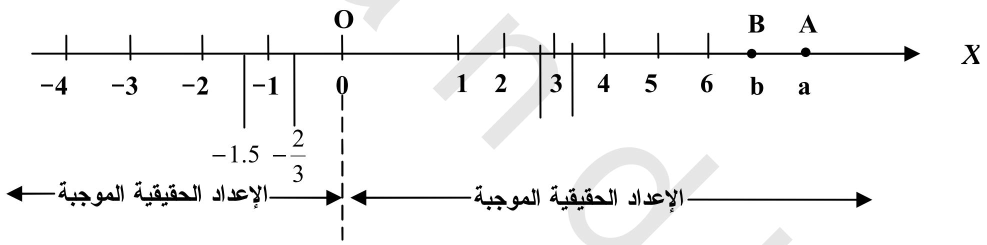
الباب الأول

المتباينات والدوال

بند 1-1: المتباينات

إن جميع مبادئ الحسبان مبنية على خواص مجموعة الإعداد الحقيقية R. هناك تناظر أحادي بين R وبين نقط واقعة على خط الإعداد (خط الإعداد الحقيقية) كما هو موضح في شكل (1)



شكل (1)

شكل النقطة 0 نقطة الأصل وتناظر العدد 0 (صفر)، وهو ليس موجباً ولا سالباً. ويسمى العدد الحقيقي المصاحب لنقطة على خط الأعداد، إحداثي النقطة.

إذا كان a , b عددين حقيقيين فإن a > b (a أكبر من b) إذا كان a-b موجباً. ويماثل ذلك b < a (b أصغر من a). ومن ثم نلاحظ أن a > b إذاً وفقط إذا كانت النقطة A المناظرة للعدد a تقع إلى اليمين بالنسبة للنقطة B المناظرة للعدد b. ومن الرموز الأخرى المستخدمة مع المتباينات $a \le b$ وتعني a < b أو a = b وكذلك $a < b \le c$ وتعني أن a < b، $b \le c$.

ولذلك نستطيع أن نكتب على سبيل التوضيح $2 > 5$، $-2 > -4$، $0 < (-3)^2$، $b^2 \geq 0$.

ومن السهل إثبات صحة ما يلي للأعداد الحقيقية a،b، c.

1) إذا كان a > b، b > c فإن a > c
2) إذا كان a > b، فإن a + c > b + c
3) إذا كان a > b، فإن a - c > b - c
4) إذا كان a > b, c موجباً، فإن ac > bc
5) إذا كان a > b, c سالباً، فإن ac < bc

ويستطيع القارئ كتابة العلاقات المناظرة إذا ماكانت a < b ونرمز للقيمة المطلقة للعدد الحقيقي a بالرمز $|a|$ ويمكن تعريفها على النحو التالي:

$$|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

وتعتبر $|a|$ عن المسافة بين النقطة A وبين نقطة الأصل O، ولذلك فإن المسافة بين A، B هي $|a-b|$. أيّ أن، $5 = |5|$، $3 = |-3|$، $|O| = O$، $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$، $|-1+\pi| = \pi - 1$.

عندما نكتب $A(a)$ تعني أن النقطة A احداثيتها هو a $|a|$ يمثل بعد A عن نقطة الأصل.

البعد بين النقطتين $A(-2)$ ، $B(7)$ هو

$$\begin{aligned} d_{AB} &= |a-b| \\ &= |-2-7| \\ &= |-9| = 9 \end{aligned}$$

إن البعدين A، B أو المسافة بين A، B أيْ $|a-b|$ هو عدد الوحدات بين B,A. وكذلك $|a|$ هو عدد الوحدات بين نقطة A ونقطة الأصل O. وأهم خواص القيم المطلقة هي، بفرض $(b > 0)$،

1) $|a| < b$ إذا وفقط إذا كان $-b < a < b$

2) $|a| > b$ إذا وفقط إذا كان $a > b$ أو $a < -b$

3) $|a| = b$ إذا وفقط إذا كان $a = b$ أو $a = -b$

فعندما نكتب $|a| < 3$، تعني $-3 < a < 3$

، $|a| \geq 2$ تعني $a \geq 2$ أو $a \leq -2$

تعريف : المتباينة في x هي تعبير رياضي يحتوي على الأقل واحد من الرموز >، <، ≤، ≥، مثل

$$2x + x^2 > 1 - x \text{ ، } 3x - 1 > \sqrt{x} \text{ ، } -5 < 2x + 1 < 10$$

وعندما يقال، حل المتباينة يشبه نظيره في المعادلات. فكلمة حل المعادلة تعني إيجاد القيم الممكنة لجذور المعادلة، أما حل المتباينة يعنى ايجاد مجموعة قيم المجهول x التي تحقق المتباينة، وغالباً ما نستخدم الفنرات intervals فنستعمل الترميز $\{x: .....\}$ حيث يستخدم الفضاء الذي بعد الشارحة لوصف القيود على المتغير x.

فمثلاً :

$\{x: a \leq x < b\}$ يقرأ قيم x بحيث $a \leq x < b$ وتعني مجموعة جميع الأعداد الحقيقية الأكبر من أو تساوي a ولكنها أصغر من b.

وطريقة الترميز المكافئة لهذه المجموعة بأسلوب الفترات هي $[a, b)$ القوس $[$ يستخدم عندما يوجد ≤، القوس] لما ≤ وإذا حذفت أو = نستعمل) و(.

فمثلاً

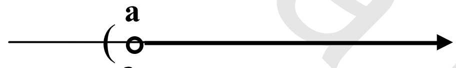
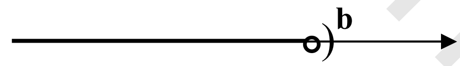
فترة مغلقة $\{x: 2 \leq x \leq 5\} = [2,5] \rightarrow$

فترة نصف مغلقة $\{x: -2 \leq x \leq 5\} = [-2,5) \rightarrow$

فترة نصف مغلقة $\{x: --1 < x \leq 3\} = (-1,3] \rightarrow$

فترة مفتوحة $\{x: 7 < x < 11\} = (7,11) \rightarrow$

وعموماً (a,b) فترة مفتوحة، $[a,b]$ فترة مغلقة، وكل من $[a,b)$ و $(a,b]$ فترات مغلقة. إذا كان أي من a ، b هو $\pm\infty$ يقال أن الفترة لانهائية (غير منتهية) أو تسمى شعاع مثل $[a,\infty)$، $(-\infty,\infty)$ وهكذا. والجدول يوضح مختلف فترات الأعداد الحقيقية والترميز المناظر وبياناتها على خط الإحداثيات (خط الأعداد).

الترميز	التعريف	بيان الفترة
(a,b)	$\{x: a < x < b\}$	
$[a,b]$	$\{x: a \le x \le b\}$	
$[a,b)$	$\{x: a \le x < b\}$	
$(a,b]$	$\{x: a < x \le b\}$	
(a,∞)	$\{x: x > a\}$	
$[a,\infty)$	$\{x: x \ge a\}$	
$(-\infty,b)$	$\{x: x < b\}$	
$(-\infty,b]$	$\{x: x \le b\}$	
$(-\infty,\infty)$	R $\{x: -\infty < x < \infty\}$	

جدول (1) الفترات : النقطة المجوفة ○ ≡ مفتوحة ≡) أو (

النقطة المغلقة • ≡ مغلقة ≡] أو [

مثال (1)

حل المتباينات الآتية ثم وضح بيان الحل .

أ) $\frac{3-2x}{5} < 1$ ب) $\frac{3x+2}{13} \ge \frac{11}{26}$

جـ) $-5 \le \frac{4-3x}{2} < 1$ د) $x^2 - 14 > 5x$

الحل

أ) $\frac{3-2x}{5} < 1$

بالضرب في (5)،

$$3-2x < 5$$

اطرح (3)

$$-2x < 2$$

اقسم على (2)

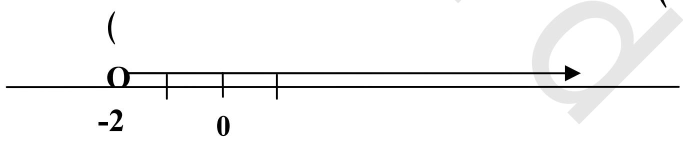
$$-x < 2$$

اضرب في (-1) فتصبح علامة التباين، إذن

$$x > -2$$

مجموعة الحل هي $x : x > -2$ ، هي الفترة $(-2,\infty)$

وبيان الحل هو شكل (2)



شكل (2)

ب) $\frac{3x+2}{13} \geq \frac{11}{26}$

إضرب في 26

$$6x+4 \geq 11$$

إطرح 4،

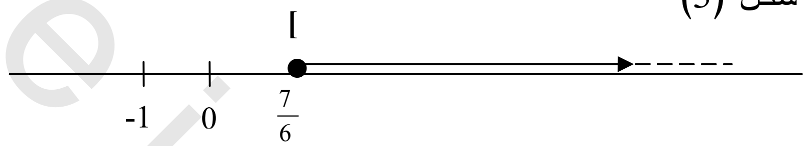
$$6x \geq 7$$

إقسم على 6

$$x \geq \frac{7}{6}$$

مجموعة الحل هي $x : x \geq \frac{7}{6}$ ، هي الفترة $\left[\frac{7}{6}, \infty\right)$

وبيان الحل هو شكل (3)



شكل (3)

جـ) $$-5 \leq \frac{4-3x}{2} < 1$$

إضرب في 2

$$-10 \leq 4 - 3x < 2$$

إطرح 4

$$-14 \leq -3x < -2$$

إقسم على 3−، واعكس علامتى التابين

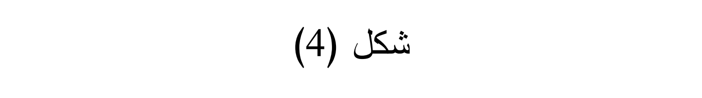
$$\frac{14}{3} \geq x > \frac{2}{3}$$

وهذه تكافىء المتابينة

$$\frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}$$

مجموعة الحل هي $\left\{x : \frac{2}{3} < x \leq \frac{14}{3}\right\}$ أو هي الفترة $\left[\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$

وبيان الحل هو شكل (4)



شكل (4)

د) $x^2 - 14 > 5x$

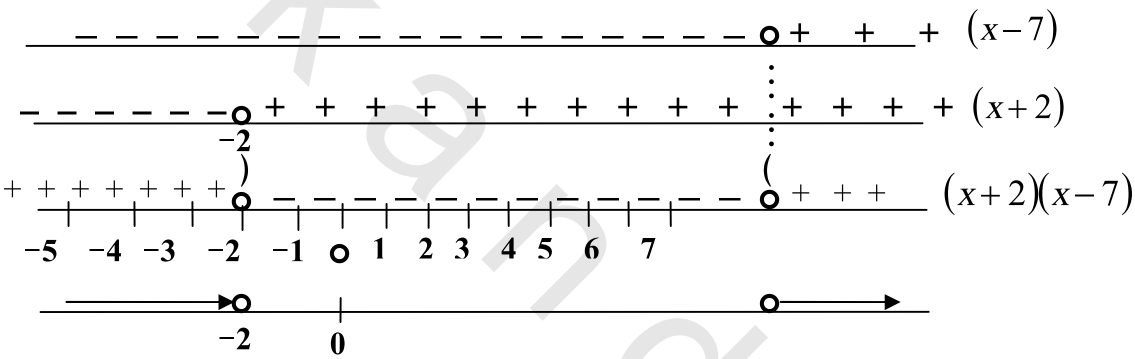
إطرح $5x$

$$x^2 - 5x - 14 > 0$$

حلل لعوامل الدرجة الأولى

$$(x-7)(x+2) > 0$$

نفحص بعد ذلك إشارتي العاملين $x-7$ و $x+2$ كما هو موضح في شكل (5)



شكل (5)

إذن مجموعة الحل هي $\{x : x < -2 \quad or \quad x > 7\}$ أو هو اتحاد الفترتين $(-\infty, -2) \cup (7, \infty)$

مثال(2)

حل المتباينة ووضح بيانها

أ) $\dfrac{3}{x+2} \le \dfrac{4x}{x+3}$

ب) $\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)^2 < \dfrac{25}{4}$

الحل

أ) $\frac{3}{x+2} \le \frac{4x}{x+3}$

إطرح $\frac{4x}{x+3}$ ،

$$\frac{3}{x+2} - \frac{4x}{x+3} \le 0$$

وحد المقام

$$\frac{3(3+x) - 4x(x+2)}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

إختصر،

$$\frac{3x+9-4x^2-8x}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

$$\frac{-4x^2-5x+9}{(x+2)(x+3)} \le 0$$

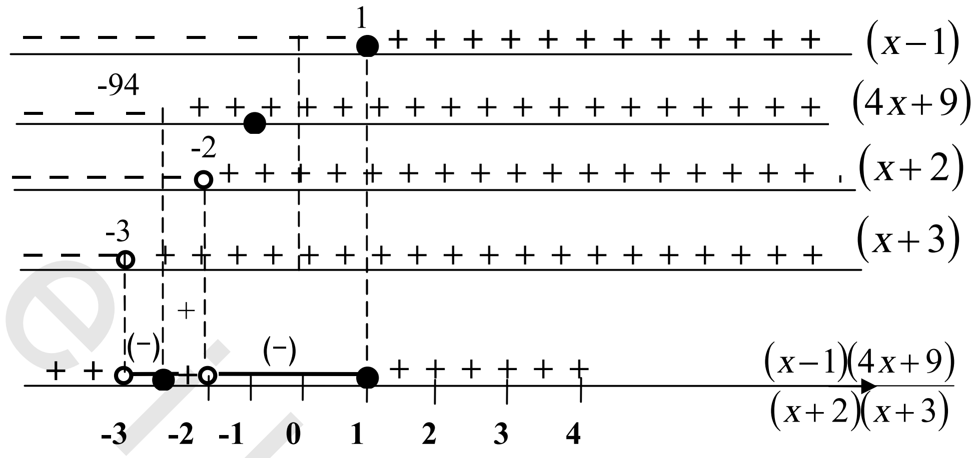
اضرب في (-1) مع عكس إشارة التباين

$$\frac{4x^2+5x-9}{(x+2)(x+3)} \ge 0$$

حلل إلى عوامل الدرجة الأولى

$$\frac{(x-1)(4x+9)}{(x+2)(x+3)} \ge 0$$

افحص إشارة كل عامل في البسط والمقام (شكل 6)



شكل (6)

يلاحظ أنه عند فحص إشارة عوامل المقام أخذنا في الاعتبار أن $x \neq -2$ ، $x \neq -3$ لذلك استعملنا النقط الجوفاء مع عوامل المقام رغم أن إشارة المتباين تحتوي أو = .

بعد ذلك عملية ضرب أو قسمة 4 عوامل تكون موجبة عندما تكون كل العوامل الأربعة موجبة أو كلها سالبة أو اثنان موجبان واثنان سالبان . وتكون العملية سالبة لغير ذلك .

