# الباب الثانى

# تأثير الإجهادات على الصخور

## الفصل الثالث

## تحليل مجال الإجهادات

**مقدمة :**

يمكن التعبير عن المقادير الهندسية بوجه عام إما بمقادير كمية (Scaler) أو متجهات (Vector) أو مصفوفات (Tensor) . ويمكن تحديد المقادير الكمية إذا عرف مقدارها فقط مثل المسافة والحرارة والوزن أى أنه يمكن التعبير عن المقادير الكمية برقم واحد أو متغير واحد . أما المتجهة فهى عبارة عن كمية لها مقدار واتجاه ونقطة تأثير وتحتاج المتجهة إلى ثلاثة مقادير لتحديدها تحديداً كاملا . فمثلا تعرف المتجهة إذا عرف مقدار ثلاث مركبات لها فى اتجاه المحاور الكارتيزية (X,Y,Z,) أو إذا عرف طول المتجهة ومقدار الزاويتين اللتين تصنعهما مع أى محورين من المحاور الثلاثة . ومن أمثلة المقادير التى يعبر عنها بالمتجهة القوة والسرعة . وذلك لأنه من المعروف أن القوة تميل لتوليد حركة فى الجسم الذى تؤثر فيه أو تعمل على تغيير حركته ولتحديد القوة تحديداً كاملا يجب معرفة مقدارها واتجاهها ونقطة تأثيرها . أما المصفوفة فيعبر بها عن الكميات التى تحتاج إلى أكثر من ثلاثة مقادير لتحديدها تحديداً كاملا كالمجالات , فيعبر مثلا عن مجال الإجهادات بالمصفوفة لأنه يحتاج إلى ست مركبات لتحديده تحديداً كاملا ثلاثة منها عبارة عن المقادير اللازمة

لتحديد المتجهة أى المقدار والاتجاه ونقطة التأثير ، أما الثلاثة الأخرى فهى اللازمة لتحديد المستوى الذى يؤثر فيه الإجهاد .

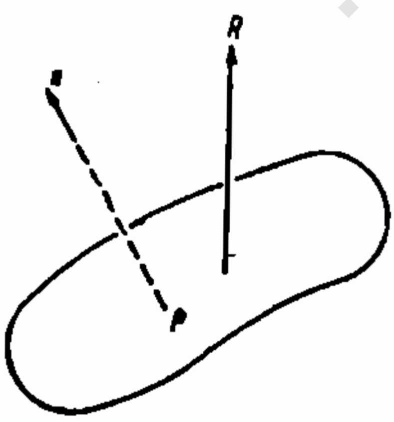
## أولا ـ الإجهادات

### تعريف الاجهاد :

يعرف الإجهاد بأنه القوة الداخلية المؤثرة على وحدة المساحة فى نقطة معلومة من مقطع جسم معين .

### تحديد مقدار واتجاه الإجهادات :

إذا أردنا تحديد مقدار واتجاه الإجهادات التى يتعرض لها جسم معين فإنه يمكن تصور نقطة ما فى هذا الجسم ولتكن نقطة (P) كما فى شكل (٥٧) ونتصور مستوى ما يقطع هذه النقطة خلال هذا الجسم ، ثم نعتبر المساحة المتناهية فى الصغر والتى تحيط بالنقطة (P) فى هذا المستوى (δa) ونفرض أن الاتجاه (n) عمودى على المساحة (δa) ، ثم نعتبر الاتجاه الذى أقيم منه



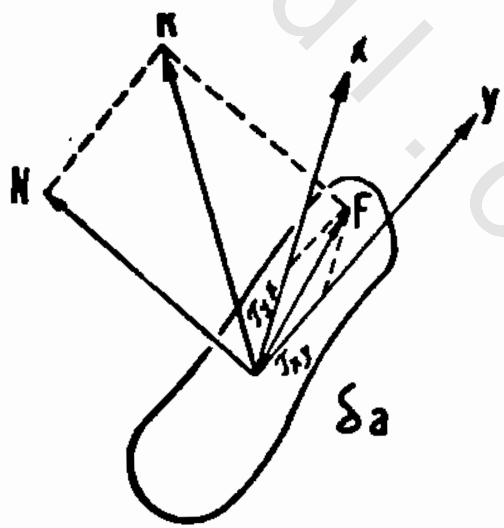

(شكل ٥٧)
تحديد مقدار واتجاه الإجهادات

العمود موجباً وعكس هذا الاتجاه سالباً كما هو موضح بالشكل .

يمكن اعتبار (R) محصلة القوى التى تؤثر على الجانب الموجب من المستوى داخل المساحة (δa) وبذلك يكون الإجهاد الذى يؤثر على المساحة (δa) هو $\frac{R}{\delta a}$

ويتضح من الشكل (٥٨) أن اتجاه المحصلة (R) لا يشترط أن يكون عمودياً على المستوى (δa) ولذلك فإنه يمكن تحليل (R) إلى مركبتين فى اتجاهين إحداهما عمودى على المستوى والآخر مماس ويرمز لهما بالرمزين (N, F) .

وبذلك يكون مقدار الإجهاد العمودى على المساحة (δa) هو $\frac{N}{\delta a}$ فإذا تضاءلت المساحة (δa) حتى وصلت إلى الصفر فإن المقدار $\lim_{\delta a \to o} \frac{N}{\delta a}$ يكون هو مقدار الإجهاد العمودى عند النقطة (P) الموجودة فى المستوى الذى يقطع الجسم ، ويرمز عادة للإجهاد العمودى بالرمز (σ) ، أما الإجهاد المماس أو القاص فمقداره عند النقطة (P) هو $\lim_{\delta a \to o} \frac{F}{\delta a}$ ويرمز

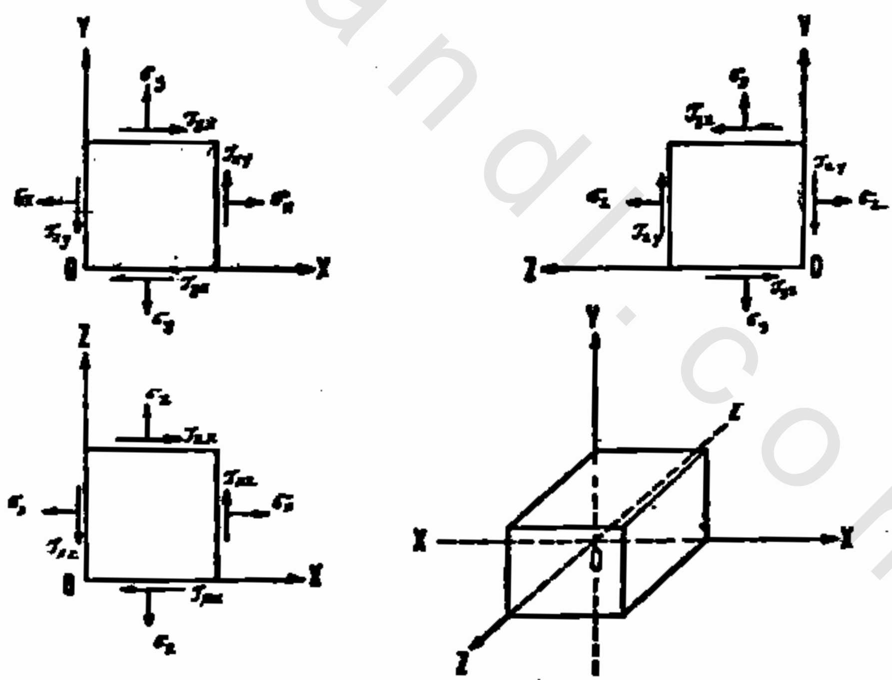



(شكل ٥٨) تحليل الإجهادات إلى عمودية وقاصة

لهذا الإجهاد عادة بالرمز ($\tau$) ولكى يمكن تحديد هذا الإجهاد تحديداً كاملا فى هذا المستوى يمكن اختيار محورين متعامدين ($x , y$) وتحليل الإجهاد إلى مركبتيه بالنسبة لهذين المحورين ويرمز لهاتين المركبتين بالرمزين ($\tau_{xy} , \tau_{yx}$)

### مجال الإجهادات المنتظمة :

موضح بالشكل (٥٩) مجال إجهادات منتظم منسوب إلى ثلاثة محاور متعامدة (كارتيزية) فمثلا الإجهاد ($\sigma_x$) يمثل إجهاداً عمودياً يؤثر على الوجه المتعامد على المحور ($x - x$) والإجهاد القاص ($\tau$) له مركبتين يعبران عن مكانه واتجاهه بالنسبة للمحاور وهما : ($\tau_{xy}$) وتمثل الإجهاد القاص الذى يؤثر على الوجه المتعامد على المحور ($x - x$) واتجاهه فى اتجاه المحور ($y - y$) ،




(شكل ٥٩)

مجال الإجهادات المنتظمة

($\tau_{xy}$) وهى تمثل مركبة الإجهاد القاص الثانية . ويتضح من الشكل ( ٥٩ ) أن الإجهادات المنتظمة المنسوبة إلى ثلاثة محاور يمكن تحديدها تحديداً كاملا إذا عرفنا التسعة مركبات لهذه الإجهادات ويعبر عنها بالمصفوفة العامة لمجال الإجهادات المنتظمة كما يلى :

$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix} \qquad (1)$$

وترتبط المركبات التسعة لمجال الإجهادات المنتظمة فيما بينهما بعلاقات رياضية . يمكن الحصول عليها نتيجة اتزان الجسم الموضح بالشكل ( ٥٩ ) فإذا ساوينا العزوم الناتجة من تأثير القوى الموضحة بالشكل نحصل على المعادلات الآتية :

$$(\tau_{xy} \; dy \; dz)\, d\chi = (\tau_{yx} \; d\chi \; dz)\, dy \qquad (2)$$

$$(\tau_{zy} \; dy \; dX)\, dz = (\tau_{yz} \; dz \; d\chi)\, dy \qquad (3)$$

$$(\tau_{xz} \; dz \; dy)\, d\chi = (\tau_{zx} \; d\chi \; dy)\, dz \qquad (4)$$

من هذه المعادلات يمكن أن نستنتج أن :

$$\begin{matrix} \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} \end{matrix} \qquad (5)$$

ومن ذلك يتضح أنه يمكن تحديد مجال الإجهادات المنتظمة إذا حددت ست مركبات للإجهادات فقط وهى :

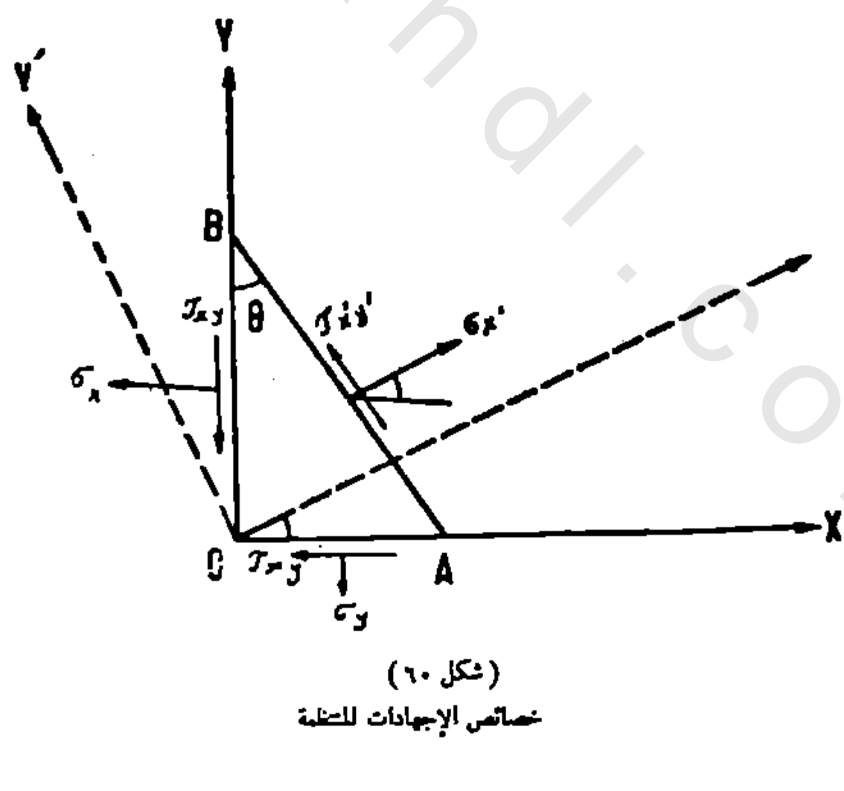
مركبات الإجهادات العمودية الثلاثة $\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z$

