الباب الثانى

تقديم هندسة الفراكتال

الفصل الثانى

أفكار تمهيدية حول أهمية ونشأة هندسة الفراكتال

أفكار تمهيدية حول أهمية ونشأة هندسة الفراكتال

مقدمة:

عندما ترتبط الرياضيات بالطبيعة nature البديعة فإنها تصبح مألوفة واقعية قريبة من تفكير المتعلم يستشعر جمالها فى عقله وفى الطبيعة حوله. وعندما ترتبط الرياضيات بالفن فهذا يزيد دراستها متعة ويجعلها قريبة من وجدانه وإحساسه يستشعر جمالها فى قلبه وروحه. وعندما ترتبط الرياضيات بالعلوم الأخرى، وتسهم فى اختراع ونمو نظريات جديدة، وتطبيقات واسعة وتقدم حلولاً لمشكلات حيوية عصرية كانت تعتبر مشكلات أزلية فهذا يجعل المتعلم يقدرها لفائدتها ويستشعر جمالها فى عظمتها.

تناغم الرياضيات مع الطبيعة مع الفن الراقى الذى يولِّد نظريات وتطبيقات فى أرجاء الحياة المعاصرة نجد مثالاً له فى هندسة عصرية تسمى هندسة الفراكتال Frac-tal Geometry. وكان هذا السبب الأول فى تعلقى بها وتقديم فكرة مبسطة متكاملة لها للمعلم (فى هذا الكتاب) للاستفادة بها وليستطيع أن ينمى تذوق جمالها فى الكون وفي العقل والقلب وتقدير عظمتها وفائدتها لتلاميذه من خلال خصائص مثيرة لها وأنشطة مستوحاه منها. أما السبب الثانى الذى أثارنى لتقديم هذه الهندسة كان نتيجة حديث مع إحدى طالباتى (وهى الآن فى درجة أستاذ ولها مؤلفات وهى أ.د/ مديحة حسن). وذلك عندما كنا فى الطريق لحضور مؤتمر فى كلية تربية الفيوم وأرادت الاستفسار عن بعض أفكار هذه الهندسة التى قرأت عنها. وسألتنى لماذا لا أكتب نبذة عنها. وبعد سنتين انشغلت باستكمال كتاباتى سلاسل للصغير والكبير لتنمية العقلية الرياضية الابتكارية منذ الصغر تتضمن سحر وغرائب هندسة جديدة (مستوحاه من نظرية فى التوپولوچى الجبرى) ثم حضرت مؤتمر الجمعية المصرية

للتوبولوچى حيث ألقيت ورقة عن «التوبولوچى ومعلم الرياضيات[١] تضمنت فكرة سريعة عن هذه الهندسة وأحسست بتشوق البعض للتعرف على هذه الهندسة.

واسترجعت بعضاً من كتاباتى للطفل (أو بالأحرى للصغير والكبير)[٢]، ووجدتنى المحت ببعض خصائص لأشكال فراكتال، اعتبرت أحدها بطلاً لإحدى سلسلة حكايات وألغاز رياضية. كما قدمت التكرار المرحلي iteration فى تكاثر ثنائى لمخلوقات عجيبة فى كتاب لرياض الأطفال[٤]، وفى كتاب آخر لتنمية المواهب الرياضية والفنية من خلال الحلزون[٣]. وأشرت إلى خاصية البعد الفراكتالى فى أحد سلاسل كتبى عن تشكيلات للمكعب. وكان هذا سببا ثالثا دفعنى لاستكمال ما قدمته فى عمل متكامل للمعلم عن هذه الهندسة.

أما السبب الرابع فكان تأثرى بأصالة فنان يدعى پولاك، وفنان وعالم آخر يدعى تيلر حاول تحليل لوحات پولاك باستخدام الكمبيوتر، فوجدوها دون غيرها المشابهة لها تتضمن أشكال فراكتال. كما استطاع تيلر نفسه أن يجعل الطبيعة فى ليل ذو رياح عاصفة أن تتدخل فى قذف ألوان من جهاز له بريتم (ايقاع) حركة الرياح على لوحة فنية فى وضع أفقى فترسم لوحة بأشكال فراكتال تشبه لوحات پولاك.

أما السبب الخامس فكان صدور كتاب مترجم لوزارة الثقافة عن علم جديد انبثق من هندسة الفراكتال وهو الهيولية (أو جوازاً الفوضى، Chaos، بعنوان «الهيولية تصنع علماً جديداً» يتضمن فصلاً فى بضع صفحات بعنوان هندسة الطبيعة. ويقصد بها هندسة الفراكتال والكتاب مكتوب للعامة بأسلوب وصفى وتثقيفى بعيداً عن أى معالجة رياضية.

وعندما فكرت فى الكتابة عن أفكار هندسة الفراكتال رجعت إلى الإنترنت (من خلال Internet Exlolorer ثم اختيار Favourates ثم كتابة Fractal Geometry) فوجدت ١٨٠٠ موقعاً يتعرض لهذه الهندسة متضمناً حوالى ٧٠٠ كتاب استمتعت بثلاثة مواقع منها ما يخص الفن والصور المتحركة مثل:

www.angelfire

www.contest2k.com

www.math.rice.edu

وعلى ذلك حاولت من خلال التمهيد وتقديم الأفكار الأساسية لهندسة الفراكتال **فى هذا الباب** أن أطعمها ببعض أعمالى السابقة والاستعانة بأعمال وفنون الآخرين لغرس النواحى الفنية الرياضية المثيرة الخلاقة العصرية من جهة. ومن جهة أخرى إثارة المعلم للتعلم مدى الحياة فى الرياضيات وخاصة الرياضيات العصرية ومنها هندسة الفراكتال. وذلك مع إثارة النواحى الابتكارية فى تدريسه.

١.٢ هندسة الفراكتال وأفكار وحكايات حول نشأتها

جلس بنوا ماندلبروت Benoit Mandelbrot (البولندى المنشأ والفرنسى الموطن والمشتغل حاليا فى شركة IBM بأمريكا) على شاطىء بإنجلترا ومن قمة استمتاعه بالبحر وأمواجه وجوه... زاغ ببصره نحو الشاطىء وبهره تعرجاته وخلجانه وتضاريسه الصخرية المتباينة... لم يلهمه البحر بقصيدة شعرية أو بلوحة فنية...

ولكن الشاطىء المتعرج أثار مشكلة فى خاطرة.. ما هو طول شاطىء إنجلترا؟ شكل الشاطئ المتعرج ذكره بالأشكال المتشابهة ذاتيا self similarity . والشكل المتشابه ذاتيا ببساطة هو شكل يتكون من أشكال أصغر منه بمقاييس Scales مختلفة مثل فرع شجرة وتفرعاتها أو شريان وتفرعاته أو نهر بروافده الموجودة فى الطبيعة nature، وفى الزخارف الرياضية الفنية منذ آلاف السنين (ومنها المصرية القديمة والإسلامية)... ولكونه عالم رياضى تدرب على الرياضيات الشكلية لمدرسة بورباكى، فكان من ثقافته الرياضية أن تذكر اهتمامات كانتور وهاوسدورف وجوليا وكوخ Koch، وبينو..... خاصة بأفكار وأشكال قدموها ولاحظ أنها تتضمن أشياء ذات تشابه ذاتى لأى عدد من المقاييس.

وانطلق من تعريف الشكل المتشابه ذاتيا (وهو المتكون من نماذج أصغر منه) إلى تعريف أعم للفراكتال.. وهو الشكل الهندسى (الخشن أو ذو الانكسارات) الذى يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها (على الأقل تقريبا) هو تصغير للشكل لعديد من

المقاييس)... ورجع إلى تعاريج الشاطىء... انـها فراكتالات. ويبدأ مشوار المعالجات الرياضية ليخترع أبعاداً جديدة للفراكتالات؛ منبثقة من البعد التوپولوچى وبُعد قدمه هاوسدورف (بُعـد الصندق). وأعتبـر بُعد dimension الفـراكتال خاصـية أساسـية أخرى للفراكتال.

ثم يقوم بتوليد فراكتالات (فى الرياضيـات) وفراكتالات (مشابهة لما فى الطبيعة) فرضـية Virtual؛ عن طريق نظم الدوا ل مـرحلية التكرار IFS، حيث يمكـن اعتبار التكرار المرحلى تكنيك مرتبط بالفراكتالات.

وقد شد انتباهه واعجابه وانـبهاره بمجموعة چوليا Jolya Set إلى دراسة إتصـالية مسارات (كـمفهوم توپولـوچى) لدوال ذات متغيـر مركب تربيـعية دفعه إلى تـوليد أجـمل وأغـرب وأشهـر فراكـتال مـعروف باسـمه وهـو مجـموعـة مانـدلبـروت Mandelbrot (كجاذب غـريب Strapge attractor) . ومع عملـه فى شركة IBM ونتـيجة التـقدم فى الرسـوم الكمـبيوترية وتقنيـات التلـوين، أمكنـه عمل برنـامج كمبيوترى لاظـهار مجموعة ماندلبروت علـى شاشة الكمبيوتر. وهى بـالألوان تعتبر لوحة فنية فريدة تتميز بشفافية درجات الألوان المتعددة. وقد ساعده عمله السابق فى الاقتـصاد ومقابـلته للاضـطرابات الاقتـصادية، ومـن عمله فـى هندسة الاتـصالات ومقابلته لمشكلات الاتصال التى فى بـاطنها أسباب ترجع إلى الهيولية Chaos التـى يرتبط فيها الـنظام باللانظام. فالهيلولـيه ارتبطت نشأتها بهندسـة الفراكتال التى أدت إلى تنميتها وبلورتها.

نرجـع إلى الـطبيـعة الـساحرة المـلهمـة.... البـحر وشواطـئه المـتعرجـة جعـلت ماندلبـورت يخترع هندسـة جديدة عصرية، أحـد تطبيقاتـها هو مشكلـة قياس طول الساحل الإنجـليزى. وذلك بتحلـيل خواص التشابه الذاتـى والبعد الفراكتـال وتمثيل فراكتالات تعكس ثـنايات وانكسارات وتعرجات الشاطىء العـديمه الانتظام لأجزائه الصغيرة.

هندسة الفراكتالات لها أيضا تطبيقات فى هندسة الاتصالات وفى علوم الأرصاد

الجوية.... فهى فى الواقع لها تطبيقات حيوية تكنولوجية متعددة. وتستخدم فى العلوم Sciences والعلوم الهندسية مثل توصيف شكل نسيج لأسطح مركبة. وعلى جانب آخر تستخدم فى السينما والتليفزيون لعمل مناظر طبيعية فرضية خيالية Creates realisic imaginary landscape كخلفية لأفلام الخيال العلمى والقصص الخيالية.

كما تطبق هندسة الفراكتال فى الأنظمة الديناميكية والموجيات Wavelets وأنظمة الهيوليه Chaos وفى علوم الزلازل والفيزياء الأرضية والأحياء. ونتج من ربط (أو تطبيق) هندسة الفراكتال مع نظرية الأنظمة الديناميكية التوصل إلى علم عصرى جديد يسمى «الأنظمة الديناميكية غير الخطية» non linear dynamic Systems . وقد يسميها البعض «بأنظمة التعقد» أو «التعقدات» Complexities .

وعند إصدار كتاب ماندلبروت ١٩٨٢ حول هذه الهندسة اختار اسمها هندسة الفراكتل. وقد اختار اسم فراكتال Fractal لأنه وقع تحت يده بالصدفة مجلة عرف منها أن Fractus هى كلمة لاتينية تعنى يكسر break وبمعنى كسر Fraction رياضى وهذا جعله يشتق الاسم فراكتال منها. ولذا فإن البعض يترجمون هندسة الفراكتال بهندسة الكسريات أو هندسة الفتافيت.

تمضى الأيام ويذهب بعض الرياضيين [٦] لمؤتمر رياضيات «**المجلس العالمى لمحللى غير الخطية**» سنة ١٩٩٦ باليونان. وللترويح يذهبون إلى متحف فيجدوا أنفسهم أمام لوحة من العصور القديمة لشاطىء يونانى قديم للقارة المفقودة أتلانتيس أحدثت تعرجاته بركانًا يعتبر نموذج لفراكتالات شبيهة بشاطىء إنجلترا. فيستعيدوا الذكريات، وينطلق الجميع يسأل ما هو طول شاطىء أتلانتيس؟.. أسوة بسؤال ماندلبروت... ما هو طول شاطىء إنجلترا؟....

مجمل القول: التأمل فى الطبيعة.. الأمواج فى حركاتها المنتظمة والفوضوية (الهيلوليه) Chaos .. الشاطىء بتعرجاته غير المنتظمة والمتشابهة.. الثقافة الرياضية من القديم والحديث التى اخترعها الرياضيون فى العصور المختلفة..، التعمق

الرياضى فى التوبولجى والتحليل المركب ونظرية الدوال الهندسية والحركة البراونيه Brownaian وتكامل ليبيه وتماثلات كلين، لى Lie... أنتج هندسة جديدة عصرية مملوءة بالحياة والجمال تعكس الطبيعة وتسهم فى تفسيرها وفى حل المشاكل العصرية... نموذجها يحتضن الفن الرياضى القديم والحديث... ولها تطبيقات حيوية فى الأنظمة الديناميكية والتكنولوجية والحيوية والطبيعة.... كل هذا يعكس وجهة نظر هيرش حول الرياضيات الإنسانية... فهى من صنع الإنسان، اجتماعية (من صنع مجموعة الرياضيين)...، متغيرة، سياسية تعكس النمو الحضارى تؤثر وتتأثر به....، وهى دائما تصحح نفسها أو تطور نفسها. فكما يقول ماندلبروت[٧] «لماذا توصف الهندسة (ويقصد الهندسة الاقليدية) دائما بأنها جافة وباردة؟ ... يكمن السبب فى عدم قدرتها على وصف شكل السحاب أو الجبال أو الشاطىء أو الشجرة.. فالسحب ليست أشكال كرويه والشواطىء ليست دوائر وجذع الشجرة bark غير ناعم، ولا البرق يسير فى خط مستقيم.. وجود هذه الأنماط تتحدانا لدراسة هذه الصور (الأشكال) Forms التى اعتبرها إقليدس بأن ليس لها شكل Formless ، ودراسة الشكل الخارجى morphology لما لا شكل له amorphous».

وبالرغم من أن ماندلبروت هو منشىء هندسة الفراكتال الهامة التى تعتبر حجر أساس لتطور علوم عصرية وحلولاً لمشكلات عصرية إلا أنه تعرض لنقد وهجوم من الرياضيين. فقد إنتقده كرانتز[٥] Krantz لأن معظم أفكار هندسة الفراكتال كانت موجودة من قبل كما أن بعض نظرياتها أثبتت فى ١٩٢٠.

ومع أن ماندلبروت إعترف أن أفكار پول ليفى الشاعر الرياضى لنظرية الحركة البراونيه لها الفضل فى إلهامه بأفكار رائعة (جميلة) حدسيه فى عمل الفراكتال؛ إلا أن سبب النقد يرجع ربما إلى أن هندسته لا ترضى (البحتويون ـ المثاليون ـ الشكليون ـ المنطقيون). وذلك لأن لها مذاقًا ينحو إلى الرياضيات التطبيقية فهى نصف عملية، ولأنها تخدم العلوم الأخرى أكثر من الرياضيات. أو لأنه يعتمد على إمكانيات وآليات الكمبيوتر لاستكشاف وتفسير نظرياته دون إثباتها بأساليب رياضية صارمة. أو ربما يكون السبب راجعًا إلى تعالى ماندلبروت وإحاطته بهالة إعلامية فى حلبة

السياسية العلمية حتى إعتبروه أنه خارج الرياضيات. وعلى أية حال فإلى ماندلبروت يرجع الفضل فى وجود هندسة الفراكتال.

وكما أثار البحر والشاطىء الإنجليزى الهامة بهذه الهندسة، فقد أثار البحر بإنتظام وثورة موجاته الرياضى سمال Smale إلى اختراع هندسية عصرية أخرى تعتمد أيضا على الهيولية Chaos تسمى هندسة حدوة الحصان. ولها جذور فى هندسة الفراكتال.

وسيظل البحر منبعاً الهام خصب لبلورة أفكار ونظريات رياضية وعلمية. ومهما كان لهندسة الفراكتال من إبهار لأهميتها وجمالياتها وحيوتها وفائدتها العصرية.. فانها ستصير بعد فترة (قد تمتد قرنًا من الزمان مثلا) عتيقة وغير مناسبة لتفسير ظواهر طبيعية أو حياتية أو حل مشكلات مستقبلة. فقد كانت قوانين نيوتن فى وقت ما مناسبة لتفسير حركة الأجسام الكبيرة وحركة البندول... ولكنها أصبحت عتيقة لفشلها فى تفسير حركة الأجسام الدقيقة وظواهر عشوائيه وفى البحث عن أصل الكون فجاءت النظرية النسبية لأينشتين لتتربع على العرش. و نجحت فيما فشلت فيه قوانين نيوتن ثم أصبحت عتيقة لعدم قدرتها على تفسير اضطرابات وعدم الخطيّة فى أنظمة حيوية... ثم جاءت هندسة الفراكتال ونظرية الهيولية ونظرية الأنظمة الديناميكية غير الخطية لتحل مشكلات عصرية ترتبط بالاضطرابات والهيولية (الفوضى)... فى مجالات متعددة فى الطبيعة والإنسان وهندسة الاتصالات وفى الأجهزة الدقيقة التكنولوجية... ثم بعد فترة ستصير عتيقة... وهكذا وتبقى الرياضيات ذات طاقة متجددة تبعث الحياة والنمو فى علوم مستقبلة متجددة.

وأخيراً هندسة الفراكتال قدمها ماندلبروت فى السبعينيات وبلورها فى الثمانينات وإهتم بها العلماء واشتهرت فى التسعينات. وابتدأ الإهتمام بتعريفها للمعلم منذ سنتين فى ٢٠٠٢. فلماذا لا أبادر بتقديمها لمعلم الرياضيات فى مصر والبلاد العربية؟

تعقيب(٢): تضامين implications وانعكاسات حول تنمية الإبتكار التدريسى لمعلم الرياضيات

فى الواقع أن الحكاية لها تأثير كبير على جذب الإنتباه والاهتمام والتعلق..،

وعلى إثارة التفكير والخيال والمشاعر...، وعلى تقمص شخصية البطل والاقتداء به...، وعلى الانغماس ومتابعة الأحداث المتسلسلة أو القفز للتوصل للنهاية...... وكلنا نعرف كمية الأهداف التى تحققها الحكاية خاصة إذا كانت تربوية هادفة.

وقد ناظر أحد الرياضيين الحكاية بالبرهان المنطقى فكلاهما يبدأ من مقدمة أو مسلمات (أو نظريات يعتمد عليها البرهان)، وكلاهما يسير فى خطوات متعاقبة (سلسلة من الأحداث أو خطوات منطقية)، وكلاهما يستخدم علاقات (بين الأحداث والأبطال والأماكن أو قواعد منطقية ونظريات)، وكلاهما له نهاية (نهاية الحكاية أو وهو المطلوب إثباته). كما أن أحد الرياضيين ناظر إيقاع البرهان بتناسق خطواته وجماله بإيقاع الموسيقى..

وقد وجدت بالتجربة أن الحكايات والألغاز الرياضية تنمى التفكير الرياضى الابتكارى (بمستويات عليا) للتلميذ الضعيف والتلميذ المتفوق فى الرياضيات (بالمرحلة الإعدادية).

فما بالك بحكاية نشأة هندسة عصرية مع تمهيد يثير الدوافع لمعرفتها. أعتقدأن هذا المدخل سيكون له دور فى تنمية ابتكارية تدريس معلم الرياضيات خاصة إذا كانت هذه الهندسة العصرية إبتكارًا لفكر رياضى جديد، وهى بذاتها تمتلك خصائص تثير الإبتكار نظرًا لروابطها Connections بالطبيعة وبالفن وبالرياضيات وبالعلوم وبالتطبيقات العصرية التكنولوجية والحيوية.

بالاضافة إلى أن الحكاية عندما تكون مرتبطة بنشأة علم جديد أو حتى عمل تاريخى عظيم تعبّر عن فكر جديد مختلف عن نمط تفكير تقليدى.

ويذكرنى هذا بحكاية مولد العبقرية الحربية للإسكندر الأكبر. فعندما كان فى الثالثة عشر من عمره إشترك فى مسابقة... وهى ركوب حصان غير مروض والانطلاق به والحصان يكون جائزة لمن ينجح فى المسابقة... كل من يركب الحصان أمامه يجد أن الحصان يثور ثورة عارمة ويرميه. لاحظ الإسكندر مكان الحصان. فغير موضعه ١٨٠° حتى لا تقع عينا الحصان على أشعة الشمس التى تحرقها وتؤلمها

وتهيـجه. أى أنه غير تفـكيره تماماً عن غـيره السابقين الـذين فشلوا فى ركـوبه. ومن المشوق أنه ارتبط عقليا ووجدانيا بهذا الحصـان الذى ركبه فى جميع فتوحاته وعندما عاد به بعد مرض الجـنود فى آسيا ابتدأت صحة الحصان فى الـذبول حتى مات. ومن شدَّة ارتباط الاسكندر به توفى هو بعده بشهر واحد.

بالتأكيـد مثل هذه الحكاية لها مـزايا تمس الإحساس والوجدان والخيال والـتفكير وتقوى الذاكرة.... وتعتبر أفضل من السرد التاريخى بمميزاته.

والآن بعد قراءتك لهذا الـفصل مرَّة أخرى حاول أن تتبين فاعليـة مدخل الحكاية حول نشأة هندسة الفـراكتال فى تنمية تفكيك ومشاعرك وخـيالك وذكرياتك لمواقف رياضية وفى تشويقك وتحفيزك لمعرفتها ثم اكتب انعكاساتك فى مذكراتك. ثم حاول التعليق على ما يأتى:

- أثر حكاية نشأة هندسة الفراكتال على تعلقك بعمل البطل ماندلبروت.
- أثر الحكاية منـدمجة مع بعض الأفكار الرياضـية لهندسة الفراكتال فـى تنمية حب الاستطلاع لتعلمها.
- أثر الحكـاية بعد التمـهيد لأهميـتها فى تنـمية تذوقك لجمـال الرياضيات وتـقدير فائدتها.
- هل حفـزك هذا المدخل باستـخدام حكاية نشـأة هندسة الفراكـتال على استقـلالية التعـلم فقمت بزيـارة بعض المواقع عـلى الإنترنت تـخص هندسة الفـراكتال؟ أو حفزك على الاستمرار فى قراءة ودراسة باقى فصول هذا الكتاب؟

من خلال تعـليقاتك على هذه الـنقط ونقطاً أخرى تـقدمها ستجد بنـفسك مدى بداية نمو قـدراتك الابتكارية التى سـوف تعكسها فى تـدريسك الإبتكارى بتلـقائية. وسوف تـبحث وتـفتش عن حـكايات نـشأة الموضـوعات الريـاضية لتـستخـدم هذا المدخل.. مدخل نشأة موضوع رياضى وأهميته.

المراجع

١ـ چيمس جـلايك (ترجمة علـى يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولـية تصنع علـماً جديدًا» القاهـرة ـ المجلس الأعلى للثقافة.

٢ ـ أ.د/ نظـلة حسن أحـمد خضر (١٩٨٨): «حـكاية زخرفـة البلاط ولغـز الميراث» سلـسلة حكـايات وألغاز رياضية تنمى الـتفكير الهندسى والابتكارى لسن ١٠ ـ ١٥ ومشوقـة لجميع الأعمار. القاهرة ـ الهيئة المصرية العامة للكتاب.

٣ ـ أ.د/ نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢): «نم مواهبك الفنية والرياضية من خلال الحلزون مع روابطه وحكايات عليـه». من سلسلة للصغيـر والكبير من سن ١٣ سنة فأكـثر القاهرة ـ الهيئة المصـرية العامة للكتاب.

٤ ـ أ . د/ نظلة حسن أحمد خضر (١٩٨٦): الرياضيات لرياضة الأطفال. الكتاب الثالث ـ للموهوبين ـ القاهرة ـ هيئة الكتب بوزارة التربية والتعليم.

5- Krants, S-in Hermon, R (1991) “Fraclal Theory” The Mathematical Intelligencer, Vol 13 No 1 Winter, 1991 New York, Springer - Verlag.

6- Slomoczynski, W & Zastawniak, T (1999): “How Long Was The Coast of Atlantis”.

The Mathemalical Intelligencer, Vol 21 No 4 Witer 1999. New York, Springer - Verlag.

7- Thomas, D. A (2001): “Modern Gemetry” U.SA, Brooks/ Cole. Thomson learning.

www.angelfire

www.contest2k.com

www .math. rice.cdu

الفصل الثالث

التشابه الذاتى، وتوليد فراكتالات مشـهـورة ذات سـحـر وغـرائـب

الفصل الثالث

التشابه الذاتى، وتوليد فراكتالات مـشـهـورة ذات سـحـر وغـرائـب

مقدمة:

عندما تقابل شخصًا ما لأول مرَّة تشعـر كأنك تعرفه منذ سنوات. وهذا ما يحدث عندما تتعرف على أشـكال متشابهة ذاتيا. فستجد أنك تألفها وكـأنك تعرفها من قبل وهى أشكـال تجدها حولـك فى الطبـيعة nature. وفى الـزخارف القديمـة (اليونانـية القديمـة ـ المصرية القـديمة ـ العربيـة والفارسية). وفـى الزخارف وفى الفـن الحديث. تجدهـا فى أشكـال هندسـية تعـاملت مـعها... تجـدها فى أشـكال رياضـية فرضـية (اصطناعية).

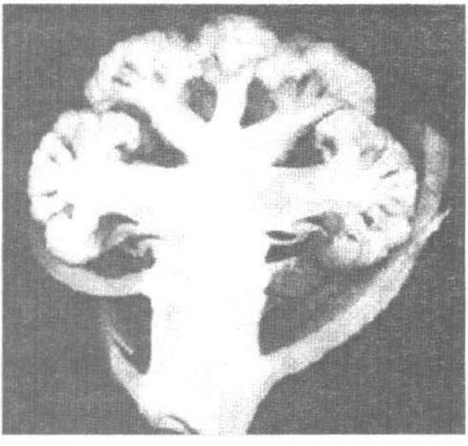
وخاصية التـشابه الذاتى Self Similarity هى خاصية أساسية لأشكال الفراكتال (الفـراكتالات)، وقد يـسميـها البعـض بخاصـية التمـاثل الذاتـى. فالفراكـتالات أو الأشكال المتشابـهة ذاتيا ببساطة هى أشكـال لها نفس المظهر لأى (تكبـير ـ وتصغير) فجزأ صغير من التركيب (للشكل) يبـدو كأنه مثل الشكل الكلى. وعلى ذلك نحاول تقديم التشابه الذاتى من خلال أمثلة فى الطـبيعة، وفى أشكال هندسية مألوفة، وفى الفن ثم نفرق بين التـشابه الذاتى (الاحصائى) فى الطبيعة والفـن وبين التشابه الذاتى (المضبـوط) فى أشكال هـندسية (مـثل الشجرة الـرياضية). وبـالرغم من أن خـاصية التشابـه الذاتى موجودة فى فـراكتالات مألوفة إلا أنـها موجودة أيضا فـى فراكتالات غايـة فى الغرابـة يتوه فيـها العـقل والخيال مـثل فراكـتالات مجمـوعة ماندلـبورت، ومجموعـة چوليا، وفراكتالات مـقترنة بمجموعـة حل معادلات تربيعـية فى الأعداد المركبة.. ولـهذا نشـير إلى هذه الفراكتالات الغريبة ونعرض بـعض صورها... لنمذج المألوف مع غير المألـوف. هل تتصور وجود سطح لا نهائى مسـاحته صفر؟ أو شكل لجسم يشغل حيزًا لا نهائى فى فراغ ذى ثلاثـة أبعاد حجمه صفر؟ أو محيط لا نهائى يحد مساحة محدودة... بالفعل يوجد فراكتالات تؤيد الإجابة بنعم لهذه الأسئلة....