إذن بحثنا أين يكون الكسر موجباً أو = صفر وبذلك نجد أن مجموعة الحل هي،

$$\{x : x \geq 1\} \quad \text{أو} \quad \left\{x : -\frac{9}{4} \leq x < -2\right\}$$

وفترة الحل هي

$$\left[-\tfrac{9}{4} \ , \ 2\right) \cup [1 \ , \ \infty)$$

ب) $$\left(\frac{2x}{x-1}\right)^2 \leq \frac{25}{4}$$

بأخذ الجذر التربيعي مع الأخذ في الاعتبار أن،

$$\sqrt{a^2} = \pm a = |a|$$

نجد أن،

$$\left|\frac{2x}{x-1}\right| \le \frac{5}{2}$$

إذن

$$-\frac{5}{2} \le \frac{2x}{x-1} \le \frac{5}{2}$$

ويستحسن هنا تحويلها إلى متباينتان أنيتان،

$$\frac{2x}{x-1} \le \frac{5}{2} \quad \text{و} \quad \frac{2x}{x-1} \ge -\frac{5}{2}$$

المتباينة الأولى، بطرح $\frac{5}{2}$

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{5}{2} \le 0$$

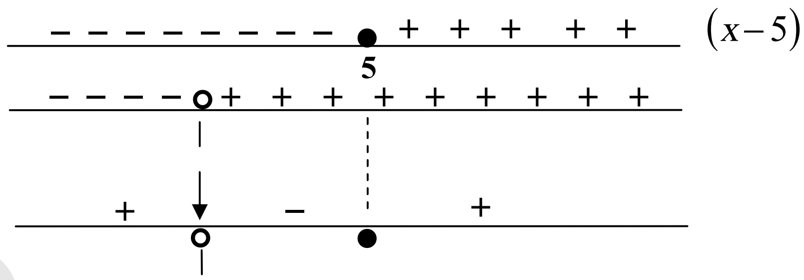
$$\frac{4x-5(x-1)}{2(x-1)} \le 0$$

$$\frac{-x+5}{2(x-1)} \le 0$$

أضرب في -2 مع تغيير علامة التباين،

$$\frac{x-5}{x-1} \ge 0$$

ونفحص إشارتي البسط والمقام مع حذف $x=1$ ، (شكل 7)



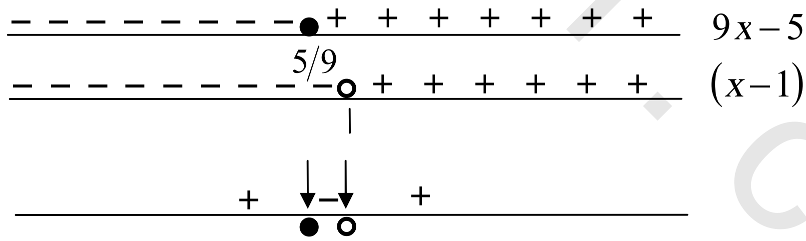
شكل (7)

إذن فترة الحل هي $(-\infty,1)\cup[5,\infty)$

المتباينة الثانية،

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{5}{2}\geq 0$$
$$\frac{4x+5(x-1)}{2(x-1)}\geq 0$$
$$\frac{9x-5}{2(x-1)}\geq 0$$

وفحص إشارتي البسط والمقام مع حذف ، (شكل 8)



شكل (8)

إذن فترة الحل هي $(-\infty,5/9)\cup[1,\infty)$

والحل الذي يحقق المتباينتان الأولى والثانية آنيا هو تقاطع الحلين أي

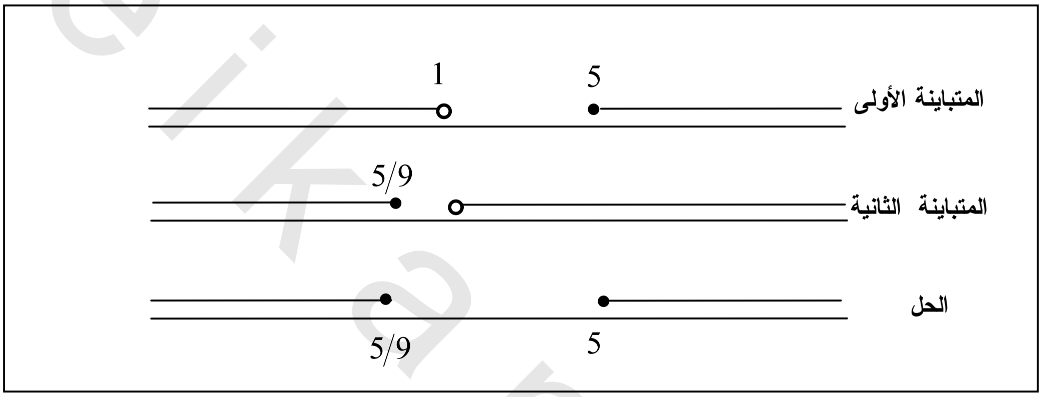
$$(-\infty,1)\cup[5,\infty)\cap(-\infty,5/9]\cup(1,\infty)$$

أيْ $\left(-\infty, 5/9\right] \cup \left[5, \infty\right)$

وبذلك يمكن كتابة مجموعة الحل،

$$\{x : -\infty < x \le 5/9 \quad \text{أو} \quad 5 \le x < \infty\}$$

ويمكن استنباط الحل بيانياً (شكل 9) برسم نتيجتي بياني المتباينتين .



شكل (9)

مثال (3)

حل المتباينات

أ- $|x-3| < 1$ ب- $|3x-5| \ge 4$

جـ- $|x^2 - 3x| > 0$ د- $|x-2| < 0$

هـ- $|x^2 - 3x| \ge 4$ و- $|x^2 + 1| > -2$

الحل

أ) $|x-3| < 1$

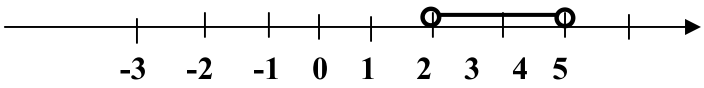
إذن $-1 < x - 3 < 1$

إجمع 3،

$$2 < x < 4$$

مجموعة الحل $\{x : 2 < x < 4\}$ أو هو الفترة $(2,4)$

وبيانها شكل (9)



شكل (9)

ب) $|3x-4| \geq 4$

إذن، $3x-4 \geq 4$ أو $3x-4 < -4$

أضف 4،

$3x \geq 8$ أو $3x \leq 0$

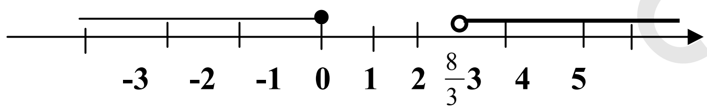
$x \geq \frac{8}{3}$ أ، $x \leq 0$

مجموعة الحل، $\left\{x : x \leq 0 \text{ أو } x \geq \frac{8}{3}\right\}$

أو هي $\left\{x : x \geq \frac{8}{3}\right\} \cup \{x : x \leq 0\}$

وفترة الحل هي $(-\infty,0] \cup \left[\frac{8}{3},\infty\right)$

وبيان الحل بشكل (10)



شكل (10)

جـ) $|x^2-3x| > 0$

القيمة المطلقة موجبة دائماً مهما كانت x الحقيقية إذن مجموعة الحل هي R

د) $|x-2|<0$

القيمة المطلقة لا يمكن أن تكون سالبة مهما كانت x الحقيقية إذن مجموعة الحل هي ϕ (المجموعة الخالية)

هـ) $|x^2-3x|\geq 4$

إذن $x^2-3x\geq 4$ أو $x^2-3x\leq -4$

$x^2-3x-4\geq 0$ أو $x^2-3x+4\leq 0$

جذري المعادلة، $x^2-3x-4=0$ هما

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=-1,4$$

أما المعادلة، $x^2-3x+4=0$

مميزها $b^2-4ac=9-16=-7$

وجذريها تخيليان لذلك فإن المقدار $x^2-3x+4=0$ يحمل دائماً إشارة x^2 أي موجب دائماً ولذلك فإن المتباينة اليسرى ليس لها حل حقيقي بمعنى أم مجموعة حلها هي ϕ .

أما المتباينة اليمنى $x^2-3x-4\geq 0$

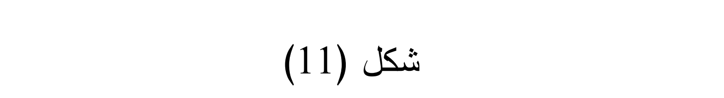
$$(x+1)(x-4)\geq 0$$

فإن مجموعة الحل هي $\{x: x\leq -1 \text{ أو } x\geq 4\}$

أو يكتب $\{x: x\leq -1\}\cup\{x: x\geq 4\}$

أو الفترة $(-\infty,-1]\cup[4,\infty)$

والبيان في شكل (11)



شكل (11)

تمارين (1-1)

1) إختصر المقدار

(أ) $(-3)|2-4|$ (ب) $|-8|/(-2)$ (جـ) $\dfrac{|x-2|}{x-2}$

(د) $|\sqrt{5}-3|$ (هـ) $|2-\sqrt{2}|$ (و) $\left|\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\right|$

(ز) $5/|-2|$ (ح) $|x-3|$ و $x>3$

(ط) $|3-\pi|$ (ك) $|x+7|$ و $x\geq -7$

2) حل المتباينة وأوجد مجموعة الحل على صورة فترة ومثله بيانياً

(أ) $3x-1\geq 2$ (ب) $4-x<1$ (جـ) $2x+5<3x-7$

(د) $x-8>5x+3$ (هـ) $3\leq\dfrac{2x-3}{5}<7$ (و) $x^2-x-6<0$

(ز) $-2<\dfrac{4x+1}{3}\leq 0$ (ح) $x^2+4x+3\geq 0$ (ط) $x^2-3x+9>0$

(ك) $x^2-2x-5>2$ (ل) $x^2-4x-17\leq 4$ (م) $x(2x+3)\geq 5$

(ن) $x(3x-1)\leq 4$ (س) $\dfrac{x+1}{2x-3}>2$ (ي) $\dfrac{x-2}{3x+5}\leq 4$

3) أوجد فترة حل المتباينة

(أ) $\dfrac{1}{x-2}\geq\dfrac{3}{x+1}$ (ب) $\dfrac{2}{2x+3}\leq\dfrac{2}{x-5}$

(جـ) $|x+3|<2$ (د) $|x-4|\leq 0.3$

(هـ) $|2x+5|<4$ (و) $|3x-7|\geq 5$

4) حل المتباينة الآتية :

(أ) $-\frac{1}{5} < \frac{7-2x}{5} < \frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{x} \geq 3$

(جـ) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 \geq \frac{1}{4}$ (د) $\left|x^2-1\right| > 3$

(هـ) $\left|x^2-11x\right| \geq 0$ (و) $\left|x^2+x-1\right| < 0$

5) حل المتباينات :

(أ) $21+\sqrt{x-2} > 23$ (ب) $|x-2| \geq |x+1|$

(جـ) $|x-2| \geq x+1$ (د) $x-2 \leq |x+1|$

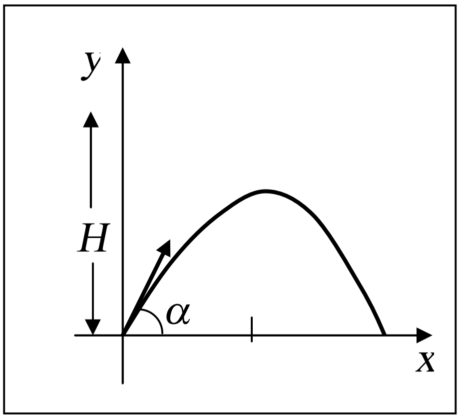
(هـ) $x-2 \geq |x+1|$ (و) $\frac{x+1}{|x-1|} > 1$

(ز) $\left|\frac{H-50}{5}\right| \leq 1.6$ **حيث** : (i) $H > 50$. (ii) $H < 50$.

6) أطلقت قذيفة من سطح الأرض بسرعة u تميل على الأفقي بزاوية α . فتحركت على المسار، (شكل 12)

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx}{2u^2\cos^2\alpha}$$

فكان أقصى ارتفاع لها هو H .



شكل (12) : تمرين 6

أ) استعمل المتباينة

$$y \leq H$$

لإيجاد العلاقة بين H ، u ، α باعتبار g عجلة الجاذبية مقداراً ثابتاً .

ب) أوجد قيم x التي تكون القذيفة عندها على ارتفاع أكبر من $H/2$.

7) حل المتباينات

(أ) $x^2 > x+2$ (ب) $|x| > x+2$

(جـ) $|x| > |x+2|$ (د) $x > |x+2|$

(هـ) $\frac{x}{3} + \frac{3}{x} \le \frac{10}{3}$ (و) $\left|\frac{x}{x-1}\right| < 2$

(ز) $|x| + |x-1| \ge 1$ (ح) $|x-3| + |x-2| \le 4$

8) إذا كانت a ، b ، c أعداد حقيقية موجبة ، $c > a > b > 0$ ، أثبت أن مجموعة الحل للمتباينة $|x-a| + |x-b| < c$

هي الفترة،

$$\left(\frac{a+b-c}{2}, \frac{a+b+c}{2}\right)$$

9) أثبت أن المقدار $|x| + |x-c|$ ثابت في الفترة $[0,c]$.

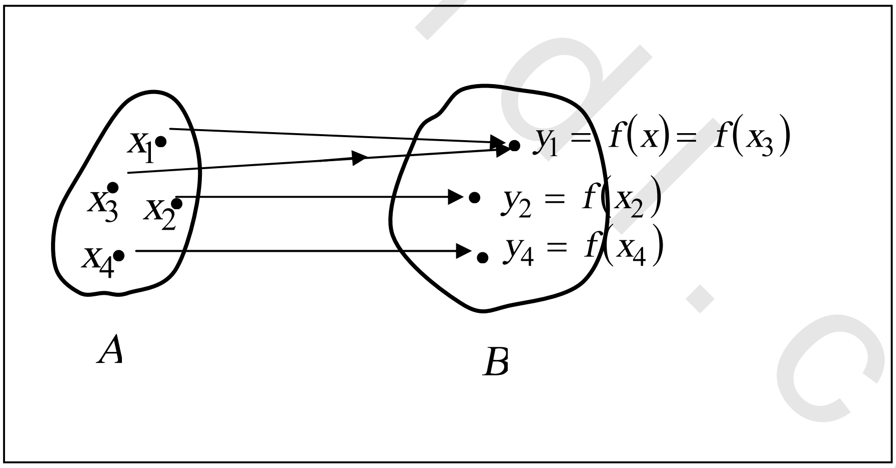
بند 1-2: الدوال

من التعريفات الأساسية الهامة في الحسبان هو الدالة . فطالما درسنا تأثير تغير كمية معينة على كمية متغيرة أخرى . مثل تأثير تغيير سرعة الرياح على درجة حرارة الجو أو تأثير مقياس النبض على مقياس ضغط الدم وهكذا . هذا إذا كانت الكمية الثانية تعتمد فعلاً على الكمية الأولى . فإذا كان تغيير كمية x يتبعه تغيير في كمية y فإننا نستطيع توظيف الكمية x لإعطاء معلومات عن y .