مركبات الإجهادات القاصة الثلاثة $\tau_{xy} , \tau_{yz} , \tau_{xz}$

## خصائص الإجهادات المنتظمة :

إذا تصورنا جسماً رقيقاً على شكل مثلث OAB في حالة اتزان تحت تأثير الإجهادات $\sigma_x , \sigma_y , \tau_{xy} , \tau_{yx}$ منسوبة إلى المحورين (ox , oy) كما هو موضح بالشكل ( ٦٠ ) . وإذا فرضنا أن اتجاه العمود على الخط AB يصنع زاوية مقدارها ($\theta$) مع المحور (ox) . لما كان الجسم رقيقاً جداً فإنه يمكن إهمال الإجهادات العمودية على المستوى OAB ونتيجة لذلك تكون الإجهادات المؤثرة على هذا الجسم هي العمودية ($\sigma_x$ , $\sigma_y$ , $\sigma_{x'}$) والإجهادات القاصة هي ($\tau_{xy}$ , $\tau_{yx}$ , $\tau_{x'y'}$) فإذا رمزنا لسمك هذا الجسم الرقيق بالرمز (d) فإنه يمكن إيجاد مجموع القوى التي تؤثر في الاتجاه (ox) ومساواتها بالصفر نتيجة اتزان الجسم .

$$\sigma_{x'}\ AB.\ d\cos\theta - \tau_{x'y'}.AB.\ d\sin\theta - \sigma_x.OB.d - \tau_{yx}.AO.d = O \qquad (6)$$




( شكل ٦٠ )

خصائص الإجهادات المنتظمة

ولكن من المثلث OAB يمكن أن نستنتج

$$OA = AB.\sin\theta$$

$$OB = AB.\cos\theta$$

ومن المعادلة ( ٥ ) يمكن أن نستنتج أن $\tau_{yx} = \tau_{xy}$

وبتعويض هذه المقادير فى المعادلة ( ٦ ) نحصل على المعادلة الآتية :

$$\sigma_{x'} \cos\theta - \tau_{x'y'} \operatorname{Sin}\theta = \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \operatorname{Sin}\theta \quad (7)$$

وبالمثل يمكن الحصول على معادلة مماثلة إذا ساوينا مجموع القوى فى الاتجاه Oy بالصفر

$$\sigma_{x'} \operatorname{Sin}\theta + \tau_{x'y'} \cos\theta = \sigma_y \operatorname{Sin}\theta + \tau_{xy} \cos\theta \quad (8)$$

وبضرب المعادلتين ( ٧ ) ، ( ٨ ) فى $\cos\theta$ , $\sin\theta$ على التوالى وبالجمع نحصل على المعادلة

$$\sigma_{x'} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \operatorname{Sin}^2\theta + \tau_{xy} \operatorname{Sin} 2\theta \quad (9)$$

وبالمثل يمكن استنتاج أن

$$\sigma_{y'} = \sigma_x \operatorname{Sin}^2\theta + \sigma_y \cos^2\theta - \tau_{xy} \operatorname{Sin} 2\theta \quad (10)$$

$$\tau_{x'y'} = {}^1/_2\,(\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{Sin} 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{Cos} 2\theta \quad (11)$$

من ذلك يتضح أنه إذا أمكن معرفة مقدار الإجهادات العمودية والقاصة منسوبة إلى محورين (Ox , Oy) فإنه يمكن بواسطة المعادلات (٩، ١٠، ١١) إيجاد قيمة هذه الإجهادات بالنسبة لأى محاور أخرى مثل (x , y) فى نفس المستوى . كما يتضح من المعادلة (١١) أنه يمكن الحصول على مقدار الزاوية التى يكون عندها مقدار إجهاد القص مساوياً للصفر .

$$O = {}^1/_2\,(\sigma_y - \sigma_x) \operatorname{Sin} 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$${}^1/_2\,(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{Sin} 2\theta = \tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\ \tau\chi y}{(\sigma\chi - \sigma y)} \qquad (12)$$

من المعادلة (١٢) يمكن أن نستنتج أنه مهما كانت قيمة الإجهادات $\tau_{xy}$ ، $\sigma_y$ ، $\sigma_x$ فإنه يوجد دائماً مقداران للزاوية يحققان المعادلة (١٢) وهذان المقداران هما ($\theta$) ، ($\theta + 90$) أو بتعبير آخر إنه مهما كانت حالة الإجهادات عند النقطة O فإنه يوجد دائماً اتجاهين متعامدين يكون فيهما مقدار إجهاد القص مساوياً للصفر وهذان الاتجاهان يختلفان من نقطة لأخرى ويطلق عليهما اتجاه المحاور الرئيسية للإجهادات ويرمز لهما بالرمزين ($\sigma_1$ ، $\sigma_2$) . فإذا عوضنا بقيمة الزاوية ($\theta$) التي حصلنا عليها من المعادلة (١٢) فى المعادلات (٩ ، ١٠ ، ١١) فإننا سوف نحصل على قيمة الإجهادات الرئيسية كما يأتى :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma\chi + \sigma y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma\chi - \sigma y}{2}\right)^2 + \tau^2\chi y} \qquad (13)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma\chi + \sigma y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma\chi - \sigma y}{2}\right)^2 + \tau^2\chi y} \qquad (14)$$

$$\tau = O \qquad (15)$$

ويمكن استخدام المعادلات (٩ ، ١٠ ، ١١) لإيجاد قيمة الإجهادات عند أى نقطة بدلالة الإجهادات الرئيسية وذلك بالاستعانة بما سبق استنتاجه من أن مقدار إجهاد القص فى اتجاه المحاور الرئيسية يساوى صفراً ، وبذلك يمكن كتابة المعادلات الآتية :

$$\sigma_{x'} = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \operatorname{Sin}^2\theta \qquad (16)$$

$$\sigma_{y'} = \sigma_1 \operatorname{Sin}^2\theta + \sigma_2 \cos^2\theta \qquad (17)$$

$$\tau_{x'y'} = {}^1/_2\ (\sigma_1 - \sigma_2)\ \operatorname{Sin} 2\theta \qquad (18)$$

وبجمع المعادلتين (١٦ ، ١٧) نحصل على المعادلة الآتية :

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_1 + \sigma_2 \qquad (19)$$

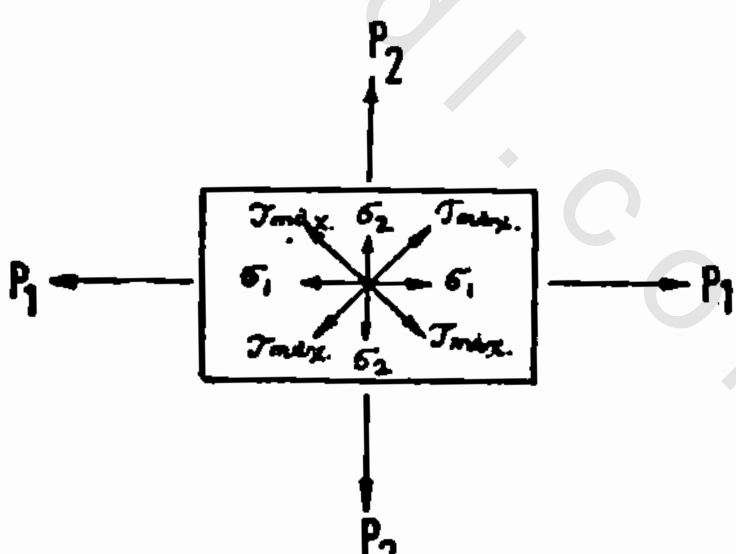
أى أن مجموع الإجهادات العمودية فى أى اتجاهين متعامدين عند النقطة O يساوى مقداراً ثابتاً مساوياً لمجموع الإجهادين الرئيسيين عند هذه النقطة .

وبمراجعة المعادلة (١٨) نجد أن $\sin 2\theta$ تصل إلى نهايتها العظمى عندما تكون الزاوية $\theta$ مساوية ٤٥° ، ومن ذلك نستنتج أن قيمة النهاية العظمى لإجهاد القص عند أى نقطة تساوى نصف الفرق بين الإجهادين الرئيسين وتؤثر فى اتجاه ينصف الزاوية بينهما . أى أنه يمكن كتابة المعادلة (١٨) فى حالة النهاية العظمى لإجهاد القص كما يأتى :

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad (20)$$

ويوضح الشكل (٦١) توزيع الإجهادات الرئيسية والنهاية العظمى لإجهاد القص فى حالة تأثير قوى الشد $(P_1 , P_2)$ فى اتجاه محورين متعامدين .

وباتباع نفس الطريقة فى التحليل الرياضى يمكن إيجاد مقادير الإجهادات عند أى نقطة منسوبة إلى الثلاثة محاور الكارتيزية $(x , y , z)$ بدلالة




(شكل ٦١)

الإجهادات الرئيسية التى يرمز لها بالرموز ( $\sigma_1$ ، $\sigma_2$ ، $\sigma_3$ ) على التوالى كما يلى :

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \qquad (21)$$

حيث $\alpha , \beta , \gamma$

هى الزوايا التى يصنعها العمود على المستوى موضع الاعتبار مع اتجاه الإجهادات الرئيسية على التوالى .

وتتحول المعادلة (٢١) كما هو متوقع فى حالة المستوى الذى يحتوى محورين فقط إلى المعادلة (١٦) التى سبق استنتاجها وذلك لأنه فى هذه الحالة تكون

$$\cos \gamma = 0$$

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

وكذلك يمكن الحصول على مقدار إجهاد القص منسوباً إلى المحاور الكارتيزية الثلاثة طبقاً للمعادلة الآتية :

$$\tau = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - (\sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma) \quad (22)$$

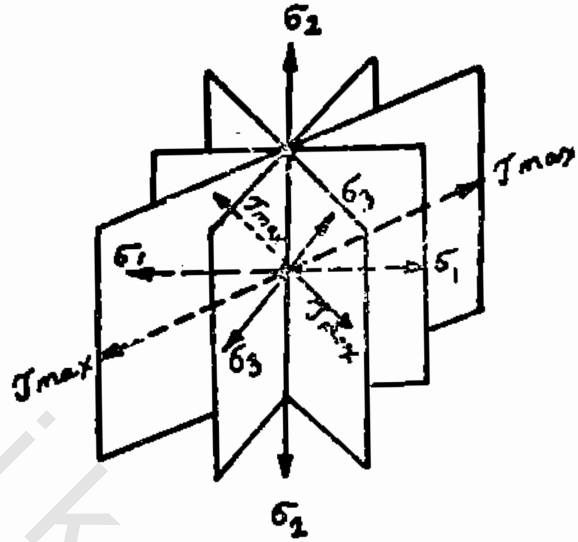
وتتحول هذه المعادلة أيضاً إلى المعادلة (١٨) التى سبق استنتاجها فى حالة المستوى الذى يحتوى على محورين فقط .