وهذا ما سنتعرض له أيضاً. هل تريد أن تعرف كيف تنتج (أو تولّد) بعض فراكتالات مشهورة؟ هذا ما سوف نساعدك لتقوم بعملها أيضاً.

٣-١- التشابه الذاتى:

٣-١-١- التشابه الذاتى فى الطبيعة nature

إذا نظرنا إلى مقطع رأس لقرنبيط نجد أن شكل الرأس يتكرر بصورة أصغر وأصغر.... كلما صغرت وحدات أفرعها. تأمل الشجر وأفرعه، تأمل ريشة طائر، تأمل مقاطع مخ لطائر أو لحيوان، تأمل التركيب الداخلى لخضروات وثمار فاكهة، تأمل شجرا وقممه، تأمل جبالاً وقممها، تأمل نهرا وروافده..، تأمل تجزيعات وتفريعات ورقة نبات، تأمل تفريعات تزين جناح فراشة (أو بعوضة)، تأمل قرون غزال وتفريعاتها؛ تأمل تشققات أرض جافة..، تأمل أنسجة تحت المجهر......



شكل (١)

سوف تجد أن هذه الأشياء الطبيعية مثلها مثل رأس القرنبيط لها خاصية التشابه الذاتى بمعنى أن كلٍّ منها شكل يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها يكون على الأقل تقريبا شكل أصغر يشبه الشكل الكلى على مدى العديد من المقاييس. انظر شكل(١).

حاول أن تفكر فى أمثلة أخرى لأشكال متشابهة ذاتيا فى الطبيعة فستجد الكثير.

علاوة على ذلك فقد وجد شولتز[1] أن الزلازل كبيرها وصغيرها يتبع نمطاً فى كل مكان تقاس به يقابل المقاييس scales من تكبير وتصغير magnification كما فى التشابه الذاتى. واتضح أيضا لعلماء الجيوفيزياء (الفزياء الأرضية) أن الأسطح المختلفة الممتلئة بالشقوق والتصدعات والكسور الموجودة على هيكل الكرة الأرضية معظمها أشكال متشابهة ذاتيا. وأن تحكمها فى سريان الموائع فى باطن الأرض: الماء - البترول - الغز الطبيعى. وتحكمها فى تصرفات الزلازل يكون فهمه عن طريق الفراكتالات (الأشكال المتشابهة ذاتيا) وهندسة الفراكتال.

وقد لاحظ أيضاً علماء المعادن أن ابنعاجات وإتصال أسطحها تتضمن الأشكال المتشابهة ذاتيا. كذلك علماء الأحياء وجدوا فى الأوعية الدموية وشعيراتها أمثلة للتشابه الذاتى. فهى تتشعب وتنقسم إلى أصغر فأصغر فأصغر مثلها مثل الشعيرات الجذرية فى النبات.. كذلك تشعب الشعيبات الهوائية فى الرئة تتصرف بطريقة ثابتة مهما اختلفت المقاييس من أكبرها لأصغرها فهى لذلك تُعد مثالاً للأشكال المتشابهة ذاتيا..

الم أذكر أن التشابه الذاتى والأشكال المتشابهة ذاتيا مألوفة لنا فهى حولنا وفوقنا وتحتنا وداخلنا فى تكوينات الطبيعة.

ويعتبر التشابه الذاتى خاصية رئيسية فى أشكال الفراكتال (الفراكتالات) حتى أن شكل الفراكتال يعرف عن طريقها.

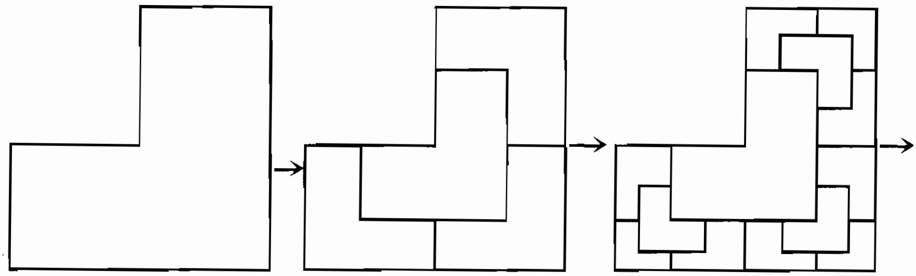
فيمكن تعريف الفراكتال[6] Fractal بأنه شكل هندسى خشن (أو متكسر Fragmented) يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها يكون (على الأقل تقريبا) شكل أصغر يشبه الشكل الكلى[1].

أما الشكل المتشابه ذاتياً Self Similar فهو الشكل المتكون من نماذج أصغر منه. وهو أيضاً فراكتال.

٣-٢-٢- التشابه الذاتى فى الأشكال الهندسية المستقيمة والأشكال الرياضية

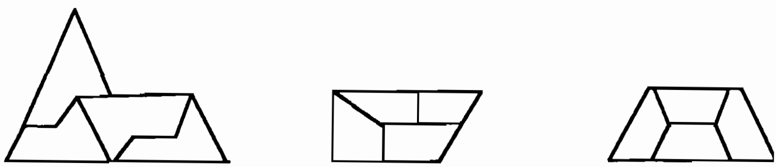
قدمت فى أحد كتاباتى (سلسلة حكايات وألغاز رياضية)[2] مشكلة تتعلق

بتقسيم الميراث لقطعة أرض على شكـل مربع إلا ربع إلى أربعة أقسام كل منها مربع إلا ربع تشبه الشكل الأصلى لقطعة الأرض. ومن سيناريو الحكاية وأحداثها يتوصل القارىء (الطفل سن ١١ فـأكثر) إلى الحل الصحيح. ثم بالتكرار المـرحلى يقسم كل مربـع إلا ربع ناتج إلـى أربعـة مربعـات إلا ربع أصغـر مشابـهة لـه.. وهكذا. انـظر شكل(٢).



شكل (٢)

ثم تطبيق نفس النـمط من التقسيم والتكرار (المرحلى) على كـل تقسيم ناتج على شبـه منحرف مـتساوى الـساقين. فيـنقسـم الشكل الأصـلى إلى أربـعة أشكال شـبه منحـرفة متطـابقة تشبـهه وأصغر وأصـغر فى كل تـكرار.... وكذلك بالـنسبة لـشبه منحرف قـائم، وبالنسبـة لمثلث إلا ثلث......انظـر شكل (٣) وحاول رسم التـقسيم التالى لكل منها.

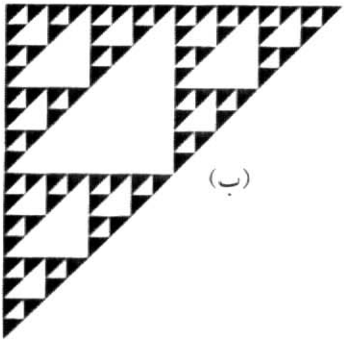


شكل (٣)

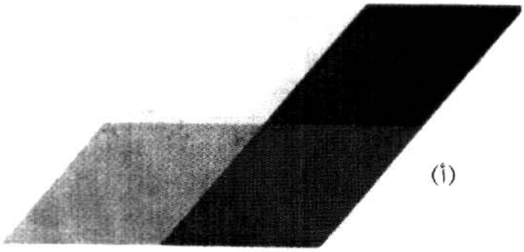
واضح أن كل شكـل من هذه الأشكال تعتـبر متشابهـة ذاتياً. ومع توالى التـقسيم

بنفس العملية (التكرار المرحلى الذى يحدد طريقة التقسيم) نحصل على أشكال أدق وأدق تشبه الشكل الأصلى. ومع الزيادة اللانهائية للتكرار المرحلى يمكن توليد شكل متشابه ذاتيا على عدد لا نهائى من المقاييس Scales .

والآن اشحذ ذاكرتك وحاول استرجاع أشكال هندسية مستقيمة تكون متشابهة ذاتيا فستتوصل إلى الكثير انظر شكل (٤).



(ب)

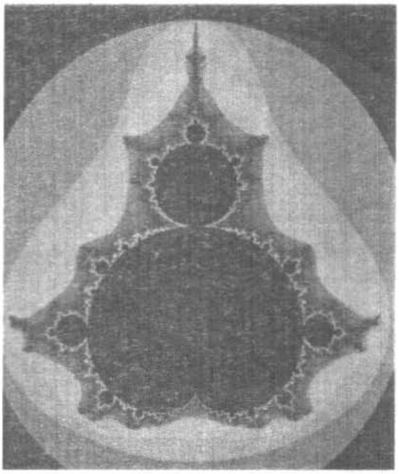


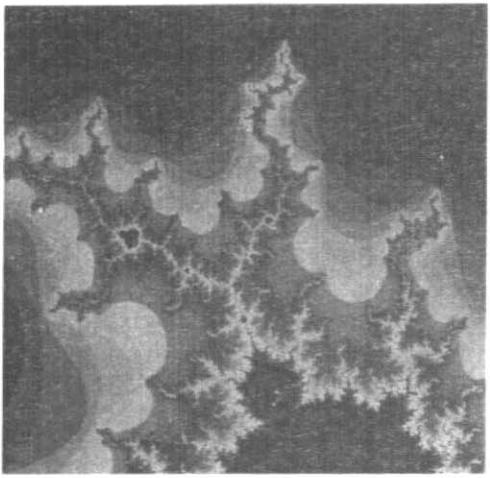
(أ)

شكل (٤)

وقد استُخْدمت أشكال متشابهة ذاتيا فى الزخرفة منذ آلاف السنين (وأبسطها شكل ٤ أ) إلا أن اهتمام الرياضيين الحديثيين أمثال چوليا، وكوخ، وسيربينسكى كان منصباً على أشكال متشابهة ذاتياً على عدد لانهائى من المقاييس (من التصغير والتكبير enlargement) والتى أثارت ماندلبروت بعد ذلك فى اختراع هندسته، حيث سمى هذه الأشكال (المتشابهة ذاتيا) بالفراكتالات أو أشكال الفراكتال التي تعتبر من الفراكتالات المشهورة نسبة إلى الرياضيين الذين قدموها. مثل (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج Koch Snow Curve (شكل ٥)، (فراكتال) مجموعة چوليا التى يتوه الخيال والعقل فى روعتها وجمالها (شكل ٦)، وفراكتال پينو، وفراكتال سبيرنيسكى.... وسوف نتعرض لهذه الفراكتالات المشهورة بشىء من التفصيل فيما بعد.. ولكنى أقدم الشكلين ٥، ٦ لأعطى لك فرصة لتأمل الجمال الظاهر والجمال الباطن لهذه الفراكتالات. ففى شكل (٥) أعطى صاحبها كوخ وصف برقائق الثلج. أما شكل (٦) فهو شكل معقد يمكن أن تناظر منه أشكال فى الطبيعة وفى الرياضيات وفى الفن، وفى الخيالات.

وتعتبر مجموعة جوليا مجموعة جزئية من أشهر وأجمل وأغرب فراكتال وهو فراكتال معروف مجموعة ماندلبروت Mendelbvort Set أعرضها فى شكل (٧) لأتيح فرصة للتأمل والإثارة والتشويق أيضا. وهى تعتبر لوحة فنية (خاصة الملونة) حيث تتميز بشفافية درجات الألوان المتنوعة. وهى (ومجموعة جوليا الجزئية منها) يتصارع فيها النظام واللانظام عند حدودها.





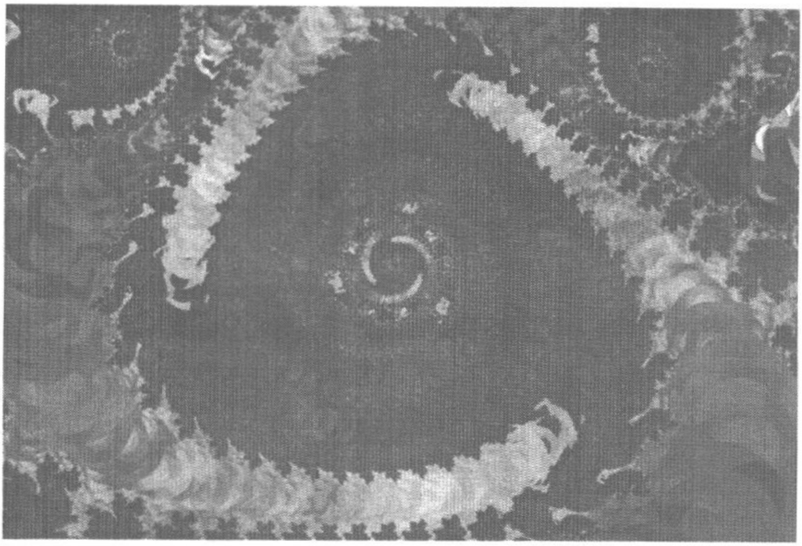
شكل (٧)

شكل (٨)

أجزاء من مجموعة ماندلبروت(٣)

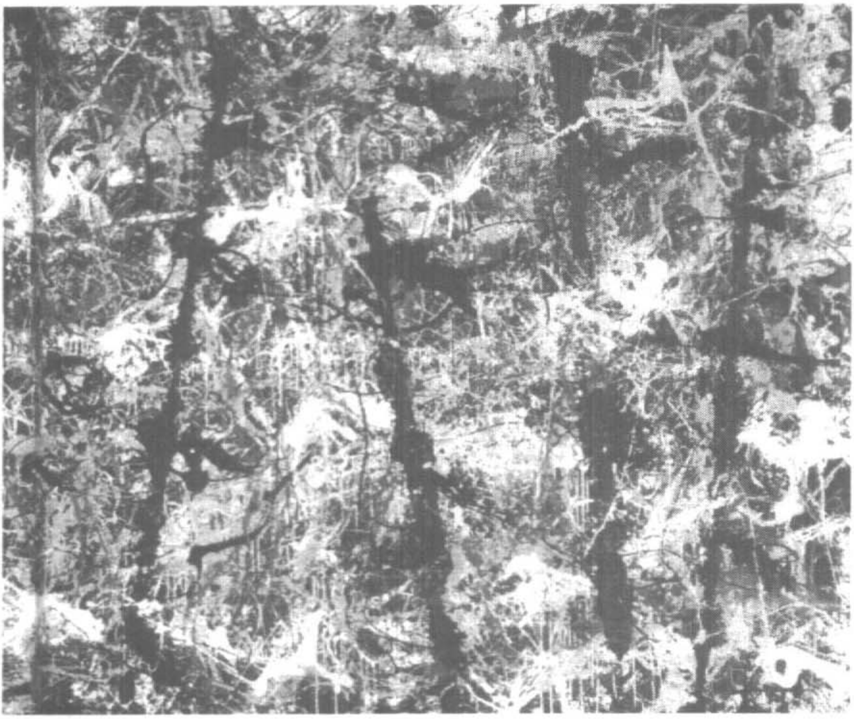
٣-١-٣: التشابه الذاتى فى لوحات فنية

بلاشك أننا قد لمسنا النواحى الجمالية والفنية فى تابلوهات فراكتالات مجموعة ماندلبورت ومجموعة جوليا (المتشابهة ذاتيا). ومن إعجاب بعض الفنانين لها فقد استخدموا برمجيات خاصة بالفراكتالات فى عمل لوحات فنية أقدم أحدها (شكل٩).

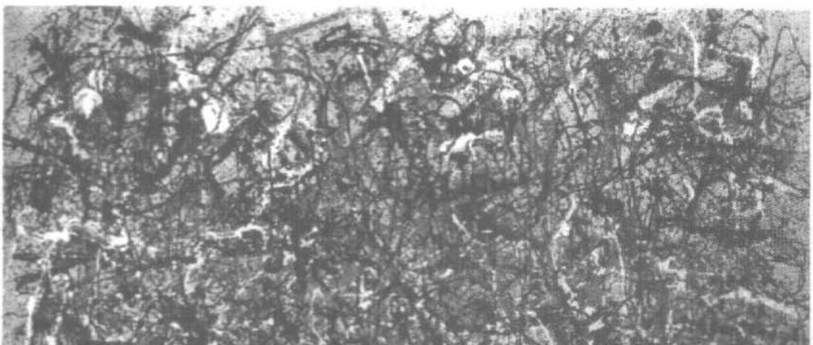


شكل (٩)
لوحة أبدعها فنان باستخدام برمجية للفراكتالات

أما لوحات الفنان پولاك[٥] التى أبدعها فى ١٩٥٠، ١٩٥٢ قبل تقديم هندسة الفراكتال ١٩٧٥ ودون معرفته بالفراكتالات، فقد تبين أنها عبارة عن أشكال تشابه ذاتى أنتجها بجهاز صغير يقذف الألوان على لوحة فى وضع أفقى بريتم (ايقاع) يمثل الطبيعة nature بإحساسه. حيث قام الفنان العالم تيلر بتحليل لوحات پولاك بالاستعانة بالكمپيوتر فإكتشف أن پولاك قد بنى طبقات من الألوان بتكنيك غاية فى العناية أنتج به شبكة كثيفة من الفراكتالات فى لوحة تبين دوامات من الألوان استغرق عملها ٦ شهور فى ١٩٥٢ (شكل ١٠ (أ)) أما لوحته التى تعبر عن الخريف (فنقدمها فى شكل (١٠) ب). ومن المشوق أن نعرض فى شكل ١٠ (جـ) صورة لپولاك أثناء تلوينه بجهاز لقذف الألوان وعلى يمينها صور فوتوغرافية لأعشاب بحرية فى الطبيعة ولا تعليق بين لوحاته والصور الطبيعة التى ينقلها بإحساسه.



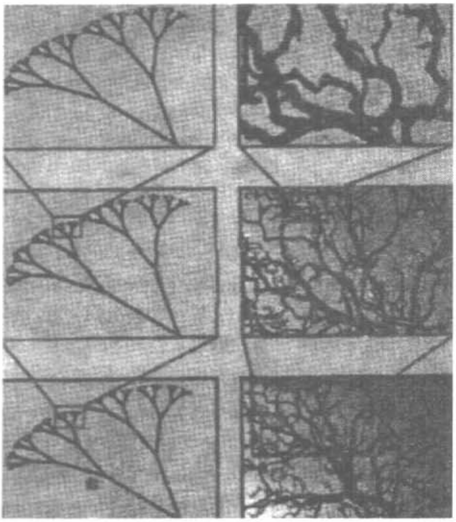
شكل (١٠) أ



شكل (١٠) ب

تكون فيها الأنماط المتشابهة (بمقاييس مختلفة ـ المصغرة) لا تتكرر بشكل مضبوط تماماً، بمعنى أن التشابه الذاتى يبدو متشابهاً فى الشكل لأى مقياس من التكبير أو (التصغير) فيما عدا إغفال بعض الملامح المعينة. إلا أن سمات الأنماط الاحصائية تتكرر. ولذا يسمى تشابهه ذاتى إحصائى. وللتوضيح نقدم شجرة رياضية (اصطناعية) كمثال للتشابه الذاتى المضبوط، وشجرة حقيقية فى الطبيعة كمثال للتشابه الذاتى الاحصائى فى شكل (١٠) د، هـ.

شكل (د)
شجرة حقيقية (تشابه ذاتى إحصائى)



شكل (هـ)
شجرة اصطناعية (تشابه ذاتى مضبوط)

شكل (١٠) (هـ، د)

وعلى ذلك فالتشابه الذاتى فى الطبيعة أو فى الفن ولوحات پولاك يكون تشابه ذاتى إحصائى والتشابه الذاتى فى الرياضيات (الاصطناعى) يكون مضبوطاً.

ومن المشوق أن نعرف أن الشجرة الاصطناعية وفيها كل فرع ينقسم إلى فرعين متساويين بينهما زاوية ثابتة $\varnothing$. عندما تساوى ١٤٥° يكون شكل قمتها من اليسار إلى اليمين هو فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج. انظر شكل (١٠) ز أما شكل (١٠) و فشكل الشجرة عن $\varnothing$ = ٢٠° .

٣-٢- التكرار المرحلى iteration وطريقة بسيطة لتوليد الفراكتالات المشهورة

تقابلنا مع التكرار المرحلى عند تقديم الأشكال المتشابهة ذاتياً فى الأشكال الهندسية المستقيمة، ففى شكل (٢) السابق عند تقسيم مثلا المربع لا ربع إلى أربعة أشكال تشبهه كل منها مربع إلا ربع أيضا. كان الناتج فى الأجراء الأول أربعة أشكال متطابقة أصغر، كل منها مربع إلا ربع ثم أخذنا الناتج وأجرينا عليه مرةً أخرى نفس التقسيم على كل مربع إلا ربع منه فنتج ١٦ شكل مربع إلا ربعاً أصغر... وهكذا. أى أنه قمنا بتكرار خاص. حيث يكون ناتج التكرار الأول هو الذى نجرى عليه التقسيم فى التكرار الثانى... وهكذا.. ناتج (خارج) كل تكرار يصير الداخل فى التكرار التالى. ولذا يطلق عليه بالتكرار المرحلى iteration.

وفى الواقع فقد تذكر أنك تعاملت مع التكرار المرحلى عند اجراء تقريب تتابعى Successive approximation . مثل استخدام عدةٍ إجراءات (أو خوارزميات) لايجاد تقريبات لجذور المعادلات فى طريقة نيوتن. حيث استخدم نيوتن طريقة بسيطة لايجاد تقريبات للدوال عندما تكون قيمتها صفر. حيث قدم قانون ($x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$) يطبق بتكرار مرحلى بحيث يكون ناتج كل تقريب بداية للتقريب التالى. حتى يصل إلى أفضل تقريب للدالة د قيمتها صفر. أو بالأحرى تقريب لجذر المعادلة التى نبدأ بتخمينها قبل التكرارات المرحلية.

وعلى ذلك فالتكرار المرحلى iteration ليس مجرد تكرار. ولكنه تكرار (لعملية ـ اجراء ـ قاعدة...) يستخدم ناتج (مخرجات) كل تكرار كمدخلات فى التكرار التالى... وهكذا.

والتكرار المرحلى مرتبط بعملية توليد الفراكتالات المشهورة بأسلوب إتبعه الرياضيون أصحابها، ونحاول تبسيطه عن طريق تحويل هندسى يُسمى «بالمنحنى المولد» أو بإختصار المولد.

٣-٢-١: توليد (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج Koch Snowflake Curve

قد تستمتع بجمال زهرة متفتحة، ولكن بالتأكيد يزيد استمتاعك عندما تشاهد

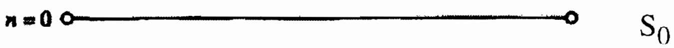
عملية تفتح الزهرة رويداً رويداً حتى يكتمل تفتحها سواء كانت الزهرة أمامك فى حديقة أو مصورة فى التليفزيون بالحركة السريعة. وبالمثل يزيد استمتاعك بعمل ما من بدايته لنهايته أن تعيشه فى مراحله المختلفة.

فى البداية هيّأتك للتعرف على شكل منحنى كوخ لرقائق الثلج (شكل (٥)، (١٠)ز).

والذى أطلق عليه هذا الاسم هو العالم الرياضى السويدى هيلج فون كوخ (١٩٠٤) قبل أن نعرف أن هذا المنحنى هو فراكتال بمدّة طويلة.

والآن تعال نستمتع بعمله خطوة خطوة كأنه زهرة تتفتح من برعمها رويداً رويداً لنرى كثف الثلج وهى تتكون رقائق شيئا فشيئا.

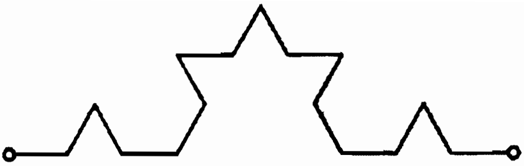
البرعم هنا هو قطعة مستقيمة S_0 نبدأ بها العملية. نلاحظ أن التكرار المرحلى صفر ونرمز له n_0 .



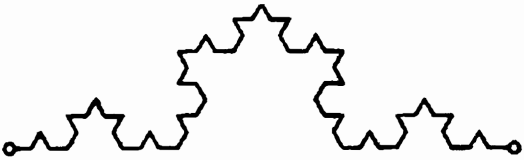
ثم نحول القطعة المستقيمة إلى الشكل التالى فى أول تكرار مرحلى n_1.

وذلك استبدال القطعة بالمنحنى الذى يشبه الشكل S_1. وذلك بتثليث القطعة المستقيمة واستبدال الثلث الأوسط بساقين مساويين لهذا الثُلث مكوناً شكل من أربعة قطع مستقيمة S_1. يسمى بالمنحنى المولد أو المولد generator .

وفى التكرار المرحلى التالى n_2 نقوم بتحويل كل قطعة مستقيمة للشكل الناتج فى التكرار الأول إلي شكل المولد. وذلك بتثليث كل قطعة من القطع الأربع واستبدال القطعة الوسطى لكل منها بساقى مثلث مساويين لهذا الثلث. فينتج الشكل التالى (S_2) بستة عشرة قطعة مستقيمة.

$n=2$  S_2

وفى التكرار المرحـلى الثالث n_3 نحول كل قطعة مستقـيمة من القطع ١٦ الناتجة فى شكل (S_2) للتكرار الثانى إلي الشكل المولد فينتج S_3.

$n=3$  S_3

لاحظ أن التكسيـرات (التعرجات) تكون أدق كلما زاد التكـرار المرحلى. وهكذا بتكرار هـذه العملية بعدد لا نـهائى من التكرارات المـرحلية $n\ \infty$ فإنـنا نـصل إلـى المنحنى المضبوط لرقائق الثلج لكوخ.