ونقول أن y دالة في x بمعنى أن x تدل على y .

تعريف : الدالة

"دالة f من مجموعة A إلى مجموعة B هي تناظر يعين، لكل عنصر x في المجموعة A ، عنصراً وحيداً y في المجموعة B".



شكل (13)

العنصر y في B هو قيمة f عند x ويرمز له $f(x)$ "f of x" أ، "دالة x". المجموعة A هي نطاق الدالة والمجموعة B هي النطاق المساعد

للدالة f ، أما مدى f فهو المجموعة الجزئية، من النطاق المساعد B ، التي تتكون من القيم الممكنة للدالة $f(x)$ المناظرة لقيم x في A .

أحياناً ما نصف الدوال برسم كالموضح في شكل (13)، حيث مثلنا المجموعتين A ، B بنقط داخل منطقتين في المستوى.

أما الأقواس المنحنية فتوضح أن العناصر $f(x_1)$ ، $f(x_2)$ ، $f(x_3)$ و $f(x_4)$ في B تناظر العناصر x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 على الترتيب في A . يجب أن نتذكر دائماً أن لكل عنصر x في A عنصر واحد فقط يناظره $f(x)$ في B . قد يحدث أن عنصرين مختلفين في A مثل x_1, x_3 لهما نفس قيمة الدالة $y_1 = f(x_3) = f(x_1)$ ، في B .

تعريف : الدالة الأحادية

نقول أن f دالة أحادية أو "واحد – لواحد" إذا كان $f(x) \neq f(y)$ طالما أن $x \neq y$.

الدالة الموضحة في شكل (13) ليست أحادية، لأن $f(x_1) = f(x_3)$ بينما $x_1 \neq x_3$.

الدالة الأحادية تعين كل عنصر x في A عنصراً وحيداً $f(x)$ في B والعكس كل عنصر $f(x)$ في y يناظره عنصراً وحيداً x في A .

عادة ما نعرف دالة f بكتابة تعبير جبري أو قاعدة لإيجاد $f(x)$ مثل $f(x) = 2x+3$ أ، $f(x) = \sqrt{3x-2}$. أو نقول أن $f(x)$ هي ضعف مربع x أ، $f(x)$ هي الجذر التربيع للفرق بين العدد 5 و x . وهكذا.

فمثلاً : إذا أعطينا $f(x) = \sqrt{x-2}$ ، ونعلم أن يفترض أن يكون مجموعة العناصر الحقيقية التي تحقق شرط البقاء على $f(x)$ حقيقية، إذن $x-2 \geq 0$ تعطي $x \geq 2$ ونستنتج أن النطاق هنا هو الفترة $[2,\infty)$، فإذا

رمزنا لنطاق $f(x)$ بالرمز D_f $(Domain\ of\ \ f)$، فإن $[2,\infty)$ $D_f=$.
ويجب تذكر أن إذا كان x تنتمي إلى D_f (أيْ $x \in D_f$) نقول أن f معرَّفة عند x أو أن $f(x)$ موجودة .

إذا كانت c هي مجموعة جزئية من النطاق فلابد أن f معرَّفة على c
فمثلاً في حالة $f(x)=\sqrt{x-2}$ ، $D_f=[2,\infty)$ فإن f معرفة في $A=[2,\infty)$ وفي $S_1=(2,5)$ أ، $S_2=(4,\infty)$ وهكذا لأن كل من S_1 ، S_2 مجموعتان جزئيتان من A .

أما مصطلح f غير معرَّفة عند x فيعني أن x ليست في نطاق f أ، $x \notin D_f$.

فمثلاً عندما $x=1$ ، $f(1)=\sqrt{-1}$ وهو عدد غير حقيقي ونقول أن $f(1)$ غير معرفة لأن $x=1$ لا تنتمي إلى D_f .

مثال (1)

إذا كانت $$f(x)=\frac{\sqrt{3-x}}{x+1}$$

أ) أوجد D_f

ب) أوجد $f(-6)$ ، $f(2)$ ، $f(x+3)$ ، $f(x-1)$

<u>الحل</u>

أ) لإيجاد D_f، يجب أن تكون $f(x)$ عدد حقيقي معرف وهذا يحدث فقط إذا كان، المقدار تحت الجذر موجباً أو يساوي صفر والمقام لا يساوي صفر

أي $x+1\neq 0$ ، $3-x\geq 0$

$$-x\geq -3$$

$$x\leq 3 \quad x\neq -1$$

إذن $D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,3]$

ب) $f(-6) = \frac{\sqrt{3-(-6)}}{-6+1} = \frac{\sqrt{9}}{-5} = -\frac{3}{5}$

$f(2) = \frac{\sqrt{3-2}}{2+1} = \frac{1}{3}$

$f(x+3) = \frac{\sqrt{3-(x+3)}}{2+1} + \frac{\sqrt{-x}}{x+4}$

(يلاحظ أن $x+3 \in D_f$ ، $x \in D_f$

تؤدي إلى أن $x \in D_f - 3$

أيْ $D_{f(x+3)} = (-\infty,-4) \cup (-4,0]$

أيْ أن نطاق هذه الدالة، $f(x+3)$ ، هي جميع الأعداد الحقيقية السالبة ماعدا $x=-4$ ، قد نكتبها، $\overline{R} - \{-4\}$)

$f(x-1) = \frac{\sqrt{3-(x-1)}}{x-1+1} + \frac{\sqrt{4-x}}{x}$

(ونطاق هذه الدالة هو

$D_{f(x-1)} = D_f + 1$

($D_{f(x-1)} = (-\infty,1) \cup (1,4]$)

<u>تعريف : خارج قسمة الفرق difference quotient</u>

إذا كانت f دالة معلومة فإن خارج قسمة الفرق يعرَّف

على النحو

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \neq 0$$

وسوف نرمز له بالترميز $f(x,h)$ لأنه سيكون دالة في كل من x و h .

مثال (2)

أوجد خارج قسمة الفرق $f(x,h)$ للدوال الآتية في أبسط صورة .

أ) $f(x)=x^2$ ب) $f(x)=x^2+6x$ جـ) $f(x)=\frac{1}{x}$

الحل

أ)

$$f(x,h)=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}$$
$$=\frac{2hx+h^2}{h}=2x+h$$

ب)

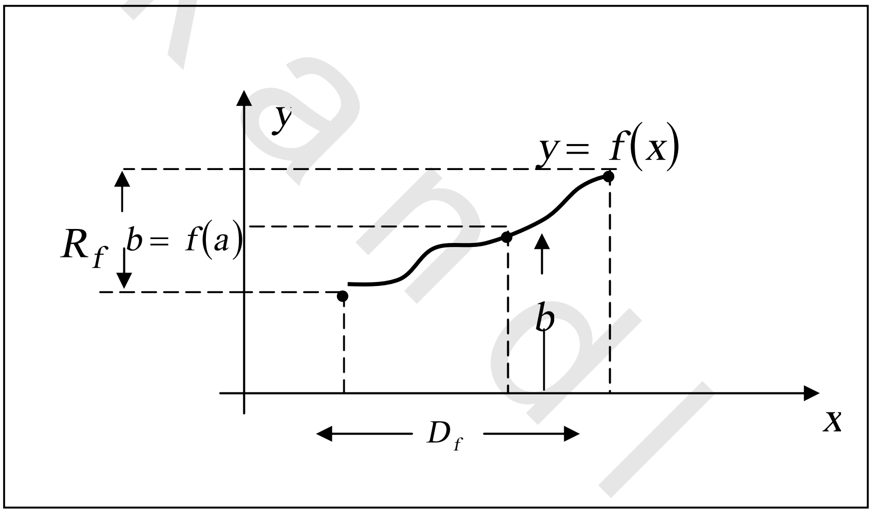
$$f(x,h)=\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+6\frac{(x+h)-x}{h}$$
$$=2x+h+6$$

$$f(x,h)=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$
$$=\frac{-h}{hx(x+h)}=\frac{-1}{x^2+hx}$$

(نلاحظ أنه في (ب) استعملنا أنه إذا كان $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ فإن، $f(x,h)=f_1(x,h)+f_2(x,h)$ على القارئ إثبات ذلك).

إذا كانت f دالة معلومة فمن الممكن استخدام الرسم لتوضيح التغيير في قيمة الدالة كلما تغيرت x خلال D_f .

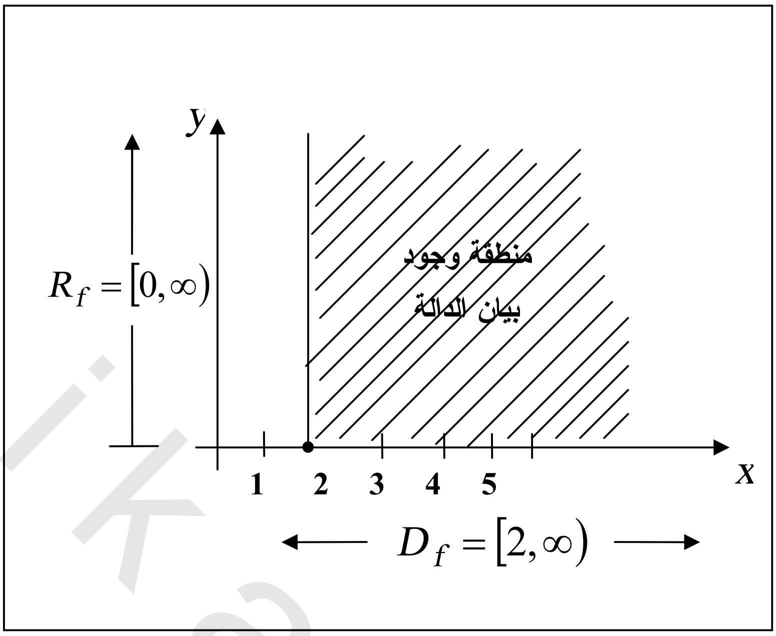
وبيان الدالة f بنطاق D_f هو بيان المعادلة $y = f(x)$ لقيم x في D. ويقصد بالبيان مجموعة النقط $(x, f(x))$، حيث $x \in D_f$. والعكس إذا كانت نقطة مثل $p(a,b)$ تقع على البيان فإن الإحداثي y أيْ b هو قيمة الدالة $f(a)$. وشكل (14) يصور بيان f ويوضح النطاق والمدى (عادة نرمز لمدى الدالة f بالرمز R_f " Range of f ") . في هذا الشكل يتضح أن D_f ، R_f فترتان مغلقتان . في أمثلة أخرى قد يكونا مفتوحتان أو لا نهائيتان أو غير ذلك من مجموعات الأعداد الحقيقية .



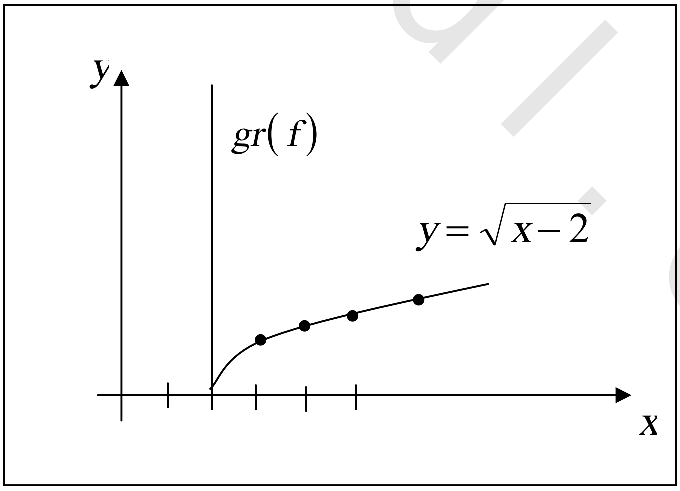
شكل (14)

فإذا اعتبرنا الدالة $f(x) = \sqrt{x-2}$ كمثال، نجد أن $y = \sqrt{x-2}$ ، $D_f = [2,\infty)$ ولإيجاد R_f نجد أن y موجبة دائماً كذلك بكتابة $x = 2 + y^2$ ، نجد أنه لا يوجد قيود أخرى على y .

لذلك فإن y حقيقية موجبة، $R_f = [0,\infty)$ وشكل (15) يوضح منطقة وجود بيان الدالة . شكل (16) يوضح البيان، $gr(f)$.


y
$R_f = [0,\infty)$
منطقة وجود
بيان الدالة
1 2 3 4 5
x
$D_f = [2,\infty)$

شكل (15)


y
$gr(f)$
$y = \sqrt{x-2}$
x

شكل (16)

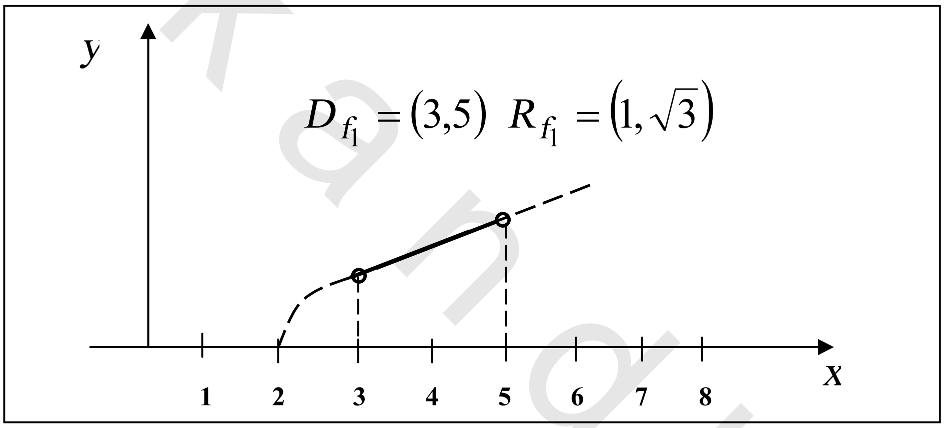
وحيث أن $f(x)$ تظل معرفة في أية نطاق جزئ S من D_f فإننا نستطيع بيان الدوال

$$f_1(x)=\sqrt{x-2} \quad ، \quad x\in S_1=\{x:3<x<5\}$$

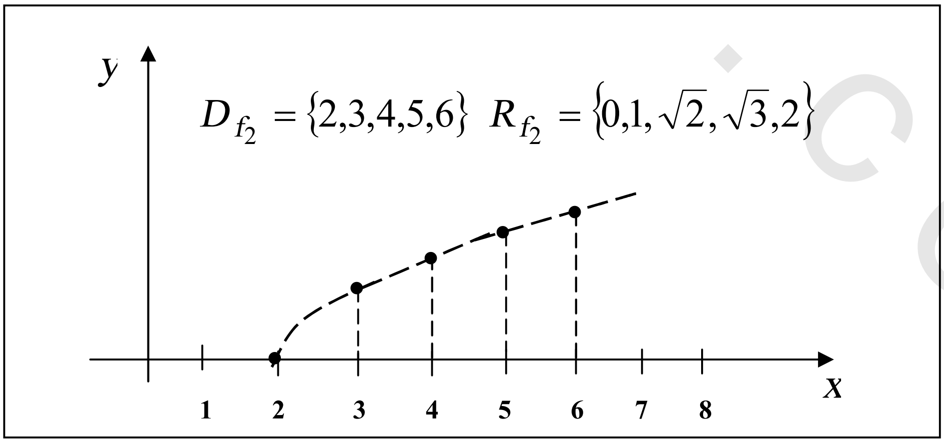
و $$f_2(x)=\sqrt{x-2} \quad ، \quad x\in S_2=\{2,3,4,5,6\}$$

