y''(4y^3 + 3) = 24x - 12y^2 y'^2$$

بالتعويض عن y' من (2)

$$y''(4y^3 + 3) = 24x - 12y^2 \frac{(12x^2 + 5)^2}{(4y^3 + 3)^2}$$

$$y'' = \frac{24x}{(4y^3 + 3)^2} - \frac{12y^2(12x^2 + 5)^2}{(4y^3 + 3)^3}$$

مثال(18):

إذا كان $(x+y)^2 = xy$

اثبت أن

$$(x+2y)\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2=0$$

الحـــــل:

فاضل بالنسبة إلى x ،

$$2(x+y)\ (1+y')=xy'+y$$

فاضل مرة ثانية

$$2(x+y)\ (y'')+2(1+y')\ (1+y')=xy''+y'+y'$$

$$2xy''+2yy''+2(1+y')^2=xy''+2y'$$

$$y''(2x+2y-x)+2\left((1+y')^2-y'\right)=0$$

$$(x+2y)y''+2\left(y'^2+y'+1\right)=0$$

$$(x+2y)\frac{d^2y}{dx^2}+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)+2=0$$ انتهى البرهان

2) <u>المعادلات البارامترية: Parametric Equations</u>

في هذا الجزء من بند 4−2 نقدم طريقة جديدة لوصف المنحنيات المستوية باستعمال ما يسمى بالمعادلتين البارامتريتين للمنحنى. فإذا كانت f دالة مستمرة فإن $gr(f)$ يسمى منحنى مستوى. والتعريف الأكثر عمومية للمنحنى المستوى هو:

<u>تعريف:</u>

المنحنى المستوى هو مجموعة c من أزواج مرتبة $(f(t), g(t))$ بحيث f و g ـ مستمرتان على فترة ℓ.

وقد اعتدنا للتبسيط استعمال كلمة منحنى فقط بدلا من منحنى مستوى .
وبيان c في التعريف السابق يتكون من جميع النقط $P(t)=(f(t),g(t))$
في المستوى xy لقيم t في الفترة ℓ.
والمعادلتان ،

$$x=f(t)\ ,\ y=g(t)\ ,\ t\in\ell$$

يسميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى c بالبارامتر t.
وأحياناً يقال المعادلتان الوسيطيتان للمنحنى c بالوسيط t.
وللحصول على الصورة الديكارتية لمعادلة المنحنى ، نحذف البارامتر t من المعادلتين البارامتريتين .

$$f^{-1}(x)=g^{-1}(x)$$
$$y=g\left(f^{-1}(x)\right)$$

أو

$$x=f\left(g^{-1}(y)\right)$$

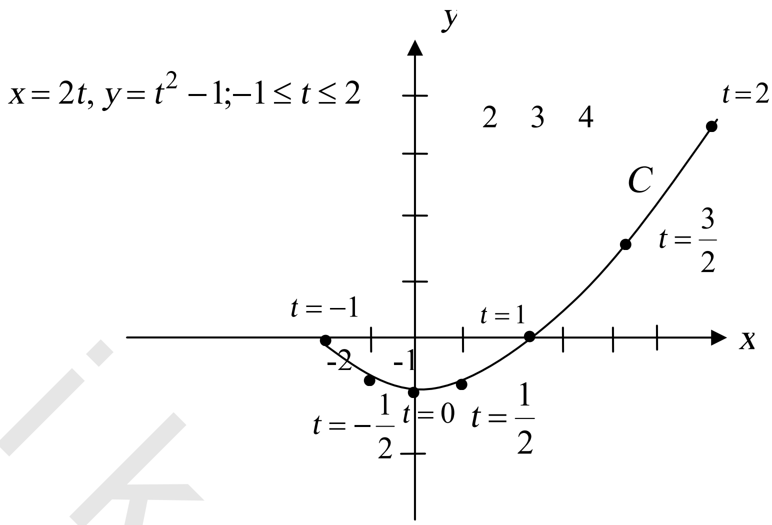
فمثلا إذا كان C منحنى معادلته البارامتريتين هما

$$x=2t\ ,\quad y=t^2-1\quad ,\quad -1\le t\le 2$$

للحصول على شكل المنحنى دعنا نكون الجدول الآتي:

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	0	$-\frac{3}{4}$	1−	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	3

توقيع هذه النقط في المستوى الكارتيزي يؤدي إلى الشكل الواضح في شكل (84).