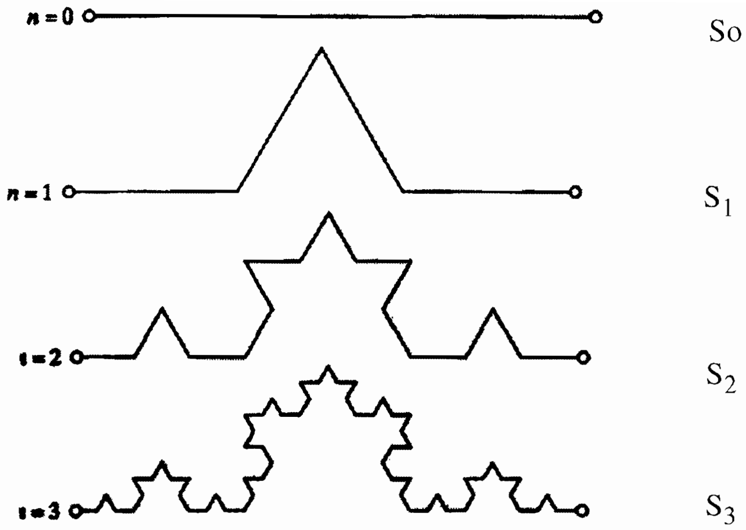
حاول رسم المنحنى بنفسك حـتى التكرار المرحلى الثالث n وخَمِّن طول مـحيطه عنده n_3 وعند التكرار المرحلى اللانهائى $n\ \infty$ ـ أنظر شكل (١١) أ.

والآن حاول تطبيق نفس المولد  عـلى أضلاع مثلث متساوى الأضلاع حتى التكرار المرحلى الثالث n_3 وتخيل الشكل الناتج ثم إرسمه.

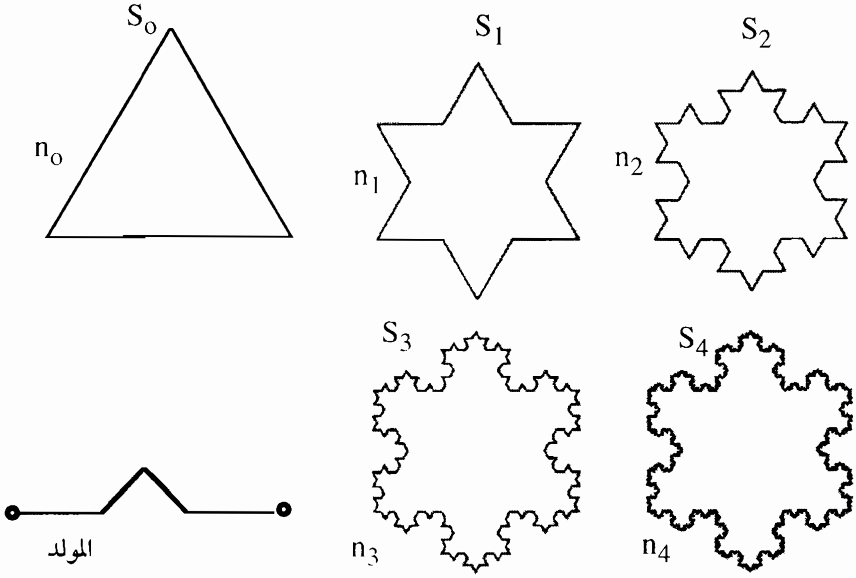
استخدم المولد السابق (عكسيا) أى بقمته إلى أسفل

وطبقه على أضلاع مثلث متسـاوى الأضلاع (أى طبق المولد إلى الداخل) وتخيل الشكل الناتج حتى التكرار المرحلى الثالث n_3 ثم تحقق بالرسم. 

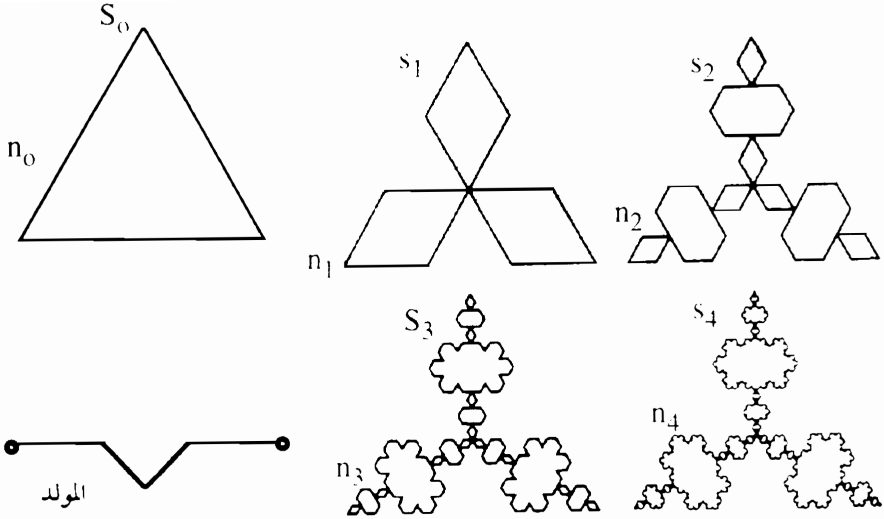
ستجدك تـوصلت إلى شكل (١١) ب الـذى يتضمن منـحنى كوخ لرقائـق الثلج (بتطـبيق المولد عـلى مثلث)، شـكل (١١)جـ الذى يـتضمن منـحنى كوخ العـكسى لرقائق الثلج Koch Anti. Snowflake Curve .



شكل (١١) أ



شكل (١١) ب



شكل (١١) حـ منحنى كوخ العكسى لرقائق الثلج

فى الأمثلة السابقة كان مولد الفراكتال هو منحنى يحدد التكرار المرحلى من مرةٍ إلى أخرى. عند كل تكرار مرحلى كل قطعة مستقيمة لمنحنى الفراكتال المراد تكوينه (أو توليده) يستبدل بمقياس مناسب.

فى (فراكتال) كوخ لرقائق الثلج شكل (١١) أ كان المولد قمته إلى أعلى وفى فراكتال كوخ العكسى لرقائق الثلج كان المولد قمته إلى أسفل (شكل (١١) جـ).

وكان شكل الفراكتال فى كل منهما كرقائق الثلج (متعرج ومشرشر برقه) ولكنه كمنحنى لا يملأ جزء مسطح.

إعط لنفسك فرصة لتفكر فى شكل مولد لفراكتال يملأ سطح مربع مثلا.

هل سيكون الثلث الأوسط للمولد على شكل ضلعى مثلث أم شكل مربع؟

هل سيكون المربع على الثلث الأوسط للمولد إلى أعلى أو إلى أسفل؟ هل سيكون المولد ثلثه الأوسط يجمع بين مربع إلى أعلى ومربع إلى أسفل؟ ستجد الإجابة فى مولد فراكتال بينو التالى.

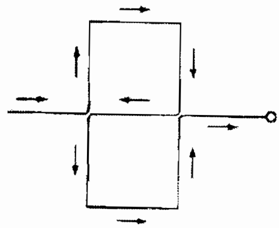
٣-٢-٢- توليد (فراكتال) منحنى بينو Peano

إستطـاع العالم الرياضـى الفرنسى بـينو (١٨٥٠ ـ ١٩٣٢) أن يولد فراكـتال يملأ مستوى. وهو معروف بمنحنى بينو لملء المستوى.

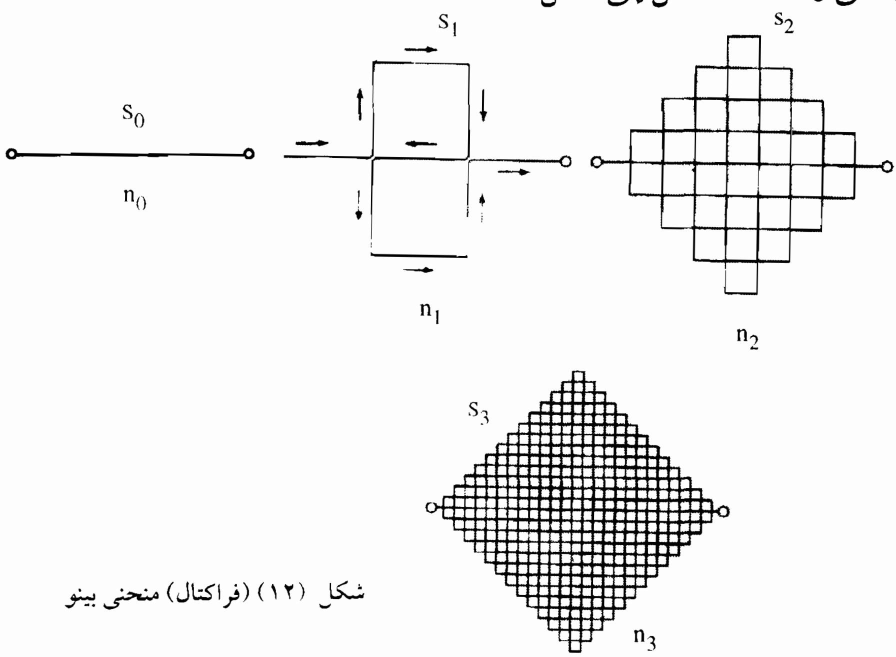
ولعل الأسـئلة التـى أثرتها فـى آخر البنـد السابق (٣-٢-١) تمـهدك لشكـل هذا المولد.

وكلـما اقتـربت من الـتوصل إلـيه كلـما زادت ثقـتى فى أنـك سوف تكـون من المعلمين المجددين المبتكرين أو من المجددين الرياضيين.

المنحنى المولد لفراكتال بينو هو الذى يحول كل قطعة مستقيمة إلى الشكل.



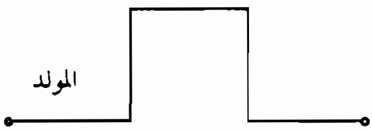
والآن حاول رسم هذاالفراكتال (لبعض المقايـيس) بتحديد التكرار المرحلى الأول والثانى والثالث فستصل إلى شكل (١٢).



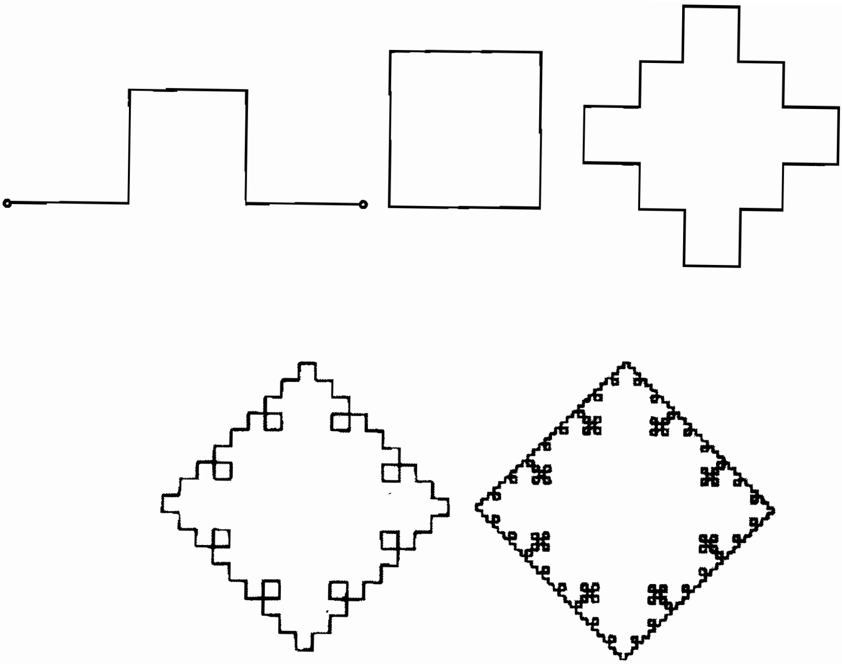
شكل (١٢) (فراكتال) منحنى بينو

وكلما زودنا التكرار المرحلى لإنتاج منحنى بينو مرةً بعد مرةً نجد أن شكل المربع الممثل يبدأ فى الظهور. وبزيادة أخرى التكرارات المرحلية نجد المنحنى المتكون يمر بنقط أكثر وأكثر لداخلية ذلك المربع وعندما تقرب التكرارات المرحلية اللانهائية $n \longrightarrow \infty$ فإن كل نقطة فى داخل المربع تصير نقطة نهائية Limit Point لمنحنى بينو. ولأنه لا توجد نقطة مفتقده فى المربع (وداخله) فان منحنى بينو يسمى مالىء المستوى Plane Filling . (لاحظ أنه يوجد تشاكل توبولوجي بين المربع والمستوى).

ونرجع الآن إلى الأسئلة التى قدمتها لإثارتك لمولد فراكتال بينو آخر بند (٣-٢-١) إذا كانت إجابتك تثليث القطعة المستقيمة واستبدال الثلث الأوسط بثلاثة أضلاع لمربع إلى أعلى. أى يكون المولد على شكل قبعة.



فهذا مستوى من الإبتكار فقد استبدلت ضلعى المثلث لمولد منحنى كوخ بثلاثة أضلاع مربع. وإن كنت حاولت رسم تكوين الفراكتال بالتكرار المرحلى المحدد بهذا المولد لعدد من المرات فانك تكون قد حاولت تحقيق الإجابة وهذا مستوى من التفكير الرياضى، وتكون توصلت للفراكتال فى شكل (١٥) (لمقاييس قليلة من التصغير) وكأنه شكل زخرفى جميل يزين منديل بأشغال اليد. ولكنه لا يملأ المستوى. إلا أنه يكوِّن حدود المربع.



شكل (١٥) مولد القبعة والفراكتال الناتج

وإذا كانت إجابتك قبعه عكسية (الأضلاع الثلاثة للمربع على الثلث فى الوسط تكون إلى أسفل) فهذا مستوى ابتكارى أعلى. وإذا تحققت من الإجابة ورسمت الفراكتال (سأترك المحاولة لك) فنجد أن هذا الفراكتال يمر بعدد أكثر من النقط الداخلة لمربع ولكن ليس بجميع النقط الداخلة للمربع مع نقط حدوده (أضلاعه).

أما مولد منحنى (فراكتال) بينو فهو تجديد لرياضى مجدد أصيل.

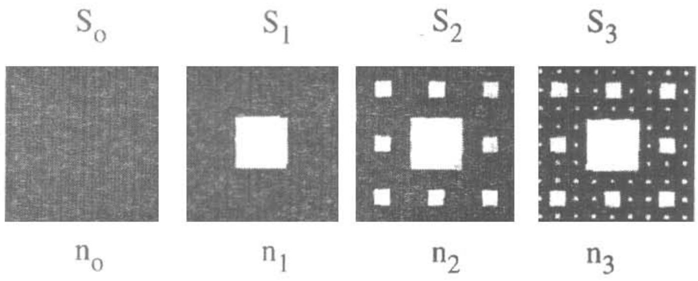
فى عملية توليد (بناء) فراكتال كوخ وفراكتال بينو استخدمنا مولد عبارة عن منحنى يحدد التكرار المرحلى. سنستبدل منحنى المولد بعملية تصف تحويل شكل (ليس بالضرورة قطعة مستقيمة) تحدد التكرار المرحلى كما فى البند التالى.

٣-٢-٣: توليد (فراكتال) سيربينسكى Sierpinski

فى البـند السابق تـوصلنا إلى فـراكتال منحنـى بينو الذى يـغطى كل نقـط المربع وداخلـية المربع (أى الـنقط علـى محيطـه والنقط داخـله، أى سطح مـربع أو منطـقه مربعة) . هل تتصور فراكتال بعكسه لا يمر بأى منطقة فى داخلية مربع.. تعال نتعرف علـيه. إنه شـكل قدمـه الرياضـى سيربيـنسكـى فى ١٩١٥ ويسـمى ببـساط Carpet سيربينسكى . وبنفس فكرة عملية التحويل الهندسى على مثلث توصل إلى ما يسمى چـوان gasket سيربينسكى. وتطبيق الفكرة عـلى مجسم مكعب نصل إلى ما يسمى باسفنجية مينجر Menger Sponge.

إعط لنفسـك فرصة للتفكير فـى عملية تجعل من سـطح مربع، منطقة تخـلو شيئاً فشيـئاً لمربعـات أصغر فأصغـر من النقط الـداخلية!! حـتى تخلو تمـاماً عند الـتكرار المرحلى اللانهائى!! هـل ستصل إلى أن العملية تتضمن نـزع جزء؟ فكرما هو شكل هذا الجزء ومـا موضعه بالـنسبة للشـكل الأصلى؟ حدِّد مـستواك من خلال إجـابتك ومدى قربها مما قدمه سيربينسكى فيمايلى.

للـتوصل إلى فـراكتال ـ شكـل (بساط) سيـربينسـكى نستـخدم عملـية لتحـويل هندسى مع التكرار المرحلى. تـبدأ العملية بأخذ مربع So وتقسيمه إلـى تسع مربعات متـطابقـة أصغر وفى أول تـكرار مرحـلى n_1 نـنـزع المربع الأوسـط (أى تُسع المـربع الأوسط). وفى التكرار المرحلى الثانى n_1 ننزع من كل مربع أصغر ناتج من التكرار المرحلى الأولى ـ التُسع الأوسط .... وهكذا نصل إلى (فراكتال) بساط سيربينسكى. حاول بـالرسم التـوصل إلى شكـله بعد الـتكرار المرحـلى الثالـث (على مدى ثـلاثة مقاييس من التصغير كما فى شكل (١٦).

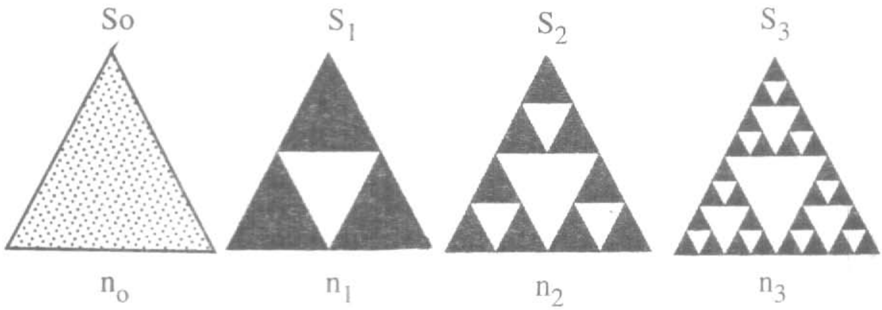


شكل (١٦) بساط سيربينسكى

لاحظ أن الفراغات مع تصغيرها فى كل تكرار مرحلى فإنها تزداد ... ومع التكرارات اللانهائية تزداد الفراغات لا نهائيا حتى تفرغ المربعات الجزئية المصغرة تدريجيًا.

إذا أردنا تطبيق نفس الفكرة السابقة على سطح مثلث فماذا تتوقع أن يكون شكل الجزء الأوسط الذى سوف ينزع فى عملية التحويل الهندسى الذى يفرغ داخلية المثلث..؟ ستجد نفسك تصل إلى الإجابة الصحيحة بسهولة بعكس صعوبة التوصل إلى الإجابة الصحيحة فى السؤال السابق الذى مهدت فيه لفراكتال بساط سيربينسكى.

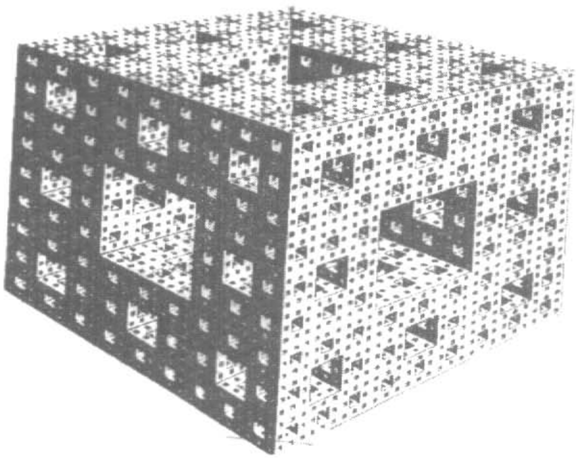
وعلى ذلك حاول تكوين فراكتال جوان Gasket (مثلث) سبيرنيسكى... إذا لم تستطع فابدأ بمثلث متساوى الأضلاع S_o وقسمه إلى أربعة مثلثات متكافئة. وفى التكرار المرحلى الأول n_1 انزع رُبع المثلث الأوسط فتصل إلى S_1. وفى التكرار المرحلى الثانى n_2 انزع من كل مثلث صغير ناتجة رُبعه الأوسط.. وهكذا فتصل إلى شكل (١٧).



شكل (١٧) جوان سيربينسكى

وعنـد التكـرارات اللانهـائية تـصل إلى شكـل متشـابه ذاتيـا على كـل المقايـيس (اللانهـائية فى الصـغر) الذى يكاد يـخلو شيئـاً فشيئاً مـن مثلثاتـه الجزئيه الداخـلية. وبنفس فكرة تـكوين (فراكتال) بساط سيربيـنسكى، حاول الامتداد بها لتطـبقها على مكعب S_o وقسمه إلى تسع مكعبات متساوية (متطابقة)

وفى التكرار المرحلى الأول إنزع تُسعة الأوسـط. وفى التكرار المرحلى الثانى انزع التـسع الأوسط من كـل مكعـب أصغر وهكـذا... ستصـل إلى شكل (١٨) إلـى ما يسمى اسفنجية منجر.



شكل (١٨) اسفنجية منجر

بالتأكيد فراكتال سيربينسكى عند التكرارات اللانهائية (وأيضاً اسفنجية منچر) لها هيكل بالغ التعقد يتضمن فراغات (وثقوب) خيالية!

وفى الواقع يرجع الفضل للرياضين (الحديثين) كوخ، بينو، سيربينسكى وچرليا (وهاوسدورف) فى أوائل التسعينيات الامتداد بالأشكال ذات التشابه الذاتى المستخدمة فى الزخارف منذ آلاف السنين وفى الرياضيات، إلى مفهوم التشابه الذاتى الذى يتضمن أشكال متشابهة ذاتيا على عدد لا نهائى من المقاييس (من التصغير).

ولقد تعرفنا على أشكال متشابهة ذاتيا قدموها بأسمائهم تعكس الروح الرياضية التجديدية لهم. وهى أمثلة أعيد الانتباه إليها لسحرها وغرابتها بعد عشرات السنين.. لتكون أمثلة للفراكتالات. ولا يقتصر سحرها وغرابتها على عملية تكوينها أو توليدها ولا على التعقد الغريب فى شكلها.. فقط ولكن يرجع جمال سحرها وغرائبها إلى خصائص لها بعيدة التصور، سنتعرض لها فى البند التالى.

٣-٣- سحر وغرائب لخصائص بعض الفراكتالات المشهورة

مهدت وألمحت لبعض الخصائص المثيرة العجيبة من خلال العرض السابق (بند ٣-٢). لفراكتالات كوخ، بينو، سيربينسكى. تعال نلقى الضوء عليها ونحددها.

٣-٣-١: سحر وغرائب (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج.

تذكر أننى طلبت منك تخمين (أو حساب) طول فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج بالرجوع إلى شكل (١٠)أ. ثم قدمت شكل(١١)ب لفراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث). حاول حساب محيطه (أو تخمين طوله) وحساب مساحة المنطقة الداخلية له. .... هل ستصل إلى أغرب خاصية.... محيط لشكل فراكتال طوله لا نهائى يحد مساحة محدودة؟ بالطبع هذه خاصية عجيبة عما تعودنا عليه فى الرياضيات البحتة. فمثلا إذا رسمنا مضلع داخل (أو خارج) دائرة وبالتكرار العادى بزيادة أضلاعه حتى تؤول إلى ما لا نهاية فإن مساحة الشكل المضلع تقترب من مساحة الدائرة (المحدودة) وكذلك محيط المضلع يقترب من محيط الدائرة (المحدود) أيضا...

تعال نتحقق من صحة هذه الخاصية الغريبة: محيط (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث) طوله لا نهائى ويحد مساحة قيمتها محدودة.

أولا: طول فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج لا نهائى:

إذا رجعنا إلى شكل (١١)ب لتكوين منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث). نجد أننا فى كل تكرار مرحلى iteration للعملية التى استخدمناها وهى تحويل هندسى بالمنحنى المولد  حيث تبدل كل قطعة مستقيمة بنسخة من المولد طوله $\frac{٤}{٣}$ من القطعة المستقيمة المبدلة. وبالتالى فإن طول محيط المنحنى يزداد بمعامل $\frac{٤}{٣}$ فى كل تكرار مرحلى.... هل هذا الارشاد يكفى إلى أن تتوصل بنفسك أن طول (فراكتال) هذا المنحنى ∞ ؟... إذا لم تتوصل إستعن بالشكل (١٩) والتوضيح التالى:

بالبداية بمثلث S_0 الذى طول ضلعه ل فإن محيطه ٣ ل (عند n_0).

فى التكرار المرحلى n_1 يصير محيطه $٣ \times \frac{٤}{٣}\,\text{ل} = ١٢\,\frac{\text{ل}}{٣}$.

فى التكرار المرحلى الثانى n_2 يصير محيطه $٣\,(\frac{٤}{٣})^{٢}\,\text{ل} = ٤٨\,\frac{\text{ل}}{٩}$.

وهكذا فى التكرار المرحلى النونى n_n يصير محيطه $٣\,(\frac{٤}{٣})^{\text{ن}}\,\text{ل} = ٤^{\text{ن}} \times ٣\,\frac{\text{ل}}{٣^{\text{ن}}}$

$= ٣\,\text{ل}(\frac{٤}{٣})^{\text{ن}}$

وبأخذ النهاية عندما ن $\longrightarrow \infty$ فإن نهاية طول المحيط $= \infty$.

ثانيا: المساحة التى يحدها فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج محدودة

نبدأ بمثلث S_0 نفترض أن مساحته هى الوحدة (عند n_0)

فى التكرار المرحلى الأول n_1 أضفنا ثلاثة مثلثات مساحتها $٣ \times \frac{١}{٩}$.