و $$f_3(x)=\sqrt{x-2} \quad ، \quad x\in S_3=[5,\infty)$$

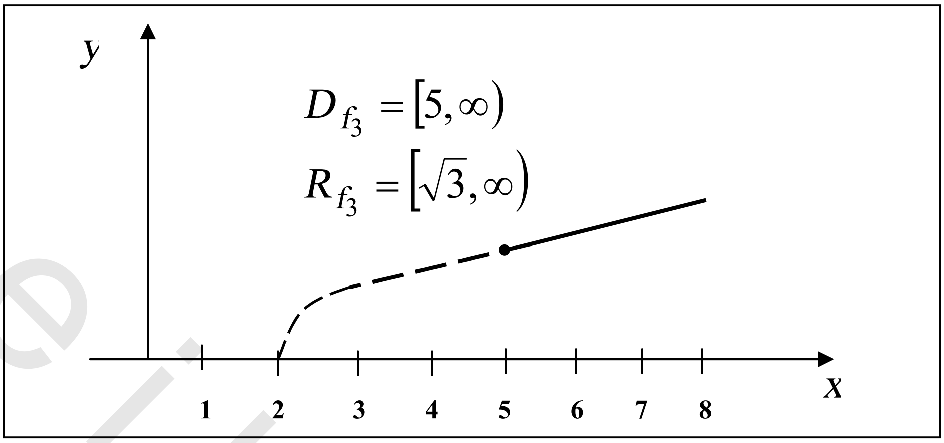
والأشكال 17، 18، 19 تبين $gr(f_1)$، $gr(f_2)$، $gr(f_3)$ وقد استعملنا الترميز $gr(f)$ بمعنى بيان الدالة f $(graph\ \ f)$



شكل (17) : $gr(f_1)$



شكل (18) : $gr(f_2)$



شكل (19) : $gr(f_3)$

ويمكن كتابة بيانات الدوال السابقة على الصورة،

$$gr(f) = \{(x, y) : y = \sqrt{x-2}, x \geq 2\}$$
$$gr(f_1) = \{(x, y) : y = \sqrt{x-2} \;,\; 3 < x < 5\}$$
$$gr(f_2) = \{(2,0), (3,1), (4, \sqrt{2}), (5, \sqrt{3}), (6,2)\}$$
$$gr(f_3) = \{(x, y) : y = \sqrt{x-2} \;,\; x \geq 5\}$$

وعموماً بما أنه يوجد قيمة واحدة فقط $f(a)$ لكل a في النطاق فإنه يوجد نقطة واحدة فقط $gr(f)$ لها إحداثي $x-$ يساوي a .

من ثم كل خط رأسي يقطع المنحنى $gr(f)$ في نقطة واحدة فقط وتبعاً لذلك فإن $gr(f)$ لا يمكن أن يكون صورة مثل دائرة أو قطع مخروطي ناقص أو زايد حيث من الممكن أن يقطع الخط الرأسي مثل هذه المنحنيات في أكثر من نقطة .

ومن الجدير التأكيد عليه أن تقاطع البيان $gr(f)$ مع محور x $(x - \text{intercepts})$ هي جذور المعادلة $f(x) = 0$.

وهذه الجذور تسمى أصفار الدالة f . بينما تقاطع $gr(f)$ مع المحور y

هو $f(0)$ ، وحيد القيمة إن وجد. كذلك قد يكون للدالة أصفاراً أو قد لا يكون إذا كان $gr(f)$ لا يقطع المحور x .

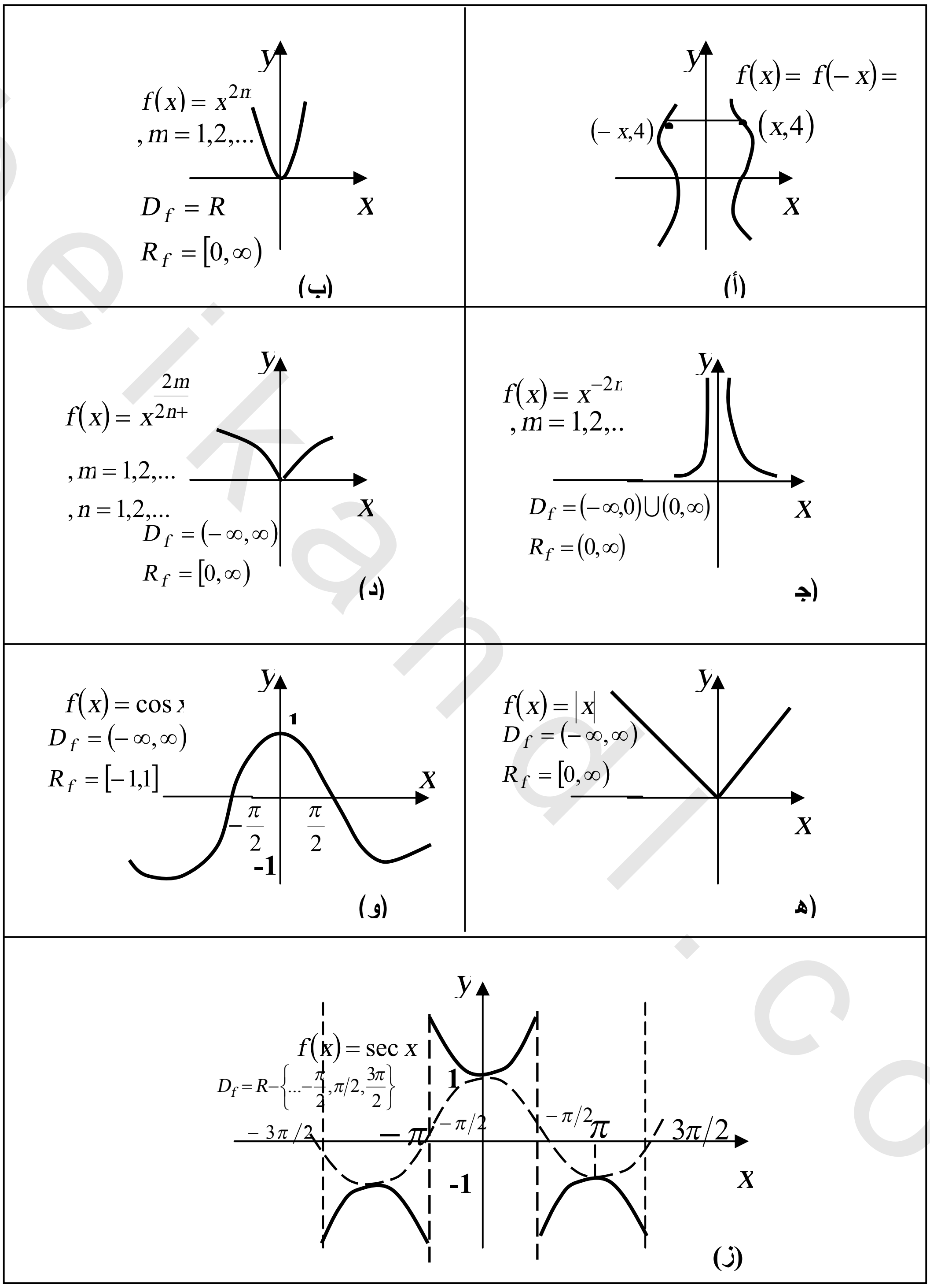
بعض الدوال تعطي بيانات فيها بعض من التماثل . مثل تماثل $gr(f)$ بالنسبة لخط معين أو نقطة معينة . من بين هذه الداول ما يلي :

1) الدوال الزوجية even functions

الدالة الزوجية f تحقق الشرط $f(-x)=f(x)$ لكل x في النطاق D_f وبذلك يكون $gr(f)$ متماثلاً بالنسبة لمحور y .

ومن الدوال الزوجية، 1، x^2 ، x^4 ،... x^{2m} ، $\frac{1}{x^2}$ ، $\frac{1}{x^4}$ ، ...، $\frac{1}{x^{2m}}$ ، $|x|$ ، $\cos x$ ، $\sec x$ ، $[g(x)]^{2m}$ حيث $m=0,1,2...$ ، $g(x)$ أي دالة حقيقية.

وشكل (19) يوضح بيان الدالة الزوجية عموماً وبعض دوال الزوجية معروفة.



$f(x)=f(-x)=$
$(-x,4)$
$(x,4)$
(أ)
$f(x)=x^{2m}$
$, m=1,2,\ldots$
$D_f=R$
$R_f=[0,\infty)$
(ب)
$f(x)=x^{-2m}$
$, m=1,2,\ldots$
$D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$R_f=(0,\infty)$
(جـ)
$f(x)=x^{\frac{2m}{2n+1}}$
$, m=1,2,\ldots$
$, n=1,2,\ldots$
$D_f=(-\infty,\infty)$
$R_f=[0,\infty)$
(د)
$f(x)=|x|$
$D_f=(-\infty,\infty)$
$R_f=[0,\infty)$
(هـ)
$f(x)=\cos x$
$D_f=(-\infty,\infty)$
$R_f=[-1,1]$
(و)
$f(x)=\sec x$
$D_f=R-\left\{\ldots-\frac{\pi}{2},\pi/2,\frac{3\pi}{2}\right\}$
(ز)

شكل (19)

2- الدوال الفردية odd functions

الدالة الفردية تحقق الشرط $f(-x)=-f(x)$ لكل x في نطاقها D_f وبذلك يكون $gr(f(x))$ متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل .

ومن الدوال الفردية x ، x^3 ، x^5 ، ... ، $\frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x^3}$ ، .... ، $\sin x$ ، $\cos ecx$ ، $\tan x$ ، $\cot x$ وشكل (20) يصور بيان الدالة الفردية بصفة عامة وبيانات بعض الدوال الفردية المعروفة .

ويجب تذكر أن معظم الدوال المستخدمة في الحسبان ليست زوجية ولا فردية، ولكن أيْ دالة يمكن تقسيمها إلى مجموع دالتين أحدهما زوجية والأخرى فردية. كذلك يجب تذكر الخواص التالية للدوال الزوجية والدوال الزوجية.

فإذا كانت $Ev(x)$ دالة زوجية، $od(x)$ دالة فردية فإن،

1) $Ev_1(x)\ .\ Ev_2(x)$ هي دالة زوجية .

2) $od_1(x)\ .\ od_2(x)$ هي دالة زوجية .

3) $Ev(x)\ .\ od(x)$ هي دالة فردية .

4) $\frac{Ev_1(x)}{Ev_2(x)}$ ، $\frac{od_1(x)}{od_2(x)}$ دوال زوجية .

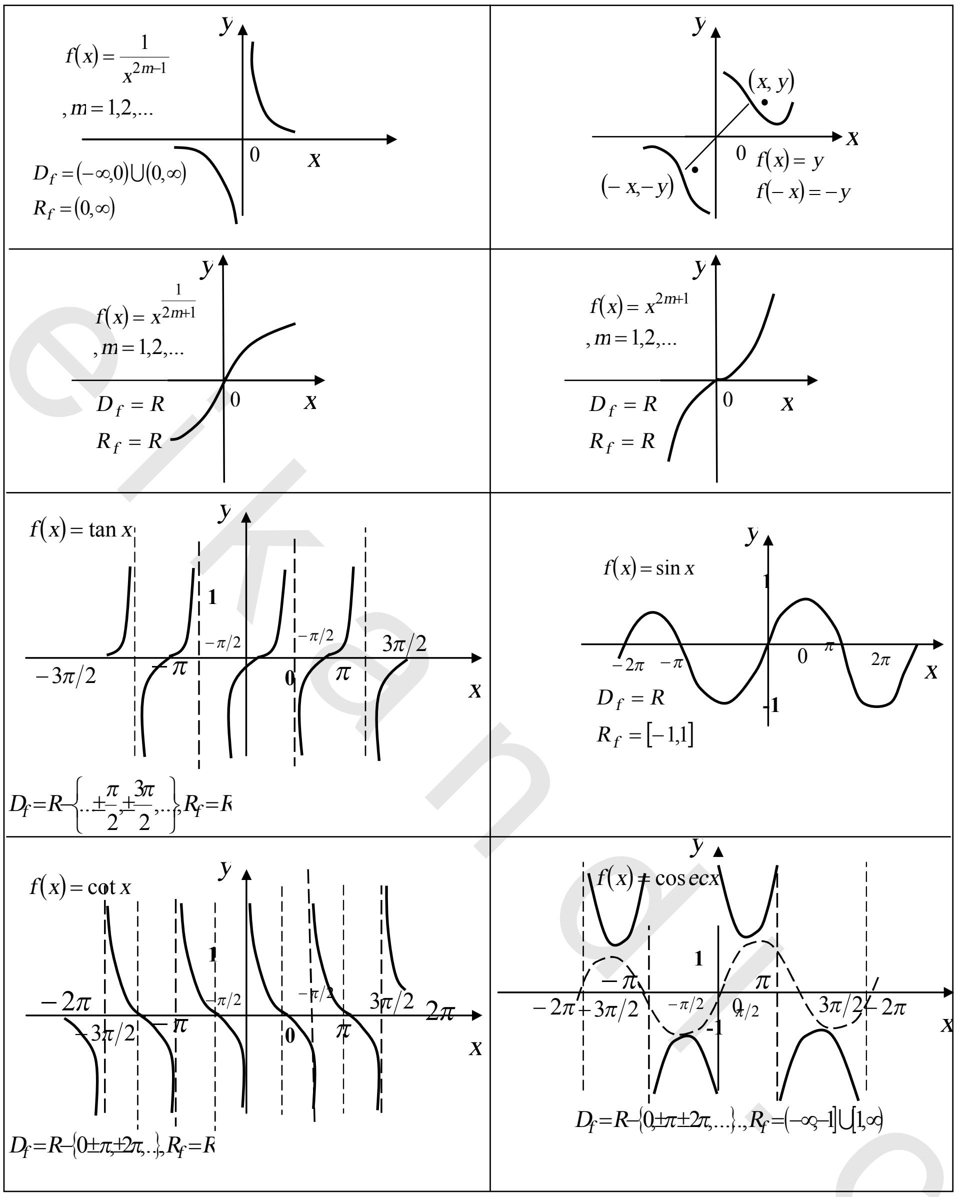
5) $\frac{Ev(x)}{od(x)}$ أو $\frac{od_1(x)}{Ev(x)}$ دوال فردية .

6) $[E_v(x)]^{Ev(x)}$ ، $[E_v(x)]^{od(x)}$ ، $[od(x)]^{Ev(x)}$ دوال زوجية.

7) $[od(x)]^{od(x)}$ دالة فردية.