شكل (84)

ولإيجاد الصورة الديكارتية لمعادلة المنحنى دعنا نحذف t من المعادلتين.

بحل الأولى بالنسبة إلى t نجد $t = \frac{x}{2}$

وبالتعويض في الثانية

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1$$

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 1$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية سبق دراستها تمثل قطع مكافئ متماثل بالنسبة للمحور y تماماً كالمبين في شكل (84) .

إذا أمكن الحصول على الصورة الديكارتية كان من السهل إذن إيجاد $\frac{dy}{dx}$

ولكن دورنا الآن الحصول على $\frac{dy}{dx}$ بدون التحويل إلى الصورة الديكارتية التي يصعب غالباً الحصول عليها. مثل

$$x = \frac{2at}{1+t^2} \quad , \quad y = \frac{b\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)}$$

أ،

$$x = t - t^{2/3} \quad , \quad y = 1 + t^{1/3} - t^2$$

وهكذا لذلك نورد المبرهنة التالية ،

مبرهنة : (مشتقة الدالة المعرفة بارامتريا)

"إذا علم المعادلتين البارامتريتين $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ لمنحنى أملس متصل C فإن ميل المماس $\frac{dy}{dx}$ للمنحنى عند $p(x,y)$ هو

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0 \text{ "}$$

وقد اعتدنا استعمال الشرطة Prime أي y' لترمز $\frac{dy}{dx}$ ولأن نستعمل النقطة dot أيْ $\dot{y}$ أ، $\dot{x}$ لترمزان إلى $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{dy}{dx}$ على الترتيب . أي أن ،

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad , \quad \dot{x} \neq 0$$

والبرهان يأتي مباشرة باستعمال دالة الدالة ، حيث

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

وللحصول على المشتقة الثانية ،

$$y'' = \frac{d}{dx} y' = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{(y')}}{\dot{x}}$$

ويجب ملاحظة أن ،

$$y'' \neq \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$$

مثال (19)

إذا كان C هو منحنى ممثلاً بارامتريا على النحو

$$x = t^3 - 3t \ , \quad y = t^2 - 5t - 1 \ , \quad t \in R$$

أ) أوجد معادلة المماس لـــ C عند نقطة بارامترها $t = 2$

ب) أوجد النقطة التي يوازى المماس عندها المحور x أو المحور y.

جـــ) أوجد $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$

د) أوجد المعادلة الديكارتية للمنحنى C.

الحـــــل:

أ) $$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$y' = \frac{2t - 5}{3t^2 - 3}$$

ميل المماس عند $t = 2$ هما، $x = 2^3 - 3(2) = 2$ ، $y = 2^2 - 5 \times 2 - 1 = -7$

معادلة المماس ، $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 7 = -\frac{1}{9}(x - 2)$$