فى التكرار المرحلى الثانى n_2 أضفنا $١٢ = ٣ \times ٤$ مثلث مساحتها

$٤ \times ٣\,(\frac{١}{٩})^{٢} = ١٢\,(\frac{١}{٩})^{٢}$

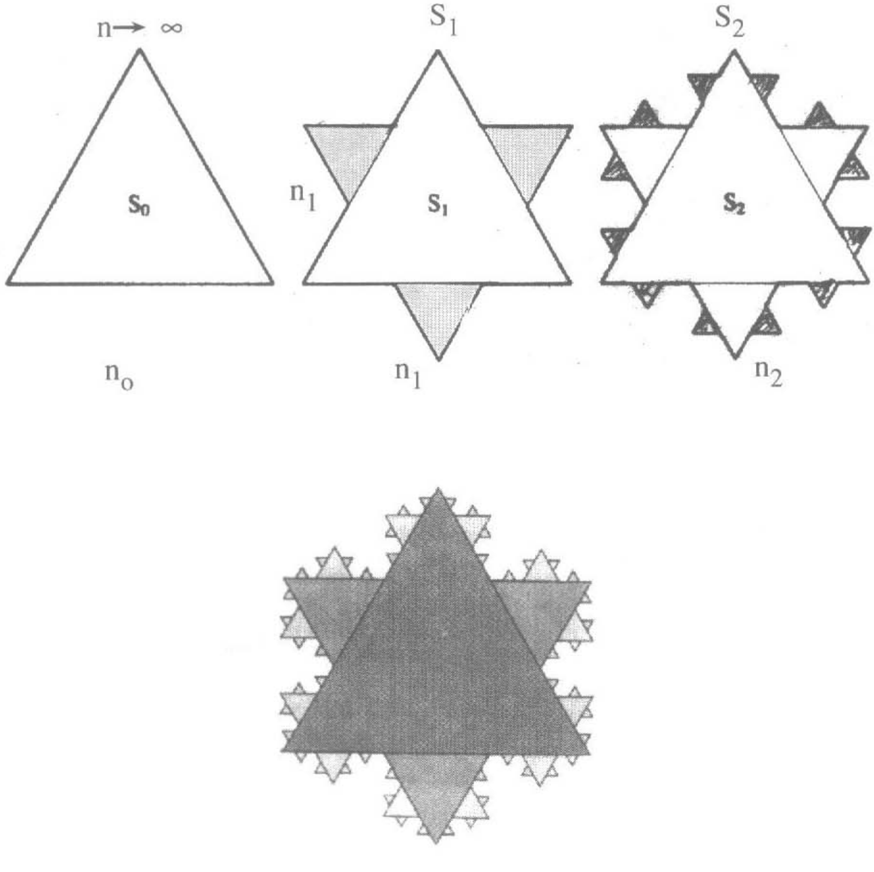
فــى التــكرار الـمـرحلــى الــثالث n_3 أضفنـا ٤٨ = ٣ × ٢٤ مثلـثاً مساحتها
$٤^{٢}$ (٣) $(\frac{١}{٩})^{٣}$ = ٤٨ $(\frac{١}{٩})^{٢}$

فى التكرار المرحلى النونى n_n أضفنا $٤^{ن - ١}$ (٣) مثلثاً مساحتها

$٤^{ن - ١} \times ٣ (\frac{١}{٩})^{ن}$.

وبذلك يصير مساحة الشكل (المثلث S_o + المثلثات المضافة) =

$$\lim_{n \to \infty} 1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = 1.6$$



(التظليل للمثلثات المضافة فى التكرارات المختلفة)
شكل (١٩)

٣-٣-٢ سحر وغرائب (فراكتال) منحنى بينو

هل تتصور أشكالاً مستقيمة غير متقاطعة مهما تعددت قطعها المستقيمة المتصلة يمكن أن تغطى (تمر) بكل نقط سطح مربع أو أى سطح آخر يتشاكل (توپولوچيا) معه؟

فكل ما نعرفه أن سطح المربع يملأه وحدات مربعة أصغر وهكذا...

وقد تتذكر أن دودة الحرير تستطيع ملء سطح الشرنقة بخيط حرير (متصل). ولكن خيط الحرير مهما كان رفيعاً فإن جزءًا منه لا يمثل قطعة مستقيمة لأن القطعة المستقيمة لا سُمك لها بالمرة. بالاضافة إلى أن خيط الحرير يتقاطع مع نفسه عند عمل الشرنقة. بينما أى فراكتا ل لا يتقاطع مع نفسه. أيضا القطعة المستقيمة أو أى مجموعة من القطع المستقيمة المعدودة لها طول ولكن ليس لها مساحة.

وقد أشرنا عند تكوين فراكتال بينو عن طريق المنحنى المولد له (شكل ١٢) كيف أن هذا الفراكتال الذى يزداد إنتظاماً فى تعرجاته يغطى سطح المربع عندما تقترب التكرارات إلى ما لا نهاية $n \infty$ فهذه خاصية لأعجب فراكتال متولد من أعجب منحنى مولد.

٣-٣-٣- سحر وغرائب فراكتال سيربينسكى

هل يتصور أحد وجود سطح لا نهائى مساحته صفر؟

هل يتصورأحد وجود مجسم لا نهائى حجمه صفر؟

إرجع إلى تكوين بساط سيربينسكى وجوان سيربينسكى شكلى ١٦، ١٧ ستكتشف بنفسك أن هذه الأسطح هى أسطح تتفرغ (أو تتثقب) تدريجيا فى التكرارات المتتالية، وفى التكرارات اللانهائية $n \infty$ لا يكاد يتبقى من داخلية السطح إلا شكل بالغ التعقيد لا يشغل جزء من وحده مساحة مهما صغرت صغراً لا نهائياً. ولذا يعد فراكتال سيربينسكى مثالاً لأعجب خاصية. سطح مساحته صفر.

ونظراً لتشاكل المربع أو المثلث مع سطح لا نهائى. فهو يعد مثالاً لخاصية أكثر غرابه وهى سطح لا نهائى مساحته صفر.

ويمكنك التوصل إلى ذلك بالرجوع لشكل (١٦) وحيث مهدنا إلى أن مجموع مساحات المربعات المنزوعة فى التكرارات $n_1,n_1,......n_n$ وعندما تؤول إلى ما لا نهاية يكون المربع (أو بالأحرى سطح المربع) النهائى مفرغ من أى منطقه مربعه مهما صغرت ومساحته صفر.

حاول التحقق من ذلك من خلال تعريف المربع الأصلى S_o ومساحته الوحدة.

$$S_o = \{(x,y) : o \leq x , y \leq 1\}$$

ثم الشكل S_1 فى التكرار الأول

$$S_1 = \{(x,y) :(x,y) \in S_o \ \& \ x or\ y \notin (\frac{1}{3} , \frac{2}{3})\}$$

الشكل S_1 فى التكرار الأول كإتحاد ثمانية مربعات من تسعة مربعات صغيرة للمربع S_o بطول $\frac{١}{٣}$ للضلع عند نزع المربع (الجزئى) الأوسط.

ثم نعرف الشكل S_2 بأنه S_1 منزوع منه مربع جزئى طول ضلعه $(\frac{١}{٣})^٢$ لكل مربع جزئى للشكل S_1 وهكذا...

ثم نوجد $S = \bigcap_{n=o}^{\infty} S_n$

فتجدها مساوية للصفر أى أن مساحة الشكل S فى التكرار اللانهائى = صفر وبنفس الأسلوب يمكنك التوصل إلى أن فراكتال چوان سيربينسكى يؤدى إلى أن سطح مثلث المطبق عليه عملية توليد هذا الفراكتال مساحته تساوى صفر ويمكنك التحقق من ذلك بأخذ S_o (شكل ١٧) بسطح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ل. وبإعتبار أن S_o هو اتحاد أربعة مثلثات طول ضلع كل منها $\frac{ل}{٢}$.

ونعرف S_1 بأنه S_o منزوع منه المثلث الأوسط من الأربعة مثلثات المكونة له... وهكذا ننزع أواسط المثلثات الثلاثة للشكل S_1 لنكون S_2 وهكذا ثم عرف وأوجد

$$S = \bigcap_{n=o}^{\infty} S_n$$

فتجد أن مساحة الشكل فى التكرار اللانهائى = صفر.

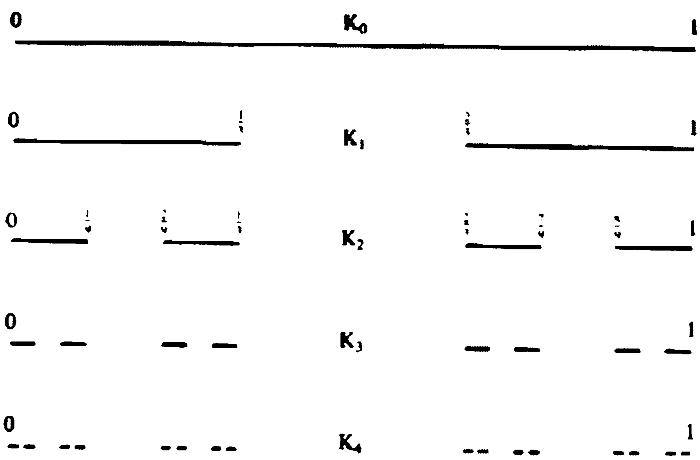
وبنفس الأسلوب يمكن التوصل إلى أنه فى الفراغ الثلاثى تكون اسفنجية منجر

Menger Sponge فراكتال ذا حيز فى الفراغ حجـمه صفر. (شكل ١٨) ولكون هذا الفراكتال المـتكون من تطبيق عمـلية لتوليده علـى مجسم مكعب. والمكعـب يتشاكل توبولوچيا مع مجسم (حيز) لا نهائى. فإن هذا الفراكتال يعتبر مثالاً لمجسم (حيز) لا نهائى حجمه صفـر. هل يوجد سحر وغرائب أكبر من التى (لفـراكتالات) لمنحنيات كوخ Koch، وبينو، وسبيرنيسكى، ومنجر...)؟

ولقد كـان لهذه الخصائص الـعجيبة للـفراكتالات المشهـورة أثر كبير فى اسـتثارة ماندلبروت لإختراع وبلورة هندسة الفراكتال.

والواقع أن حـيز (فى فراغ ذو بـعدين وذو ثلاثة أبـعاد) مقيـاسه صفر ربمـا تكون فكرته قد نبعت من مجموعة كانتور Cantor Set (١٨٨٣). وتتكون عن طريق قطعة مستقـيمة S_0 ننزع ثلثهـا الأوسط لنصل إلى S_1 . ثم ننزع الثلث الأوسـط لكل قطعة متـبقيـة فى S_1 لنـصل إلـى S_2 .. وهكذا نصل فـى التكرار المرحلى اللانـهائى إلى المجـمـوعـة S المحتويـة على عدد من النـقط الممكن عددهـا (معدودة) Countable المتفـرقة مقياس طـولها = صفر. (لاحظ أن مـجموعة نقـط معدودة ليس لـها طول، ومجموعة قطع مستقيمه معدودة ليس لها مساحة)

انظر شكل (٢٠) لأن $S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = 0$.



شكل (٢٠) تكوين مجموعة كانتور للتثليثات

ويمكن أن تتوصل إلى ذلك عن طريق تعريف $S_0 = [0,1]$،

$$S1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$S2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

.... وهكذا

لاحظ أن S_n هى اتحاد فترات جزئية مقفولة Closed عددها 2^n من الفترة [0,1]، وتكون على شكل: $[r/3^n, (r+1)/3^n]$, For appropriate integer r وكل فترة جزئية طولها $1/3^n = 3^{-n}$، $S_{n+1} \subset S_n \subset [0,1]$

وعلى ذلك تكون S هى مجموعة كل النقط المشتركة فى S_o, S_1, S_2

أى أن $S = \bigcap_{n=o}^{\infty} S_n$

وبذلك S لا تحوى أى فترات جزئية. لأن [0,1] التى تحوى عددًا لا نهائيًا من الفترات الجزئية لا تتقاطع مع S.

وبملاحظة أن طول $[0,1] = S_o$ هو١، وطول S_1 هو 2/3

وطول S_{n+1} هو $\frac{2}{3}$ لطول S_n. وهذا يؤدى إلى أن طول

$$S_n = (\frac{2}{3})^n$$

وبأخذ النهاية عند $n \rightarrow \infty$ فإن طول $S = O$.

أى أن طول مجموعة كانتور للتثليثات مساوى للصفر.

وهنا نتساءل هل فكرة استبعاد الجزء الأوسط لمجموعة كانتور هى التى أوحت إلى فكرة استبعاد المربع الأوسط فى تكوين بساط سيربينسكى أو أوحت إلى فكرة استبدال الجزء الأوسط بساقين متساوين لمثلث فى المنحنى المولد لفراكتال كوخ Koch لرقائق الثلج، أو بالجزء الأوسط فى مولد بينو... إذا كانت الإجابة بنعم! فماذا سوف يلهم الرياضيون أو يلهمك من توليد الأشكال المشهورة ذات الأفكار المتجددة ومن خصائصها العجيبة الغريبة الساحرة؟ سوف تتعجب أكثر عندما تعلم أن هذه الخصائص العجيبة تفسر ظواهر فى الطبيعة nature والتكنولوجيا.

فمثلا من مجموعة كانتور (للتثليـثات) وما تؤول إليه من نقاط طولها صفر كأنها غبار مـوزع بطريقة مـعينة هى الـتى تصوَّرها مـاندلبورت فى تـوزيع التشويـش على خطوط الإتصال. فقد وجد ماندلبروت فى مـجموعة كانتور نموذجاً لحدوث الأخطاء فى قنوات الاتصال. حيث تظهر فترات خالية من الشوشرة ثم فترات لظهور مفاجىء لها. وبتحليل دقيق لفترات الشوشرة ذاتها وجد أنها تحتوى على فترات خالية منها.

كما أن خاصية (فراكتال) منحنى كوخ لمحـيط لا نهائى يحد مساحة محدودة نجد أمثلة لـه فى جسم الإنسان وفـى النبات. فالأوعيـة الدموية المتشـعبة (المتشابـهة ذاتياً) أطوالها لا نهائية ولـكنها تحيط بحيز محدود من الدم الذى يعتـبر غاليا جداً. وكذلك بالنسبة للشعيرات الجذرية فى النبات اللانهائية فى الطول وتكتنز الحيز المحدود للماء الغالى جداً. وكذلك بالنسبة لملايين الحويصـلات الهوائية للرئتين التى حيزها محدود والهواء المنقى الغالى جداً جداً.

وقـد يــكـون D.N.A يختـزن قواعد تحويل بـسيطة مثل المـولدة لمنحنـيات كوخ وسيربينسكى ليختزن معلومات التشعبات الهائلة فى الجسم.

وفى ختام هذا الـفصل أرجو أن نكون قد وضحنـا الفراكتال بخاصيـة أساسية له هى التشابه الذاتى. فـأى شكل يتكون من نماذج مصغرة له نسميـة متشابه ذاتيا. سواء على عديد من المقاييس Scales أو على مدى كل المقاييس. وقد وسع مفهوم التشابه الـذاتى الـريـاضيـون الحـديثـون كـانتـور. هـاوسدورف، وچـولـيا وكـوخ وبـينـو. وسبـيرنيـسكى.. ليـشمل الأشـياء (الأشكـال) المتشـابهة ذاتـياً على مـدى المقايـيس اللانهـائية. وقدمنا تـعريف الفراكـتال كشكل لـه خاصية التشـابه الذاتى. أو ببـساطة الفراكتال كشكل هـندسى (متعرج) يمكن تقسيمه إلى أجزاء كـل (على الأقل تقريبا) يعتبر جزءًا مصغراً من الكل. وقد لاحظنا أن الفراكتال لا يتقاطع مع نفسه. كما ميزنا بين فراكـتالات (أشكال مـتشابهـة ذاتيا) مضبـوطة (رياضيـة - اصطناعـية) وأخرى إحصائية موجودة فى الطبيعة أو فى بعض لـوح فنية. كما قدمنا رسم أشكال هندسية متشابهة ذاتيا (رياضية ـ مضبـوطة) لعدد قليل من المقاييس Scales. وفى الواقـع أنه

حتى استخـدام التكنولوجيا المـتقدمة تعجز عن رسـم (وتوضيح) شكل يبين الـتشابه الذاتى على مدى عدد لا نهائى من المقاييس.

كما قـدمنا نبذة عـن التكرار المـرحلى iteration الذى يـحدد مولـد أو عمليـة... لتوليد فـراكتالات مشهورة. ثم رسم هـذه الفراكتالات خطوة خطـوة فى التكرارات المختلفـة بالنسبة لمـنحنيات كوخ، بـينو، سبيرنـيسكى، ومنجـر كما قدمنا خـصائص وملامح عجيبة لهذه الفراكتالات لا يتصورها العقل كمحيط لا نهائى لفراكتال كوخ (علـى مثلـث) لرقائـق الثلـج يحد مـساحة مـحدودة، وسطـح لا نهائـى لفراكـتال سبيرنيسكى يحد مساحة صفر، وشكل مجسم لفراكتال منجر لا نهائى حجمه صفر. كمـا أبرزنا الجمـال الرياضى الـبديع لـفراكتالات سـاهم اظهـارها تقدم الـكمبيـوتر وحاولنا ربط الـفن الرياضى بفن الرسم المعـاصر المبنى فى جوهرة علـى الفراكتالات لفنانين لهم أصالة فنية أو فنانيين يعتمدون عـلى برمجيات للفراكتال بالكمبيوتر على رسم لوحهم الفنية.

وقد أثار تقـديم محتوى هذا الفصـل خاصية أساسيـة للفراكتالات وهى الـتشابه الذاتى. وهذا يمهد لتقديم خاصية أساسية هـامة أخرى للفراكتالات فى الفصل القادم وهى البُعد الفراكتالى.

تـعقيب(٣): تـضامين implications وانعكاسات حول تنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات

قدمنا فـى نهاية هذا الفـصل ملخصاً لمحـتواه... لكن فى هذا الـتعقيب نشـير إلى توظيف أسلوب عـرض المحتوى لتنمية النواحى الإبـتكارية للمعلم، المتـعلم لخاصية أساسيـة جديدة علـيهم تسـهم فى نمو أفـكار متشـعبة للـهندسة المـعاصرة التـى من المحتمل ألا يكون قـد سمع عنها شيئا. فالـعرض مُوَجَّةٌ أساساً بهدف تنمـية ابتكارية المعلم التى تظهر وتنعكس فى ابتكارية تدريسه.

والآن إقـرأ مرَّة أخـرى هـذا الفـصل لـيس بغـرض الـتعـرف وتعـلـم الأفكـار والموضوعات الجديـدة فيها فقط ولكن بـقصد أن تتلمس كيـف أن أسلوب أو شكل

عرض فكـرة أو جزء من المحتوى أثار إحساسك وخيالك أو حفزك على معايشته بعقلك ومشاعرك بما أدى إلى إنغماس (عميق) دفعك على صنع أو إعادة صنع (عمل) شيء أو فكرة أو شكل جديد.

وسجلها في مذكرات لك. ثم لاحظ بعد ذلك نمط تدريسك ستجد أنك تلقائيا تعكس هذا الأسلوب في تدريسك ليستمتع تلاميذك بتعلم ما يثير إحساسهم وخيالهم وتفكيرهم ويحفزهم لعمل (صنع الرياضيات).

فتكامل الإحساس والخيال مع الأفكار مع العمل هو ما ينمي ابتكارك في التدريس وابتكار تلاميذك في الرياضيات.

ستجد في المذكرات التي كتبتها تعبيرًا عن وصف ملامح أسلوب العرض لمحتوى هذا الفصل لتنمية ابتكارك التدريسي مثل:

١ ـ أسلوب العرض أسلوبٌ جديدٌ لم تعهده في أي كتابٍ جامعي ـ مدرسي ـ ثقافي ... فهو أقرب ما يكون حديثًا من القلب لقارىء عزيز ليكون قريبًا جدًا منه، يرى بعينيه ويسمع بأذنيه ويحس بإحساسه ويفهم بعقله ويتأمل بتأمله ويتخيل بخياله ويشاركه في صنع الرياضيات مهما كانت جديدة ـ عصرية غريبة عليه. فالأسلوب يعطي مساحة للمشاركة بيني وبين القارىء وجدانيا وخياليا وعقليا وتأمليا في كشف النقاب عن الأفكار الرياضية وفي التفتيش عن نماذجها وأمثلتها... وفي صنع الأشكال الهندسية الجديدة.. وفي نمو الأفكاروالأساسيات.

٢ ـ التبسط والتباسط في تقديم أي جزء من المحتوى بأساليب متعددة. فالتبسيط عمل إبتكاري يعوِّدك الأسلوب عليه.

٣ ـ جعل غير المألوف مألوفا (مثل تقديم خاصية التشابه الذاتي).

٤ ـ تنمية الإحساس بالطبيعة والإحساس بنفسك.

٥ ـ تنمية تذوق الجمال الرياضي والإحساس بجمال الأشكال الرياضية والفراكتالات الغريبة وبجمال اللوحات الفنية التي باطنها فراكتالات منها ما يعكس الإحساس بإيقاعات الطبيعة. فعمل لوحة فنية ابتكار (ابداع)، وتذوق

جمالها نوع من الإبتكار. وعلى ذلك فالأسلوب الذى يعمل على تنمية تذوقك بالجمال الرياضى والإحساس به هو أيضا ينمى فيك نوع من الابتكار الرياضى وبالتالى الابتكار فى تقديم أى مادة رياضية لتلاميذك.

٦ ـ تنمية الدافعية للبحث والتفتيش Search عن فراكتالات فى الرياضيات وفى الطبيعة وفى جسم الإنسان وفى الفن.... فالبحث والتفتيش مرحلة هامة فى أى عمل رياضى لجمع مادة رياضية تساعد فى حل مشكلة بحثية أو إختراع وابتكار رياضى. ومن جهة أخرى يولد الميل لهواية التجميع والتصنيف (مثل هواية تجميع طوابع البريد والعملات...) هذا الهواية بدورها تؤدى إلى تنمية الحب للرياضيات. وهذا الحب (والعشق) للرياضيات هو النافذة لحب الإستطلاع الرياضى، وللاكتشاف والاختراع الرياضى للبعض.

٧ ـ تنمية الخيال والإحساس المصاحب لعملية البحث والتفتيش.

٨ ـ معايشة الرياضيين فى تجديداتهم ونمو أفكارهم الرياضية.

٩ ـ إثارة الحيوية فى صنع الفراكتالات والاستمتاع بعملية تكوينها كزهرة غريبة تتفتح رويدًا رويدًا.

١٠ـ إثارة الدافعية للقيام بإكمال عمل الفراكتالات المشهورة. مع تنمية الدقة والاتقان فى عملها.

١١ ـ إثارة اكتشاف واختراع ومتابعة الفكر الرياضى الأصيل. مثلا فى التجديد المستمر لفكرة الجزء الأوسط للمولد generator للفراكتالات المشهورة لكوخ، وبينو، وسيربينسكى...

١٢ ـ تنمية حب الاستطلاع المعرفى لجذور الأفكار الجديدة... مثل جذور فكرة الجزء الأوسط للمولد فى مجموعة كانتور التثليثيه.

١٣ ـ تنمية الخيال الرياضى لجعل المستحيل ممكنا من خلال الإثارة للتعرف على سطح لا نهائى مساحته صفر... وبقية خصائص الفراكتالات التى تعكس سحرها وغرائبها.

١٤ ـ تنمية التفكير الرياضى (المنطقى والشكلى) من خلال التمييز بين التشابه الذاتى المضبوط (الرياضى ـ الاصطناعى) وبين التشابه الذاتى الاحصائى. وأيضاً من خلال إرشادات لاثبات الخصائص الغريبة لبعض الفراكتالات المشهورة.

١٥ ـ استخدام أسئلة وتساؤلات، والإجابة الفورية على بعضها أو إرجاء الإجابة بقصد تحضين الفكرة الرياضية ولتوظيف الخيال والذاكرة والشعور واللاشعور فى صنع الفكرة الجديدة.

١٦ ـ الانطلاق بالفكرة الرياضية وربطها بالمجالات المختلفة (أى عمل روابط رياضية mathematical Connections).

١٧ ـ التعبير عن فكرة رياضية جديدة بأساليب مختلفة لفظية أو رسوم فى مواضع مختلفة لتوضيح الفكرة (أو المفهوم.....) ولتسهيل هضمها على مراحل.

١٨ ـ الاثارة للتأمل فى الطبيعة وفى لوحات فراكتالات مشهورة غريبة (مجموعة چوليا، مجموعة ماندلبروت...) ولوحات مستوحاه من الفراكتالات باستخدام الكمبيوتر.

١٩ـ استخدام مداخل مختلفة للتوصل لنفس الفكرة الرياضية أو صنعها. مثل تكوين فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج عن طريق المولد (وتطبيقه على قطعة مستقيمة) وعن طريق فراكتال الشجرة الرياضية وقمتها.

٢٠ ـ التشويق واثارة التفكير الرياضى بالتفاعل المستمر بإحساس صادق وفكر متجدد تلقائى خالى من أى اصطناع.

٢١ ـ محاولة للاندماج فى رحلات وجولات لاستكشاف الأفكار الرياضية وصنعها.

والآن حاول إضافة نقطاً أخرى ثم أضف أمثلة لها وللنقط السابقة... أمثلة ما تزال عالقة بذهنك ووجدانك.ثم سجلها فى مذكراتك. ثم حاول أن تعكس هذا الأسلوب فى تدريسك تدريجيا فستجد بنفسك مدى نمو مقدراتك الابتكارية فى التدريس وتعود على كتابة مذكرات فى هذا الشأن.

المراجع

١ ـ جيمس جـلايك (ترجمة علـى يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولـية تصنع علـماً جديداً» القاهـرة ـ المجلس الأعلى للثقافة.

٢ ـ أ.د/ نظـلة حسن أحـمد خضر (١٩٨٨): «حـكاية زخرفـة البلاط ولغـز الميراث» سلـسلة حكـايات وألغاز رياضية تـنمى التفكير الهندسـى والابتكارى لسن ١٠ ـ ١٥ ومشوقة لجميـع الأعمار القاهرة ـ الهيئة المصرية للكتاب.

3- Drazin, P. G (1993) "Non Linear Systems" Cambridge Univ Press.

4 - Mondelbrot, B.B & Frame, M (1999): "The Canopy and Shortest Path in a Self-Contacting Fractal Tree". The Mathematical Intelligencer Vol 21 No2 Spring (1999) New York, Springer Verlang. pp 18 - 27.

5 - Taylor, R.P (2002) : Order in Pollack Chaos" Scientific American, New York Vol 287 No - 6, December 2002. pp 84 - 89.

6 - Thamos, D.A (2002): "Modern Geametry" US - Brooks/ Cole - Thomson learning.

www.angelfive.

www.contestsk.com.

ww w. math. rice.edu.

http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Julia.html

http://www/listory/.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Koch.html

http://www.history/mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Peano.html

http://www-history.mcs.st-and.ac.uldc/~history/Mathematicions/Sierpinski.html

الفصل الرابع

البعد الفراكتالى كخاصية أساسية للفراكتالات

البُعد الفراكتالى كخاصية أساسية للفراكتالات

مقدمة:

توصلنا فيما سبق إلى أن الفراكتال يمكن تعريفه عن طريق أحد خواصة الرئيسية وهى التشابه الذاتى. يوجد خاصية رئيسية أخرى يمكن تعريف الفراكتال على أساسها. هذه الخاصية هى البُعد الفراكتالى Fractal dimension. وهذ البُعد يدل على مدى تعرجات الفراكتال أو على تعقيد Complexity شكله. ومن الغريب كأى خاصية للفراكتال أننا نجد أن البعد الفراكتالى يكون هو نفسه البعد الفراكتالى لأشكال فراكتال تبدو مختلفه كل الاختلاف فى مظهرها. فمثلاً البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرقائق الثلج هو نفسه البعد الفراكتالى للشاطئ الإنجليزى!