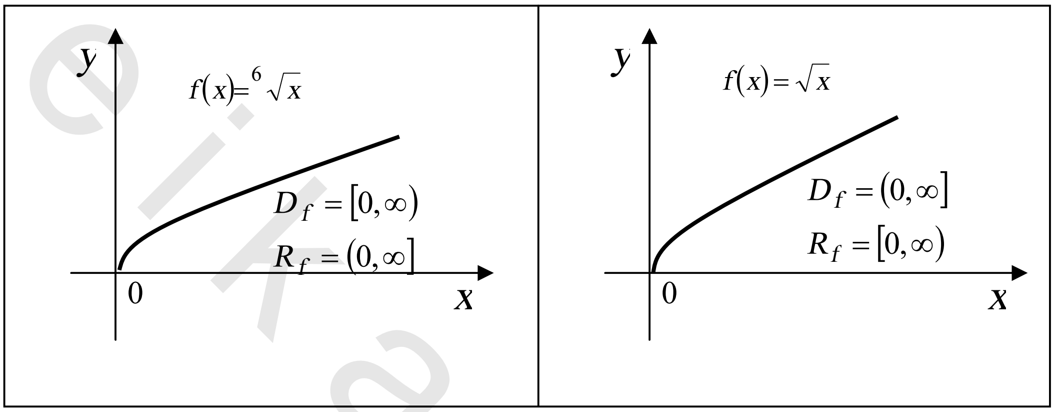
وعلى ذلك فالدوال الآتية زوجية: $x^2\cos x$ ، $x^3\sin x$ ، $\frac{x^2}{x4+1}$ ، $\frac{\sin x}{x}$ ، $\frac{\sec x}{x^2}$ ، $(\cos x)^4$، $(x^2+x^4)^3$ ، $(x^3-x)^2$، لماذا ؟

والدوال الآتية فردية: $x^2\tan x$ ، $\frac{x^2+1}{\sin x}$، $\frac{\cot x}{x^2}$، $(\sin x)^3$، لماذا ؟


$f(x)=\frac{1}{x^{2m-1}}$
$, m=1,2,...$
$D_f=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$
$R_f=(0,\infty)$
(x,y)
$(-x,-y)$
$f(x)=y$
$f(-x)=-y$
$f(x)=x^{\frac{1}{2m+1}}$
$, m=1,2,...$
$D_f=R$
$R_f=R$
$f(x)=x^{2m+1}$
$, m=1,2,...$
$D_f=R$
$R_f=R$
$f(x)=\tan x$
$D_f=R-\left\{...\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},...\right\}, R_f=R$
$f(x)=\sin x$
$D_f=R$
$R_f=[-1,1]$
$f(x)=\cot x$
$D_f=R-\{0,\pm\pi,\pm2\pi,...\}, R_f=R$
$f(x)=\operatorname{cosec} x$
$D_f=R-\{0,\pm\pi,\pm2\pi,...\}, R_f=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

شكل (20)

أما الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ والدالة $f(x)=x^{\frac{1}{2m}}$ ، $m=1,2,...$ فهي ليست زوجية ولا فردية . ويوضح بيانها شكل (21)



شكل (21)

الدوال المتقطعة piecewise functions

تعرف الدوال المعطاة بأكثر من تعبير جبري بالدوال المتقطعة حيث يعطى شكل التعبير الجبري الممثل لها في كل فترة جزئية من نطاقها بشكل مختلف.

مثال (3)

وضح بيان الدالة المعرفة على النحو التالي

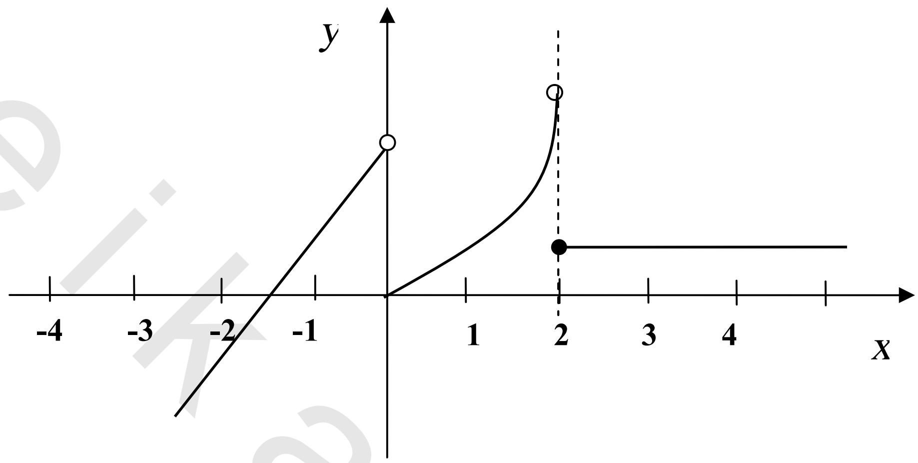
$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & , \quad x<0 \\ x^2 & , \quad 0\le x<2 \\ 1 & , \quad x\ge 2 \end{cases}$$

واكتب النطاق والمدى .

الحل (انظر شكل 22)

ويتضح من الرسم أن $D_f = (-\infty, \infty)$ ، $R_f = (-\infty, 4)$

فعندما $x < 0$ تكون $f(x) = 2x + 3$ وبيان f هو جزء من المستقيم



شكل (22)

$y = 2x + 3$ كما بشكل (22). الدائرة المفتوحة توضح أن النقطة $(0,3)$ ليست على البيان.

وعندما $0 \leq x < 2$ تكون $f(x) = x^2$ وبيان f هو جزء من القطع المكافئ

$y = x^2$ والنقطة $(2,4)$ ليست من البيان .

وأخيراً عندما $x \geq 2$ تكون جميع القيم هي 1 دائماً، والبيان هو جزء من مستقيم أفقي يسمى نصف مستقيم بنقطة نهاية $(2,1)$ ويلاحظ في هذا المثال أن f هي دالة بيانها يتكون من عدة قطع غير متصلة .

دالة الصحيح الأعظم Greatest integer function

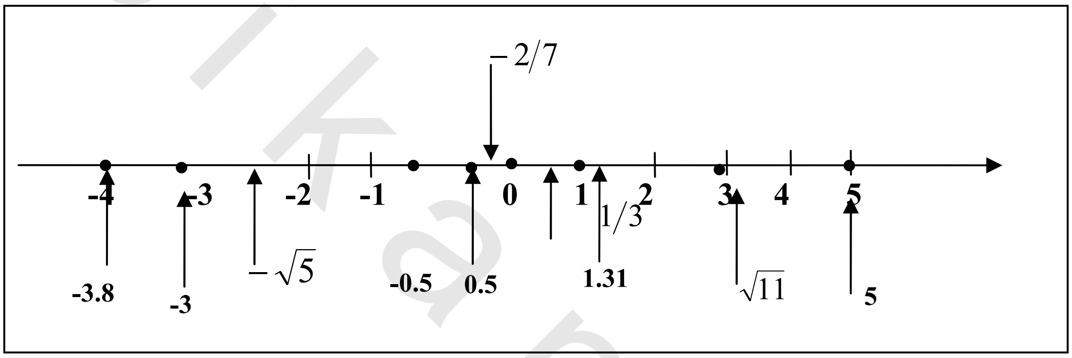
دالة الصحيح الأعظم تعرف على النحو، $f(x) = [x]$ حيث $[x]$ هو أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي . فإذا مثلنا R بنقط على محور x، فإن هي أول عدد صحيح إلى يسار x أو منطبق عليها . فمثلاً،

$[0.5]=0$ ، $[1.31]=1$ ، $\lfloor\sqrt{11}\rfloor=3$ ، $[05\ ]=0$

$[-3]=-3$ ، $[-3.8]=-4$ ، $\lfloor-\sqrt{5}\rfloor=-3$ ، $-[0.5]=-1$

$[|\sin x|]=1$ ، $\left[\dfrac{1}{3}\right]=0$ ، $\left[-\dfrac{2}{7}\right]=-1$ ، ...... وهكذا .

وشكل (23) توضح بيانياً مواضع x ، $[x]$ لكل القيم السابقة على خط الأعداد الحقيقية.



شكل (23)

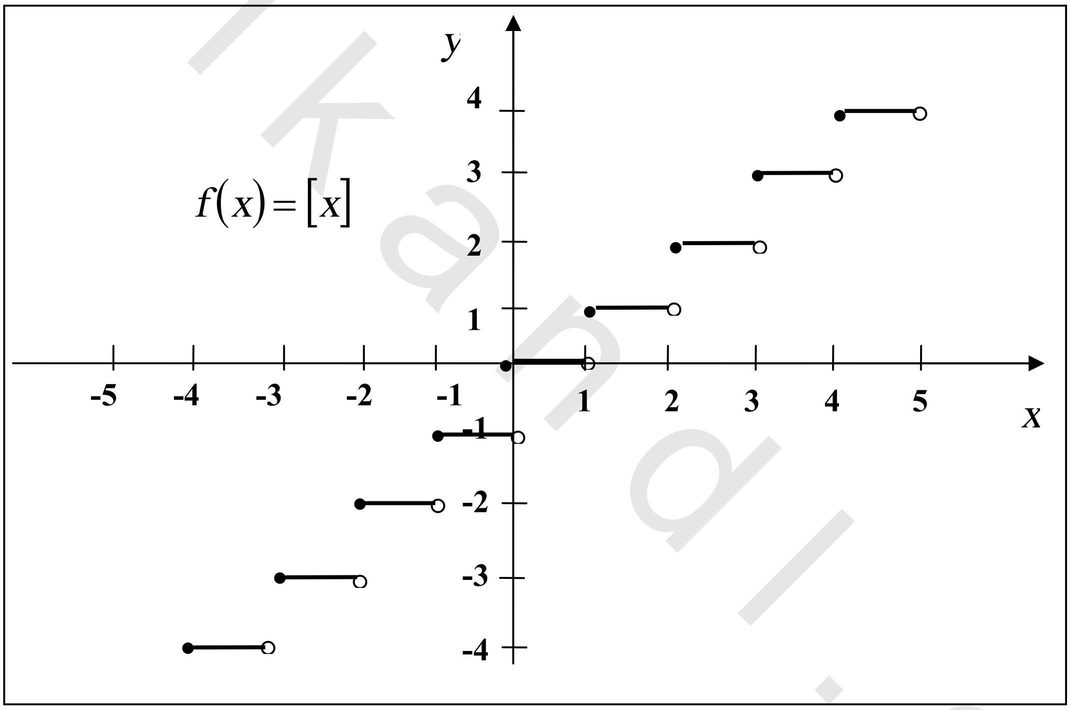
أما شكل (24) فهو يوضح بيان الدالة $f(x)=[x]$.

وقد استعنا بالجدول الآتي،

$[x]$	قيم x
	$\vdots$
-2	$-2 \le x < -1$
-1	$-1 \le x < 0$
0	$0 \le x < 1$
1	$1 \le x < 2$
2	$2 \le x < 3$
3	$3 \le x < 4$
	$\vdots$

فكلما كانت x بين عددين صحيحين متتاليين، فإن الجزء المناظر من بيان الدالة يكون قطعة من مستقيم أفقي ويمكن تلخيص تعريف $[x]$ على النحو لأجل $n \le x < n+1$ تكون $[x] = n$ ، حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.

والعكس إذا كانت $[x] = n$ فإن $n \le x < n+1$ فإذا كانت $[x] = 2$ مثلاً، يتبع ذلك أن $2 \le x < 3$.



شكل (24)

مثال (4)

حل المعادلة $[x^2 - 2x] = -1$

الحل

$$[x^2 - 2x] = -1$$

إذن $-1 \le x^2 - 2x < 0$

أضف 1 لكل طرف،

$$0 \le x^2 - 2x + 1 < 1$$

$$0 \le (x-1)^2 < 1$$

$(x-1)^2 < 1$ ، و $(x-1)^2 \ge 0$

$|x-1| < 1$ ، و $|x-1| \ge 0$

$-1 < x-1 < 1$ ، و $x \in R$

$0 < x < 2$ $\therefore$ الجواب هو $x \in (0,2)$

مثال (5):

حل المتباينة، $-1 \le [x] < 3$

الحل

$$-1 \le [x] < 3$$

ولأن $[x]$ أعداد صحيحة، $\therefore [x] = -1,2$

$$\therefore\ x \in [-1,0) \cup [2,3)$$

استعمال التحويلات الخطية في رسم المنحنيات

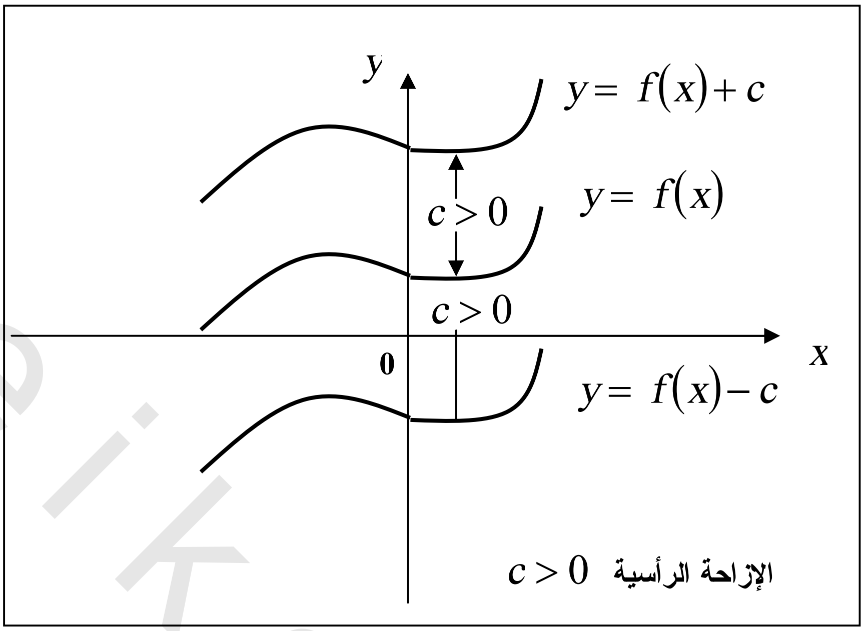
Use of linear transformations

إذا كنا نعلم بيان $y = f(x)$ يصبح من السهل توضيح بيانات الدوال الناشئة عن تحويلات خطية للدالة $f(x)$ مثل الإزاحة والتمدد والانضغاط أو الانكماش.