ومن المعادلة (٢٢) يمكن أن نستنتج أن الإجهاد القاص يصل إلى نهايته العظمى عندما يؤثر فى المستوى الذى ينصف الزاوية بين الإجهادات الرئيسية ويساوى نصف الفرق بين الإجهادين الرئيسيين .

$$\tau = \pm {}^1/_2 (\sigma_1 - \sigma_2) \text{ ، } \tau = \pm {}^1/_2 (\sigma_2 - \sigma_3) \text{ ، } \tau = {}^1/_2 (\sigma_3 - \sigma_1)$$

$$\tau_{max} = \pm ( \sigma_{max} - \sigma_{min} ) /2$$

ويوضح الشكل (٦٢) الإجهادات الرئيسية والقاصة منسوبة إلى المحاور الثلاثة .

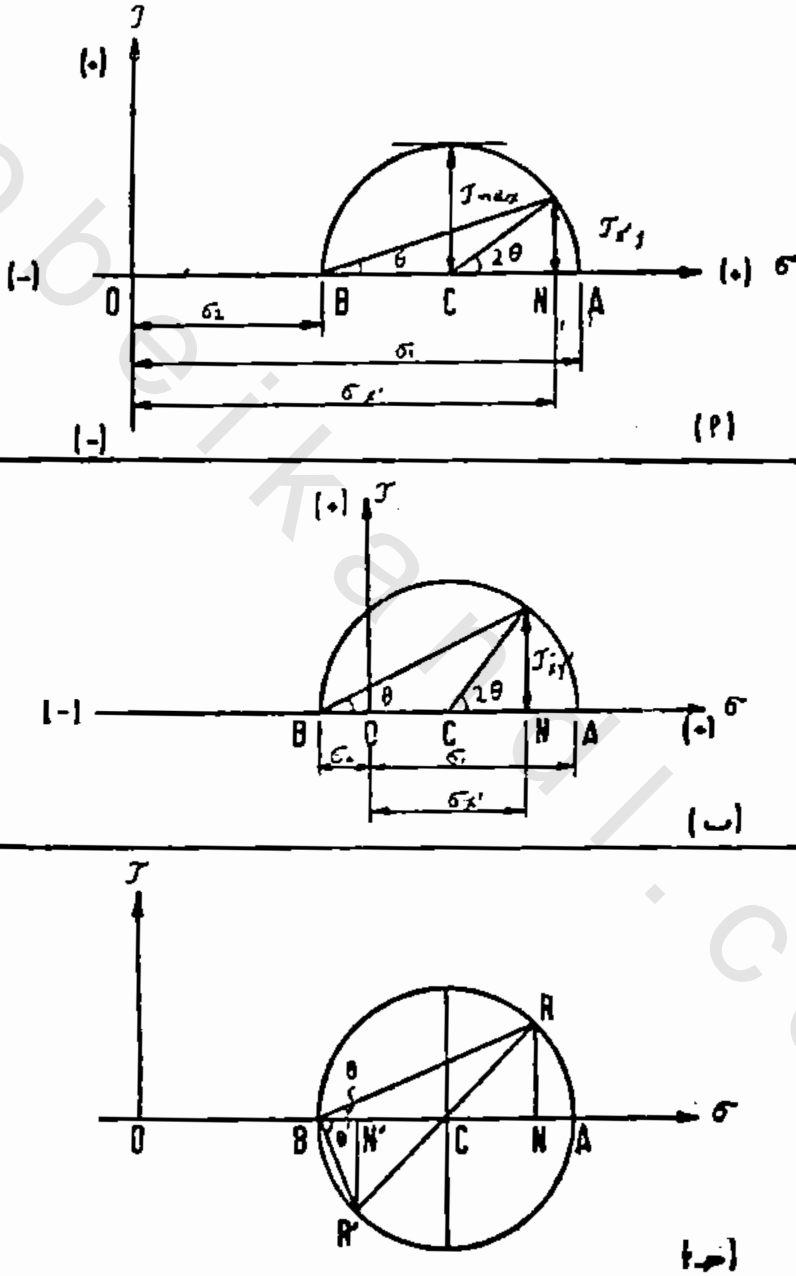



( شكل ٦٢ )

## دوائر موهز :

استطاع موهز إيجاد الإجهادات فى أى اتجاه بواسطة دوائر عرفت باسمه وطريقة رسم هذه الدوائر موضحة بالشكل ( ٦٣ ) . ارسم الخطين OA , OB من أى نقطة O ليمثلا الإجهادين الرئيسيين $\sigma_1$ ، $\sigma_2$ على التوالى شكل ( ٦٣ — ا ) يمثل الحالة عندما يكون كل من $\sigma_1$ ، $\sigma_2$ موجباً ، أما الشكل ( ٦٣ — ب ) فيبين الحالة عندما يكون الإجهاد $\sigma_1$ موجباً و $\sigma_2$ سالباً . ارسم الدائرة التى تمر بالنقطتين (B , A) والتى مركزها C بالنظر إلى هذه الدائرة نجد أن نصف قطرها يساوى $(\sigma_1 - \sigma_2)\ ^1/_2$ بينما الطرل OC يساوى $(\sigma_1 + \sigma_2)\ ^1/_2$ فإذا أردنا إيجاد قيمة الإجهادات التى تؤثر فى أى اتجاه يصنع زاوية $(\theta)$ مع اتجاه الإجهادات الرئيسية فإننا نرسم الخط (BR) الذى يصنع زاوية مقدارها $(\theta)$ مع الخط ( BA ) ويقطع محيط الدائرة فى نقطة (R) ثم نصل (CR) ونسقط العمود (RN) على الخط (AB) فيكون لدينا

$$ON = OC + CN \quad = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\,\theta$$




(شكل ٦٣)

دوائر موهر

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالاستعانة بقوانين حساب المثلثات بصورة بسيطة كما يلى .

$$ON = \sigma_1 \cos^2 + \sigma_2 \sin^2 \theta$$

فإذا قارنا هذه المعادلة بالمعادلة رقم ( ١٦ ) يمكن أن نستنتج أن الخط (ON) يمثل قيمة الإجهاد العمودى الذى يؤثر فى اتجاه يصنع زاوية مقدارها ($\theta$) مع محور الإجهادات الرئيسية . أما إذا وقعت النقطة (N) على يسار النقطة (O) فإن (ON) يصبح مقدارها سالباً أى أنه إجهاد شد ولإيجاد إجهاد القص فى نفس الاتجاه نلاحظ أن

$$RN = {}^1/_2 ( \sigma_1 - \sigma_2 ) \sin 2 \theta$$

وبمقارنة هذه النتيجة بالمعادلة رقم ( ١٨ ) نجد أنها مطابقة لمقدار إجهاد القص .

وعلى ذلك يتبين أن هذا الحل الهندسى لإيجاد قيمة الإجهادات العمودية والقاصة فى أى اتجاه يصنع أى زاوية مطلوبة مع محاور الإجهادات الرئيسية يعرف باستخدام دوائر موهر . كما أنه يمكن بواسطة هذه الدوائر إيجاد مقادير الإجهادات الرئيسية إذا علم مقدار الإجهادات العمودية والقاصة منسوبة إلى أى محاور معروف اتجاهها بالنسبة للمحاور الرئيسية .

وبفضل دوائر موهر يمكن استنتاج كثير من صفات الإجهادات فى حالة المرونة ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

( ا ) عندما تكون $\sigma_1 = \sigma_2$ (أى عندما يتساوى مقدار الإجهادين الرئيسيين ) فإن نصف قطر الدائرة يساوى صفراً وبالتالى لا يكون هناك إجهاد قص وذلك يتفق تماماً مع ما أمكن استنتاجه من المعادلة ( ١٨ ) .

( ب ) من الشكل رقم ( ٦٣ ) نستطيع ملاحظة أن إجهاد القص (RN) يصل إلى نهايته العظمى عندما تكون الزاوية ($\theta$) مساوية ( ٤٥° ) وهنا يصبح مقدار إجهاد القص مساوياً لنصف قطر الدائرة أى مساوياً المقدار ${}^1/_2(\sigma_1 - \sigma_2)$

وذلك يؤكد مرة أخرى النتيجة التى سبق الحصول عليها من المعادلة ( ١٨ ) .

( حـ ) إذا رسمنا (BR') كما فى الشكل ( ٦٣ – ج ) يصنع زاوية ($\theta'$) بحيث تتمم الزاوية ($\theta$) وأسقطنا العمود (R' N') على الخط (AB) فإن (ON') يمثل الإجهاد العمودى على المستوى المتعامد مع المستوى الأصلى . (أى المستوى الذى يصنع زاوية مقدارها $\theta$ مع مستوى الإجهادات الرئيسية) . ومن الشكل (٦٣ – حـ) يمكن أن نستنتج أن .

$$ON + ON' = 2\ OC = \sigma_1 + \sigma_2$$

وهذه النتيجة تؤكد ما سبق أن حصلنا عليه من المعادلة ( ١٩ )

( د ) من دوائر موهر الموضحة بالشكل ( ٦٣ ) يمكن أن نستنتج أيضاً أن النهاية العظمى لإجهاد القص تكون عندما يؤثر هذا الإجهاد فى منتصف الزاوية بين الإجهادات الرئيسية أى أن .

$$\tau_{max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

( هـ ) يلاحظ فى دوائر موهر أن قيمة الإجهادات القاصة الموجبة هى التى تحاول أن تجعل دوران الجسم فى اتجاه عقرب الساعة أما السالبة فإنها تلك التى تجعله يدور فى عكس اتجاه عقرب الساعة .

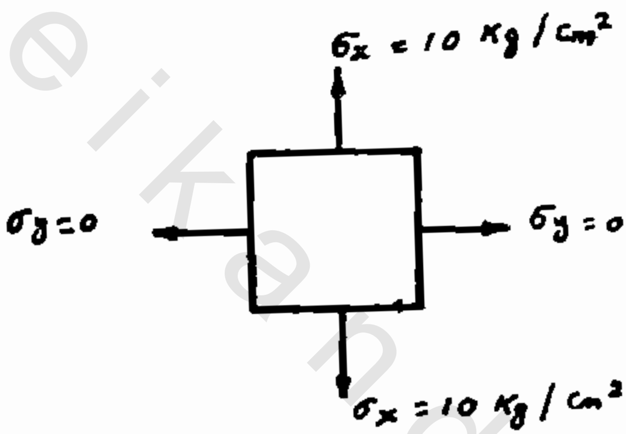
**بعض الأمثلة المحلولة :**

مثال ١ – تأثرت عينة من صخر لإجهادات كالموضحة بالشكل ( ٦٤ – ا ) فإذا كانت مساحة مقطع العينة ١ سم$^2$ ومقدار الإجهاد المؤثر فى اتجاه ($x - x$) ١٠ كيلو جرام / سم$^2$ فالمطلوب حساب مقدار النهاية العظمى لاجهاد القص واتجاهه .