وكانت المشكلة هى إختيار أنسب الأبعاد التى يعرفها ماندلبروت لتكون أكثر لياقة لتحديد بُعد فراكتال ما فى هندسته. هل هى الأبعاد الإقليدية أم الأبعاد التوبولوچية أم أبعاد قدمها هاوسدورف تعرف بأبعاد الصندوق تقوم على العد؟

وقد شغل بال ماندلبروت التوصل إلى البعد الفراكتالى عند مواجهته مشكله: إيجاد طول الشاطئ الإنجليزى. وكان ذلك قبل إعطائه إسم الفراكتال لهندسته. ولذا فإن البعد الفراكتالى كان يطلق عليه البعد الكسرى fractional dimension . ويُعد هذا شيئًا جديدًا غريبًا. فقد تعوذنا أن تكون الأبعاد أعدادًا صحيحه (موجبه) مثل: الخط المستقيم أو بالأحرى المحور له بعد واحد والمستوى له بعدان والفراغ له ثلاثة أبعاد... وهكذا بالنسبة للبعد النونى للأبعاد الأقليدية. و كذلك فى الأبعاد التوبولوچية القطعه المستقيمة (أو المنحنى البسيط)ذات بعد واحد والمربع (أو الأحرى داخليته) ذو بعدين، والمكعب (أو بالأحرى داخليته) ذو ثلاثة أبعاد.. وهكذا.

ولما كان منحنى الفراكتال يختلف فى تعرجاته وتعقيده عن القطعة المستقيمة التى

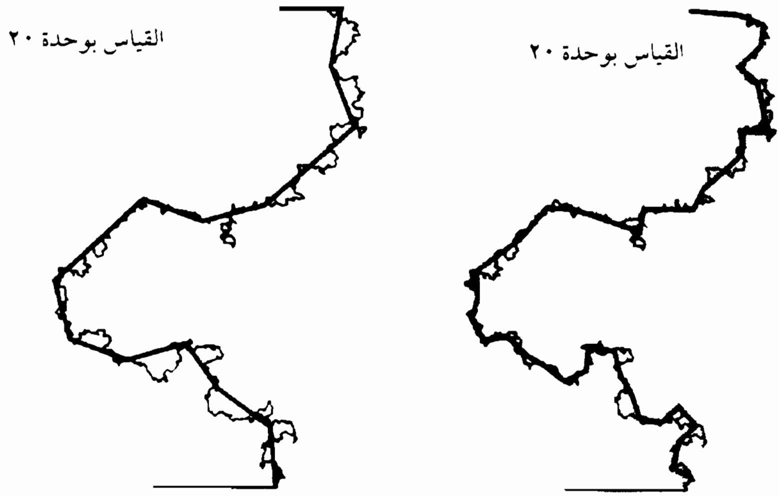
بعدها التوپولوچى واحد «١» فقد جعل ذلك ماندلبروت يستخدم بُعداً للفراكتال يكون أكبر من البُعد التوپولوچى للقطعة المستقيمة. وقد دعاه ذلك لأن يعرف الفراكتال كمجموعة set بُعدها أكبر من البعد التوپولوچى لها.

رعلى ذلك سيكون مدخلنا فى تقديم البعد الفراكتالى هو ماندلبروت ومشكلة إيجاد طول الشاطئ الإنجليزى. والتمهيد إلى قاعدة إيجاد البعد الفراكتالى واشتقاقها عن طريق الأبعاد الاقليدية $R^1, R^2, R^{3}...R^n$ والبعد التوپولوچى d. ثم نُقدم طرقًا مختلفة لحساب البعد الفراكتالى لبعض الفراكتالات (ومنها المشهورة) التى قدمناها فى الفصل السابق مع الاشارة إلى المعالجات الرياضية الصارمة. ثم نتعرض لأبعاد بعض فراكتالات للوحات فنية وفراكتالات فى الطبيعة (واقعيه أو احصائيه).

٤-١- ماندلبروت وطول الشاطئ الإنجليزى

نرجع إلى رحلة ماندلبروت إلى الشاطئ الإنجليزى وإفتنانه وانبهاره بروعة تعرجاته وخلجانه، وبأمواجه المتلاطمة التى تخفى بعض التعرجات تارة وتظهر تعرجات كانت مختفيه تارة أخرى. ويتحول بنظره إلى أعلى فيتعجب من الغيوم الملبدة وانقشاعها.... كل هذا جعله يتشكك فى مقدرة الهندسة الإقليدية على وصف هذه الأشكال الطبيعية.. وأخذ يفكر فى خواص أخرى غير إقليديه تبرزها هذه الأشكال (الأشياء). ثم توصل إلى أن تعرجات وخلجان وإنكسارات الشاطئ لها تشابه ذاتى.. وهى شكل فراكتال. فعاد به التفكير مرة أخرى ليخترع وسيله لقياس طول هذا الشاطئ الغريب. وهو كأى شكل فراكتال فى الطبيعة (واقعى أو احصائى - غير مضبوط مثل الفراكتالات الرياضية المضبوطة). فهو متشابه على مدى مقاييس متعددة. ولكون الفراكتال شكل معقد ولا يتقاطع not overlopping فإن من خواصه الرئيسيه أن تركيبه structure يتغير على كل المقاييس الصغيرة. بمعنى أننا لو استخدمنا مسطرة طولها ٥٠ متر كوحدة للطول مثلاً فى قياس الشاطئ نجد أننا أغفلنا كثيراً من التعرجات والخلجان. وإذا صغرنا الوحدة إلا ٢٠ متر فقياس طول الشاطئ يكون أكثر دقه إلا أنه يهمل أيضًا بعض التعرجات والخجان الأصغر.. وهكذا أنظر شكل (٢١). بالإضافة إلى أن الشاطئ يتغير بعوامل الطبيعه من مد وجذر وعمليات شاطئه أخرى. إلا أن الخليج سيظل خليجًا مهما تعرج.....

هذا يعطينا فكرة عن أن طول الشاطئ الإنجليزى لا نستطيع الإجابه عليه بدقه رياضية عالية. وقد دعا ذلك ماندبروت إلى أن يفكر فى إعطاء خاصية للشاطئ المعقد باختراع مفهوم البعد الفراكتالى. وكان يقصد به البعد الكسرى لأنه توصل إليه قبل سنوات عديدة من إطلاق إسم الفراكتال على هندسته. ثم استخدم البعدالفراكتالى للتمييز بين تعقيد شكل فراكتال وتعقيد أكبر لشكل فراكتال آخر. فكلما زاد التعقيد زاد البعد الفراكتالى.



شكل (٢١)

٤-٢- الأبعاد الاقليديه - البعد التوپولوچى d - بعد الصندوق D:

كما نعرف الخط المستقيم (أو بالأحرى المحور) له بعد dimension واحد، والمستوى له بعدين والفراغ الثلاثى له ثلاثة أبعاد... وهكذا الفراغ النونى له ن من الأبعاد. و هذه هى الأبعاد الإقليديه التى نعرفها وقد نشأت من تعريف اقليدس للنقطة وللمستقيم والمستوى والفراغ، ومن هندسة الإحداثيات (الهندسية التحليلية) لديكارت. على أساس أن أى نقطة على المستقيم (المحور) لها إحداثى واحد وأى نقطه على المستوى لها إحداثيين، والنقطه فى الفراغ لها ثلاثة احداثيات... وهكذا النقطه فى الفراغ النونى لها ن من الاحداثيات ونشير إلى الفراغات الإقليدية ذات الأبعاد ١، ٢، ٣.. بـ ... وR^3 و,R^2 وR^1.

أما البعد التوپولوچى d فقد قدمه پوانكريه (١٩٠٥) حيث إعتبر:

أ- البعد التوپولوچى للنقطة أو لمجموعة محدودة من النقط صفر أى d=o .

ب- البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمة (أو المنحنى المكافئ لها توپولوچيا) هو واحد أى d=1.

جـ- البعد التوپولوچى للمثلث (أبو بالأحرى سطح المثلث أو داخلية المثلث - وأى شكل يتكافئ معه توپولوچيا كالمربع - الدائرة..) فى الفراغ الاقليدى R^2 هو إثنين أى d=2.

د- البعد التوپولوچى للمكعب (داخلية المكعبه) فى الفراغ الاقليدى R^3 هو ثلاثة أى d=3 . أى أن البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمة (قد تسمى خليه cell) فى الفراغ الإقليدى R^1 هو d=1، البعد التوپولوچى للمربع (أو بالأحرى سطح المربع أو داخليته) فى الفراغ الاقليدى R^2 هو d=2 ، البعد التوپولوچى للمكعب فى الفراغ الاقليدى R^3 هو d=3

هـ- ... وهكذا البعد التوپولوچى لما يناظر المكعب فى فراغ اقليدى أكبر من الفراغ الثلاثى (وتسمى بالمكعبات العليا hyper - cubes) يساوي بعد هذا الفراغ الإقليدى، فمثلا البعد التوپولو چى للمكعب العلوى hyper cube فى الفراغ الاقليدى الرابع R^4 هو d=4 ، البعد التوپولوچى للمكعب العلوى فى الفراغ الاقليدى النونى R^nهو d=n

كانت فكرة پوانكريه للبعد التوپولوچى مبنية على أساس القطوع cuts التى تقسم الشكل بحدوديات boundaries، بالإضافة إلى استخدام الاستنتاج الرياضى.

فإذا كان التقسيم لشكل يحدث عن طريق نقط، بإعتبار النقطه بعدها التوپولوچى صفر فيكون الشكل بُعده التوپولوچى أكبر بواحد، وإذا كان تقسيم الشكل بمنحنى بعده التوپولوچى ١ فيكون الشكل بُعده التوپولوچى أكبر بواحد من البعد التوپولوچى للمنحنى وهكذا. وعلى ذلك فإن:

أ - القطعة المستقيمه (أو أى منحنى يكافئها توپولوچيا) يمكن تقسيمها بقطوع cuts عبارة عن نقطة أو مجموعة من النقط (أى بنزع نقطه أو أكثر). وحيث أن البعد التوپولوچى للنقطة (أو مجموع النقط) صفرا فيكون البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه $d=1$.

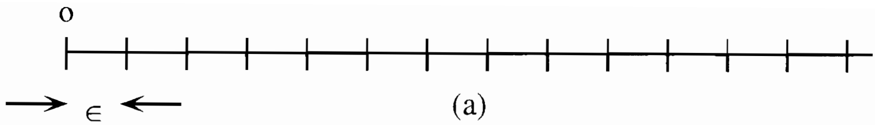
ب- السطح يمكن تقسيمه بقطوع cuts عبارة عن منحنيات بسيطة (أى بقطع المنحنيات) بعدها التوپولوچى ١ فيؤدى ذلك أن البعد التوپولوچى للسطح ٢ أى $d=2$.

جـ- المجسم يمكن تقسيمه بقطوع cuts عبارة عن أسطح بعدها التوپولوچى ٢ فيكون البعد التوپولوچى للمجسم ٣ أى $d=3$... وهكذا.

أما مجموعة كانتور التثليثيه فلا مكان لها فى الأبعاد الإقليديه ولكن البعد التوپولوچى لها فهو صفر أى $d=o$ لأنها مجموعة جزئية من R طولها صفر. وقد عمم هاوسدورف (١٩١٩) البعد التوپولوجى d للأشكال غير البسيطه بتقديم أفكار ما يسمى بُعد الصندوق D. حيث يكون البعد D ليس بالضرورة عدد صحيح فيكون $D\neq d$ للأشكال غير البسيطة (المعقده)، $D=d$ للأشكال البسيطة ويكون البعد D أقل أو يساوى البعد الاقليدى m. أى $d\leq D\leq m$.

وبُعد الصندوق يماثل تعريف البعد الذى قدمه هاوسدورف D. وهو نفسه الذى اختاره ماندبروت ليعبر عن البعد الفراكتالى D. وللتوصل إلى تعريف بعد الصندوق D دعنا نأخذ قطعة مستقيمة طولها l فى الفراغ الاقليدى ذى بعد واحد R^1. شكل (٢٢) أ. إذا أردنا أن نغطى هذه القطعة المستقيمة بمجموعة من القطع المستقيمة الصغيره (غير المتقاطعه) التى طول كل منها $\in$ فإننا نجد أن عدد هذه القطع المستقيمة الصغيرة $N(\in)$ التى تغطى القطعة المستقيمة l هو تقريبًا $\frac{l}{\in}\cong l\in^{-1}$ أى أن

$$N(\in)=l\in^{-1}$$



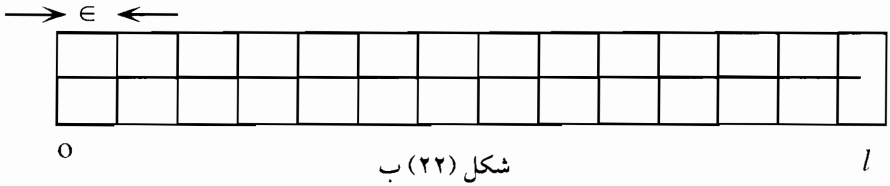
شكل (٢٢) أ

(تغطيه قطعه مستقيمه طوله l فى فراغ R^1 بقطع مستقيمه أصغر بطول ∈)

وبالطبع كلما صغر طول القطعة الصغيرة ∈ كلما زاد عددها الذى يغطى القطعة المستقيمة l . وعندما $\in \to o$ فإن العدد للقطع المتناهيه فى الصغر تكاد تغطى تماما القطعه المستقيمة l (التى طولها l).

أى $\lim_{\in \to o} N(\in) = l \in^{-1} = (\frac{l}{\in})^1$

وبالمثل إذا كانت القطعه المسـتقيمة التى طولها l فى الفراغ الاقلـيدى ذو بعدين R^2. فإنها تُغطى بمربعات صغيره طول ضلع كل منها ∈ . شكل (٢٢) ب.



شكل (٢٢) ب

قطعة مستقيمة طولها l فى فراغ

الاقليدى ذى بعدين R^2 تغطى بمربعات صغيره طول ضلع كل منها ∈)

لاحظ أن عدد القطع المستقيمه الصغيرة التى طول كل منها ∈ التى تغطى القطعة المستقيمة l فى R^1 هو نفسه عدد المربعات الصغيرة التى طول ضلع كل منها ∈ وأن القطعه المسـتقيمة l هى شكل بسيط بُعده التوپـولوچى ١، وعلى ذلك عدد المربعات الصغيرة التى طول كل منه ∈ هى $N(\in)$ وهى تساوى تقريبًا $l \in^{-1}$. الخلايا $N(\in)$ التى تـغطى الشـكل البسيـط قد تكون قطـعًا مستـقيمة صغـيرة طول كل مـنها ∈ أو مربعات صغيرة طول ضلع كل منها ∈ أو مكعبات صغيرة طول ضلع كل منها ∈ أو مكعبات عليا....... تبعًا للفراغ الإقليدى الموجود فيه الشكل.

أما إذا أخذنا دائرة نصف قطرها r وحاولنا تغطيتها بمربعات (خلايا) طول ضلع كل منها $\in$ فإن عدد هذه المربعات $N(\in)$ يساوى تقريبًا $\frac{\pi r^2}{\in^2}$ شكل (٢٢)جـ.

وكما عرفنا البعد التوپولوچى للدائرة ٢ أى أن

$$N(\in) \cong \frac{\pi r^2}{2} \left(\frac{l}{\in}\right)^2$$

فهل الأس ٢ للقيمة$\left(\frac{l}{\in}\right)$ هو البعد التوپولوچى ٢ للدائرة كما كان الأس (١) للقيمة $\left(\frac{l}{\in}\right)$ هو البعد التوپولوچى للقطعة المستقيمة فى المثال السابق..... استخدمْ أمثله أخرى لأشكال بسيطه بأبعاد توپولوچيه ١، ٢، ٣... فى الفراغات الإقليديه $R^1, R^2, R^3 ...$ وغطيها بخلايا تبع كل فراغ (قطع مستقيمة طول كل منها $\in$ أو مربعات طول ضلع كل منها $\in$ أو مكعبات عليا طول ضلع كل منها $\in$) ستتوصل إلى أن

$$N(\in) \cong V\left(\frac{1}{\in}\right)^d ... (1)$$

حيث V بارامتر كان فى حالة القطعة المستقيمة l وفى حالة الدائرة $\pi r^2 /2$، d البعد التوپولوچى للشكل البسيط المستخدم.

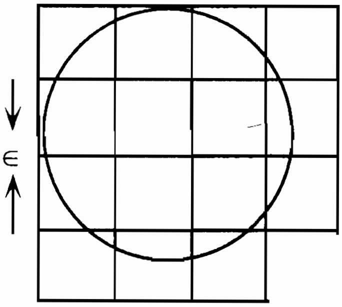
وإذا كان الشكل البسيط هو قطعة مستقيمه طولها الوحدة أو مربع طول ضلعه الوحدة أو مكعب طول ضلعه الوحدة فإن.

$$N(\in) = \left(\frac{l}{\in}\right)^d = (\in^{-1})^d ... (2)$$

بأخذ اللوغريتم للطرفين فإن البعد التوپولوچى للأشكال البسيطه d يكون

$$d = \left(\frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } (\in^{-1})}\right) = \frac{\ln (\in)}{\ln (\in^{-1})} ... (3)$$ انظر ص ١٠٦ فى هذا الفصل

حيث $N(\in)$ عدد وحدات الخلايا التى تغطى الشكل البسيط، $\in^{-1}$ عدد القطع المستقيمه $\in$ وتعتبر $\in$ أيضًا طول ضلع الخليه.

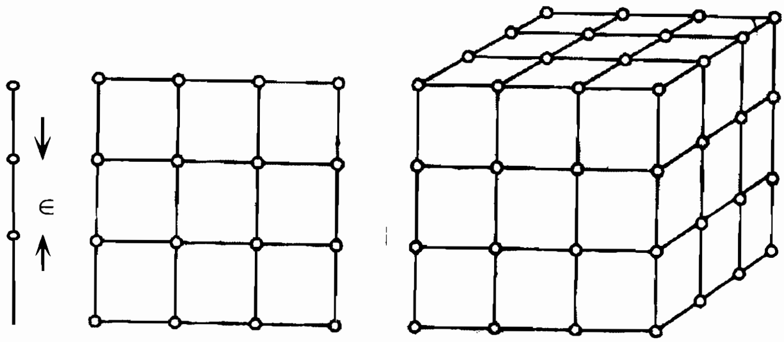


شكل (٢٢) جـ

(غطاء دائرة نصف قطرها r بعدد من

المربعات $N(\in)$ بضلع طوله ∈)

إذا لم تستطع التوصل إلى القاعدة (١)، (٢) أو تريد التحقق منها استخدم الأشكال (الأشياء) البسيطة: قطعة مستقيمه (Segment) طولها الوحدة، مربع (Square) طول ضلعه الوحدة، مكعب (cube) طول ضلعه الوحدة شكل (٢٣) مع الاستعانه بالجدول (١).



شكل (٢٣) جـ

(قطعة مستقيمه ـ مربع ـ مكعب)

Object	∈	d	$(1/\in)^{d}$
Segment	1/3	1	$[1/(1/3)]^1 = 3$
	1/4		$[1/(1/4]^1 = 4$
	1/5		$[1/(1/'5)]^1 = 5$
Square	1/3	2	$[1/(1/3)]^2 = 9$
	1/4		$[1/(1/4)]^2 = 16$
	1/5		$[1/(1/5)]^2 = 25$
Cube	1/3	3	$[1/(1/3)]^3 = 27$
	1/4		$[1/(1/4)]^3 = 64$
	1/5		$[1/(1/5)]^3 = 125$

جدول (١)

(البعد التوبولوجى d وطول القطعة المستقيمه الصغيره ∈ وعدد الخلايا)

ولمزيد من الايضاح والإرشاد تعالى نشتق القاعدة (١) مرّه أخرى. وهى القاعدة التى تربط البعد التوبولوجى d، طول القطعة المستقيمه ∈ التى نقسم بها طول ضلع الشكل البسيط الأصلى (سواء قطعة مستقيمة أو ضلع مربع أو مكعب أو مكعب علوى طولها الوحدة)، وعدد الخلايا التي انقسم بها الشكل البسيط الأصلى (سواء عدد قطع مستقيمه ∈ أو مربعات صغيرة $\in^2$ أو مكعبات صغيره $\in^3$....) ونرمز لها (عدد الخلايا) بالرمز $N(\in)$.

- فى البداية نسترجع أن البعد التوبولوجى لقطعة مستقيمة فى الفراغ الإقليدى R^1 هو ١ أى d=1، البعد التوبولوجى للمربع فى مستوى (فراغ إقليدى R^2) هو d=2، البعد التوبولوجى للمكعب فى فراغ إقليدى زو ثلاثة ابعاد R^3 هو d=3... وهكذا.

وأننا نسمى القطعة المستقيمة، المربع، المكعب... بالخلايا فى بعد واحد، بعدين، ثلاثة أبعاد..

- بأخذ الشكل البسيط الأصلى قطعة مستقيمه طولها الوحدة ثم تقسيمها إلى قطع مستقيمة (صغيره) جزئيه طول كل منها $\frac{١}{٣}$ أى $\frac{1}{3} = \in$.فإن عدد الخلايا (القطع

المستقيمة الجزئية) المتكونه هى ٣ أى: $N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^1 = (\frac{1}{\frac{1}{3}})^1 = 3$

وبتصغير $\in$ بحيث $\frac{1}{4} = \in$، وتقسيم القطعة المستقيمه الأصليه التي طولها الوحدة فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمه الصغيرة التى طول كل منها $= \in$) تصير $4 = (\frac{1}{\frac{1}{4}})^1 = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^1 = N(\in)$ للبعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه d=1.

وبالمثل حاول تقسيم القطعة المستقيمه الأصلية التى طولها الوحدة إلى قطع مستقيمه أصغر طول كل منها $\frac{1}{10} = \in$)، فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمه الصغيرة المقسم لها الشكل الأصلى تصير 10.

$10 = (\frac{1}{\frac{1}{10}})^1 = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^1 = N(\in)$ للبعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه d=1

- وإذا كان الشكل الأصلى مربعًا طول ضلعه الوحدة وقسمناه إلى مربعات صغيرة طول ضلع كل منها $\frac{١}{٣}$ فإنه ينتج ٩ خلايا (مربعات جزئيه طول ضلع كل منها $\frac{1}{3}$). أى:

$٩ = (\frac{1}{\frac{1}{3}})^2 = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^2 = N(\in)$ للبعد التوپولوچى للقطعة المستقيمه d=2

وإذا صغرنا $\in$ حيث تصير $\frac{1}{4}$ فإن عدد الخلايا (المربعات الجزئية التى طول ضلع كل منها $\frac{1}{4}$) تصير ١٦. أى :

$16 = (\frac{1}{\frac{1}{4}})^2 = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^2 = N(\in)$ للبعد التوپولوچى للمربع d=2

وإذا صغرنا $\in$ بحيث تصير $\frac{1}{10}$ فإن عدد الخلايا (المربعات الجزئية التى طول ضلع كل منها $\frac{1}{10}$) تصير ١٠٠ للبعد التوپولوچى للمربع d=2.

- وبالمثل بأخذ الشكل الأصلى البسيط مكعب طول ضلعه الوحدة وينقسم طول الضلع بقطع مستقيمه صغيرة جزئيه طول كل منها $\frac{1}{3} = \in$ فستجد أن عدد المكعبات الصغيره الجزئية (الخلايا) المقسم إليها الشكل تصير ٢٧ مكعب أى:

$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^3 = (\frac{1}{\frac{1}{3}})^3 = 27$ للبعد التوپولوچى للمكعب d=3

وبتصغير $\in$ بحيث تصير $\frac{1}{4}$ تجد عدد الخلايا ٦٤. أى :

$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^3 = (\frac{1}{\frac{1}{4}})^3 = 64$ للبعد التوپولوچى للمكعب d=3

وبتصغير $\in$ لتصير $\frac{1}{10}$ تجد عدد الخلايا 1000

$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^3 = (\frac{1}{\frac{1}{10}})^3 = 1000$ للبعد التوپولوچى للمكعب d=3

- فى الأمثلة السابقة نلاحظ أن الأس هو البعد التوپولوچى d ومن ذلك نصل إلى التعميم:

$$N(\in) = (\frac{1}{\frac{1}{\in}})^d = (\frac{1}{\in^{-1}})^d$$

حيث $N(\in)$ عدد الخلايا (المقسم إليها الشكل الأصلى، $\in$ هى طول القطعة المستقيمه الجزئية التى تقسم ضلع الشكل الأصلى).

وهى القاعدة التى توصلنا إليها سابقًا. وبأخذ اللوغريتم للطرفين فإن
$d = \log^{N(\in)} / \operatorname{Log}\in^{-1}$

هذه النسبه (التى توصلنا إليها من قبل) عندما تتقارب إلى قيمة ثابتة بتصغير $\in$ حتى تؤول إلى الصفر أى $o \to \in$

فإن البعد التوپولوچى عندما يطبق على شكل معقد غير بسيط يسمى بعد الصندوق Box dimension كما قام بتقديمه هاوسدورف فى (١٩١٩) ونرمز له بالرمز D.

وعلى ذلك فإن :

$$D = \lim_{\in \to 0} \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \lim_{\in \to 0} \frac{\ln N(\in)}{\ln \in^{-1}} \quad (5)$$

مع استبدال اللوغريتم العادى بأساس ١٠ بـاللوغاريتم الطبيعى بأساس e. وأخذ القيمه المطلقة |D| لتعبر عن بعد الصندوق.

وقد أثـارت فكرة البـعد D لها وسدورف، مخـترع هندسة الفراكتـال ماندلبروت وأختارها ليصف أشكال الفراكتالات المعقدة المتشابهة ذاتيا على أساسها.

وعلي ذلـك يمكن تعـريف [٦] البعد الفراكـتالى للشكل المتشابه ذاتيـا بأن القيمه المطلقه للنسبة $\frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}}$ (أو $\frac{\ln N(\in)}{\ln (\in^{-1})}$)

(حيـث $N(\in)$ عدد الخلايا المقسم إليها الشكل عـلى أساس تقسيم الطول بقطع مستقيمة جزئـية طول كل منها $\in$) مع ملاحظة أن الدقه الرياضـية تستلزم أن تتقارب النسبة لقيمة ثابتة.

ونرجع إلى إشتقـاق قاعدة إيجاد البعد الفراكـتالى التى تجعلك تشعـر أنها مألوفة وتأتى ببساطه مما نألـفه فى الابعاد الإقليديه والبعد التوپولوچـى. وكما مهدنا فى هذا الفصل، القطعة المستقيمة بعدها التوپولوچى واحد أى d=1 وكذلك شكل الفراكتال (مثـل منحـنى كوخ لـرقائـق الثلـج) المتكـون من تعـرجات لقـطع مـستقـيمه بـعده التوپولوچى أيضًا يساوى واحد أى d=1 لأنه يتكافأ توپولوچيا مع القطعة المستقيمة.