أولاً : الإزاحة Shift

أ- الإزاحة الرأسية : Vertical Shifts

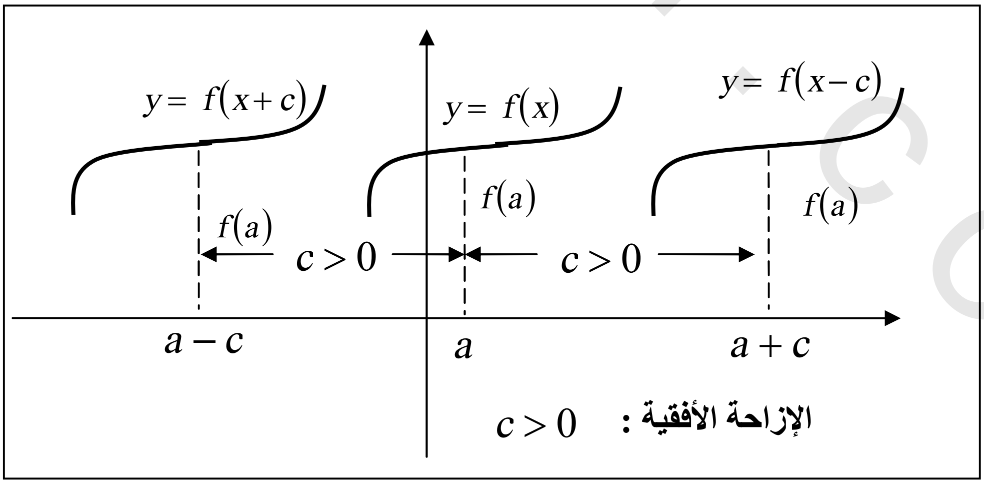
إضافة أو طرح مقدار ثابت موجب c لقيمة الدالة $f(x)$ يسبب إزاحة رأسية. فالإضافة c تزيح بيان الدالة f لأعلى مسافة c من الوحدات، وطرح c يزيح المنحنى لأسفل كما هو مبين في شكل (23)



شكل (23)

ب- الإزاحة الأفقية Horizontal Shifts

البيانان $gr(f(x+c))$ ، $gr(f(x-c))$ هما إزاحتين أفقيتان لمنحنى العلاقة $y = f(x)$ إلى اليسار مسافة c والى اليمين مسافة c على الترتيب، كما هو واضح في الشكل (24)



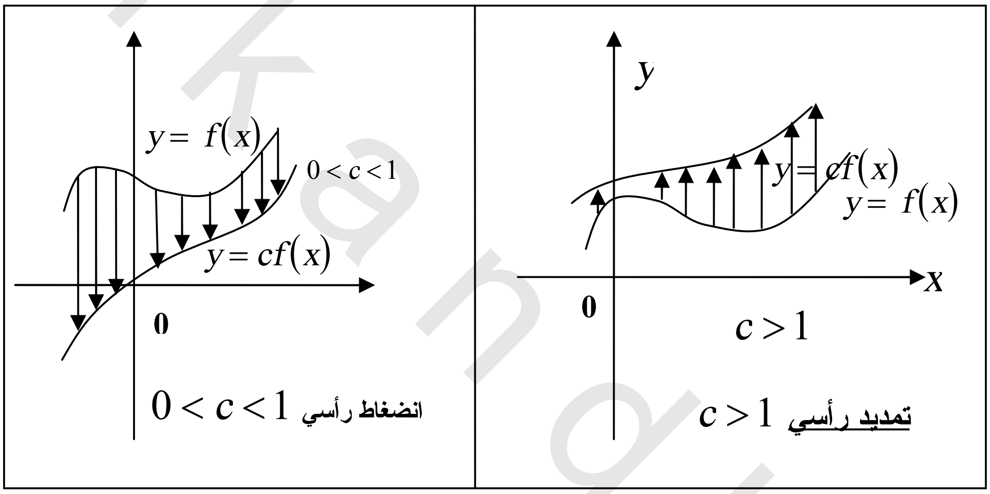
شكل (24)

ثانياً : التمديد والانضغاط Stretch and compression

أ- التمديد والانضغاط الرأسي

Vertical Stretch and vertical compression

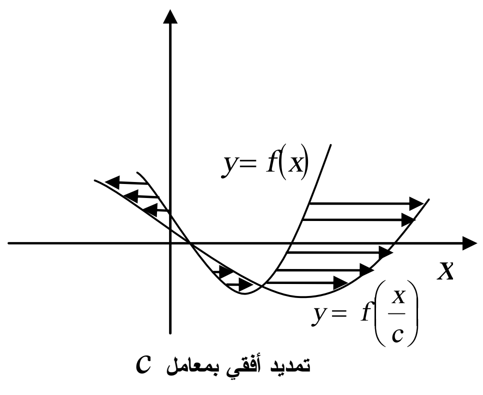
إذا ضربنا كل قيمة للدالة $f(x)$ في مقدار ثابت c للحصول على $y = cf(x)$ نكون قد حصلنا على تمديد رأسي إذا كانت $c > 1$ وانضغاط رأسي لما $0 < c < 1$ كما في شكلي (25)، (26) .



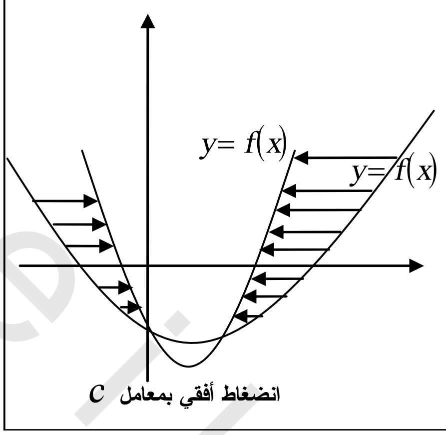
شكل (26)   شكل (25)

ب- التمديد والانضغاط الأفقي Horizontal Stretch and Compression

البيانان $gr\left(f\left(\frac{x}{c}\right)\right)$ ، $gr(f(cx))$ هما تمديد وانضغاط أفقيان بنسبة c على الترتيب كما هو واضح في شكلي (27) ، (28) المنحنى الذي معادلته $y = f\left(\frac{x}{c}\right)$ ، $c > 1$ والمنحنى الذي معادلته $y = f(cx)$ يمثل انضغاطة أفقي، $c > 1$.كما هو واضح في شكلي (27)، (28)، حيث اتخذنا المنحنى



شكل (27)

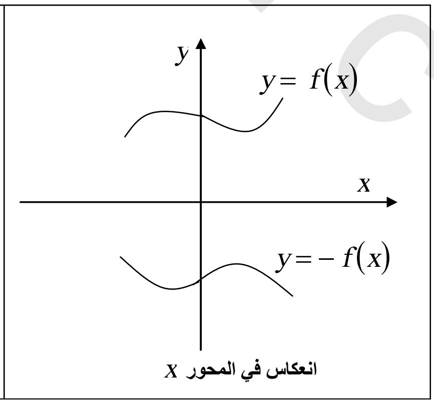


شكل (28)

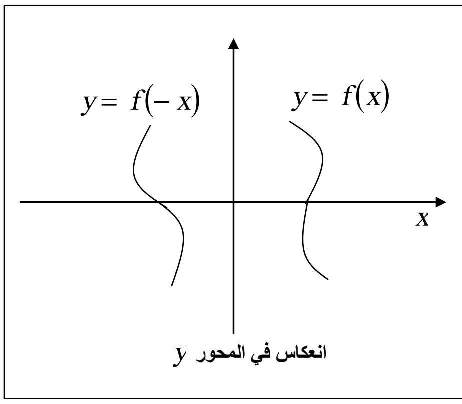
$y=x^2-8x=f(x)$ ، وتمديده بمقدار c=2، $y=f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x^2}{4}-4x$ في شكل (27) أما في شكل (28) اتخذنا $y=f(x)=x^2-2x-3$ وانضغاطتها بمقدار c =2 وحصلنا على $y=f(x)=4x^2-4x-3$. وذلك على سبيل المثال.

ثالثاً :الانعكاس Reflection

بياناً المعادلتين $y=f(x)$ ، $y=-f(x)$ هما انعكاس أحدهما بالآخر عبر المحور x . شكل (29) وبياناً المعادلتين $y=f(x)$ ، $y=-f(x)$ هما انعكاس أحدهما للأخر عبر المحور y ، شكل (30) .



شكل (29)



شكل (30)

كثيرات الحدود Polynomial function

يقال لدالة f إنها كثير حدود إذا كانت على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

حيث a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_n أعداد حقيقية ، n ، $n-1$ ، ... أعداد موجبة صحيحة ، وإذا كان $a_n \neq 0$ ، فإن f كثير حدود من الدرجة n

وفيما يلي بعض أشكال كثيرات الحدود الخاصة ، $a \neq 0$ ،

مقدار ثابت ودرجتها صفر ، $f(x) = 0$

دالة خطية ، درجتها 1 ، $f(x) = ax + b$

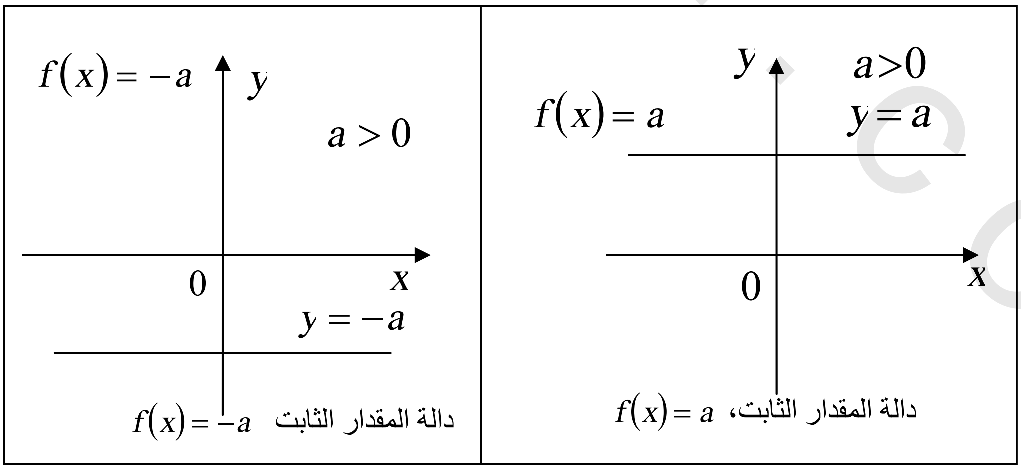
دالة تربيعية ، درجتها 2 ، $f(x) = ax^2 + bx + c$

دالة تكعينية ، درجتها 3 ، $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

دالة من الدرجة الرابعة ، $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

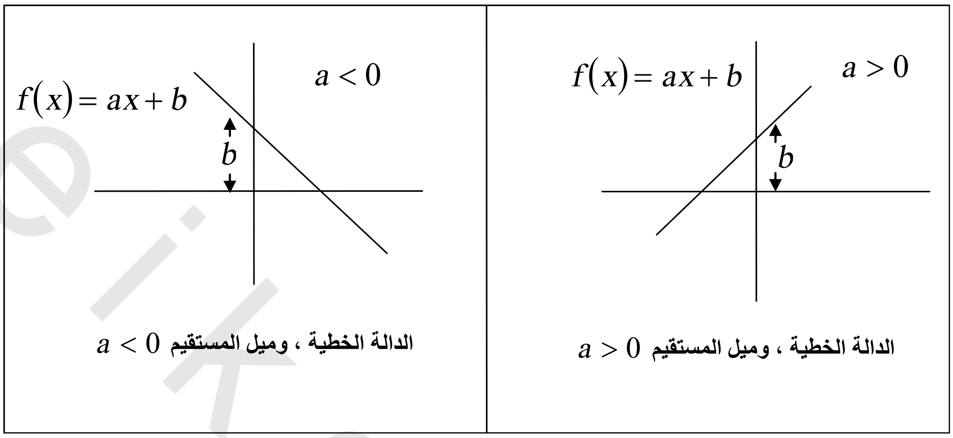
وهكذا .

وشكل الدالة التي درجتها صفر، أي دالة المقدار الثابت هو مستقيم يوازي المحور x ، معادلته $y = a$ ، ويكون أعلى أو أسفل المحور x على حسب كون $a > 0$ أ، $a < 0$ على الترتيب أما $y = 0$ فهو المحور x نفسه. شكل (31)



شكل (31)

دالة الدرجة الأولى $f(x) = ax + b$ يكون بيانها هو المستقيم $y = ax + b$ ميله a ويقطع من محور y جزء طوله b . (شكل32)



شكل (32)

دالة الدرجة الثانية، التربيعية $f(x) = ax^2 + bx + c$ يكون بيانها هو القطع المكافئ $y = ax^2 + bx + c$. ويمكن كتابتها على الصورة

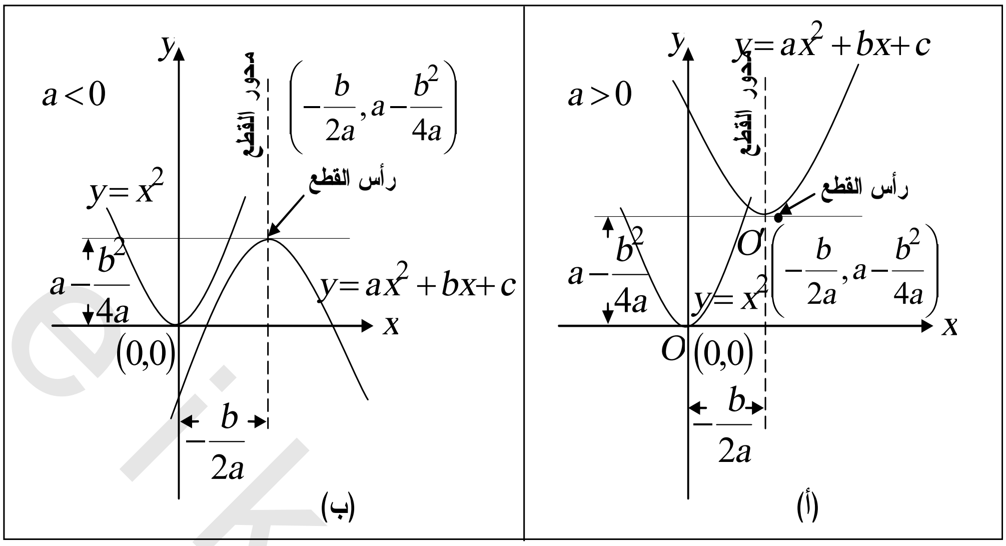
$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4a}$$

وهي نفس الدالة $y = x^2$ الموضحة في شكل (19–ب) ولكن أزاحت أفقياً مسافة $\frac{b}{2a}$ –، مع تمديد بمعامل a ثم إزاحة رأسية مقدارها $a - \frac{b^2}{4a}$.

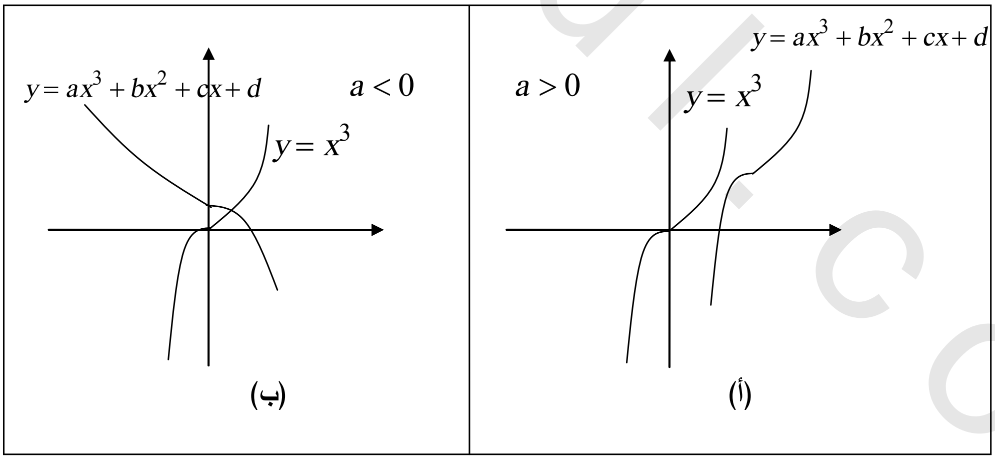
ونلاحظ أن رأس القطع $y = x^2$ هي نقطة الأصل ، أما رأس هذا القطع فهو النقطة $-\frac{b}{2a}, a - \frac{b^2}{4a}$

شكل (33–أ) يوضح الشكل العام للدالة التربيعية لما $a > 0$، شكل (33–ب) لما $a < 0$ حيث حدث انعكاس للدالة حول المحور $y = a - \frac{b^2}{4a}$.