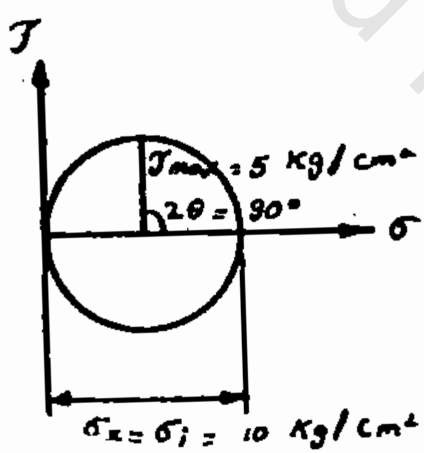
الحـــل : ارسم المحور (x – x) الذى يمثل محور الإجهادات العمودية ووضح مجال الإجهادات التى يتعرض لها مقطع العينة مستخدمًا دوائر موهز كما فى الشكل ( ٦٤ – ب ) وبواسطة دوائر موهز يمكن استنتاج قيمة النهاية العظمى لإجهاد القص وهى تساوى ٥ كيلو جرامات / سم٢ وتصنع زاوية مقدارها

$$2\ \theta = 90$$

$$\theta = 45$$




[أ]

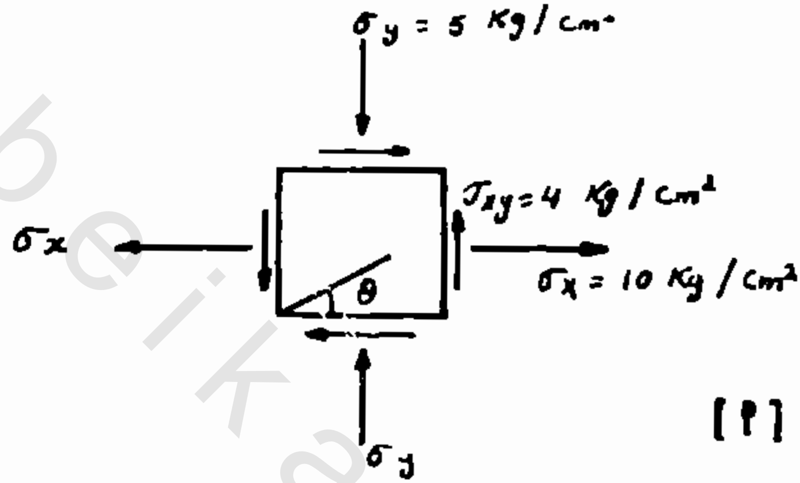



[ب]

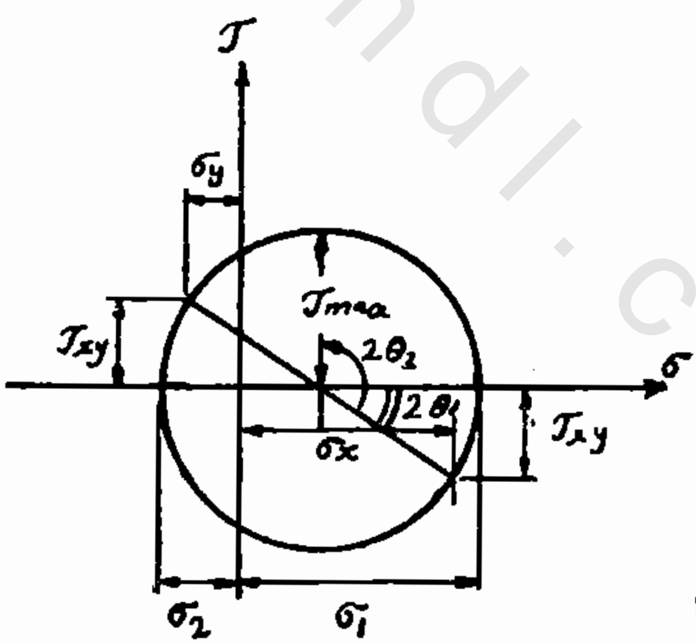
(شكل ٦٤)

مثال ٢ : تعرضت عينة من صخر للإجهادات الموضحة بالشكل

( ٦٥ – ١ ) . فما هو مقدار واتجاه الإجهادات الرئيسية وما هو مقدار النهاية العظمى لإجهاد القص .




[أ]




[ب]

(شكل ٦٠)

الحـــل : من دوائر موهز الموضحة بالشكل ( ٦٥ – ب ) نستطيع تحديد موقع المحاور الرئيسية كما نستطيع تحديد قيمة الإجهادات الرئيسية والنهاية العظمى لإجهاد القص .

وبقياس الزاوية ( $2\theta_1$ ) على الشكل يتضح أن قيمتها هى

$2\theta_1 =$ ٢٨,٠٨°

$\theta_1 =$ ١٤,٠٤°

حيث الزاوية ($\theta_1$) تمثل الزاوية التى يصنعها إجهاد القص الناتج عن مجال الإجهادات الممثلة بدوائر موهز .

وبقياس مقدار الإجهادات الرئيسية على الشكل يتضح أن

($\sigma_1$)= ١١,٠٠ كيلو جرام/سم٢ شد

($\sigma_2$)= ٦,٠٠ كيلوجرام/سم٢ ضغط

أما النهاية العظمى لإجهاد القص فتساوى = ٨,٥ كيلو جرام/سم٢

ويقع فى مستوى يصنع زاوية مقدارها ($\theta_2$) مع المحور ( $x - x$ ) والتى يمكن قياسها من دائرة موهز الموضحة بالشكل حيث

$2\theta_2 =$ ٢ ($\theta_1$) + ٩٠

= ١١٨,٠٨

$\theta_2 =$ ٥٦,٠٤

### تأثير الإجهادات على الصخور :

عندما تتعرض الصخور لتأثير الأحمال الخارجية المتزنة والتى لا ينتج عنها حركة خطية أو دورانية فإنها تعانى تغيراً فى شكلها الأصلى أو فى حجمها أو فى الاثنين معاً ويطلق على هذا التغير « التشوه » وتتعرض الصخور لتأثير ضغوط رأسية ينتج عنها إجهادات عمودية كما تتعرض لضغوط عرضية « أفقية » واجهادات قص . ويرجع السبب فى نشأة هذه الضغوط غالباً إلى تأثير

الحركات الأرضية العنيفة التى تحدث على نطاق كبير وتسمى بالحركات التكتونية (Diastrophism)

وتنقسم هذه الحركات إلى نوعين رئيسيين :

( ا ) الحركات البنائية للجبال (Orogenic Movements)

ويزداد فيها تأثير الإجهادات القاصة وينتج عنها تشوهات كبيرة بالصخور مما يؤدى إلى نشأة تراكيب ثانوية مثل الطيات والفوالق والفواصل .

( ب ) الحركات البنائية للمرتفعات والمنخفضات

(Epirogenic Movements)

ويزداد فيها تأثير الإجهادات العمودية وتؤثر على مساحة كبيرة من صخور القشرة الأرضية مكونة المنخفضات والهضبات ولكن لا تنشأ عنها تغييرات هامة فى شكل الصخور .

ومن أهم أسباب نشأة الإجهادات فى صخور القشرة الأرضية ما يأتى :

١ – القوة الطاردة المركزية لدوران الأرض ، وما ينتج عنها من حركات تفاضلية نتيجة اختلاف الثقل النوعى للصخور المكونة للقشرة الأرضية والتى ينتج عنها إجهادات التواء (Torsion stresses) .

٢ – تسبب عوامل المد والجزر فى ظهور ضغوط بصخور القشرة الأرضية ويرجع السبب فى ظهور عوامل المد والجزر إلى اختلاف قوى جذب الشمس للأرض عندما تكون شمال أو جنوب خط الاستواء مما يسبب بعض الإجهادات التفاضلية المتكررة المجال والتى تتغير تدريجيًّا مقداراً واتجاها .

٣ – تأثير قوى الجاذبية الأرضية وما يصاحب ذلك من إجهادات مختلفة فى الصخور.

٤ – تأثير الإجهادات التى تنتج من عوامل التآكل والتعرية وما يترتب على ذلك من نقل آلاف الأمتار المكعبة من فتات الصخور على هيئة مواد عالقة أو ذائبة بواسطة المياه الجارية أو الرياح أو الثلاجات إلى الأحواض

الرسوبية فى المحيطات والبحار والبحيرات والقارات وشواطئها ، وما يصاحب مثل هذه العمليات الجيولوجية من تغير فى الاتزان الايزوستاتيكى ونشأة إجهادات بالصخور لاستعادة حالة الاتزان .

٥ — ذوبان كميات هائلة من الجليد بالمناطق القطبية عند ارتفاع درجة الحرارة وما يصاحب ذلك من حركات كتل هائلة من الجليد فتسبب إجهادات كبيرة فى الصخور .

٦ — خروج كميات كبيرة من الحمم البركانية من فوهات البراكين والشقوق السحيقة من باطن الأرض إلى سطحها أو إلى قاع المحيطات والبحار ، وينشأ عن ذلك وجود فراغ فى باطن الأرض يسبب ضغوطاً كبيرة فى صخور القشرة الأرضية كما يصاحب ذلك إجهادات حرارية .

٧ — تؤدى التغيرات الطبيعية والكيمائية التى تحدث فى صخور القشرة الأرضية إلى ظهور إجهادات بالصخور ومن أمثلة هذه التغيرات : تغير المجال المغناطيسى للأرض فى العصور الجيولوجية المختلفة ، وعمليات التجوية الكيمائية التى تؤدى إلى تحلل بعض المعادن المكونة للصخور وأكسدتها أو تميؤها إلى غير ذلك من التغيرات .

٨ — يسبب ضغط الطبقات العليا من صخور القشرة الأرضية إلى تماسك بعض أنواع الصخور الرسوبية ، كما تؤدى أحياناً إلى ارتفاع طبقات الملح ، أو الجبس أو الانهيدرايت نتيجة الانسياب اللدن الذى تمتاز به هذه الأنواع من الصخور . وتلعب عملية إذابة بعض أنواع الصخور مثل الصخور الجيرية بواسطة محاليل المياه المشبعة بثانى أكسيد الكربون دوراً هاماً فى تكوين فجوات وكهوف كبيرة فى الصخور تؤدى إلى نشأة ضغوط كبيرة فيما حولها من طبقات .

## ثانياً ـ التشوهات

### أنواع التشوهات في الصخور :

تتعرض الصخور لثلاثة أنواع رئيسية من التشوهات :

( ا ) التشوه المرن أو الانفعال (Elastic deformation)

( ب ) التشوه اللدن (Plastic deformation)

( حـ ) التصدع أو الانهيار (Rupture)

### ١ ـ التشوه المرن أو الانفعال :

تسبب ظاهرتا المد والجزر وسريان الموجات الزلزالية بصخور القشرة الأرضية رد فعل سريع يؤدى إلى تغيير مؤقت في شكل هذه الصخور وبمجرد زوال القوة المؤثرة تعود الصخور إلى حالتها الأولى ، ويعرف التشوه في هذه الحالة بالتشوه المرن أو الانفعال ومن البديهى أن مثل هذا التشوه المرن أو الانفعال لا يسبب نشأة تراكيب دائمة بالصخور .

### ب ـ التشوه اللدن .

وتنشأ عنه تراكيب دائمة مثل الطيات وبعض أنواع التشققات ، كما ينتج عنه تغيير في حجم الصخور وشكلها لا يزول بزوال القوة المؤثرة . وتتعرض الطبقات الرسوبية بصفة تكاد تكون دائمة لعمليات الطى بالإضافة إلى انزلاق بعض الطبقات الواحدة تلو الأخرى في بعض الأحيان وخاصة في حالة الصخور التى تسلك سلوكاً انسيابياً لدنا قبل أن تتصدع . ويمتاز السلوك الانسيابى اللدن للصخور بأن مقدار التشوه الناتج عن تأثير الإجهادات يزداد بازدياد زمن التعرض لهذه الإجهادات دون زيادة في مقدارها وتسمى هذه الظاهرة « زحف الصخور » .

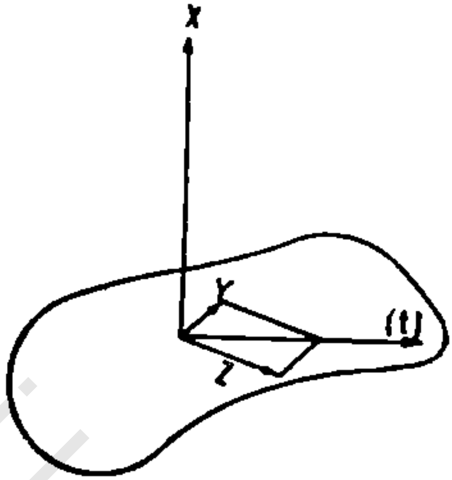
### حـ ـ التصدع أو الانهيار :

قد يزداد تشوه الصخور لدرجة تزيد عن قوة مقاومتها الداخلية مما يؤدى إلى تصدعها على مستويات يختلف اتجاهها باختلاف مجال الإجهاد المؤثر ويطلق على هذه المستويات مستويات التصدع وتنشأ عن التصدع الفوالق والفواصل وبعض أنواع التشققات الأخرى بالصخور . فإذا تحركت إحدى الكتل الصخرية حركة تفاضلية على أحد جانبي سطح التصدع فإن التركيب الناتج يعرف بالفالق ، أما إذا لم تحدث حركة تفاضلية على جانبي مستوى التصدع فإن الكسور الناتجة تعرف بالفواصل .