ولكنك لا تـتوقع أنه باستخـدام القاعدة D للبـعد الفراكتالـى أن يكون D لـهـذا الفراكتال يساوى واحد، ولكنك تتوقع أن يكون أكبر من واحد أى D>1 وهذا الذى تأكد منه مـاندلبروت. وعلى ذلك فقد عرّف الـفراكتال (المتشابه ذاتيا) بـإنه المجموعة التى بعدها الفراكتالى أكبر من بعدها التوپولوچى.

ومـن المشـوق أن نـعرف كـمـا ذكر درازيـن [4] أن ريـتـشـارد سون فـى سـنـة ١٩٦١فحص الشاطئ الـغربى لبريطانيا واكتشـف عـمليًا أنه تقريبًا متشـابه ذاتيا على عديد من المقاييس، والـتشابه الذاتى بمعنى إحصائى.. بأن الشاطـى يبدو متشابهًا لأى

مقياس (من التصغير والتكبير magnification) إلامن ملامح يمكن معرفتها. وقد وجد رتشاردسون أن طول الساحل l يحقق العلاقة $L(\in) = V \in^{1-D}$

حيث اعتبر وحدة القياس كما كان متعوداً عليه في الخرائط ما بين ١٠كم، ١٠٠٠كم أي $10\ km \le \in \le 1000\ km$، حيث $D = 1.25$ بالعد على الخرائط للقيم المختلفة لـ $\in$ والعدد $N = \frac{l}{\in}$ وهو عدد خطوات الطول $\in$ من نقطة إلى نقطة على الشاطئ. وكان يستخدم مساطر (أو مازوره) بالسير Wallking dividers. ووجد أن طول الشاطئ L يحقق المعادلة $L(\in) = V \in^{1-D}$ عندما يكون

$$D = 1.25\ ،10\ km \le \in \le 1000\ km$$

إلا أنه كما عرفنا بعد الصندوق (أو البعد الفراكتالى نأخذه عندما $\in \to o$ وهذا ما لم يفعله ريتشاردسون، فلم يستخدم القياسات على مقاييس أصغر من الماخوذ به للخرائط التى أمكنه الحصول عليها (مثل المتر، والميكرون أو الكميات المتناهية فى الصغر). فهل يكون ما عمله ريتشاردسون قد دفع ماندلبروت لاستخدام ما يشبه الساحل من فراكتالات مضبوطه رياضية متشابهه ذاتيًا على كل المقاييس مثل منحنى كوخ لرقائق الثلج عن طريق البعد الفراكتالى لحل مشكله طول الشاطئ الإنجليزى ؟ والآن تعال نطبق قانون البعد الفراكتالى D لايجاد أبعاد بعض الفراكتالات التى قدمناها فى الفصل السابق. وفى الواقع يوجد عدةً أساليب لإيجاد البعد الفراكتالى باستخدام هذا القانون نتعرف عليها فى البند التالى.

٤-٣- أساليب حسابيه مختلفه لإيجاد البعد الفراكتالى:

كل هذه الأساليب تعتمد على العد (كما فى بعد الصندوق) فى تطبيق قاعدة البعد الفراكتالى D ونقدم من هذه الأساليب: الطريقة التحليلية ـ طريقة استخدام الشكبه التربيعيه ـ طريقة إستخدام المسطرة.

٤-٣-١- الطريقة التحليلة فى إيجاد البعد الفراكتالى لبعض الفراكتالات ومنها المشهورة.

وهى طريقة تستخدم العد على مكونات المولد (أو العملية) التى تولد الفراكتال. فمثلا بالنسبة للمولد المطبق على قطعة مستقيمه فى التكرار n_0 نأخذ القطعة

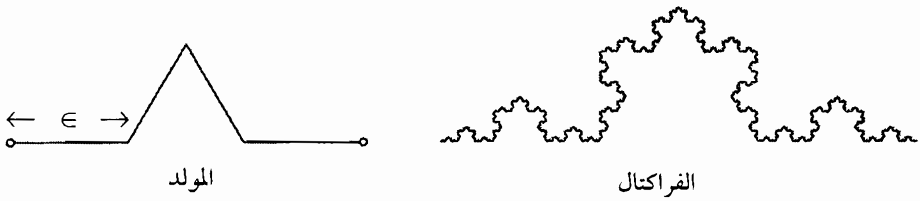
المستـقيمة طولهـا الوحدة، ∈ طول القطعة المستقيمة الصـغيره الجزئية، التى تقسم بها القطعة المستقيمة الأصلية، عدد الخلايا $N(\in)$ هو عدد القطع المستقيمة التى طول كل منها ∈ للمولد.

ثم نطبق القاعدة:
$$D= \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}}$$

وقد اتـضح أن هذه الطـريقة تقـدم نفس قيـمة D باسـتخدام المـعالجـة الرياضـية الصارمة عندما $\in \to o$.

وعلى ذلك نـقدم أمثلة تطـبيقية لإيجـاد البعد الفراكـتالى لبعض الـفراكتالاتD باستخدام الطريقة التحليلية التى ذكرناها على المولد ونقدم المعالجة الرياضية لبعضها:

مثال(١): البعد الفراكتالىD (لفراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج (المطبق على قطعة مستقيمة) بالمولد العادى (قمته إلى أعلى).

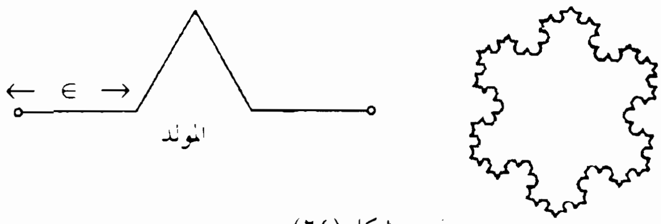


شكل (٢٤)أ

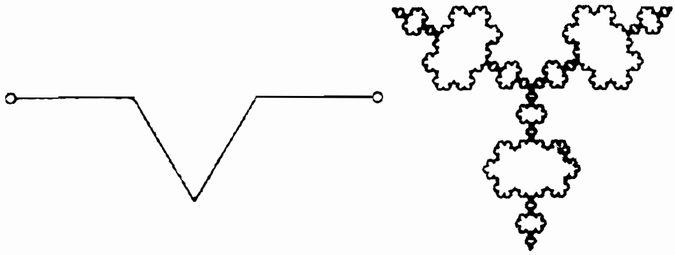
لاحظ أن $\frac{1}{3} = \in$ لأن القطعة المسـتقيمة التي طولها الوحدة قـسمت إلى ثلاثة قطع مستقيـمه متطابقة طول كل منها $\frac{1}{3}$ وفى المولد استبدلت القطعة المـستقيمة فى الوسط بساقين متساويين لمثلث كل منها يساوى طوله طول $\frac{1}{3} = \in$. وعلى ذلك فإن عدد الخلايا (القطع المستقيـمه المكونه للمولد) هى ٤ أى $N(\in) = 4$ وبالتعـويض فى قانون الـبعد الفراكـتالى D. فإن البعد (الفـراكتال) لمنحنى رقائق الثلـج (على قطعة مستقيمة):

$$D = \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1.26$$

ولكون نـفس المولد يـولد فراكتـال منحنى كـوخ بتطبـيقه علـى مثلث (مـتساوى الأضلاع طول ضـلعه الوحدة) سـواءً كانت قمة المولـد إلى أعلى أو إلى أسـفل فإن الفراكتال شكل (٢٤) ب، شكل (٢٤)جـ بعد كل منهما أيضًا $D \cong 1.26$.



شكل (٢٤) ب

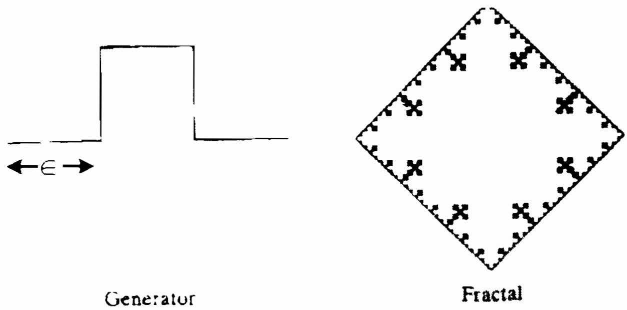


$D = \log 4/\log 3 \approx 1.26$

شكل (٢٤) جـ

لاحظ أنه بالرغم من الاختلاف الكبير فى مـلامح أو مظهر فراكتال منحنى كوخ لرقائق الـثلج فى شكل (٤) أ، ب، جـ إلا أنه لهما نفـس البعد الفراكـتالى $\cong 1.26$ الذى يعكس أن مستوى تعقدهم هو نفسه بالرغم من الاختلاف البيّن فى مظاهرهم.

مثال(٢): البعد الفراكتالى لفراكتال القبعةD. حاول حسابD مستعينًا بشكل (٢٥).



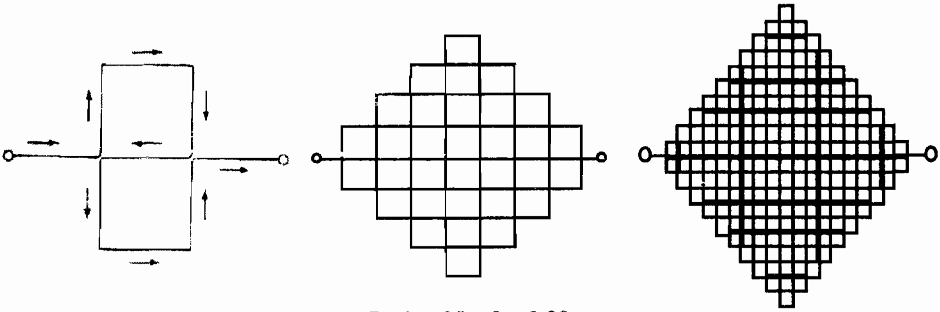
$D = \log 5/\log 3 \approx 1.46$

شكل (٢٥)

ستجد أن القطعة المستقيمة الأصلية التي طولها الوحدة استبدل الجزء الأوسط منها بثلاثة أضلاع لمربع طول كل منها $\in = \frac{1}{3}$ ، وأن عدد خلايا (القطع المستقيمه) المكونه للمولد هى $N(\in) = 4$. وبتطبيق القانون فإن البعد الفراكتالى $D \simeq 1.46$.

مثال(٣): البعد الفراكتالى لفراكتال منحنى پينو. ستصل بسهولة أن $\in = \frac{1}{3}$، عدد الخلايا للمولد ٩ (قطع مستقيمة صغيرة جزئية طول كل منها $\frac{1}{3}$). وعلى ذلك فإن

$$D = \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.00$$



D= log 9/log3 ≈ 2.00

شكل (٢٦)

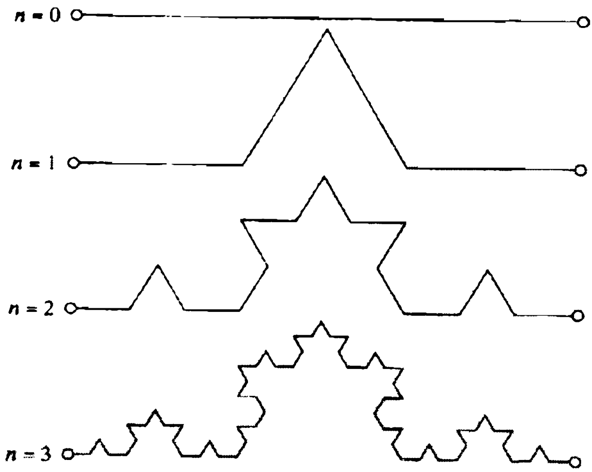
وكما ذكرنا (فراكتال) منحنى پينو هو مالئ السطح لأنه بزيادة عدد التكرارات المرحليه ن زيادة لا نهاية $n \to \infty$ يتقارب convevges الفراكتال مع كل نقط المستوى. ومن العجيب أن الفراكتال تولد من منحنى (مولد) على قطعة مستقيمة بعدها التوپولوچى d=1. وأن الفراكتال الناتج شكل معقد من قطع مستقيمه متناهية فى الصغر، ويختلف كل الاختلاف عن داخلية المربع فى الفراغ الإقليدى ذو بعدين R^2 والذى بعده التوپولوچى ٢ أيضًا.

.. والآن هل سألت لماذا استخدمنا المولد عند حساب البعد التوپولوچى الذى قام

بتوليده؟ أو الأحرى لماذا حسبنا عـدد الخلايا المكونه له وأخذناها $N(\in)$ والتـى طول ضلعها $\in$؟.

إذا كنت تساءلت لماذا يكـون حساب البعد الفراكتالى بهذه الطـريقة هى صحيحه فأنت متعلم ريـاضى لديه مقدرة رياضية ابتكاريه وحب اسـتطلاع. وإذا أنت تحققت من صحة هذا الـسؤال فمستقبلـك سيكون على مستـوى أعلى فى التفكيـر الرياضى والابتكارى.

والسبب فى تبسيـط الإجراءات الحسابيه باستخدام المولد يتضـح ببساطه مثلاً من مولد منحنى ڤون كوخ لرقائق الثلج المطبق على قطعة مستقيمه شكل (٢٧).



شكل (٢٧) منحنى كوخ لرقائق الثلج

لاحظ أن المـولد وهو فـى التـكرار الأول، وأن عدد الـقطع المـستقـيمـة الصغـيرة المكونه له عددها ٤ وطول كل منها $\frac{1}{3}$ أى أن

فى التكرار الأول n_1 يكون $N(\in) = 4$ عند $\in = \frac{1}{3}$

وفى التكرار الثانى n_2 يكون $N(\in) = 16 = 4^2$ عند $\in = (\frac{1}{3})^2$

وفى التكرار الثالث n_3 يكون $N(\in) = 64 = 4^3$ عند $\in = (\frac{1}{3})^3$

.... وهكذا

وفى التكرار النونى n_n يكون $N(\in) = 4^n$ عند $\in = (\frac{1}{3})^n$

ومن قانون البعد الفراكتالى

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\log N(\in)}{\log \in^{-1}}$$

فإن بالنسبة لفراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج يكون

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{\log (4)^n}{\log (3)^n}$$

$$D = \lim_{n \to \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3}$$

$$= \frac{\log 4}{\log 3}$$

كما كنا نطبق على المولد.

ـ حاول أن تتحقق من ذلك بالنسبة للمولدات الأخرى فى الأمثلة السابقة.

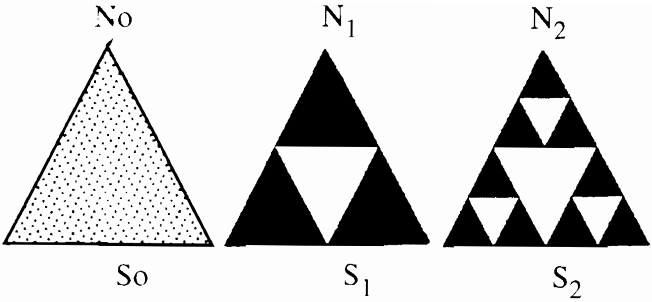
وبالمثل يمكن الإمتداد بالفكرة لحساب عدد الخلايا $N(\in)$ التى طول ضلع كل منها $\in$ علي شكل S_1 الذي يحدده التكرار الأول n_1 عند إيجاد البعد الفراكتالى كما نبين فى الأمثلة التالية . (حاول التحقق من صحة هذا الاجراء).

مثال(٤): البعد الفراكتالى لمنحنى چوان سيربينسكى (شكل ٢٨)

هنا العملية مطبقة على مثلث S_0 طول ضلعه الوحدة. عدد الخلايا على ما يناظر المولد فى التكرار الأول n_1 وهو مثلث منزوع منه المثلث الأوسط، هو ثلاثة مثلثات طول ضلع كل منها $\frac{1}{2} = \in$.

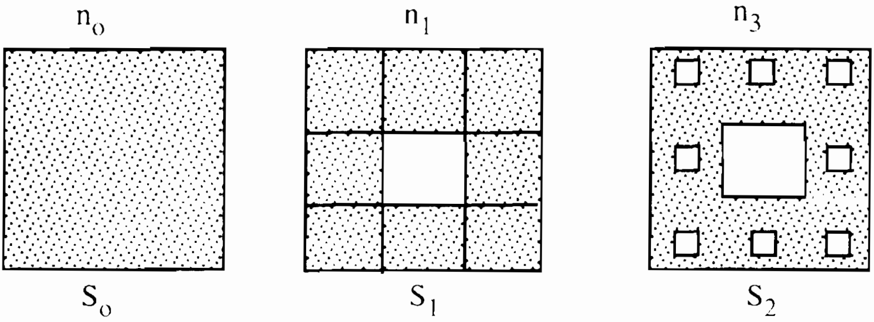
وعلى ذلك فإن:

$$D = \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \frac{\log (3)}{\log (2)} \simeq 1.58496$$



شكل (٢٨) بساط سيربينسكى

مثال (٥): البعد الفراكتالى لبساط سيربينسكى. شكل ٢٩



شكل (٢٩) بساط سيربينسكى

العملية هنا التى يحددها التكرار الأول n_1 هو نزع المربع الأوسط من مربع S_0 طول ضلعه الوحدة . بتطبيق قانون البعد الفراكتالى على S_1 الذى يحدده التكرار الأول، نجد أن عدد الخلايا (المربعات) المكونه له هى ٨ وطول ضلع كل منها = $\frac{١}{٣}$

أى أن $N(\in) = 8$، $\in = \frac{1}{3}$ وعلى ذلك فإن:

$$D = \frac{\text{Log } N(\in)}{\text{Log } \in^{-1}} = \frac{\log(8)}{\log(3)} \cong 1.8928$$

أرجو أن تكون تحققت من صحة استخدام حساب البعد الفراكتالى بتطبيق القانون على الشكل S_1 الذى يحدده التكرار الأول.

وذلك لأنه بالنسبة (لفراكتال) چوان سيربينسكى شكل (٢٨) تجد أن

في التكرار الأول n_1 يكون 3 $= N(\in)$ عندما $\in = \frac{1}{2}$

في التكرار الثاني n_2 يكون $3^2 = N(\in) = 9$ عندما $\in = (\frac{1}{2})^2$

في التكرار النون n_n يكون $N(\in) = 3^n$ عندما $\in = (\frac{1}{2})^n$

$$\Leftarrow \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{n \log 3}{n \log 2} \lim_{n\to\infty} = \frac{\log 3^n}{\log 2^n} D = \lim_{n\to\infty}$$

وأيضًا بالنسبة لفراكتال بساط سيربينسكي شكل (٢٩).

في التكرار الأول n_1 يكون 8 $= N(\in)$ عندما $\in = \frac{1}{3}$

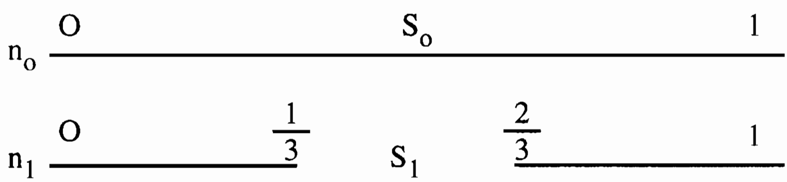
في التكرار الثاني n_2 يكون $8^2 = N(\in)$ عندما $\in = (\frac{1}{3})^2$

في التكرار النوني n_n يكون $N(\in) = 8^n$ عندما $\in = (\frac{1}{3})^n$

$$\Rightarrow D = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(8)^n}{\log(3)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 8}{n \log 3} = \frac{\log 8}{\log 3}$$

مثال (٦) البعد الفراكتالي لمجموعة كانتور التثليثه. تذكر أن الشكل S_1 الذي يحدده التكرار الأول هو قطعة مستقيمه طولها الوحدة منزوع منها الثلث الأوسط شكل (٣٠). وعلى ذلك فإن $D = \frac{\log N(\in)}{\log^{\in -1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \approxeq 0.6309$

ومع ملاحظة أن عدد القطع التي تغطى الشكل S_1 هو2، وطول كل منها $\in = \frac{1}{3}$



شكل (٣٠)

وكما ذكرنا عندما $n \to \infty$ أي تكرار الذي يقترب من اللانهايه فإن شكل المجموعة عبارة عن مجموعة نقاط لا يوجد بها أي قطعة مستقيمه أو بالأحرى أي فترة جزئيه. وهذه المجموعة من النقط طولها صفر، وعلى ذلك فالبعد التوبولوجي

صفر. أمـا البعد الـفراكتالـى هو $D\simeq 0.63$ وهو يعـضد وجهة نـظر ماندلـبروت بأن فراكتال مجموعة كانتور التثليثية بعدها الـفراكتالي أكبر من بعدها التوپولوچى مثلها مثل أى فراكتال.

ويمكنك أيضًا التحقق من أن $D= \log2 / \log3$ عندما $n\to\infty$ كما قمنا فـيما سبق بالنسبة للأمثلة السابقة.

وذلك لأنه فى الـتكرار الأول n_1 يغـطى S_1 قطعيتين جزئيتين أو بالأحرى فترتين جزئيـتين (أى $N(\in)=2$) طول كل منهـا $\in=\frac{1}{3}$ وفى التكـرار الثانى n_2 ينتـج أربع فترات جزئيه طول كل منها $\in=\frac{1}{3}$ وعلى ذلك

$N(\in)=2$ ، $\in=\frac{1}{3}$ عندما $n=1$

$N(\in)=2^2$ ، $\in=\frac{1}{3}$ عندما $n=2$

$N(\in)=2^n$ ، $\in=\frac{1}{3}$ عندما يكون التكرار n_n

$$\Rightarrow D= \lim_{n\to\infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

عمومًا فى الطريقة التحليلية لحسـاب البعد الفراكتالى نستخدم عدد الخلايا $N(\in)$ المكونه للمـولد (أو الشكل S_1 الذى يحدده التكرار الأول) وطـول ضلع هذه الخلية $\in$، سواء أكانت الخلية قطعة مستقيمه جـزئيه أو مثلث أو مربع جزئى. كما مهدنا فى شكل (٢٢)أ السابق.

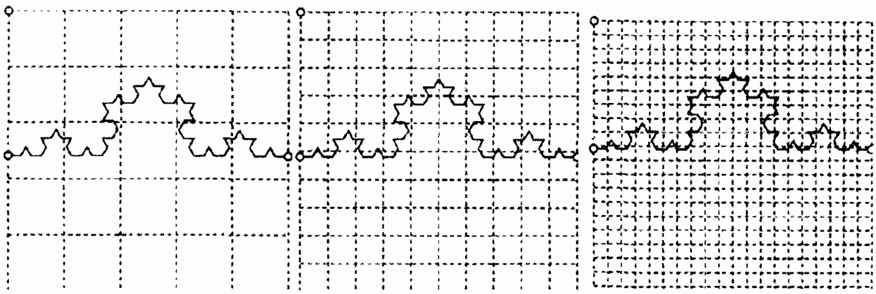
أما الطريـقة الثانية التـى نقدمها فى البـند التالى فتعـتمد علي غطاء مـن المربعات الذى مهدنا له فى شكل (٢٢) ب، جـ.

٤-٣-٢: طريقة الشبكة التربيعيه فى حساب البعد الفراكتالى.

وهى طريقة تستخدم أكثر فى التطبيقات العملية. وهى تعتمد على عد الخلايا التى

تغطى الـفراكتال $N(\in)$، والخلايا عبارة عادة عن مربعات لشـكبة تربيعيه طول ضلع كل منـها $\in$. وبتصـغير $\in$ نوجد النسبة $\frac{\log N(\in)}{\log \in^{-1}}$ عندما $\in \to o$ لحساب الـبعد الفركتالى. وتتضح الطريقة من المثالين التاليين.

مثال (١): إستخدام طـريقة الشبكة التربيعـيه فى حساب البعد الفراكتـالى لمنحنى (ڤون) كوخ لرقائق الثلج (المطبق على قطعة مستقيمه) . انظر شكل (٣١).



(أ) شبكة ٥×٥ (ب) شبكة ١٠×١٠ (جـ) شبكة ٢٠×٢٠

شكل (٣١)

فى الشبكة (أ) ٥× ٥ قسمنا المربع الـذى طول ضلعه الوحدة إلى ٢٥ مربع جزئى طول ضلع كـل منها $\frac{١}{٥}$ أى $\frac{1}{5} = \in$ أما فى الشـبكة (ب) ١٠×١٠ فقد قسـم المربع إلى ١٠٠ مربع جزئى طول ضلع كل مـنها $\frac{١}{١٠}$ أى $\frac{1}{10} = \in$. والشبـكة (ب) أدق من الشبكة (أ) وكذلك الشبكة (جـ).

بعد المربعات الجزئية الـتي تغطى المنحنى فى متتابعه من الشـبكات الأدق التربيعيه التى تصغـر فيها $\in$ شيئًا فشيئًا، مع امكانية استخـدام الكمبيوتر فى العد نوجد العدد المطلق الذى تتقارب إليه النسبة $\frac{\log N(\in)}{\log \in^{-1}}$ حيث $N(\in)$ عدد المربعات الـتى تغطى المنحنى التى طول ضلع كل منها $\in$.

فمثلاً بالنسبة لشكل (٣١) والشبكة (أ) ٥ × ٥ يكون $N(\in) = 7$، $\in = 0.2$

وفى حالة الشكبة (ب) ١٠×١٠ يكون $N(\in)=24$، $\in = 0.1$

أما استخدمنا الشبكة الأدق ٢٠×٢٠ فيكون $N(\in)=46$، $\in = 0.05$

ونجد أنه فى حالة الشبكة (أ) ٥×٥ تكون القيمة المطلقة للنسبة $\frac{\log 7}{\log 5} \cong 1.209$

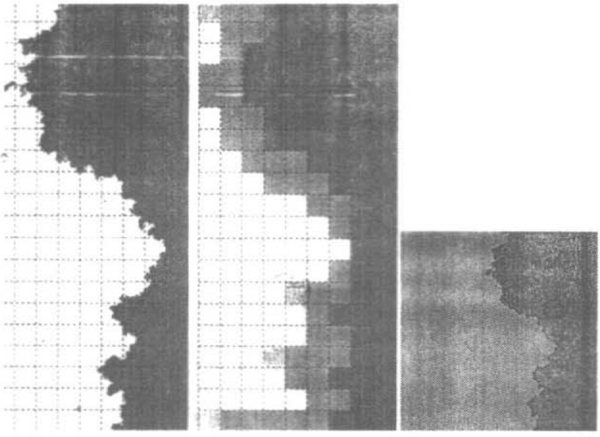
.... (ب) ١٠×١٠ تكون القيمة المطلقة للنسبة $\frac{\log 24}{\log 10} \cong 1.38$

أما إذا فى حالة الشكبة ٢٠×٢٠ تكون القيمة المطلقة للنسبة $\frac{\log 46}{\log 20} \cong 1.27$

وتتقارب هذه النسبه إلى $1.26 \cong$ وهى قيمة البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ كما توصلنا إليها فى الطريقة التحليليه.

نلاحظ أنه كلما كانت الشكبه أدق كلما وضحت تفصيلات الفراكتال وكان عدد $N(\in)$ الذى يغطيها أدق.