شكل (33)

كذلك الشكل العام للدالة التكعيبية مشابه للدالة x^3 فيكون على الصورة الموضحة في شكل (34– أ) إذاك كانت $a>0$ ، على الصورة الموضحة في شكل (34– ب) عندما $a<0$.



شكل (34)

الدالة القياسية والدالة الجبرية

Rational function and Algebraic function

الدالة القياسية هي خارج قسمة دالتي كثير حدود. وسوف نتعرض فيما بعد لفحص بيانات كثيرات الحدود والدوال القياسية باستعمال طرق الحسبان. أما الدالة الجبرية فهي دالة يمكن التعبير عنها على شكل مجموع أو فرق أو جداء أو مقسوم أو أسس قياسية لكثيرات حدود . فمثلاً

$$f(x)=\frac{x^3-2x+3}{x^4+x^2+6x}$$ دالة قياسية ،

، $$f(x)=x^3-3\sqrt{x}+=\frac{x^2(3x-7)}{\sqrt{x^5+\sqrt{x}}}$$ هي دالة جبرية

جميع الدوال الأسية ، والمثلثية واللوغاريتمية ، وأية دالة ليست جبرية تسمى دوال ذكية transcendental ، وسوف نرجيء دراستها إلى ما بعد دراسة طرق الحسبان .

الدوال التركيبية Composite functions

عادة ما نستخدم في الحساب دوال تركيب من دوال بسيطة بعمل تجميعه معقدة من دوال البسط بطرق عديدة مستخدمين العمليات الحسابية والتركيب. فإذا كان f و g دالتين، نستطيع تعريف المجموع $f+g$ والفرق $f-g$ والجداء fg والمقسوم f/g على النحو التالي :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$
$$(fg)(x)=f(x)g(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

نطاق $f+g$ أو $f-g$ أو fg هو تقاطع نطاقي f و g أي الأعداد المشتركة من كل من النطاقين فنكتب .

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$
$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$
$$D_{fg} = D_f \cap D_g$$

أما نطاق f/g يتكون تقاطع نطاقي f و g ماعدا الأعداد التي تجعل $g(x)=0$ ، أيْ

$$D\ f/g = D_f \cap D_g \ \ , g(x) \neq 0$$

أو نكتب ،

$$D\ f/g = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\}$$

مثال (5):

إذا كان ، $f(x) = \sqrt{2-x}$ ، $g(x) = 2x-6$

أوجد مجموع، والفرق، وجداء، وخارج قسمة f و g مع وصف النطاق في كل حالة .

الحـــل

$$D_f = \{x : 2-x \geq 0\} = \{x : x \leq 2\}$$
$$D_f = (-\infty, 2]$$
$$D_g = \{x : x \in R\} = R$$
$$D_f \cap D_g = (-\infty, 2]$$
$$(f+g)(x) = \sqrt{2-x} + 2x - 6 \ \ , \ \ x \in (-\infty, 2]$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{2-x} - 2x + 6 \ \ , \ \ x \in (-\infty, 2]$$
$$(fg)(x) = \sqrt{2-x}(2x-6) \ \ , \ \ x \in (-\infty, 2]$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{(2x-6)} \ \ , \ \ x \in (-\infty, 2] - \{3\}$$

ولكن $3 \notin (-\infty, 2]$

إذن ، أيضاً ،

$$x \in (-\infty, 2]$$

نستطيع أيضاً تركيب دالتين لتكوين دالة جديدة بعملية تركيبية أي بإيجاد دالة f لناتج الدالة g. أيْ دالة للدالة.

أو العكس. ونستعمل لذلك الترميز fog و gof وتقرأ (f دائرة g) و (g دائرة f) على الترتيب. حيث الدالة fog تعرف على النحو،

الدالة التركيبية fog لكل من f و g تعرف بالآتي:

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

ونطاق fog : هو جميع قيم x من نطاق g التي تجعل $g(x)$ في نطاق f

$$D_{fog} = \{x : g(x) \in D_f\}$$

مثال (6):

إذا كان $f(x) = x^2 - 3$ ، $g(x) = \left(\sqrt{1-x}\right)$

فأوجد a) fog ، b) gof ، مع ذكر نطاق كل منهما .

الحل

a)

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt{1-x}\right) \\ &= \left(\sqrt{1-x}\right)^2 + 3 \\ &= 1 - x - 3 \\ &= -2 - x\end{aligned}$$

إذا أخذنا في الاعتبار النتيجة النهائية $-2-x$، قد نعتقد أن نطاق fog هو R لأن $-2-x$ معرفة لجميع قيم x الحقيقية، ولكن هذا خطأ. ولكن من تعريف D_{fog} هو قيم x في D_g التي تحقق شرط $g(x)$ تنتمي إلى D_f.

أيْ قيم x في $(-\infty,1]$ التي تجعل $g(x)$ فتنتمي إلى R. حيث أن $g(x)$ حقيقية لجميع قيم x في $(-\infty,1]$ ينتج أن،

$$D_{fog} = (-\infty,1]$$

b)

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2-3) \\ &= \sqrt{1-(x^2-3)} \\ &= \sqrt{4-x^2}\end{aligned}$$

والنطاق هو جميع قيم x في R التي تجعل $f(x)$ تنتمي إلى $(-\infty,1]$ وعندما نقول $f(x)$ تنتمي إلى $(-\infty,1]$ نعني x^2-3 تقع في $(-\infty,1]$ أيْ

$$x^2-3 \in (-\infty,1]$$

$$x^2-3 \le 1$$

$$x^2 \le 4$$

$$|x| \le 2$$

$$x \in [-2,2]$$

إذن ،

$$D^{gof} = [-2,2]$$

وهو يختلف عن كل من $D_f = R$ ، $D_g = (-\infty,1]$

مثال (7):

إذا كان $f = \sqrt{9-x^2}$ ، $g = \sqrt{2+x}$

أوجد نطاق الدالة fog

الحل

$D_f = \{x : 9 - x^2 \ge 0\}$ إذن $D_f = \{x : x^2 \ge 9\}$

أيْ $D_f = \{x : |x| \le 3\}$ إذن $D_f = [-3,3]$

$D_f = \{x : 2 + x \ge 0\}$ إذن $D_g = [-2,\infty)$

لإيجاد D_{fog} ، نبحث عن قيم x في D_g التي تجعل $g(x)$ في نطاق f . أيْ أن

$$\sqrt{2+x} \in [-3,3]$$

ولكن $\sqrt{2+x}$ موجباً دائماً .

$$\sqrt{2+x} \in [0,3]$$
$$2+x \in [0,9]$$
$$x \in [-2,7]$$

وجميع هذه الفترة تقع في D_g ، إذن

$$D_{fog} \in [-2,7]$$

يجب ملاحظة أن ،

$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt{2+x}\right) \\ &= \sqrt{9-(2+x)} \\ &= \sqrt{7-x}\end{aligned}$$

إن نطاق الدالة $\sqrt{7-x}$ هو $(-\infty,7]$ أما نطاق $(fog)(x) = \sqrt{7-x}$ يختلف عن ذلك فهو $[-2,7]$.

مثال (8):

إذا كان

$$g(x) = \sqrt{x} \quad ، \quad f(x) = x^2 - 6$$
$$w(x) = \sqrt{x^2 - 16} \quad ، \quad h(x) = x - 16$$

أ) قارن بين نطاق الدالة fog ونطاق الدالة h .

ب) قارن بين نطاق الدالة gof ونطاق الدالة $w(x)$.

الحـــل

1) $D_f = R$ ، $D_g = [0,\infty)$ ، $D_h = R$

نطاق fog هو قيم x في $[0,\infty)$ التي تجعل $\sqrt{x}$ في نطاق f أيْ في R . وحيث أن $\sqrt{x}$ دائماً في R

$$\therefore \qquad D_{fog} = [0,\infty)$$

نجد أنه على الرغم من أن ،

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 - 16$$

$$(fog)(x) = x - 16$$

أيْ أن التعبير الجبري لكل من $(fog)(x)$ ، $h(x)$ هو $x-16$ إلا أن $D_h \neq D_{fog}$.

ب)
$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2 - 16) \\ &= \sqrt{x^2 - 16} \\ &= w(x)\end{aligned}$$

ولكن نطاق $w(x)$ هو قيم x التي تجعل

$$x^2 - 16 \geq 0$$

$$|x| \geq 4$$

$$D_w = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

ونطاق gof هو قيم x في نطاق f (في R) التي تجعل $f(x)$ في $[0,\infty)$ أيْ $x^2 - 16 \in [0,\infty)$

$$x^2 - 16 \geq 0$$

$$|x| \geq 4$$

$$D_{gof} = (-\infty,-4] \cup [4,\infty)$$

أيْ أنه تصادف أن $D_{gof} = D_w$ على خلاف الفترة (أ) حيث كان $D_{fog} \neq D_h$

مثال (9):

إذا كان $f(x)=x^3+1$ ، $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ أوجد :

(أ) $(fog)(x)$ ، D_{fog}

(ب) $(gof)(x)$ ، D_{gof}

الحـــل

(أ)
$$\begin{aligned}(fog)(x) &= f(g(x))\\ &= f\left(\sqrt[3]{x-1}\right)\\ &=\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3+1\\ &= x-1+1\\ &= x\end{aligned}$$

بما أن x في R (نطاق g) فإن $g(x)$ في R (نطاق f) ونطاق fog هو

$D_{fog}=R$

(ب) بالمثل

$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x))\\ &= g\left(x^3-1\right)\\ &=\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)-1}\\ &=\sqrt[3]{x^3}\\ &= x\end{aligned}$$

$D_{gof}=R$ ،

الدوال العكسية Inverse functions

الدالة المحايدة Identity function هي دالة $w(x)$ لها خاصية أن $w(x)=x$ لجميع قيم x في D_W ويقع بيانها على المستقيم $y=x$ ففي المثال السابق (مثال9) كان كل من fog ، gof دوال محايدة .

وعلى العموم إذا كان الدالة التركيبية لدالتين f ، g أيْ fog ، gof هي دالة محايدة فإن f ، g معكوساً لبعضهما . أيْ أن g معكوس f ، f معكوس g. أونكتب

$$g = f^{-1}(x)$$
$$f = g^{-1}(x) \text{ ،}$$

وكذلك

$$gog^{-1}(x) = x$$
$$fof^{-1}(x) = x$$

وتمتاز الدالة العكسية $f^{-1}(x)$ للدالة $f(x)$ بالخواص التالية :

1- إذا كانت النقطة (a,b) تقع على $gr(f(x))$ فإن النقطة (a,b) تقع على $gr\left(f^{-1}(x)\right)$.

2- يتبع (1) أن بيانى $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ متماثلان بالنسبة للمستقيم $y=x$ أيْ أن بياني الدالة ومعكوسها هما انعكاس أحدهما للأخر عبر المستقيم $y=x$. شكل (35) .

3- أيضاً بما أن وقوع النقطة (x,y) على بيان f يستلزم وقوع النقطة (y,x) على بيان $f^{-1}(x)$ فإن :

أ- $f^{-1}(x)$ تأتي من $f(x)$ باستبدال x ، y .

ب- أن نطاق f ، D_f هو مدى f^{-1} ، $R_{f^{-1}}$ وكذلك R_f هو $D_{f^{-1}}$.

مثال (10):

أوجد نطاق الدالة $f(x)=\sqrt{4-x}$ ومداها .

ثم أوجد $f^{-1}(x)$ مع ذكر نطاقها . ووضح بيانها مع بيان الدالة المحايدة في رسمة واحدة .

الحـــــل

$$f(x)=\sqrt{4-x}$$
$$D_f=\{x:4-x\geq 0\}$$
$$=\{x:x\leq 4\}$$
$$D_f=(-\infty,4]$$

أما المدى ، فحيث أن الجذر موجب دائماً فإن ،

$$R_f=[0,\infty)$$

لإيجاد $f^{-1}(x)$ ، نكتب

$$f(x)=\sqrt{4-x}\Rightarrow y=\sqrt{4-x}$$

ولاجل $f^{-1}(x)$ ، استبدل x ، y وأوجد y صريحة

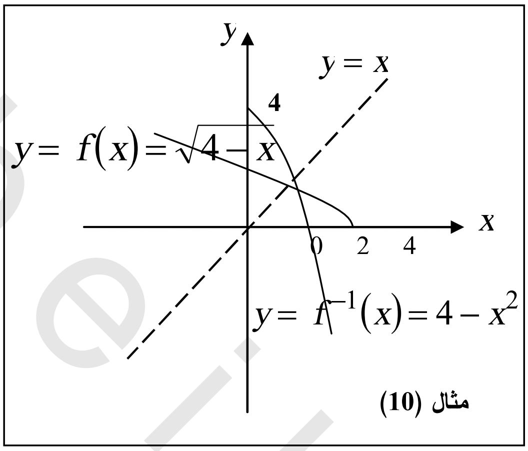
$$x=\sqrt{4-y}\Rightarrow x^2=4-y$$
$$\Rightarrow y=4-x^2$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=4-x^2$$

وبما أن

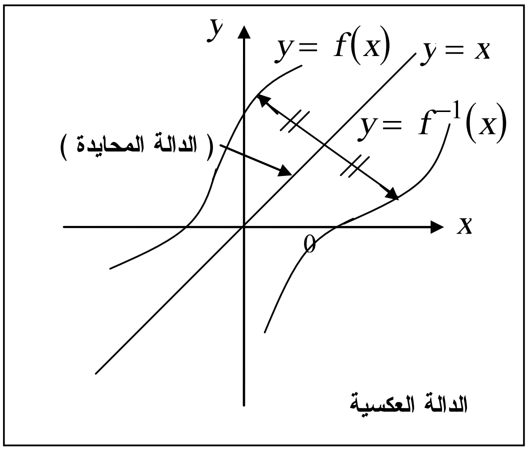
$$R_f=D_{f^{-1}}$$

$$\therefore\quad f^{-1}(x)=4-x^2\ ,\ \ x\in[0,\infty)$$

وشكل (36) يوضح بيان f ، f^{-1} .



شكل (36)



شكل (35)

إذا تقاطع بياني الدالتين f ، f^{-1} فإن نقطة التقاطع لابد وأن تقع على بيان الدالة المحايدة $y = x$.