### تحديد مقدار واتجاه التشوهات :

يمكن نسبة حركة الجزيئات الناتجة من التشوه إلى بعضها البعض فتكون عمودية إذا نتجت عن الحركة النسبية لجزيئين فى اتجاه الخط الذى يصل بينهما أو قاصة إذا نتجت عن الحركة النسبية لجزيئين فى الاتجاه العمودى على الخط الواصل بينهما . ويمكن التعبير عن التشوهات بواسطة الجمع بين هذين النوعين وذلك بنفس الطريقة التى اتبعت عند تحديد مقادير واتجاهات الإجهادات وذلك بأن نفترض مساحة متناهية فى الصغر ($\delta a$) داخل الجسم الذى تعرض للتشوه ونعتبر العمود على هذه المساحة له الاتجاه ($\chi$) كما هو موضح بالشكل (٦٦) وبدراسة حركة الجزيئات فى اتجاه أحد جانبي هذه المساحة بالنسبة للجزيئات الموجودة فى الجانب الآخر نجد أنها تتكون من مركبتين إحداهما فى الاتجاه ($\chi$) العمودى على المساحة ($\delta a$) والآخر فى الاتجاه المماسى ($t$) ويمكن تحليل مقدار التشوه فى الاتجاه ($t$) إلى مركبتيه فى اتجاهين متعامدين بالمستوى وهما ($y$ , $z$) .

ويقاس التشوه فى الاتجاهين العمودى والمماسى بالحركة النسبية لجزيئين متقاربين واقعين فى الاتجاهين المتضادين للمستوى الذى تقع فيه المساحة ($\delta a$)




( شكل ٦٦ )
تحديد مقدار واتجاه التشوهات المرنة

ومقسوماً على المسافة بين هذين الجزيئين عندما تتضاءل كل من المساحة والمسافة حتى تصل إلى الصفر .

فاذا رمزنا للتشوه العمودى فى الاتجاه ($x$) بالرمز ($\epsilon_x$) وكانت ($\mu$ ؛ $\mu'$) يمثلان المسافة الأصلية والمسافة بعد التشوه بين الجزيئين فى الاتجاه الموازى للمحور ($x$) فإن التشوه يمكن التعبير عنه بالمعادلة الآتية :

$$\epsilon_x = \frac{\mu - \mu'}{\mu} \qquad (23)$$

$$\mu' = \mu \, ( 1 + \epsilon_x ) \qquad (24)$$

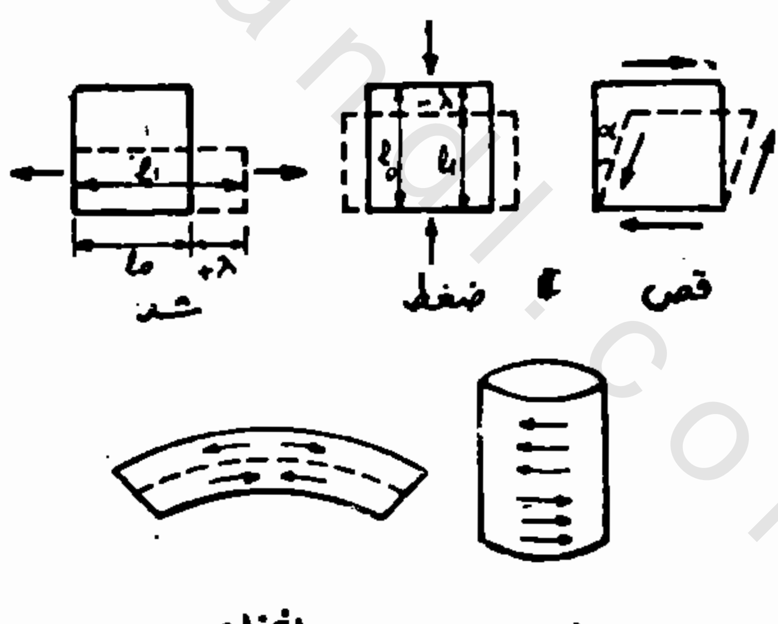
ويتضح من المعادلة ( ٢٤ ) أن التشوهات التى يتسبب عنها استطالة تكون موجبة أما تلك التى ينتج عنها انكماش تكون سالبة . ويمكن التعبير عن التشوهات منسوبة للمحاور الكارتيزية بالمعادلات الآتية :

$$\epsilon_x = \frac{\delta_u}{\delta_x} \qquad \epsilon_y = \frac{\delta_v}{\delta_y} \qquad \epsilon_z = \frac{\delta_w}{\delta_z}$$

حيث $(u , v , w)$. هى الحركة النسبية فى اتجاه المحاور $(x , y , z)$ على التوالى .

وتقاوم معظم أنواع الصخور بدرجات متفاوتة تأثير الإجهادات المسببة للتشوه . ويتوقف نوع التشوهات على نوع الإجهادات المؤثرة على الصخور ويوضح شكل (٦٧) بعض أنواع التشوهات التى تسببها الإجهادات البسيطة التى تؤثر على الصخور . ويتضح من الشكل وجود تشوه قاص ينتج عن تأثير إجهادين متساويين فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه وينتج عنهما التشوه القاص الذى يسبب اختلافاً فى الزاوية بين خطين كانا قبل التشوه متعامدين. ويرمز عادة للتشوه القاص بالنسبة للمحاور الكارتيزية $(x , y , z)$ بالرموز $(\gamma_{xy} , \gamma_{yz} , \gamma_{zx})$ .

وبالرجوع إلى الشكل (٦٨) يتضح ان مقادير التشوهات القاصة يمكن




(شكل ٦٧)

بعض أنواع التشوهات التى تسببها الإجهادات البسيطة

التعبير عنها بالمعادلات الآتية بالنسبة للمستويات ( $\chi y$ , $yz$ , $z\chi$ ) على التوالى:

$$
\left.
\begin{aligned}
\gamma_{xy} &= \frac{\delta v}{\delta \chi} + \frac{\delta u}{\delta y} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\delta u}{\delta z} \quad \frac{\delta w}{\delta \chi}
\end{aligned}
\right\} \qquad (25)
$$

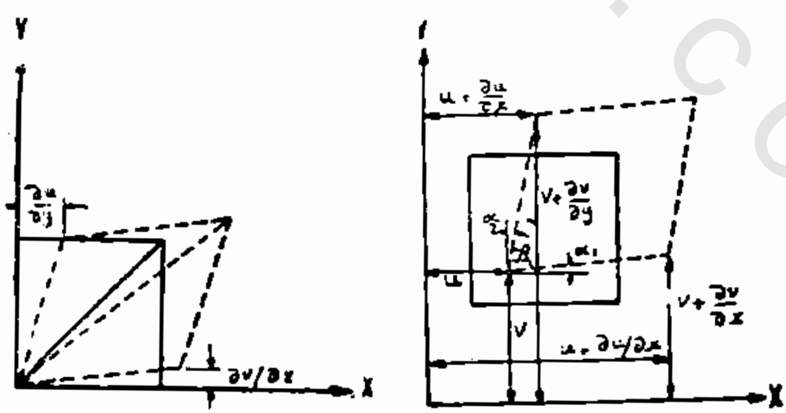
وذلك لأنه كما يتضح من الشكل أن التشوه المرن القاص فى المستوى يمكن التعبير عنه كما يأتى :

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \text{ (in radians)}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\delta v / \delta \chi}{1 + (\delta u / \delta \chi)}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{\delta u / \delta y}{1 + (\delta v / \delta y)}$$




(شكل ٦٨) تحديد مقدار التشوهات القاصة

لكن فى حالة الزوايا الصغيرة التى تحدث نتيجة التشوهات المرنة يمكن اعتبار أن :

$$\tan \alpha_1 = \alpha_1 \qquad\qquad \tan \alpha_2 = \alpha_2$$

ولما كانت المقادير $\frac{\delta v}{\delta y}$ ، $\frac{\delta u}{\delta x}$ صغيرة جداً وأقل بكثير من الواحد الصحيح فإن مقدار التشوه المرن القاص فى المستوى $(xy)$

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$$

**التشوهات المنتظمة :**

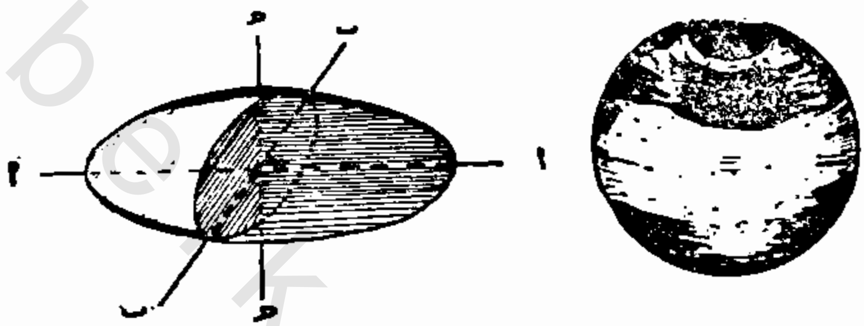
يمكن تحليل الإجهادات المؤثرة على الصخور فى اتجاه المحاور الكارتيزية $(x , y , z)$ فنحصل نتيجة لذلك على إجهادات ضغط أو شد ذات مقادير مختلفة فى اتجاه هذه المحاور يرمز لها بالرمز $(\sigma_x , \sigma_y , \sigma_z)$ . كما نحصل على إجهادات قاصة يرمز لها بالرموز $\tau_{xy}$ ، $\tau_{yz}$ ، $\tau_{zx}$

وفى كثير من الأحيان تنطبق هذه المحاور الكارتيزية مع محاور الإجهادات الرئيسية وفى حالة الصخور المتجانسة والمتشابهة الخواص « الايزوتروبية » تنطبق محاور الإجهادات الرئيسية مع محاور التشوهات وفى هذه الحالة يمكن التعبير عن التشوهات بجسم بيضاوى للتشوهات (Strain ellipsoid) .

فإذا تصورنا جسماً كروياً كالموضح بالشكل ( ٦٩ — ا ) قبل تأثير الإجهادات عليه فإذا تعرض لتأثير قوى شد أو ضغط مختلفة المقدار وفى اتجاه ثلاثة محاور متعامدة مركزها هو مركز الكرة فإنها سوف تتشوه ويصبح لها شكل بيضاوى كالموضح بالشكل ( ٦٩ — ب ) ويمثل التغير فى أطوال محاور الشكل البيضاوى مقدار التشوه النسبى فى اتجاه هذه المحاور .

ويقال إن التشوه منتظم إذا كانت جميع مقاطع الكرة قد تشوهت بانتظام وكانت المحاور الرئيسية فى اتجاه ثابت فى جميع أجزاء الكرة . ويقال إن

التشوه غير منتظم إذا اختلف مقدار التشوه وكذلك إذا اختلف اتجاه المحاور من مقطع لآخر — وتحدث التشوهات غير المنتظمة عادة فى الصخور تحت تأثير إجهادات الانحناء أو الالتواء ، بينما التشوهات المنتظمة تحدث تحت تأثير إجهادات الشد أو الضغط .