مثال (٢): استخدام طريقة الشبكة التربيعيه لحساب البعد الفراكتالى لأحد الشواطئ مثل نموذج الشاطئ فى شكل (٣٢)أ.

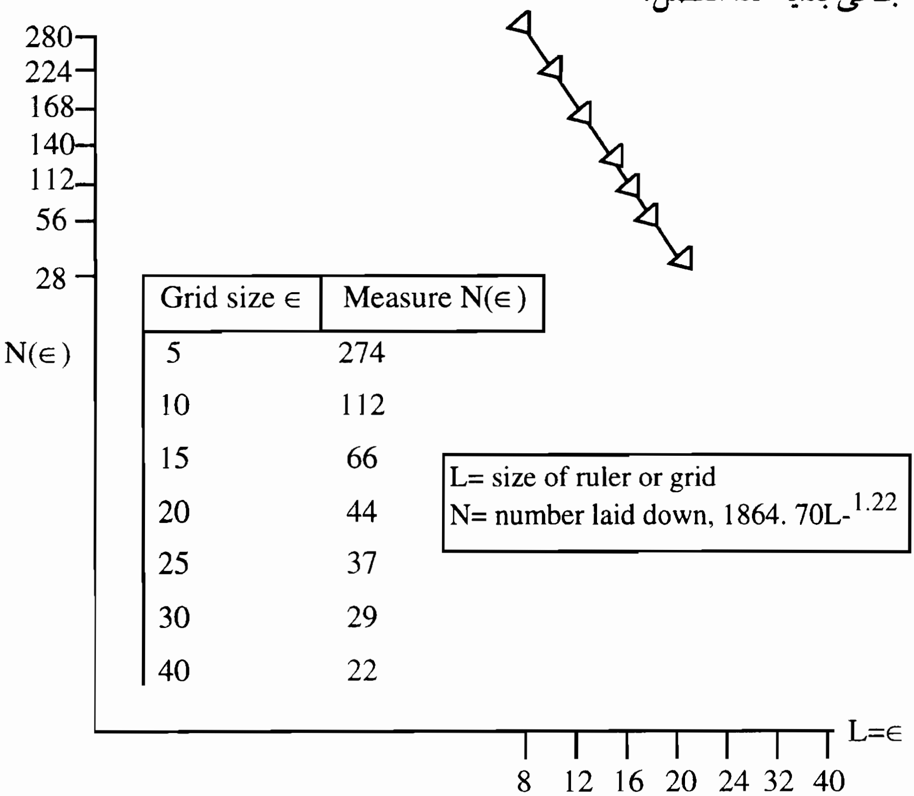


(أ) نموذج لأحد الشواطئ (ب) عدد الخلايا التى تغطى الشاطئ ٤٤ (جـ) عدد الخلايا التى تغطى الشاطئ ١١٠

شكل (٣٢)

ولكون الشبكة التربيعيه فى الخرائط ووحداتها الجزئيه مربعات طول ضلع كل منها مقياسه كبير. فإننا عندما نستخدم شبكة تربيعيه طول ضلع ووحداتها الجزئيه ٢٠، ثم نعد عدد الخلايا (المربعات) التى تغطى الشاطئ بتعرجاته نجد أنها ٤٤ كما فى شكل (٣٢)ب أى $N(\in) = 44$ حيث $\in = 20$ وبتصغير الوحدات التربيعيه لتصير طول ضلعها ١٠ فإن عدد المربعات (الخلايا) الأصغر التي تغطى تفصيلات أكثر للشاطئ يزداد عددها فتصير $N(\in) = 100$ حيث $\in = 10$ كما فى شكل (٣٢) جـ - عدد الخلايا باللون الفاتح هى التي تغطى الشاطئ. ومع التوالى فى تصغير أبعاد المربعات الجزئيه للشكبه أى بتصغير $\in$ فإننا نجد أن النسبه $\log N(\in) / \log\in^{-1}$ تقترب من نسبة ثابتة 1.22 أى أن البعد الفراكتالى لهذا الشاطئ $D=1.22$. وعمليًا نستعين بالرسم البيانى للتوصل إلى المعادلة $N(\in): 1864.70\in^{-1.22}$ أنظر شكل (٣٣)[٦].

حاول أن تتحقق من هذه المعادلة عن طريق التمهيد لمعادلة (١) شكل (٢٢) ب، جـ فى بداية هذا الفصل.



Grid size ∈	Measure N(∈)
5	274
10	112
15	66
20	44
25	37
30	29
40	22

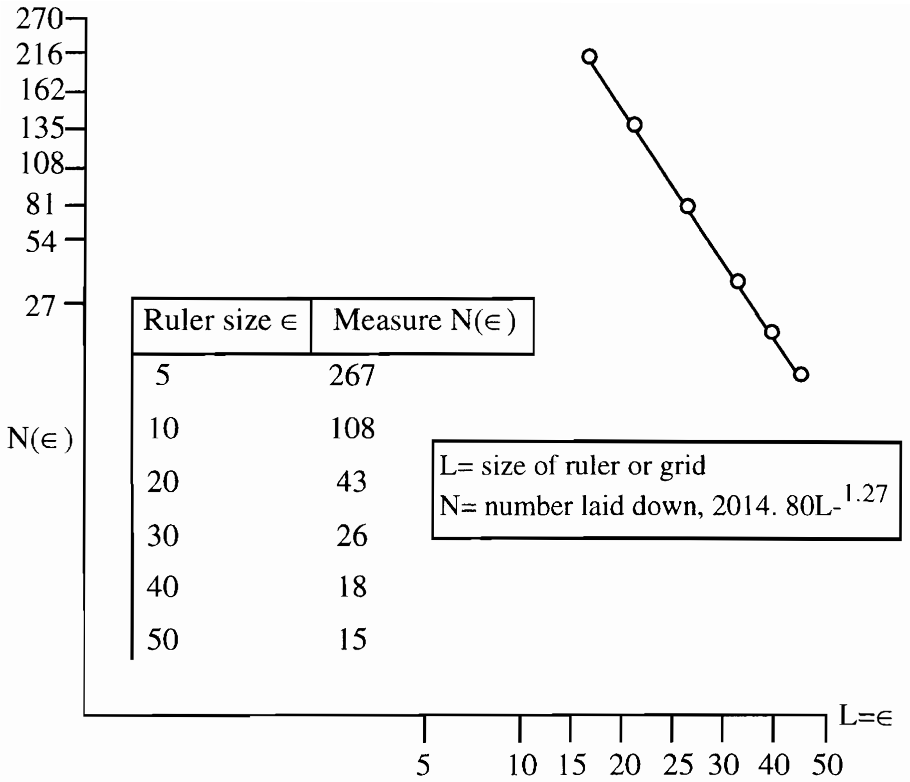
شكل (٣٣)

٤-٣-٣: طريقة المسطرة ruler لحساب البعد الفراكتالى

وهى طريقة مثلها مثل الطريقة السابقة تستخدم فى التطبيقات العمليه. وهى قريبه من الطريقة التى استخدمها ريتشارد سون (والتى ذكرناها عند التعليق على قانون (٥)) ولكنها أكثر دقه رياضيا وقد استخدمها ماندلبروت لايجاد البعد الفراكتالى للشاطئ الانجليزى لحل مشكله «ما طول هذا الشاطئ؟».

حيث كان متشوقًا لمعرفة ما تقوده البيانات المتاحة المعروفه بهذا الصدد. وهى قياس طول الشاطئ بمسطره (تمثل قطعة مستقيمه ∈) عن طريق عددها الذى يغطى تقريبًا الشاطئ $N(\in)$.

وعن طريق استخدام الرسم البيانى وتصغير طول المسطرة (التى اعتبرها وحدة القياس ∈) أكثر وأكثر مع إيجاد عدد المساطر rulers التى تغطى طول الشاطئ $N(\in)$ فى كل مرة. والتمثيل البيانى لهذه البيانات ينتج شكلاً يستطيع منه التوصل إلى مستقيم أكثر لياقه Fit لهذه البيانات ـ كما ظهر فى طريقه الشبكة التربيعيه. وفى هذه الحالة كانت معادلة المستقيم $N(\in) = 2014.8\in^{-1.27}$ وبذلك يكون البعد الفراكتالى لهذا الشاطئ $D=1.27$ أنظر شكل (٣٤)[٦].



شكل (٣٤)

يتضح مما سبق أن البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرقائق الثلج (بحسابه بالطريقة التحليليه أو طريقة الشبكة التربيعية) يقترب من البعد الفراكتالى للشاطئ الانجليزى (بحسابه بطريقة المسطرة بدقة رياضية أو حتى بطريقه ريتشارد سون). وأن القيمة التقريبيه للبعد الفراكتالى تدل على مدى تعقيد الفراكتال وليس على ملامحه الظاهرية أو كبره أو صغره. وقد توصلنا إلى أن البعد الفراكتالى لمنحنيات الفراكتال تكون ما بين ١، ٢وهذا يجعلنا نتوقع أن البعد الفراكتالى لأسطح الفراكتال تقع ما بين ٢، ٣.

وعرفنا أنه بالنسبه للأشكال البسيطه المألوفة (مثل القطعة المستقيمه ـ المربع...) يكون بعدها التوبولوجى d مساويًا لبعدها الفراكتالى (أو بعد الصندوق) D. أما

الأشكال المعقدة مثل الفراكتال فيكون بُعدها الفراكتالى D أكبر من بعدها التوبولوجى d. وهذا ما دعا ماندلبروت إلى تعريف الفراكتال بأنه الشكل الذى بُعده الفراكتالى أكبر من بعده التوبولوجى. وفى الواقع البعد الفراكتالى يُعد مفهومًا حديثًا نسبيًا وليس جديدًا أو معاصراُ فهو يرجع إلى أفكار «هاوسدورف» فى أوائل التسعينات. ولكن الجديد فيه أنه الأكثر لياقه most fit للتعبير عن مستوى تعقد الفراكتال. ومن مزاياه فى هذا الصدد تعدد الطرق البسيطة فى حسابه.

هل للبعد الفراكتالى دلالات أخرى. هذا ما سوف نتعرض له فى البند التالى:

٤ - ٤ - الأبعاد الفراكتالية ودلالتها فى فراكتالات الطبيعه. والفن، والرياضيات

كما أشرنا سابقًا يُعد البعد الفراكتالىD خاصية فى توصيف الفراكتال حيث يعطى قيمة عدديه أو علاقة كميه لشكل النمط الملحوظ لعدّة مقاييس من التصغير والتكبير، كدالة لتعقيدات (تكسيرات) تركيبه. وبالنسبه للأشكال البسيطه (الإقليديه) فأبعادها تكون بسيطه وأعدادًا صحيحة فالقطعة المستقيمة التى لا تتضمن أى تركيب فراكتال يكون بعدها التوبولوجى ١. والمربع (سطحه) أو (داخليته) يكون بعده التوبولوجى ٢ . أما بالنسبة لشكل (نمط) منحنى الفراكتال الذى يجعل تركيبه المتكرر (المتشابه ذاتيا) يشغل حيزًا، فهذا يجعل بُعده الفراكتالى يقع ما بين ١، ٢. وكلما زاد تعقيد compexity وثراء التركيب المتكرر اقترب بُعده من ٢.

وقد وجد أنه بالنسبة لفراكتالات فى الطبيعه: مثل الأشجار ـ الجبال ـ السحب، وفى المحاكات الكمبيوتريه الرياضية. وفى لوحة پولاك «الحصاد» أن البعد الفراكتالى D لها يتراوح ما بين ٢و ١، ١,٥ مهما كان أصل الشكل (النمط وأى جزء فيه) فمثلاً البعد الفراكتالى للسحاب ١,٣، والبعد الفراكتالى للشاطئ الانجليزى ≃ ١,٢٦.

أما بالنسبة للوحات پولاك[٥] الفنية الأخرى التى قدمها (١٩٤٥ - ١٩٥٢) فإن بعدها الفراكتالى (التى تمت حسابها حديثًا) وُجد أنها تتراوح ما بين ١,٢١، ١,٧.

ووصل البعد الفراكتالى لأحد لوحاته ٩ , ١ . وهي لوحة دمرها پولاك بنفسه. أما بالنسبة للفراكتالات الرياضية المضبوطه لمنحنيات (أو شكل متعرج من قطع مستقيمه) فهى كما بينا فى البند السابق فإن البعد الفراكتالى لها يتراوح ما بين ٢٦ , ١، ٢ . فكما توصلنا إليه البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرقائق الثلج (أو بالأحرى منحنى ڤون كوخ لرقائق الثلج) ≅ ٢٦ , ١ والبعد الفراكتالى لمنحنى سيربينسكى ≈ ٥٨ , ١، والبعد الفراكتالى لمنحنى بينو يتقارب من ٢.

وعمومًا فقد تبين أن الأفراد يفضلون الأعمال الفنية للوحات ذات بعد فراكتالى قليل أو متوسط فهى تكون مريحه لهم. أما زيادة التعقيد فى اللوحات ذات قيم بُعد فراكتالى عالى فهى تزيد الاثارة وتشد وتشغل المشاهدين بنشاط أكثر من مشاهدةّ اللوحات ذات قيم متوسطة للبعد الفراكتالى. ويصبحوا أكثر انجذابًا واهتمامًا بالفنان وإبداعه.

وكما للبعد الفراكتالى دلالة فى الفن وتذوقه، فله أيضًا أهمية فى الچيولوچيا فهو يصف انبعاجات سطح الأرض. وله أهيمة ودلالة كذلك فى علم المتيالورچى والصناعة. فقد وجد أن البعد الكسرى لسطح المعدن مهما كانت خشونته يعطى فكرة عن مدى تحلل الكتل الصخرية. فمثلاً تحلل جبل إلى جبل صخرى فى حجم السيارة يكون بعده الفراكتالى ٧ , ٢.

وعلى ذلك فالبعد الفراكتالى من الخصائص الأساسية للفراكتال التى تعطى قيمًا جمالية وقيمًا نفعيه تطبيقيه فى شتى المجالات.

تعقيب (٤): تضمينات implications وانعكاسات حول تنميه الابتكار التدريس لمعلم الرياضيات.

والآن بعد قراءتك ودراستك لهذا الفصل حاول إختيار أى جزء منه ثم فكر فى تعليق عليه أو إنعكاساتك عليه.

لعللك فطننت أننى أردت أن أدربك على إختيار فكرة أو شيء رياضى مثلما عمل ماندلبروت عند إختياره بُعد الصندوق لها وسدورف ليعبر عن البعد الفراكتالى وحسابه.

فى الـواقع أردت أن استـخدم مـدخلى فـى عرض هذا الـفصـل لتنـمية الـتعـلم الاستقلالى autonomous learning كأحد أهدافى.

والتعلم الاستقلالى تكوين أو تركيـب يشمل مركبات أهمها: الاختيار choice ـ تحمل مسؤولية الـتعلم ـ التحكم ـ الثقة ـ الابتـكار. والبتالى تنمية التعـلم الاستقلالى يؤدى إلى تنمية الابتكار التدريسى لمعلم الرياضيات.

إختيارك لأى شيء ينم عن تفضيل ذاتى له ويتضمن الاختيار نواحى شعوريه ولا شعـوريه. وقد يـكون تلقـائيًا وقـد يكون بـعد تمحص ودراسـة أو تردد أو بعـد أخذ استشـاره أو رأى من الآخرين. إلا أنه فـى النهاية أنـت صاحب قرار الإختـيار سواء اختيار ملبـس أو زوجه أو كتاب أو... قراءة معينه أو دراسة معـينة، أو هواية) وذلك بحرية Freedom.

ما تخـتاره هو تفضـيل يعكـس الميل والمشاعـر والإحساس بالقـيمة. الإقتـناع بما تختاره يمـثل تزاوج الجانب العقـلى والوجدانى لـيكشف السر وراء الإختيـار ليكون أكثر لياقه Fit أو ما نقوله فى الرياضيات الاختيار الأمثل optimization. والواقـع أننى أفضـل التعبير الرياضـى عن عملية التوصـل إلى الأمثل optimization عـــن التعبير بمستوى الجودة أو التميز التى ابـتدأت تدخل فى وصف النواحى التربوية التى تتطلع لمستوى عالى لها.

ما تخـتاره تعتز به لأنـك تضفى عليـه بعض الحياة منـك عليه، كأنه جـزء حيوى منك. الإخـتيار الأمثل يحـرك مثيرات وسلـوكيات لأعمال اسـتقلاليه تكـون مصدر الهام وإبتكار.

وعلى ذلك عملت علـى أن يكون عملية اختيار ماندلبروت لـبعد الصندوق الذى قدمه هـاوسدورف، والذى يعد حـديثًا نسبيـا، ليكون أكثـر لياقه أو بالأحـرى يكون الاختيار الأمثل للبعد الفراكتالى هو أسلوبى لتنمية استقلالية التعلم لك. أو بالأحرى للمعلم كـدافع للإبتكار التدريسى لـه وعلى ذلك فالاساليب التى ركـزت عليها من خلال عرض محتوى هذا الفصل لتنمية الابتكار التدريس للقارئ (المعلم) منها:

(١) عمليـة التعميم فى الـرياضيات، الحديثه أو العـصرية ليست فقـط الوصول إلى قانون عام ولكن إلى قـانون أعم من قانون سابق يجعله حالة خـاصة منه. فمثلاً للتـوصل إلى (أو المساعـدة على اكتشاف) الـبعد التوپـولوچى d مـن خــلايـا (أشكال بسيطة: قطع مستقيمه - مربعات - مكعبات.. مكعبات عليا) فى فراغ إقـليـدى مـا $R^1, R^2 \ldots R^n$ باستـخدام الأنماط العددية والـهندسية هـو أسلوب البراجماتيين الرياضيين فى اكتشاف فكرة رياضية مثلهم مثل علماء العلوم.

أما استخدام البعـد التوپولوچى d الذى يكون عددًا صحيحًا لـلأشكال البسيطة ليكون مصدر إلهـام لبعد الصندوق D كتعميم للبـعد التوپولوچى d حيـث لا يكـون البـعد D بالضرورة عددًا صـحيحا، بل فى الغالب عددًا كـسريًا، هذا هو ابتكار رياضى لها وسدورف.

وقد حاولت أن أجعلك (أيها القارئ المعلم) أن تعيش خبرة اكتشاف d وعملية ابتكار D.

ولعلك تتسـاءل لماذا لا يكون قانون D هو تعميم رياضى تقـليدى ولكنه يكون تعميمًا مميزًا للرياضيات الحديثة والجديدة.

وللأجابه عـلى هذا التساؤل تعـالى نسترجع أبسط الـتعميمات فى الـرياضيات الحديثة المتعلقة بالأعداد أو بالهندسة.

أ- اختراع الإنسان الـقديم أعداد العد ١، ٢، ٣... بمناظرة مجمـوعة من الحصى بمجموعة من الماشية... ثم وجدها غير مناسـبه لقياس مكيال للبن.. مثلاً فاخترع الأعداد الكسرية.. ثم وجد أنه للوصول مـن مكان إلى مكان لا يكفيه أن يعرف المسافه ولكنه يجب أن يعرف الاتجاه فإخترع الأعداد الموجهة...

وتعتبـر مجموعة الأعداد الصـحيحه ليست مـجرد إضافه أعداد سالبـة والصفر على أعـداد العد، فأعـداد العد تختـلف كل الاختـلاف عن الأعداد الموجـبه فى نوعها، فهى مجمـوعة جديدة تكون اعداد العد متشاكله (مـناظره) مع مجموعة

الأعداد الموجبه التى هى مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحه فهذا هو ما نقصده بالتعميم الحديث.

أى اختراع تركيب جديد يكون التركيب القديم متشاكل مع جزء منه. ولو أن الأعداد الصحيحة تولدت من خلال أعداد العد، ولكننا اعتبرناها تعميما جديداً، أو بالأحرى تعميمًا لأعداد العد وهكذا بالنسبة لبعض النظم العددية... فنظام الأعداد المركبه هو تركيب جديد يكون مجموعة الأعداد الحقيقة متشاكلٌ (مناظرا) مع مجموعة جزئية للأعداد المركبه على صورة أ+ صفر × ت أى $z = a + o \times i$. أيضًا نبعت الهندسة الآفينه من دراسة الهندسة الاقليدية ولكنها استقلت عنها لتكون الهندسة الاقليدية متشاكله (مناظره) لمجموعة جزئيه من الهندسة الآفينه، وهكذا.. تكون الهندسة الاسقاطية تعميما للهندسة الآفينية بمعنى أن الهندسية الآفنية تتشاكل مع مجموعة جزئية من الهندسة الاسقاطيه... والتوپولوچى تعميم للهندسة الاسقاطيه وهكذا...

وعلى ذلك بالرغم من أن بعد الصندوق أُشتق عن طريق البعد التوپولوچى d إلا أنه أعتبر تعميمًا جديدًا للبعد d - كما إعتبرنا نظام الاعداد الصحيحه تعميمًا جديدًا لنظام أعداد العد. أو إعتبار التوپولوچى تعميما جديدًا للهندسة الإسقاطيه...

(٢) بالنسبة لاختيار ماندلبروت لبعد الصندوق D ليحسب به البعد الفراكتالى فهو كما ذكرت يُجسد استقلالية التعلم التى حفزته إلى إيجاد البعد الفراكتالى لفراكتالات مختلفه ليتأكد من مستواه الأمثل ومستوى لياقته فى فاعلية تطبيقه فى هندسته. وكان هذا مصدرًا لإلهامه ببلورة هندسته العصرية. وعلى أساس تقديره بسلامة إختياره للبعد D وتأكده من مستواه الأمثل فقد عرَف الفراكتال على أساس بعده الفراكتالى (الأكبر من بعده التوپولوچى ـ كما ذكرنا). وهذا ما حاولت إبرازه من خلال العرض فى هذا الفصل لتنمية استقلالية التعلم التى جعلت ماندلبروت يعزز اختياره بابتكارات ومسميات جديدة فى هندسته.

(٣) قدمت إيجاد البُعد الفراكالى باستخدام الطريقة التحليلية لفراكتالات متولدة عن طريق المولد generetor. وذلك بعد count القطع المستقيم المكونه للمولد وتحديد طول كل منها ∈، كتبسيط فى الإجراءات الرياضية ثم قدمت تساؤلات للبحث عن تفسير صحة هذه الطريقة المبسطة. وذلك لإستثارة تفكيرك الرياضى فى النواحى المنطقية كرياضى ينتمى لمدرسة الرياضيين المنطقيين. وللتغذية الراجعه feedback والتعزيز قمت بتقديم ارشاد للبرهان وفكرة عنه والبرهنة مرات متتالية متشابهة كل منها تخص تطبيق البرهان على إيجاد البعد الفراكتالى لفراكتال ما. وأيضًا لتدريبك على استخدام الصرامه الرياضية والدآبه وعدم التسليم بصحة ما تقرأة وبهذا ينمى مستوى التقويم لك وهو من المستويات العليا من التفكير. هذا من جهة ومن جهة أخرى فهذا نوع من التحقيق الذى يعتبر أحد خطوات أى اكتشاف أو إبتكار (إختراع) رياضى أنميه فيك.

(٤) تقديم البند الأخير، دلالة البعد الفراكتالى فى الفن والطبيعة لم يكن فقط بهدف معرفة الدلالة التطبيقيه لهذا المفهوم أو لعمل روابط connections فى المجالات المختلفة، ولكن لتقديم معلومات خفيفة مشوقة. وذلك بقصد تنمية الميل والحب للأفكار الرياضية الجديدة العصرية، من جهة، ومن جهة أخرى لتعويدك أو تشجيعك على عمل إجراء مماثل للترويح عن النشاط العقلى بعد المجهود العقلى المصاحب للأعمال الرياضية الصارمة (المنطقية) أو فى استيعاب الأفكار الجديدة على تلاميذك.

- أما عن التحبيب فى الأفكار الرياضية فهو يأتى عن طريق أن يكون لها أثر فى القلب. أو بالأحرى أثر يزين القلب كما تُزين السماء بزينة الكواكب ويحضرنى فى هذا الصدد قوله سبحانه وتعالى ﴿..حَبَّبَ إِلَيْكُمُ الإِيمَانَ وَزَيَّنَهُ فِي قُلُوبِكُم..﴾ ﴿إِنَّا زَيَّنَّا السَّمَاءَ الدُّنْيَا بِزِينَةٍ الْكَوَاكِبِ﴾.

والآن حاول أن تزيد عن النقاط السابقة نقاطًا أخرى مع كتابة انعكاساتك عنها فى مذكراتك. ولاحظ العائد على تدريسك الابتكارى منها.

المراجع

١ - جيمس كلايك (ترجمة على يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولية تصنع علمًا جديدًا» - القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.

٢ - أ.د/ نظله حسن أحمد خضر (٢٠٠١): «أصول تدريس الرياضيات» - القاهرة - عالم الكتب. ط/ ١٠.

٣- أ.د/ نظله حسن أحمد خضر (١٩٨٤): «دراسات تربوية رائدة فى الرياضيات» - القاهرة - عالم الكتب.

4- Drazin, p.G (1993) "Non linear systems" cambridge Univ press p 130, chap 4.

5- Taylor, R.P (2000). "Order in pollacks chaos". Scientific American - Newyork - Uol 287 No 6, Decembr zooz.

6- Thomas, D.A (2002): "Modern. Geometry" Us - Brooks/ cok - Thomson learning.

الفصل الخامس

مزيد حول توليد الفراكتالات

مزيد حول توليد الفراكتالات

مقدمة:

رأينا فى الفصل الثالث إمكانية توليد فراكتالات رياضية (مضبوطه) عن طريق المولد generator بالتكرار المرحلى لتعاقب قطع مستقيمه بأسلوب معين... مثل بعض الفراكتالات المشهورة مثل فراكتال كوخ لرقائق الثلج، منحنى بينو.

كما رأينا فراكتالات مولدهٌ عن طريق عملية تحويل هندسى يحددها التكرار المرحلى كما فى حالة فراكتال چوان سيربينسكى وبساط سيربينسكى. كما أشرنا إلى مجموعة من التحويلات الهندسيه عند توليد فراكتال شجرة رياضيه - قمتها أيضًا يولد فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج. نحاول فى هذا الفصل إلقاء مزيدًا من الضوء على هذه المجموعة من التحويلات الهندسية والتى تسمى بأنظمة الدوال المتكررة مرحليًا (IFS) Iterated function systems وتطبيقها فى توليد بعض فراكتالات مشهورة وفراكتالات تحاكى فراكتالات الطبيعه. وفى الواقع تقع الأهمية التطبيقيه التى تعكس النواحى النفعيه لأنظمة الدوال المتكررة مرحليًا (IFS) فى استخدامها لعمل المناظر الطبيعيه فى خلفيات أفلام الكارتون وفى محاكاة الظواهر الطبيعية التى تقتصد بصورة كبيرة جدًا التخزين فى ذاكرة الكمبيوتر والتى يستحيل إيجاد مكان لتخزينها فى حالة تسجيل الظواهر الطبيعية.