فإذا كان الأحداثي x لنقطة التقاطع هو $x = a$ ، فإن ،

$$f(a) = f^{-1}(a) = a$$

أيْ أن قيمة x عند نقطة التقاطع هي حل لأيْ من المعادلتين $f(x) = x$ أ، $f^{-1}(x) = x$

وتساوي قيمة y .

مثال (11):

إذا كانت $f(x) = 16 - x^2 \ , \ 0 \le x < 4$ أوجد :

$f^{-1}(x)$ موضحاً نطاقها. أوجد نقطة تقاطع $f(x)$ ، $f^{-1}(x)$ إن وجدت.

الحل

$$f(x) = 16 - x^2 \ , \ 0 \le x < 4$$

$$D_f = [0,4)$$
$$R_f = (0,16]$$

استبدل x بـــ y ، $f(x)$ بـــ x

$$x = 16 - y^2$$
$$y^2 = 16 - x \Rightarrow y = \pm\sqrt{16 - x}$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{16 - x} \ , \ \ o < x \le 16$$

لايجاد نقطة التقاطع ، نضع

$$f(x) = x$$
$$16 - x^2 = x$$
$$x^2 + x - 16 = 0$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 64}}{2}$$

(القيمة السالبة خارج D_f)

$$x = \frac{\sqrt{65} - 1}{2}$$

نقطة التقاطع هي $\left(\frac{\sqrt{65} - 1}{2}, \frac{\sqrt{65} - 1}{2}\right)$

وهي تقع في النطاقين D_f ، D_f^{-1}

Composite function of another function دالة الدالة

إذا كان f و g دالتين بحيث ،

$$y = f(u) \text{ و } u = g(x)$$

إذن بالتعويض عن u في $y = f(u)$ يؤدي إلى

$$y = f(g(x))$$

ولبعض مسائل الحسبان قد يحتاج الأمر لعكس هذا الإجراء، أي يعطي $y=h(x)$ بحيث تكون $h(x)$ هي الشكل التركيبي من $y=f(x)$ ، $u=g(x)$ بحيث $h(x)=f(g(x))$.

فمثلاً إذا كانت ، $y=(3x^2+2x-1)^7$ فإنه .من الممكن تحويلها إلى دالة تركيبية كأن نفرض ، $u=3x^2+2x-1$ ونجعل $g(u)=y=u^7$

أي أن ، $y=(gou)(x)$

أ، $y=g(u(x))$

وبالمثل ،

$$y=(x^3-5x+1)^{3/2} \equiv u=x^3-5x+1 \;, y=u^{3/2}$$

$$y=\sqrt{x^2-4} \equiv u=x^2-4 \;, y=\sqrt{u}$$

$$y=\frac{3}{(x-2)^5} \equiv u=x-2 \;, y=\frac{3}{u^5}$$

و التمثيل كدالة تركيبية ليس وحيداً . فإذا رجعنا إلى $y=(x^3-5x+1)^{3/2}$ فإنه من الممكن اتخاذ

$$u=(x^3-5x+1)^{1/2} \;, y=u^3$$

أ، $u=(x^3-5x+1)^{1/2} \;, y=\sqrt{u}$

وهكذا .

تمارين 1-2

1) $f(x)=\sqrt{x-4}-3x$ ، $g(x)=\dfrac{x}{x-3}$ أوجد :

$f(4)$ ، $f(8)$ ، $f(13)$ ، $f(x+4)$ ،

$f(5)$ ، $g(0)$ ، $g(3.01)$ ، $g(2.99)$.

2) إذا كان a ، b عددين حقيقيين أوجد في أبسط صورة $f(a)$ ، $f(-a)$ ،

$-f(a)$ ، $f(a+b)$ ، $f(a)+f(b)$ ، $\dfrac{f(a+b)-f(a)}{b}$

علماً بأن $b\neq 0$:

أ) $f(x)=\dfrac{5x}{a}-2$ ب) $f(x)=3-2x$

جـ) $f(x)=x^2-(a+b)x$ د) $f(x)=x^2-x+3$

هـ) $f(x)=2x^2+3x-7$ و) $f(x)=5x-2$

ثم أوجد قيم النواتج من (أ) إلى (و) عندما $a=2$ ، $b=3$.

3) أوجد نطاق الدالة f (D_f) ونطاقها R_f .

أ) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3-4x}$ ب) $f(x)=\dfrac{2x+1}{6x^2+13x-5}$

جـ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-3}}{x^2-5x+4}$ د) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x-3}}{x^2-4}$

هـ) $f(x)=|x+3|$ و) $f(x)=|-x^2+1|$

ز) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ ح) $f(x)=\sqrt{4-x}$

ط) $f(x)=x+|x|$ ك) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{x+1}}$

ل) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2+x+1}$ م) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$

4) عين ما إذا كانت الدالة f زوجية أو فردية أو ليست فردية أو زوجية .

أ) $f(x)=5x^3+2x$ ب) $f(x)=|x|-x$

جـ) $f(x)=|x|+2$ د) $f(x)=(8x^3-3x)^3$

هـ) $f(x)=(8x^3-3x)^4$ و) $f(x)=\sqrt{2x^4-x^2+3}$

ز) $f(x)=x^5-4x^3+2x$ ح) $f(x)=x(x+1)$

ط) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$ ك) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$

ل) $f(x)=3x^2+2\sec x$ م) $f(x)=\sqrt{x}+\tan x$

ن) $f(x)=\left[x-\dfrac{1}{2}\right]$ ي) $f(x)=x-[x]$

5) ارسم بيان الدالة f وأذكر النطاق D_f والمدى R_f

أ) $f(x)=\begin{cases} x+2 & , \ x\le -1 \\ x^3 & , \ |x|<1 \\ -x+3 & , \ x\ge 1 \end{cases}$ ب) $f(x)=\begin{cases} x-3 & , \ x\le -2 \\ -x^2 & , \ -2<x<1 \\ -x+4 & , \ x\ge 1 \end{cases}$

جـ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \ x\ne -1 \\ 2 & , \ x=-1 \end{cases}$ د) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & , \ x\ne 3 \\ -6 & , \ x=3 \end{cases}$

هـ) $f(x)=x-[x]$ و) $f(x)=x^2+2x$

ز) $f(x)=-x^2-2$ ح) $f(x)=|x+3|$

ط) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ ك) $f(x)=\left|1-x^2\right|$

ل) $f(x)=2-|x|$ م) $f(x)=x+|x|$

ن) $f(x)=\sqrt{4-x}$ ق) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

ي) $f(x)=[x-3]$ ر) $f(x)=[x]-3$

س) $f(x)=2[x]$ ش) $f(x)=[2x]$

ص) $f(x)=[x+2]$ ض) $f(x)=\left[\dfrac{1}{2}x\right]$

ع) $f(x)=\dfrac{1}{2}[x]$ ف) $f(x)=[x]+2$

6) ارسم على نفس مستوى الاحداثيات بياني الدالة f لقيم c المذكورة أمامها مستخدماً التماثل والإزاحة الأفقية والرأسية والتمديد والانضغاط .
في كل مرة أذكر النطاق والمدى .

أ) $f(x)=|x|+c \quad ; \quad c=0,1,-3$

ب) $f(x)=|x-c| \quad ; \quad c=0,2,-3$

جـ) $f(x)=3\sqrt{x}+c \quad ; \quad c=0,3,-2$

د) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+c \quad ; \quad c=0,1,-3$

هـ) $f(x)=2\sqrt{x-c} \quad ; \quad c=0,1,-2$

و) $f(x)=-2(x-c)^2 \quad ; \quad c=0,1,-2$

ز) $f(x)=c\sqrt{4-x^2} \quad ; \quad c=0,1,-3$

ح) $f(x)=(x+c)^3 \quad ; \quad c=0,1,-2$

ط) $f(x)=(x-c)^{2/3}+3 \quad ; \quad c=0,4,-3$

ي) $f(x)=(x-1)^{1/3}+c \quad ; \quad c=0,-2,1$

ك) $f(x)=x^2-2x+c \quad ; \quad c=0,1,-3$

ل) $f(x)=(x-1)^2+c \quad ; \quad c=-1,0,-4$

7) شكل (37) يوضح بيان دالة f نطاقها إرسم بيان المعادلة المعطاة .
كرر نفس المسألة على بيان الدالة التي نطاقها الموضح في شكل (38) .

أولاً:

أ) $y=f(x+2)$

ب) $y=f(x-3)$

جـ) $y=f(x)+3$

د) $y=f(x)-2$

هـ) $y=-3f(x)$

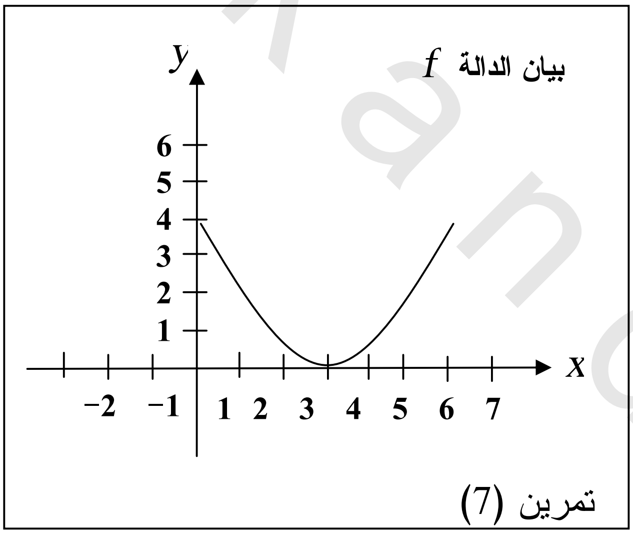
و) $y=-\frac{1}{3}f(x)$

ز) $y=-f(x+2)-2$

ح) $y=3+f(x-2)$

ط) $y=2-f(x+3)$

ي) $y=|f(x)-2|$



شكل (37)

ثانياً:

أ) $y=g(x-2)$

ب) $y=g(x+2)$

جـ) $y = g(x) + 2$

د) $y = g(x) - 2$

هـ) $y = -2g(x)$

و) $y = -\frac{1}{2} g(x)$

ز) $y = -g(x+4) - 2$

ح) $y = g(x-4) + 2$

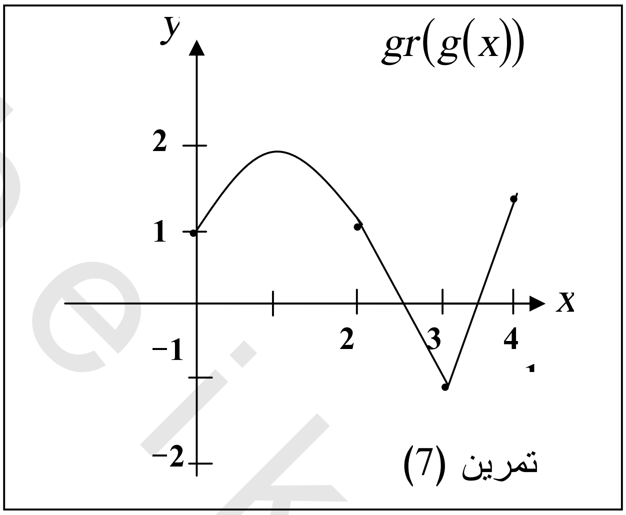
ط) $y = |g(x)|$

ي) $y = \sqrt{g(x)}$

ك) $y = |1 - g(x)|$

ل) $y = [g(x)]$

ن) $y = 1 + g(x)$



شكل (38)

8) أوجد فيما يلي الدوال الأتية التركيبية ونطاقها $(f+g)(x)$، $(f-g)(x)$،

$$(gof)(x) \quad \text{،} \quad (fog)(x) \quad \text{،} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \quad \text{،} \quad (fg)(x)$$

$$f(x) = \sqrt{x+5} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+5}$$

$$f(x) = \sqrt{3-2x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+4}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x-4} \quad , \quad g(x) = \frac{x}{x+5}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad , \quad g(x) = \frac{3x}{x+4}$$

$$f(x) = x^2 - 3x \quad , \quad g(x) = \sqrt{x+2}$$

$$f(x) = \sqrt{x-15} \quad , \quad g(x) = x^2 + 2x$$

$$f(x)=\sqrt{x-2} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x+5}$$
$$f(x)=\sqrt{3-x} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x+2}$$
$$f(x)=\sqrt{25-x^2} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x-3}$$
$$f(x)=\sqrt{3-x} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x^2+16}$$
$$f(x)=\frac{x}{3x+2} \quad , \quad g(x)=\frac{2}{x}$$
$$f(x)=\frac{x}{x-2} \quad , \quad g(x)=\frac{3}{x}$$
$$f(x)=\sqrt{2-|x|} \quad , \quad g(x)=x, 0<x<3$$
$$f(x)=\sqrt{4-[x]} \quad , \quad g(x)=|x|, 1\le x\le 5$$
$$f(x)=[|x|] \quad , \quad g(x)=|[x]|$$
$$f(x)=\sqrt{(x+1)/(x-1)}, \quad g(x)=1+\sqrt{x}$$
$$f(x)=\frac{-2\sqrt{x}}{x^2+1} \quad , \quad g(x)=\frac{\sqrt{1+x}}{1-x}$$

9) إذا كان $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ ، $g(x)=\frac{x^3-x+1}{11\sqrt{x-1}}$

أوجد القيم الموجودة فمايأتي :

$f(5)$ ، $g(5)$ ، $(fog)(5)$ ، $(gof)(5)$

$f(2)$ ، $g(2)$ ، $(fog)(3)$ ، $(gof)(3)$

$(fof)(4)$ ، $(gog)(2)$ ، $(go(fof))(5)$

10) أوجد الدالة العكسية للدالة f وأذكر نطاقها .

$f(x)=2+\sqrt{x-3}$ ، $f(x)=3+(x-2)^2, x\ge 2$

$$f(x)=\frac{x+1}{x},\ x>0 \quad ، \quad f(x)=3x-2,\ x\geq 1$$

$$f(x)=\frac{3x-2}{5x+1},\ x\geq 0 \quad ، \quad f(x)=\sqrt{x-3}+4$$

11) أوجد الشكل التركيبي للمعادلة ، (أيْ $y=f(u), u=g(x)$) ،

$$y=\sqrt[4]{x^3-8} \quad ، \quad y=\left(x^2-3x\right)^{1/3}$$

$$y=3-\sqrt{x^4+1} \quad ، \quad y=\frac{1}{(x-5)^6}$$

$$y=\sqrt{x-x^3} \quad ، \quad y=\left(x^5+3x^3-x^2+1\right)^5$$

$$y=\frac{\sqrt{x+2}-7}{\sqrt{x+2}+2} \quad ، \quad y=\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$$

12) إذا كانت $f(x)=\sqrt{x^3+1}-1$ أوجد قيمة تقريبية للمقدار $f(0.0001)$.

ولكي تتفادى النتيجة الصفرية ضع المعادلة على الصورة

$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^3+1}+1}$ ثم اثبت أن $f(0.0001)\cong 5.00x10^{-13}$.