[ب] جسم بيضاوى

[أ] جسم كروى

( شكل ٦٩ )
بيضاوى التشوهات

**خصائص التشوهات المرنة أو الانفعالات :**

إذا فرضنا وجود مستطيل (OAPB) موضوع فى نقطة الأصل O ، كما هو موضح بالشكل ( ٧٠ ) فإذا كانت مقادير التشوهات المرنة هى $\gamma_{xy}$ ، $\epsilon_y$ ، $\epsilon_x$ فإن هذا المستطيل سوف يأخذ الشكل OA' P' B' حيث

$$OA' = OA\ (1 + \epsilon_x)$$

$$OB' = OB\ (1 + \epsilon_y)$$

$$BOB' = \gamma_{xy} \qquad \text{(In radians)}$$

وحيث إن الزاوية BOB' صغيرة جداً فإنه يمكن إثبات أن

$$\gamma_{xy} = \text{Sin } BO\,B' = \cos A'OB'$$

فإذا رمزنا للاتجاه ( OP ) بالرمز ( $\chi'$ ) فإن مقدار التشوه فى الاتجاه

($\chi'$) يمكن الحصول عليه كما يأتى :

$$OP' = OP\,(1 + \epsilon'_x)$$

$$(OP')^2 = (OA')^2 + (OB')^2 + 2\,(OA')\,(OB')\cos A'OB'$$

فإذا عوضنا عن $OP'$ ، $OB'$ ، $OA'$ بالمقادير التى تساويها نحصل على المعادلة الآتية بعد حذف مقادير التشوه المرفوعة إلى أس أكبر من الواحد الصحيح

$$2\,OP'\epsilon_x = 2\,\epsilon_x\,OA^2 + 2\,\epsilon_y\,OB^2 + 2\,\gamma_{xy}\,(OA)\,(OB)$$

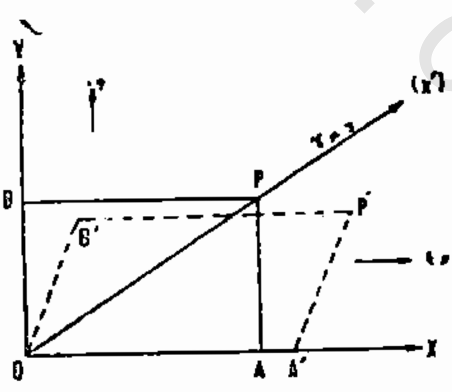
وحيث إن

$$\frac{OA}{OP} = \cos\theta \quad , \quad \frac{OB}{OP} = \sin\theta$$

$$\therefore\ \epsilon_{x'} = \epsilon_x\cos^2\theta + \epsilon_y\sin^2\theta + {}^1/_2\,\gamma_{xy}\sin 2\theta \qquad (26)$$

فإذا قارنا هذه المعادلة بالمعادلة رقم (٩) الخاصة بالإجهاد العمودى نجد أنها نفس المعادلة فيما عدا المعامل ($\frac{1}{2}$) الذى يظهر فى الحد الثالث من المعادلة (٢٦) ويرجع ذلك إلى ما سبق ذكره من أن التشوه القاص لا ينتج إلا من إجهادين متساويين فى المقدار ومتضادين فى الاتجاه . وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\epsilon_{y'} = \epsilon_x\sin^2\theta + \epsilon_y\cos^2 - {}^1/_2\,\epsilon_y\gamma_{xy}\sin 2 \qquad (27)$$




(شكل ٧٠)

خصائص التشوهات

**الاتجاه الذى يساوى فيه التشوه القاص صفراً :**

ارسم المستقيمين (OA , OB) المتساويين والمتعامدين والواقعين فى المستوى (xy) وافرض أن طولهما يساوى (a) كما هو موضح بالشكل ( ٧١ ) ثم تفرض أن المثلث (OAB) قد اتخذ الشكل (OA'B') بعد التشوه وأن مقادير التشوه هى $(\epsilon_x , \epsilon_y , \gamma_{xy})$ ولكى يكون مقدار التشوه القاص مساوياً للصفر يجب أن تظل الزاوية A'OB' قائمة بعد التشوه :

$$OA' = OA\ (1 + \epsilon_x)$$

$$(OA')^2 = a^2\ (1 + 2\ \epsilon_{x'})$$

$$(OB')^2 = a^2\ (1 + 2\ \epsilon_{y'})$$

$$(AB')^2 = 2a^2\ (1 + 2\ \epsilon_v)$$

حيث $(\epsilon v)$ هى مقدار التشوه فى الاتجاه (v) الموضح بالشكل .

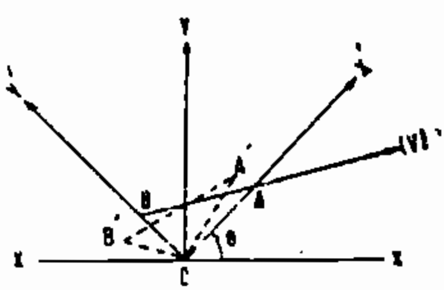
فإذا ظلت الزاوية A'O'B' قائمة فإن

$$(A'B')^2 = (OA')^2 + (OB')^2$$

وبالتعويض نحصل على

$$2\ \epsilon_v = \epsilon_{x'} + \epsilon_{y'}$$

ولكن الاتجاه ( V ) يميل بزاوية ٤٥° على الاتجاه ( X ) ولذلك فإنه



( شكل ٧١ )

الاتجاه الذى يساوى فيه التشوه القاص صفراً

يمكن التعويض عن الزاوية $(\theta)$ فى المعادلة (٢٦) بالزاوية $(\theta - 45^\circ)$ فنحصل على المعادلة الآتية :

$$\epsilon (v) = \epsilon x \cos^2(\theta - 45) + \epsilon y \sin^2(\theta - 45) + {}^1/_2\, \gamma_{xy} \sin 2 (\theta - 45)$$

وبالاستعانة بالمعادلتين (٢٦ ، ٢٧) وبنفس الطريقة التى اتبعت عند استنتاج المعادلة (١٢) يمكن إثبات أن

$$\tan 2 \theta = \frac{\gamma xy}{\epsilon x - \epsilon y}$$

وهكذا يتضح أنه : كما هو الحال عند دراسة الإجهادات ، مهما كانت قيمة التشوهات $\epsilon x$ , $\epsilon y$ , $\gamma xy$ فإنه يوجد دائماً اتجاهان متعامدان هما $(\theta + 90)$ ، $(\theta)$ يمكن بواسطتهما حل المعادلة (٢٨) حيث تكون قيمة التشوهات القاصة مساوية للصفر وهذان الاتجاهان هما محورا التشوهات الرئيسية ويطلق على التشوهات فى هذين الاتجاهين التشوهات الرئيسية . فإذا اتخذنا هذين الاتجاهين محورين أساسيين فإننا نجد التشوهات العمودية فى أى اتجاه يمكن الحصول عليها منسوبة إلى هذين المحورين . وبنفس الطريقة التى اتبعت فى حالة الإجهادات للحصول على المعادلة (١١) يمكن إثبات أن

$$\gamma_{x_1y_1} = ( \epsilon_y - \epsilon_x ) \sin 2 \theta \qquad (29)$$

وكما هو الحال عند دراسة الإجهادات نجد أن قيمة هذا التشوه القاص تبلغ نهايتها العظمى عندما يصل مقدار الزاوية $(\theta)$ إلى (٤٥°) ويمكن التعبير عن التشوه العمودى فى الاتجاه الذى يصنع زاوية $(\theta)$ مع المحور الرئيسى للانفعالات بالمعادلة الآتية :

$$\epsilon_x = \epsilon_{x'} \cos^2 \theta + \epsilon_{y'} \sin^2 \theta \qquad (30$$

ويمكن مقارنة هذه المعادلة بمثيلتها فى حالة الإجهادات بالمعادلة رقم (١٦).

هذا ويمكن استخدام دوائر موهر لتحديد التشوهات بنفس الطريقة التى اتبعت عند تحديد الإجهادات كما هو موضح بالشكل (٦٣) فإذا رسمنا

(OA) مساوياً التشوه ($\epsilon_x$) ، (OB) مساوياً التشوه $\epsilon_y$ ثم أتممنا رسم دائرة موهز كما هو الحال فى الإجهادات نجد أن الفرق الوحيد بين الحالتين هو أن الطول ( RN ) العمودى على قطر الدائرة والذى يمثل الإجهاد القاص $\tau_{xy}$ يمثل الآن فى حالة التشوهات نصف قيمة التشوه القاص $\gamma_{xy}$ . أما باقى قيمة التشوهات فتظهر فى دوائر موهز كما هو الحال فى الإجهادات فمثلا التشوه العمودى فى الاتجاه ($\theta$) يمثله المستقيم (ON) أى أن $\epsilon\chi' = ON$

## ثالثاً ـ العلاقة بين الاجهادات والتشوهات المرنة «الانفعالات»

### المعادلات العامة لقانون هوك :

يؤكد قانون هوك أن التشوهات التى تطرأ على الأجسام فى حالة المرونة تتناسب تناسباً طردياً مع الإجهادات التى تؤثر على هذه الأجسام . وعلى ذلك ترتبط المركبات الستة للإجهادات عند أى نقطة فى جسم مرن بمركبات التشوهات الستة التى تحدث عند هذه النقطة نتيجة تأثير هذه الإجهادات . ويمكن التعبير رياضياً عن قانون هوك بالمعادلات العامة الآتية :

$$\left.\begin{aligned}
\sigma\chi &= C_{11}\epsilon\chi + C_{12}\epsilon y + C_{13}\epsilon z + C_{14}\gamma_{xy} + C_{15}\gamma yz + C_{16}\gamma z\chi \\
\sigma y &= C_{21}\epsilon\chi + C_{22}\epsilon y + C_{23}\epsilon z + C_{24}\gamma_{xy} + C_{25}\gamma yz + C_{26}\gamma z\chi \\
\sigma z &= C_{31}\epsilon\chi + C_{32}\epsilon y + C_{33}\epsilon z + C_{34}\gamma_{xy} + C_{35}\gamma yz + C_{36}\gamma z\chi \\
\tau\chi y &= C_{41}\epsilon\chi + C_{42}\epsilon y + C_{43}\epsilon z + C_{44}\gamma_{xy} + C_{45}\gamma yz + C_{46}\gamma z\chi \\
\tau yz &= C_{51}\epsilon\chi + C_{52}\epsilon y + C_{53}\epsilon z + C_{54}\gamma_{xy} + C_{55}\gamma yz + C_{56}\gamma z\chi \\
\tau z\chi &= C_{61}\epsilon\chi + C_{62}\epsilon y + C_{63}\epsilon z + C_{64}\gamma_{xy} + C_{65}\gamma yz + C_{66}\gamma z\chi
\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

حيث ........... $C_{11}$ , $C_{12}$ , $C_{13}$ عبارة عن المعاملات التى تمثل ثوابت المرونة للجسم وحيث إن هذه الثوابت ترتبط بالعلاقة

$$C_{rs} = C_{sr}$$

حيث
$$r,s = (1, 2 \ldots\ldots\ldots 6)$$

فإن عدد المعادلات الستة والثلاثين الموضحة فى المعادلات العامة لقانون هوك تختصر إلى ٢١ فقط . أى أنه فى الحالة العامة مثل حالة البلورات غير المتجانسة وغير المتشابهة الخواص ( غير ايزوتروبية ) ينبغى تحديد ٢١ ثابتاً مرناً لكى يمكن الوصول إلى العلاقة بين الإجهادات والتشوهات وتحديدها تحديداً كاملا فى الأجسام التى تتعرض لها . ولكن للأغراض العملية يكفى دراسة حالة الأجسام المتجانسة والمتشابهة الخواص « الايزوتروبية » وهذا يجعل عدد المعاملات يختصر إلى اثنين فقط . ويرجع السبب فى نقص عدد هذه المعاملات إلى خواص الأجسام المرنة المتجانسة والمتشابهة الخواص الموضحة فيما يلى :

( ا ) الإجهاد العمودى الذى يؤثر على مثل هذه الأجسام لا ينتج عنه إجهاد قص لنفس المحاور المنسوب إليها الإجهاد العمودى .