أيْ $$x + 9y + 61 = 0$$

ب) بما أن $y' = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$

ب1) المماس // المحور x لما $\dot{y} = 0$ أيْ

عند $$2t - 5 = 0$$

$$t = 5/2$$

والنقطة هي $$\left(\frac{65}{8}, -\frac{29}{4}\right)$$

ب2) المماس // المحور y لما $\dot{x}=0$ أيْ

$$3t^2-3=0$$

$$t=\pm 1$$

أيْ أن هناك نقطتان يكون عندها المماس رأسيا هما ،

$$t=-1\equiv(2,5) \quad ، \quad t=1\equiv(-2,5)$$

جـ) $$y''=\frac{(y')^{\cdot}}{\dot{x}}$$

$$(y')^{\cdot}=\frac{(3t^2-3)(2)-(2t-5)(6t)}{(3t^2-3)^2}$$

$$=\frac{6t^2-6-12t^2+30t}{9(t^2-1)^2}$$

$$=\frac{-6t^2+30t-6}{9(t^2-1)^2}$$

$$=\frac{-2t^2+10t-2}{3(t^2-1)^2}$$

$$y''=\frac{\dfrac{-2t^2+10t-2}{3(t^2-1)^2}}{3t^2-3}$$

د) نحاول حذف t من المعادلتين ،

$$x=t(t^2-3)$$

$$y=t^2-5t-1 \quad ،$$

$$t^2=y+5t+1$$

$$x=t(y+5t-2)$$

$$x = ty + 5t^2 - 2$$
$$= ty + 5(y + 5t + 1) - 2t$$
$$= ty + 5y + 25t + 5 - 2t$$
$$= ty + 23t + 5y + 5$$
$$\Rightarrow \quad x - 5y - 5 = t(y + 23)$$
$$t = \frac{x - 5y - 5}{y + 23}$$

بالتعويض في معادلة y ،

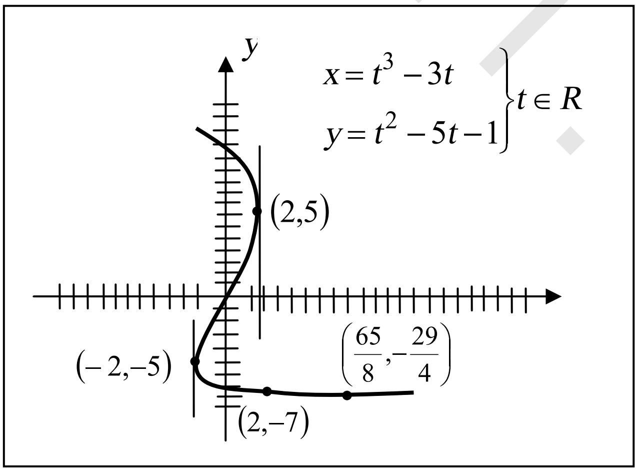
$$y = \left(\frac{x - 5y - 5}{y + 23}\right)^2 - 5\left(\frac{x - 5y - 5}{y + 23}\right) - 1$$

ومنها

$$(y+1)\,(y+23)^2 = (x - 5y - 5)\,(x - 10y - 120) \quad y \neq -23$$

وهي المعادلة الديكارتية للمنحنى

وشكل (85) يوضح بيان المنحنى .



شكل (85)

تمارين 4-2

من (1) إلى (20)، بفرض أن المعادلة تعين دالة قابلة للتفاضل f بحيث $y = f(x)$ ، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$.