( ب ) إجهاد القص لا ينتج عنه إجهاد ضغط أو شد بالنسبة لنفس المحاور .

( حـ ) إجهاد القص لا ينتج عنه تشوهات قاصة إلا فى المستوى الذى يؤثر فيه .

ومن هذه الحقائق التى أمكن إثباتها بواسطة التجارب المعملية يمكن إعادة كتابة المعادلات العامة لقانون هوك بالنسبة لهذه الأجسام كما يلى :

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_x &= F_1\,(\sigma_x\,,\ \sigma_y\,,\ \sigma_z) \\
\epsilon_y &= F_2\,(\sigma_x\,,\ \sigma_y\,,\ \sigma_z) \\
\epsilon_z &= F_3\,(\sigma_x\,,\ \sigma_y\,,\ \sigma_z) \\
\gamma_{xy} &= F_4\,(\tau_{xy}) \\
\gamma_{yz} &= F_5\,(\tau_{yz}) \\
\gamma_{zx} &= F_6\,(\tau_{zx})
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

وللحصول على مقدار التشوه المرن فى اتجاه المحور $(x - x)$ يمكن كتابة المعادلة الأولى من المعادلات (٣٢) فى الصورة الآتية :

$$\epsilon_x = \alpha_1 \ \sigma_x + \alpha_2 \ \sigma_y + \alpha_3 \ \sigma_z \qquad (33)$$

حيث يرمز لمعاملات المرونة بالرموز $(\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3)$ وحيث إن المادة متجانسة وأيزوتروبية فإن تأثير الإجهاد $(\sigma_y)$ على الانفعال $(\epsilon_x)$ يساوى تأثير الاجهاد $(\sigma z)$ على الإنفعال $(\epsilon x)$ ، وعلى ذلك فإن $\alpha_2 = \alpha_3$ ولقد ثبت أيضاً من التجارب العملية أنه إذا تعرض جسم مرن لإجهاد بسيط فى اتجاه واحد سواء كان إجهاد شد أو ضغط ، فإنه يتشوه فى نفس اتجاه الإجهاد ويتناسب التشوه الذى يحدث لهذا الجسم مع مقدار الإجهاد المؤثر عليه .

أى أنه إذا كان الإجهاد العمودى $(\sigma_x)$ هو الإجهاد الوحيد الذى يؤثر على جسم مرن فإن مقدار التشوه الذى يحدث فى هذا الجسم يمكن الحصول عليه من المعادلة الآتية :

$$\sigma_x = E \ \epsilon x \qquad (34)$$

حيث E مقدار ثابت يعرف بمعامل ينج (Youngs Modulus) أو معامل المرونة . ولما كان التشوه فى هذه الحالة عبارة عن نسبة بين طولين ، أى مقدار ليست له وحدات فإنه يمكن استنتاج أن وحدات معامل المرونة يجب أن تكون لها نفس وحدات الإجهاد $(\sigma_x)$ أى كجم / سم$^2$ أو رطل / بوصة$^2$ . ولقد أثبتت التجارب المعملية أيضاً أنه إذا تعرض جسم مرن لإجهاد أحادى بسيط « سواء كان شد أو ضغط » فإنه يتشوه فى اتجاه الإجهاد وكذلك فى الاتجاهات العمودية على اتجاه الإجهاد . أى أنه إذا تأثرت أسطوانة تحت تأثير إجهاد شد فى اتجاه المحور فإنها تتمدد فى هذا الاتجاه كما أن قطرها سوف يقل فى الاتجاهات العمودية على المحور وبالمثل يقل طول هذه الأسطوانة إذا تعرضت لإجهاد ضغط فى الاتجاه المحورى ويزداد قطرها فى الاتجاهات العمودية على المحور . ولقد أثبت بواسون « Poisson » من تجاربه المعملية أن مقدار التشوه العمودى

على اتجاه الإجهاد يتناسب تناسباً طردياً مع مقدار الإجهاد كما أنه يختلف معه في الإشارة . ولذلك فإنه إذا تعرض جسم للإجهادات ($\sigma_z$) فقط فإنه يتشوه في الاتجاهات العمودية على المحور ($\chi$) ويمكن الحصول على مقادير التشوهات الناتجة من المعادلة الآتية :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\mu\,\epsilon_z = -\frac{1}{m}\,\epsilon_z \qquad (35)$$

ويطلق على المعامل ($\mu$) نسبة بواسون وهي النسبة بين مقدار التشوه في الاتجاه العمودي على الإجهاد إلى مقدار التشوه في اتجاه الإجهاد . كما يطلق على المعامل (m) رقم بواسون . وعلى ذلك فإن قيمة المعاملات الواردة بالمعادلة (٣٣) هي كما يأتي :

$$\alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{\mu}{E} = -\frac{1}{mE} \qquad (36)$$

ويمكن التعبير عن التشوهات المرنة في الاتجاهات ( $\chi$ ، y ، z ) من المعادلات الآتية :

$$\left.\begin{aligned}
\epsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\
\epsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \frac{1}{m}(\sigma_z + \sigma_x)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \\
\epsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

**معامل الجمودة :**

لقد أثبتت التجارب العملية أنه إذا تعرض جسم مرن لإجهاد قص ($\tau_{yx}$ ، $\tau_{xy}$) فإن هذا الجسم يحدث به تشوه قاص $\gamma_{xy}$ ، وأنه يوجد

تناسب طردى بين مقدار الإجهاد القاص والتشوه القاص يمكن التعبير عنه بالمعادلات الآتية :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

ويطلق على المعامل (G) معامل الجمودة كما يطلق على مجموعة المعادلات (٣٨) معادلات الجمودة ، ويلاحظ أن معامل الجمودة له نفس وحدات الإجهاد كجم / سم$^2$ أو رطل / بوصة$^2$ . وبالرجوع إلى المعادلات (٣٧) نجد أن المجموع الجبرى للتشوهات العمودية فى اتجاه المحاور الثلاثة يساوى

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\left(\frac{m-2}{mE}\right)$$

$$= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\left(\frac{1-2\mu}{E}\right) \qquad (39)$$

فإذا كانت الإجهادات العمودية المؤثرة على الجسم متساوية أطلق على حالة الإجهادات الحالة الهيدروستاتيكية للإجهادات ويكون المتوسط ( $\sigma_{mean}$ ) مساوياً لما يأتى :

$$\sigma_{mean} = {}^1/_3\ (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (40)$$

ويلاحظ أن إجهاد القص فى مثل هذه الحالة يساوى صفراً .

إذا تصورنا مكعباً حجمه (V) يساوى الوحدة تعرض لإجهادات أدت إلى تشوهه فصار حجمه ( $V + \Delta V$ )

$$V + \Delta V = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$
$$= 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \ldots\ldots$$

فإذا أهملنا مقدار التشوهات المرفوعة لدرجة تزيد عن الواحد الصحيح نحصل على المعادلة الآتية :

$$\Delta V = \epsilon\chi + \epsilon y + \epsilon z$$

وبالاستعانة بالمعادلة (٣٩) ، (٤٠) نحصل على ما يأتى :

$$\Delta V = \frac{3}{E}\left(\frac{m-2}{m}\right)\sigma_{mean}$$

$$= \frac{3}{E}(1 - 2\mu)\ \sigma_{mean}$$

ويطلق على القيمة $\sigma_{mean}\left(\frac{m-2}{m}\right)\frac{3}{E}$ أو $\sigma_{mean}(1-2\mu)\frac{3}{E}$ نسبة الانضغاط أو التمدد الحجمى كما يطلق على مقلوب هذه القيمة معامل التمدد الحجمى «Bulk's modulus».

$$C = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

حيث معامل التمدد الحجمى = C

ومن هذه المعادلة يمكن أن نستنتج حدود نسبة بواسون أو رقم بواسون بالنسبة للأجسام المرنة .

$$\infty \geq m \geq 2 \qquad\qquad O \leq \mu \leq 0.5$$

وذلك لأنه إذا كانت $0.5 < \mu$ فإن حجم المكعب يزداد تحت تأثير الضغط وهذا محال ، كذلك إذا كانت $O > \mu$ نحصل على تمدد فى الاتجاه العمودى على المحور $(\chi - \chi)$ الذى يؤثر فيه إجهاد شد مواز لهذا المحور وهذا أيضاً محال بالنسبة للأجسام المرنة المتجانسة والمتشابهة ( الايزوتروبية ) .

ولقد أمكن الحصول على قيمة معامل الانضغاط بالنسبة لكثير من المواد بدقة كبيرة وهى تحت تأثير ضغوط كبيرة . كما أمكن تحديد معامل ينج ومعامل الجمودة بواسطة التجارب المعملية التى أجراها كثير من الباحثين ؛ أما نسبة بواسون فإنها تحتاج إلى تجارب أكثر تعقيداً للحصول على مقدارها . ويمكن قياس قيمة نسبة بواسون مباشرة ولكن نتائج القياس غالباً ما تكون غير دقيقة نتيجة صغر التشوهات المرنة التى يتحتم قياسها بدقة كبيرة ، ولذلك نستخدم فى كثير من الأحيان الطرق الضوئية فى عمليات القياس للحصول على نتائج دقيقة لنسبة بواسون .

ومما تقدم يتضح أن عدد ثوابت المرونة اللازم تحديدها لمعرفة مجال الإجهادات والتشوهات المرنة هى :

معامل المرونة « معامل ينج » $(E)$

معامل الجمودة $(G)$

نسبة بواسون $(\mu)$

وهذه الثوابت ليست مستقلة بعضها عن بعض ولكنها ترتبط بعلاقات رياضية بحيث يمكن إيجاد قيمة كل منها بدلالة الاثنين الآخرين كما يلى :

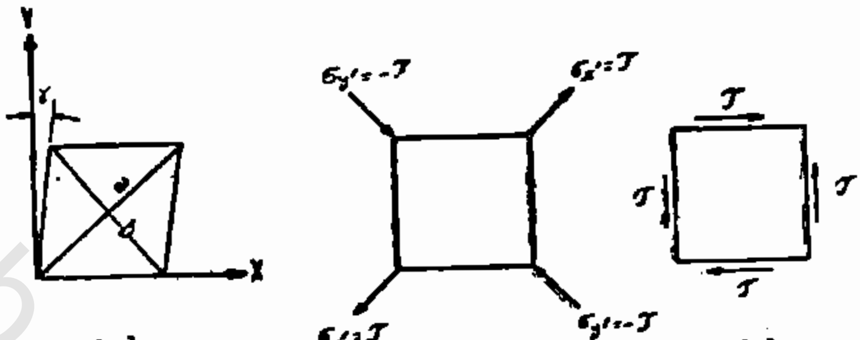
$$E = 2G(1+\mu) \; , \; G = \frac{E}{2(1+\mu)} \; ، \; \mu = \frac{E-2G}{2G}$$

**العلاقة بين التشوهات القاصة والعمودية :**

إذا فرضنا مربعاً طول ضلعه يساوى الوحدة كالموضح بالشكل ( ٧٢ — ا ) تعرض لإجهاد قص $(\tau)$ فقط .