1) $2x^2 + 3y^2 = 10$

2) $5x^4 - 2y^4 = xy$

3) $2x^3 + x^2 y + y^2 = 5$

4) $5x^2 + 2x^2 y + y^3 = 6$

5) $2x^2 - 3xy^2 - 4y^2 = 0$

6) $x^4 + x^2 y^2 - 2xy^2 + yx^2 + x = 0$

7) $x^{1/3} + y^{1/3} = 9$

8) $x^{2/3} + y^{2/3} = 16$

9) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{3}$

10) $x^2 + \sqrt{xy} = 7$

11) $2x - \sqrt{xy} + y^3 = 6$

12) $y = \dfrac{x+y}{x-y}$

13) $y = \sqrt{\dfrac{y+2}{xy-3}}$

14) $x = \sqrt{\dfrac{x+2}{xy-3}}$

15) $y = \sqrt{x^2 - y^2 + 3xy}$

16) $y^2 + x^2 2y - 4x - 2 = 0$

17) $\frac{1}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

18) $y^2 = \left[1 + x^2 - y^2\right]^{3/2}$

19) $\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^2 - 4a^2x^2 = b^2$

20) $x^3 - y^3 = 1$

من (21) إلى (29) أوجد معادلة المماس والعمودي عند النقطة P

21) $xy + 16 = 0$ ، $\mathrm{P}(-2,8)$

22) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ ، $\mathrm{P}(2,3)$

23) $y^2 - 4x^2 = 5$ ، $\mathrm{P}(-1,3)$

24) $2x^3 - x^2y + y^2 - 1 = 0$ ، $\mathrm{P}(2,-3)$

25) $xy^2 + 3y = 27$ ، $\mathrm{P}(2,3)$

26) $5x^2 - 4y^2 = 56$ ، $\mathrm{P}(-2,3)$

27) $9x^2 - 4y^2 = 72$ ، $\mathrm{P}(2,3)$

28) $2x^2 - 5y^2 = 3$ ، $\mathrm{P}(-2,1)$

29) $3y^2 - 2x^2 = 40$ ، $\mathrm{P}(2,-4)$

30) اثبت أن معادلة المماس للدائرة، $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$
عند نقطة (x_1, y_1) على محيطها هي

$$x_1x + y_1y + a(x_1 + x) + b(y_1 + y) + c = 0$$

31) اثبت أن معادلة المماس للقطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \quad a > b > 0$$

عند $P(x_1, y_1)$ هي $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

32) اثبت أن معادلة المماس للقطع الزائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

عند النقطة $P(x_1, y_1)$ هي $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

33) اثبت أن إذا مر العمودي على القطع الناقص (تمرين31) بمركز القطع (0،0) فإن القطع يكون دائرة .

34) أوجد معادلة المماس لبيضة كاسينى ،

$$\left(x^2 + y^2 + a^2\right)^2 - 4a^2 x^2 = b^4$$

عندما $a = 2$ ، $b = \sqrt{6}$ عند النقطة $P\left(2, \sqrt{2}\right)$

35) أوجد معادلتي المماس والعمودي للمنحنى $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

عندما $a = 2$ عند النقطة $P(6,6)$

36) كرر تمرين (35) للمعادلة $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2 xy$

، $a = \sqrt{2}$ ، $P(1,1)$

أوجد النقط التي يوازي عندها المماس المستقيم $y = x$.

في التمارين من (37) إلى (42) أوجد معادلتي المماس والعمودي عند النقطة المعطاة:

(37) $y = t^2 - 1$, $x = t^2 + 1$ ، $-2 \le t \le 2$ ،عند $t = 1$

(38) $y = t^3 - 1$, $x = t^3 + 1$ ، $-2 \le t \le 2$ ،عند $t = -1$

(39) $y=2t+3$ ، $x=4t^2-5$ ، $t\in R$ ، عند $t=2$

(40) $y=t^{3/2}$ ، $x=t^{3/2}$ ، $t\in R$ ، عند $t=64$

(41) $y=3t+4$ ، $x=\sqrt{t}$ ، $t\geq 0$ ، عند $t=4$

(42) $x^2+t^2-2xt=1$ ، $y^2+t^2-yt=21$

عند $t=-1$ ، x ، y أكبر من 0 .

(43) في التمارين من (37) إلى (41) أوجد الصورة الكارتيزية لمعادلة المنحنى.

(44) أوجد النقطة على المنحنى $x=-t^3$ ، $y=-6t^2-18t$

يكون عندها ميل المماس أ) 2 ب) 0

(45) أوجد النقطة على المنحنى $x=t^2+t$ ، $y=5t^2-3$

يكون عندها ميل المماس أ) 4 ب) -1

في التمارين من (46) إلى (48) أوجد نقط المنحنى C التي يكون عندها المماس أفقياً أو رأسياً وأوجد d^2y/dx^2 ثم أرسم بيان C.

(46) $y=\sqrt[3]{t}-t$ ، $x=\sqrt[3]{t}$ ، $t\in R$

(47) $y=\sqrt{t}$ ، $x=3t^2-6t$ ، $t\geq 0$

(48) $y=t^2-5t$ ، $x=12t-t^3$ ، $t\in R$

(49) إذا كان C هو المنحنى $y=6\dfrac{t}{1+t^2}$ ، $x=2\dfrac{\left(1-t^2\right)}{1+t^2}$

اثبت أن $4yy''+4y'^2+9=0$

(50) اثبت أن ، $y''=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$ واستخدم هذه الصيغة في إيجاد y'' للتمارين من (37) إلى (41) عند النقطة المعطاة .