بالرجوع إلى دوائر موهر لتمثيل مجال الإجهادات نجد أن إجهاد القص يكافئ إجهادين متعامدين أحدهما شد والآخر ضغط ويؤثران بزاوية تصنع ٤٥° مع إتجاه اجهاد القص كما هو موضح بالشكل ( ٧٢ — ب )

$\sigma_{y'} = -\tau$ $\qquad\qquad$ $\sigma_{x'} = \tau$




(ج) (ب) (أ)

(شكل ٧٢)

العلاقة بين التشوه القاص والعمودى

فإذا كان طول ضلع المربع قبل التشوه يساوى الوحدة ، فإن قطرى المربع بعد التشوه يصير

$$a^2 = (1 + 1 \ \mathrm{Sin}\ \gamma)^2 + 1^2$$
$$= (1 + \gamma) + 1$$
$$b^2 = (1 - \gamma)^2 + 1$$

وبحذف المقادير التى تزيد فى رتبتها عن الواحد الصحيح

$$a = \sqrt{1 + 2\gamma + \gamma^2 + 1} \quad = \sqrt{2 + 2\gamma} \quad = \sqrt{(1+\gamma) \times 2}$$
$$= \sqrt{2}\left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)$$

ولكن طول قطر المربع قبل التشوه يساوى $\sqrt{2}$

وعلى ذلك يمكن أن نستنتج أن مقدار التشوه فى الاتجاه $(x)'$

$$\epsilon x' = \frac{\sqrt{a\left(1 + \frac{\gamma}{2} - \sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\epsilon y' = -\frac{\gamma}{2} \qquad (42)$$

ولكن من المعادلات (٣٧) يمكن أن نستنتج مقدار التشوه العمودى فى المستوى (xy)

$$\epsilon_{x'} = \frac{1}{E}(\sigma_{x'} - \mu\,\sigma_{y'}) = \frac{\tau}{E}(1 + \mu) \quad . . . \quad (43)$$

ولكن من معادلات الجمودة (٣٨)

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\therefore \quad \epsilon_{x'} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G} = \frac{\tau}{E}(1 + \mu)$$

$$\therefore \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

وهكذا يتضح كما سبق أن ذكرنا أن الثوابت $(E , G , \mu)$ ترتبط ببعضها . فإذا أخذنا فى الاعتبار حدود نسبة بواسون التى سبق استنتاجها فإنه يمكن إثبات ما يأتى :

$$\frac{E}{2} > G > \frac{E}{3}$$

وتوضح هذه العلاقة حدود معامل الجمودة بالنسبة للأجسام المرنة .

### دالة الاجهادات ( دالة إيرى ) Airy's Function

تمكن عالم الرياضيات إيرى «Airy» من استنتاج دالة للاجهادات يمكن بواسطتها تحديد مجال الاجهادات وذلك بالاستعانة بمعادلات الاتزان والتشوهات .

وتتكون هذه الدالة من معادلة تفاضلية من الدرجة الرابعة بالنسبة لمجال الاجهادات فى المستوى وستة معادلات تفاضلية من الدرجة الرابعة بالنسبة للحالة العامة للاجهادات المنسوبة للمحاور الثلاثة «الكارتيزية» .

معادلات اتزان الاجهادات فى المستوى فى حالة عدم وجود قوى داخلية

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\delta\sigma\chi}{\delta\chi} + \dfrac{\delta\tau\chi y}{\delta y} = 0 \\[2ex] \dfrac{\delta\tau\chi y}{\delta\chi} + \dfrac{\delta\sigma y}{\delta y} = 0 \end{array}\right\} \qquad (45)$$

ولكن سبق أثبات

$$\delta X = \frac{\delta u}{\delta\chi} \;\text{و}\; \delta y = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad \gamma\chi y = \frac{\delta v}{\delta\chi} + \frac{\delta u}{\delta y}$$

$$\frac{\delta^2\epsilon\chi}{\delta y^2} = \frac{\delta^3 u}{\delta\chi\delta y^2} \;\text{و}\; \frac{\delta^2\epsilon y}{\delta\chi^2} = \frac{\delta^3 v}{\delta y\delta\chi^2} \;\text{و}\; \frac{\delta^2\gamma\chi y}{\delta\chi\delta y} = \frac{\delta^3 v}{\delta y\delta\chi^2} + \frac{\delta^3 u}{\delta\chi\delta y^2}$$

ومن ذلك نستنتج أن

$$\frac{\delta^2\gamma\chi y}{\delta\chi\delta y} = \frac{\delta^2\epsilon y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\epsilon y}{\delta\chi^2}$$

وبالاستعانة بالمعادلتين (٣٧) ، (٣٨) يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالصورة الآتية :

$$-2\frac{\delta^2\tau\chi y}{\delta\chi\delta y} + \frac{\delta^2\sigma\chi}{\delta y^2} + \frac{\delta^2\sigma y}{\delta\chi^2} = \mu\left(\frac{\delta^2\sigma\chi}{\delta\chi^2} + 2\frac{\delta^2\tau\chi y}{\delta\chi\delta y} + \frac{\delta^2\sigma y}{\delta y^2}\right) \qquad (46)$$

فإذا اخترنا الآن دالة ولتكن $\phi$ بحيث يكون

$$\sigma\chi = \frac{\delta^2\phi}{\delta y^2} \;،\; \sigma y = \frac{\delta^2\phi}{\delta\chi^2} \;،\; \tau\chi y = \frac{\delta^2\phi}{\delta\chi\delta y} \qquad (47)$$

ونستطيع أن نتبين أن معادلات الاتزان (٤٥) تتحقق لكل قيم $\phi$ .

وبالرجوع إلى المعادلتين (٤٦) ، (٤٧) وبعد إجراء عمليات التعويض نحصل على معادلة الاجهادات كما يأتى :

$$\frac{\delta^4\phi}{\delta\chi^4} + 2\frac{\delta^4\phi}{\delta\chi^2\delta y^2} + \frac{\delta^4\phi}{\delta y^4} - 0 = \nabla^4\phi \qquad (48)$$

حيث $\phi$ هى دالة الاجهادات أو دالة ايرى «Airy»

والمقدار $\nabla^2$ يرمز للتفاضل الجزئى $\left( \frac{\delta^2}{\delta\chi^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right)$

وحيث إن المعادلة ( ٤٧ ) تحقق كلا من معادلات الاتزان ( ٤٥ ) ومعادلة مجال الاجهاد ( ٤٦ ) فإن أى حل يمثل توزيع الاجهادات فى الجسم المرن ؛ وليمثل حل هذه المعادلة مسألة بعينها يجب زيادة على ذلك أن تحقق المعادلة الشروط التى نختارها لحل هذه المسألة .

**طاقة التشوهات فى الصخور المرنة :**

إذا تعرض صخر مرن لتأثير قوى خارجية أو داخلية فإنه ينشو أى تتحرك جزيئاته حركة تتناسب مع مقدار القوى المؤثرة عليه . ويرتبط مقدار هذه الحركة « الإزاحة » بقيمة الثوابت الطبيعية والميكانيكية فى الصخر .

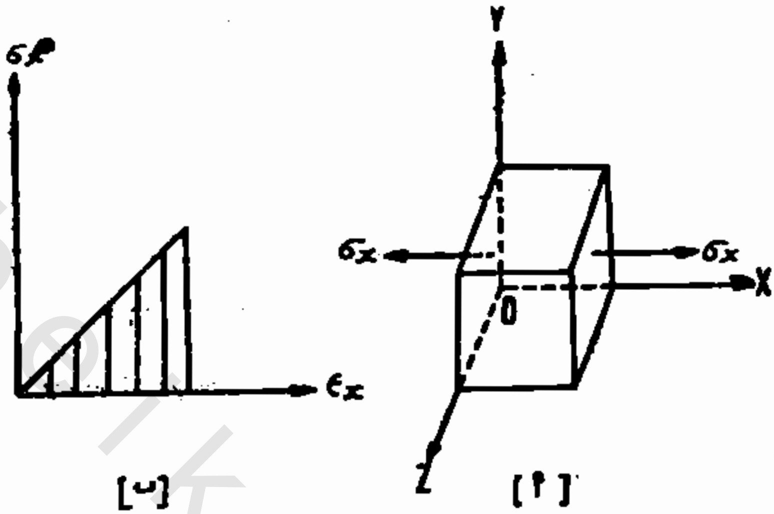
ولما كان الشغل أو الطاقة هو حاصل ضرب القوة فى المسافة لذلك فإن حاصل ضرب الإزاحة الناتجة من التشوه فى مقدار القوة المسببة له فإن الناتج يعرف بطاقة التشوة فى الصخور المرنة .

نفرض أن قطعة من الصخور المرنة كالموضح بالشكل (٧٣ — ا) تعرضت لاجهاد يؤثر عليها تدريجياً من الصفر حتى يصل إلى المقدار $\sigma\chi$ . يمكن إيجاد التشوه الذى يحدث فى هذه القطعة من قانون هوك $\epsilon\chi$ , $\epsilon y$ , $\epsilon z$

وحيث إن العلاقة بين الاجهادات والتشوهات فى هذه الحالة علاقة خطية كما هو موضح بالشكل (٧٣ — ب) ، فإن طاقة التشوه تساوى حاصل ضرب القوة فى المسافه . ولما كانت القوة تتغير تغيراً خطياً من الصفر إلى $\sigma\chi$ $\sigma y$ $\sigma z$ فإن :

$$U = \left( \frac{O + \sigma\chi}{2} \right) dy \cdot dz \ \epsilon\chi \ d\chi$$

$$= {}^1/_2 \ \sigma\chi \ \epsilon\chi \ d\chi \ dy \ dz \qquad (49)$$




( شكل ٧٣ )
طاقة التشوه فى الصخور المرنة

حيث $U$ = طاقة التشوه

$\sigma\chi$ = مقدار الاجهاد العمودى

$d\chi$ , $dy$ , $dz$ = مقدار الأطوال فى اتجاه المحاور $\chi$ , $y$ , $z$

$\epsilon\chi$ = مقدار التشوه فى اتجاه المحاور $\chi$

ولما كانت ($\sigma y$ , $\sigma z$) مساوية للصفر فى هذه الحالة فإنه لن تتولد طاقة تشوه من كل من الاجهادين ($\sigma y$ , $\sigma z$) وبالمثل يمكن إيجاد معادلات مماثلة للمعادلة ( ٤٩ ) بالنسبة إلى كل من الاجهادين $\sigma y$ , $\sigma z$

أما اجهادات القص وتشوهات القص فيمكن الحصول على طاقة التشوه الخاصة بها من المعادلة $U = \text{Moment} \times \text{angle}$

وعلى ذلك فإن طاقة التشوه تساوى

$$U = \frac{O + \tau\chi y}{2} d\chi\ dz\ dy\ \gamma\chi y$$

$$= {}^{1}/_{2}\ \tau\chi y\ \gamma\chi y\ d\chi\ dy\ dz \qquad (50)$$

وبالمثل يمكن إيجاد معادلات مماثلة لاجهادى القص $\tau yz$ , $\tau z\chi$ وعلى ذلك فإن المعادلة العامة التى نحصل عليها لطاقة التشوهات منسوبة إلى الاجهادات الستة معاً هى :

$$U = \frac{1}{2} ( \sigma\chi \, \epsilon\chi + \sigma y \, \epsilon y + \sigma z \, \epsilon z + \tau\chi y \, \gamma\chi y + \tau yz \, \gamma yz + \tau z\chi \, \gamma z\chi ) \, d\chi \, dy \, dz \quad (51)$$

وإذا أردنا الحصول على طاقة التشوه منسوبة إلى وحدة الحجوم فإنها تساوى

$$Uo = \frac{1}{2} ( \sigma\chi \, \epsilon\chi + \sigma y \, \epsilon y + \sigma z \, \epsilon z + \tau\chi y \, \gamma\chi y + \tau yz \, \gamma yz + \tau z\chi \, \gamma z\chi )$$

وللحصول على الطاقة الكلية للتشوه يمكن إجراء عمليات التكامل الموضحة بالمعادلة الآتية :

$$U = \int\int\int Uo \, d\chi \, dy \, dz \quad (52)$$

وباستخدام العلاقة بين الاجهادات والتشوهات فى حالة المرونة تؤول المعادلة ( ٥٢ ) إلى معادلة تحتوى الاجهادات فقط أو التشوهات فقط .