كما نشير إلى فراكتالات تسمى الجاذب الغريب Strange attractor يرتبط تكوينها بالهيولية (أو جوازا الفوضى) chaos- حيث يرتبط فيها النظام واللانظام. فنقدم نبذة عن أشهر وأول جاذب غريب اكتشفه لورنز معروف بإسمه مرتبط تكوينه بتصرفات (ديناميكيات) حلول معادلات تفاضيلية. كما نشير إلى توليد أشهر

وأجمل وأعقد فراكتال يعتبر أيضًا جاذب غـريب. وهو فراكتال مجموعة ماندلبروت عن طريق تصرفات دالة تربيعية مركبة من الـدرجة الثانية توصل إليها ماندلبروت من استثارته ودراسته لمجموعات چوليا. ثم نقـدم فراكتالات متولدة من استخدام التكرار المرحلى فى حل معـادلات مركبة (فى المستوى المركب) من الدرجة الـثالثة والخامسة لها طـابع جمالى فـريد. ثم نختـتم الفصل بـأعمال خفيـفة لتجديـد النشاط العـقلى والترويح العقلى تخص فراكتالات فـنية للفنان المهندس إيشر Escher وأخرى نـاتجه من تكشيلات تستخدم فى ملأ سطح ما (التبليط Tiling).

٥-١- توليد فراكتالات عن طريق أنظمه الدوال المتكررة مرحليًا (IFS).

لما كان مفهوم التشابه الذاتى للفراكتال يتضمن التصغير (أو التكبير) على مقاييس متعددة Scales، فهذا يوحى باستخدام تحويلات هنـدسيه تقوم بالتصغير، مثل تحويل التشابه (بمركز معين ومعامل تكبير أو تصغير magnification).

تحويل التشابه الذى يقوم بالتصغير (بمعامل $r<1$) ينتمى لمجموعـة من التحويلات الهنـدسية أو الدوال تسـمى دوال إنكمـاشية أو انقبـاضية contraction mappings. وعنـد تطبيـقها تكـون أى مسافة بـين نقطـتين أقل من المـسافة الأصلـية أو تساويـها بالـضرب فى كسـر بين ٠، ١). قد تـسمى الـدالة الإنكمـاشية بـالتحـويل الهنـدسى (التـشابه بمعـامل تصغـير) dialation ونـرمـز لـه D. إذا أخذنـا دالة إنكـماشـية f واستخدمنا التكرار المـرحلى، فقيمة الدالة f(x) فى التكـرار المرحلى الأول n_1 تصـير الداخل فى التـكرار المرحلى التالى الـذى ينتج ff(x)...وهكذا تـسمى قيم الـدالة فى التكرارات المرحلية . * ....f(x), ff(x), fff(x) بقيم التكرار المرحلية iterates.

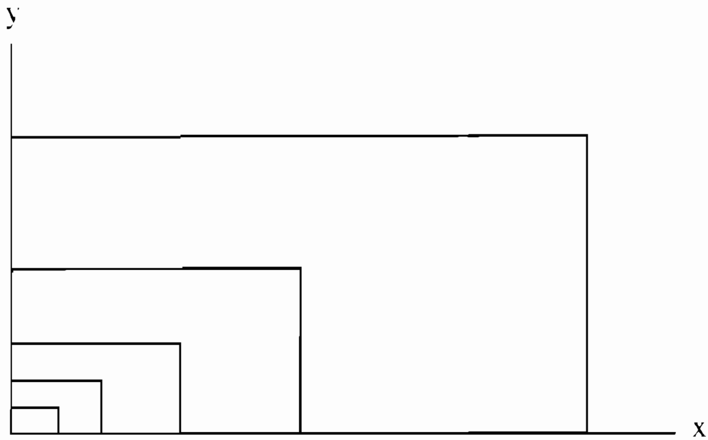
ويمكن استخدام دالة انقباضية (انكماشية) واحدة أو نظام من عدّة دوال إنكماشية يحددها التكرار المرحلى فى توليد فراكتالات كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال ١: بـأخذ المستـطيل فى الربـع الأول (شكل٣٥)، وأخذ الـدالة الانكمـاشية (التحـويل الهندسى) تـشابه مركزه نقـطة الأصل ومعامـله $\frac{١}{٢}$ الذى يحول النـقطة

(س، ص،١) إلى النقطة ($\frac{١}{٢}$ س، $\frac{١}{٢}$ ص،١). أى التحويل الهندسى (الخطى) الذى مصفوفته.

$$D=\begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- لاحظ البعد الثالث ١ لاعتبار التحويل الهندسى تحويل آفينى.



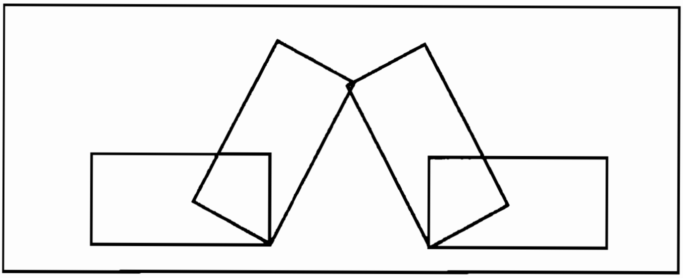
شكل (٣٥)

هنا التكرارات المرحلية التى كونت المستطيلات تبين التكرارات المرحلية لنظام دوال مرحلية التكرار IFS. ونلاحظ أنه فى التكرار المرحلى الأول نتج مستطيل أصغر طوله $\frac{١}{٢}$ المستطيل الأصلى الكبير وعرضه $\frac{١}{٢}$ عرض المستطيل الأصلى. ثم أخذنا هذا الناتج (الخارج) output كداخل input فى التكرار المرحلى الثانى لينتج مستطيل أصغر بعديه نصف بعدى المستطيل الخارج فى التكرار الأول... وهكذا كل مستطيل أصغر هو صورة للمستطيل الأكبر منه بنفس الدالة (أو التحويل الهندسى) الانكماشية D.

أى أن الشكل (٣٥) نتج من التكرار المرحلى للدالة D أربعة مرات بدءاً بأكبر مستطيل (S_O) نبتدأ به كما كنا نفعل باستخدام المولد بالفصل الثالث.

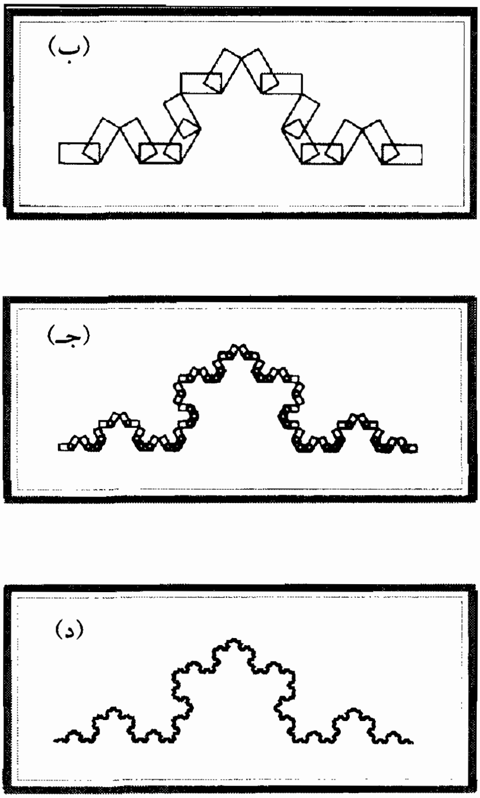
مثال ٢: تأمل شكل (٣٦) أ. المستطيل الكبير أصبح فى التكرار المرحلى الأول أربع مستطيلات أصغر. فهل يمكنك تخمين كم تحويل هندسى (أو دالة انكماشية)

استخدم؟ وهل يمكنك أن تتصور الشكل الذى يـتكون عندما يقترب التكرار المرحلى إلى ∞ ؟ .



شكل (٣٥) أ

التخمين الـصائب هو استخدام أربعة تحـويلات هندسية (آفينـية ـ خطية) أو دوال انكماشية. كل تحويل يحول المـستطيل الكبير (كداخل input) إلى أحد المسـتطيلات الأصغر (كخارجoutput). أى أن كل مسـتطـيل صـغيـر من المـسـتـطيـلات الأربعة هـو صورة للمسـتطيل الكـبير تحت أحـد التحويـلات المختلفـة وكل التحويلات الأربع تطـبق مع بعض فى كل تكرار.



شكل (٣٥) ب ، جـ ، د

شــكـل (٣٥)ب، جــ، د يـبـين التكــرارات المتعاقـبة (الثانـية والثالـثة والـرابـعـة n_2, n_3, n_4) فـى التـكـرار الأول (٣٥)أ نتج أربـعة مستـطيلات، وفى التكـرار الثانى نتج ١٢ مسـتطيلاً أصغـر... وهكذا نجـد أنه كـلما كـبر التـكرار كبـراً كبيراً كـلما اقـتربـنا من شكـل فراكتـال منحنـى كوخ لرقـائق الثلج.

أى أن نظام الدوال المتكررة مرحلياً IFSيحتوى على أربعة دوال انكماشية (أو تحويلات هندسية خطية(آفينية)) تُطبق مع بعضها فى كل تكرار مرحلى.

وهذا يذكرنا أيضا بالتكرارات المرحلية والمولد فى الفصل الثالث.

عموما أرجو أن يكون تخمينك صائباً فى التوصل إلى عدد التحويلات المستخدمة والتنبؤ بالتوصل إلى منحنى كوخ لرقائق الثلج عن طريقها.

والواقع أنه يمكن توليد عديد من الفراكتالات (المضبوطة) عن طريق نظم الدوال المتكررة مرحليا IFS. وهنا نركز أن تكون مجموعة الدوال هنا هى دوال أو تحويلات هندسية) انكماشية وخطية (آفينية) ـ بمعنى أن تكون صور القطع المستقيمة أصغر وأيضاً مستقيمة.

والآن إذا كان لديك فكرة عمل برامج كمبيوترية بلغات سهلة فنجد أن شكل (٣٥) يمكن إنتاجه بعمل برنامج بلغة اللوجو يحتوى على تقارير قليلة تحدد التطبيق النظامى للأربعة دوال (تحويلات هندسية) فى IFS لكل تكرار مرحلى. ونتساءل هل يكون نظام الدوال المتكررة مرحليا IFS لتوليد فراكتالات تحاكى فراكتالات الطبيعة بهذا الأسلوب النظامى فى تطبيق مجموعة دواله؟ هذا ما سوف نعرف إجابته فى البند التالى.

٥-٢: توليد فراكتالات (تحاكى فراكتالات الطبيعة) عن طريق IFS

تعال نتذكر عند رش برادة حديد على سطح زجاجى أفقى عشوائيا تجد البرادة فى أوضاع غير منظمة (ولا نظامية). وعند وضع مغناطيس أسفل السطح نجد البرادة تبدأ فى تنظيم نفسها بالشكل النظامى الذى نعرفه (ويمثل خطوط القوى المغناطيسية). بالمثل فى توليد الفراكتالات التى تحاكى فراكتالات الطبيعة بالكمبيوتر نجد أنه يظهر على الشاشة رش من النقط العشوائية اللانظامية ثم بالتدريج يبرز من خلالها شكل معين يتضح بالتدريج.. هنا لا يوجد مغناطيس كما فى حالة برادة الحديد، ولكن مؤثرات أو نظام من الدوال المتكررة مرحليا IFS ينتج أشكال فراكتال من بين نقط لا نظام فيها.

عملية وجود نظام من بين اللانظام أو ارتباط النظام باللانظام هو عملية للهيوليه (أو جوازًا الفوضى) Chaos.

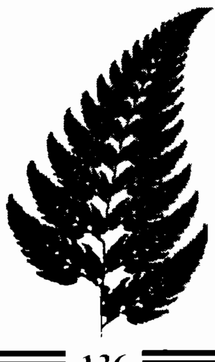
وهذا الأسلوب فى تكوين الفراكتال يختلف عن الأسلوب السابق لتكوين الفراكتال الرياضى المضبوط (فى مثال ١ ، ٢) الذى يبدأ بشكل نظامى ثم يتحول إلى شكل آخر يصير أدق وأدق حتى يقترب من الفراكتال. أما هنا فالفراكتال يبرز من بين نقط عشوائيه ويتضح شيئًا فشيئًا. وهذا يدفعنا أن نتوقع أن يكون تطبيق الدوال فى نظام الدوال المتكررة مرحليًا بأسلوب غير نظامى أو بالأحرى بطريقة عشوائية لتوليد فراكتالات تحاكى الطبيعه. وأن استخدام الكمبيوتر لإظهارها يستلزم برمجيات للهيولية (الفوضى) chaos. وهذا ما يتضح بعد المثالين التاليين.

مثال (٣): يمكن توليد الفراكتال الممثل لريشة طائر شكل (٣٦) عن طريق نظام الدوال المرحلية التكرار IFS المتكون من أربعة دوال انكماشية (تحويلات هندسية آفينية خطيه) dialation مصفوفاتها:

$$\text{Map 1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & .16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Map 2}=\begin{bmatrix} .85 & .04 & 0 \\ .04 & .85 & 1.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Map 3}=\begin{bmatrix} .20 & -.26 & 0 \\ .23 & .22 & 1.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Map 4}=\begin{bmatrix} -.15 & -.28 & 0 \\ .26 & .24 & .44 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مع استخدام برمجيه هيوليه Chaos

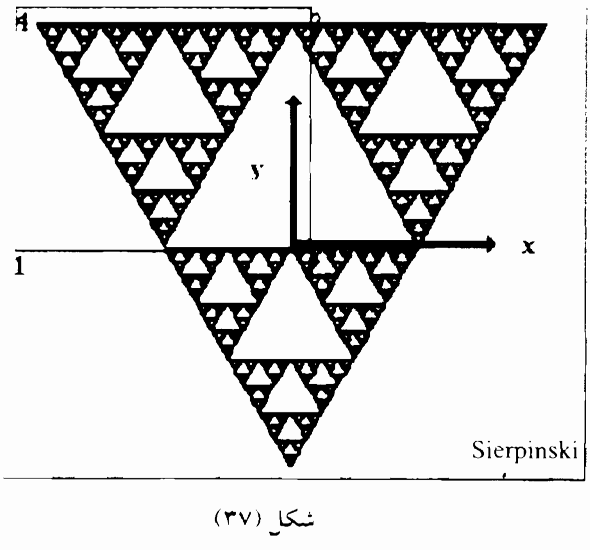


شكل (٣٦)

هذه الـدوال الأربعة تطـبق دفعة واحـدة ولكن الاختـيار لكل دالـه يكون إختـيار عشوائى.

مثال (٤) يمكـن توليد فراكتـال چوان سيربينسـكى (شكل ٣٧) أيضًا مـن اختيار عشوائى لـلدوال الثلاثة فى نـظام دوال مرحلية الـتكرار IFS بالاسـتعانه بـبرمجـيه الهيوليه chaos مصفوفات الدوال الثلاثة:

$$\text{Map 1}=\begin{bmatrix} .5 & .0 & -1 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Map 2}=\begin{bmatrix} .5 & .0 & 1 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Map 3}=\begin{bmatrix} .5 & .0 & 1 \\ 0 & .5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شكل (٣٧)

ويتضح التطبيـق العشوائى للدوال فى IFS من الإجراءات (الخوارزميات) التالية التى تستخدم فى تكوين (فراكتال) چوان سيربينسكى شكل (٣٧).

١- كنقطة ابتدائيه نختار عشوائيا مركز أحد هذه الدوال ونمثلها فى المستوى.

٢- نختار عشوائيا أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطة الابتدائية لإنتاج النقطة الثانية.

٣- نختار عشوائيا أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطه الثانية لإنتاج النقطة الثالثة.

٤- نختار عشوائيا أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطة الثالثة لإنتاج النقطة الرابعة.

٥- الاستمرار فى التكرار المرحلى حتى يوجد نقط كافية (لصور النقط بهذه الدوال) حتى تظهر ملامح الفراكتال.

ومثل هذه الإجراءات (بالنسبة للاربع دوال للنظام IFS فى المثال (٣) لتوليد الريشة. وعمومًا توليد شكل من خلال اللانظام (أو بالأحرى عن طريق عملية الهيولية chaos) فإننا نسمى هذا الشكل الناتج بالجاذب attractor. عندما يكون الشكل بسيط اقليدى.. كمربع أو نقطة مثلاً....

أما إذا كان شكل الجاذب هو فراكتال (أو شكل غير اقليدى) فإننا نسميه بالجاذب الغريب strange attractor.

وعلى ذلك فالفراكتالات التى تولدت فى المثالية السابقين عن طريق عمليات الهيولية (التى يرتبط فيها النظام مع اللاتظام) chaos للريشة أو مثلث چوان سيربينسكى يُسمى كل منها جاذب غريب strange attractor. والواقع أنه إذا كانت كل دالة فى IFS هى دالة إنكماشيه فإن الجاذب الغريب يكون فراكتال كما فى المثالين السابقين عمومًا عندما يتولد الجاذب الغريب بواسطة الكمبيوتر فإنه يظهر على الشاشة فى البداية رش spray من النقط العشوائية ثم يبرز تدريجيا من خلالها الفراكتال (أى الجاذب الغريب). فالجاذب الغريب شكل يصف السلوك طويل المدى لنظام هيولولى (أبو بالأحرى فوضوى) chaotic.

ولعـل أول جاذب غريب اكـتشف منـذ مدة قبل اخـتراع هندسـة الفراكتـال كان جاذب لورنز Lorenz attractor، نقدمه فى البند التالى.

٣-٥- جاذب لورنز Lorenz:

ابتدأ إكتشاف الجاذب الغريب فى الستينيات على يد عالم الأرصاد الجويه -mete orologist إدوارد لـورنـز Edward Lorenz. وقد كان عاشـقًا للرياضيـات ومغرمًا بالألغاز الريـاضية والتحدى لحلها. وقد اكـتشف فى عمله أن الطقس لـغزًا أعقد من كل ما واجهه من الغاز رياضية. كانت المشكلـة هى التنبؤ بالطقس، حيث كان علماء الطقس يمكنهم التنبؤ به لعدَّة أيام فقط وليس لفترات طويله، ولكى يجيب لورنز على مشكلة لماذا يكون الطقس غير قابل للتنبؤ وضع إثنتا عشرة معادلة غير خطية كنموذج رياضى للطقس تتضمن الحرارة ونسبة الـرطوبة سرعة الرياح.. ثم بسط النموذج إلى ثلاثة معـادلات تفاضيله. وقد كان مـتأكدًا أن نموذجه (لتيارات) الحـمل سوف يؤدى إلى إمكانيته التنبؤ طويل المدى للطقـس. وأدخل معادلاته فى الكمبيوتر. ثم بالتكرار المرحلى أدخل مخـرجات الدورة السابقة؛ فإذا بالنـتائج تختلف إختلافًا كـبيرًا، فكان هذه لغزًا محيرًا له.

إذ كـيف يـكون الاخـتلاف الـطفـيـف جدًا فـى المدخـلات يؤدى إلـي كل هـذا الاختلاف الخطير.

وقدم لورنز ١٩٦٣ تلك الظاهرة بمسمى الحساسية للأحوال الابتدائية Sensitivty to initial conditions، وهى تظهر عندما يُحدثُ تغيير صغير جدًا فى ظرف (حالة) ما إلى تغـيير كبير لا يمكن الـتبؤ به. وهذه الظاهرة تـعرف بظاهرة الفراشة فـى نظرية الهيولية (أو جوازًا الفوضى) chaos. وظاهرة الفراشة مؤداها أن إهتزاز جناح فراشة يعمل إضطرابًـا طفيفًا فى الهواء يمكن أن يـتضاعف تضاعفًا هائلاً عـلى مدى الوقت والمكان إلى الحد الذى يحدث عاصفة فظيعة فى مكان للجانب الآخر فى هذا العالم. هذا الـلانظـام disorder الناتج كان الشـرارة فى خلق نظرية الهـيولية chaos الـتـى استطاعت تفسير ظـواهر طبيعيه كان يظن أنها فوضى أو عشوائـية، ولكنها من حالة

النظام إلى اللانظام لأسباب تتناولها النظرية بالتحليل على أساس أن كل فوضى chaos لا نظام ولكن ليس لكل لا نظام فوضى.

وبنظرية الهيولية حدثت ثورة علمية جديدة جعلت من النظرية النسبية نظرية تقليديه، ولها تطبيقات فى تقدم معظم العلوم والتكنولوچيا. ومن المشوق أن جيمس جلايك فى كتابه «الهيولية تصنع علمًا جديدًا (١٩٨٧)» قدم مقولة شعرية قديمه فى مقدمته تقول:

For the want of a nail the shoe was lost,
For the want of a shoe the horse was lost,
For the want of a horse the rider was lost,
For the want of a rider the battle was lost,
For the want of a battle the kingdom was lost
And all for the want of a horseshoe - nail.

وهى تشير إلى أنه بسبب ضياع مسمار واحد فقط تحدث أحداث تؤدى إلى أن كل المملكه (والبلد) تنهار فى معركة تخسرها وذلك للتمهيد لفكرة الحساسيه للأحوال الإبتدائية.

وفى الواقع الحساسية للأحوال الابتدائية توصل إليها قبل لورنز العالم ماكسويل[١٣] (١٨٧٦) صاحب النظرية الحركية للغازات حيث حذر من مسلمة التحديدية determinism التى تنص على «نفس الأسباب تؤدى إلى نفس النتائج» وينبه إلى أنه يجب ألا نخلطها بالفرضية «الأسباب المتشابهة تؤدى إلى نتائج متشابهة. وذلك لأنه يوجد حالات فى الفيزياء تؤدى تغييرات طفيفة ابتدائيه فيها إلى اختلاف كبير فى الحالة النهائية. كما أشار الرياضى پوانكريه ١٩٠٢ فى كتابه الطريقة والعلم إلى فكرة الحساسية للأحوال الابتدائية (لم تكن بهذا المسمى)، حيث ذكر «أن عدم التبؤ بتقلبات الطقس وسقوط المطر وحتى العواصف لا تبدو أنها راجعة إلى عوامل الصدفة ولكن إلى تغيير ابتدائى بسيط يصل إلى $\frac{١}{١٠}$ درجة».

نرجع ثانية إلى المعـادلات التفاضيله الثلاث التى قدمها لـورنز للدراسة - (متأثرًا بما تعلمه من سولتزمان Saltzman كنموذج ثنائى البعد لتيارات الحمل convection فى طبقة أفقيه لسائل يسخن من أسفل:

$$X^{\cdot} = \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y. \qquad \sigma=10$$

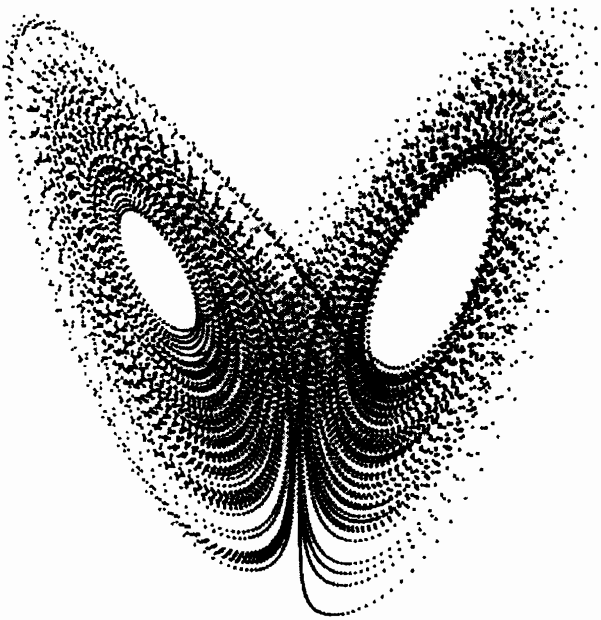
$$Y^{\cdot} = \frac{dy}{dt} = rx - y - zx. \qquad r = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Z^{\cdot} = \frac{dz}{dt} = -bz + xy^{\cdot} \qquad b = 8/3$$

حيـث $Z^{\cdot}, Y^{\cdot}, X^{\cdot}$ هى تفاضل الدوال بالنسبـة للزمن. وقد ذكر لورنز أنه خلال الحسابـات أراد أن يقترب جدًا مـن أحد الحلول. ولهـذا ابتدأ يرجـع لبداية التـكامل باستـخدام قيم بينـيه تظهر علـى شاشة الكمبـيوتر لحالة ابتـدائية initial condition. ولدهشتـه كانت الحسابات الجديدة مـتباعدة diverged تدريجـيًا من النتيـجة الأولى لتصل إلى نتـائج مختلفة فى أربعة يـام للطقس weather. فظـن فى البدايـة أن ذلك يرجع لفشل أجزاء الكمـبيوتر الصلبة hardware. وللتسريع أعطى أوامـر للكمبيوتر للتقريب لثلاثـة أرقام عشرية حيث كانت الحسابات تجرى علـى ٦ ستة أرقام عشريه. فوجد أن الحالة الابتدائيه الأولى التي دخلت البرنامج لم تناظر match القيمة الناتجة عن التكامل الأول. كل فرق صغير ابتدائى توسـع فى كل خطوة تكامل سببة إختلافًا يُعد كبيرًا بعد برهة بين الحلين. ومعنى ذلـك أن التنبؤ بالطقس على المدى الطويل من المستحـيل. وذلك لأن الأخطاء البـسيطة التى لا يمـكن تحاشيها تـتضخم amplified كلما مر الوقـت مما يجعل القيم التى يحصـل عليها بواسطة التكامـلات العديدة غير ذات معنى فى فترة قصيرة من الزمن. ومـن المشوق أن تعرف أن كمبيوتر لورنز الذى كان يستعين به كان عـتيقًا سعته 16 K.b ويمكنه إجراء ٦٠ عمليـة ضرب فى الدقيقة وتكامل نظام من ١٦ معادلة تفاضلية يتطلب ثانية فى كل خطوة التكامل[١٣].

المهـم أن حل نظام المـعادلات التـفاضيلـة الثلاثـة (١) للورنـز أدى للتوصـل إلى أعجب جاذب غريب يتكـون من مسارات حلزونية غير متقاطعة يمـنيًا ويسارًا مُكونة

شكل جناحى فراشة. أنـظر شكل (٣٨) ـ يبرز شيئًا فشيئًا من بـين نقط عشوائية كأي جاذب غريب.



شكل (٣٨) جاذب لورنز الغريب

وللـتوضـيح نقـدم شكل (٣٩) أ، ب، جـ التـى تبين مـسقط جـاذب لورنـز فى المستوى XZ, XY, YZ على الترتيب التى توصل إليها من نتائج التكاملات العددية لنظام لورنز لمعادلاته الثلاثة التفاضيلة (١) عند قيم البارامترات $r=28, \sigma=10, b=8/3$

حيث الزمن t: $30 \le t \le 70$

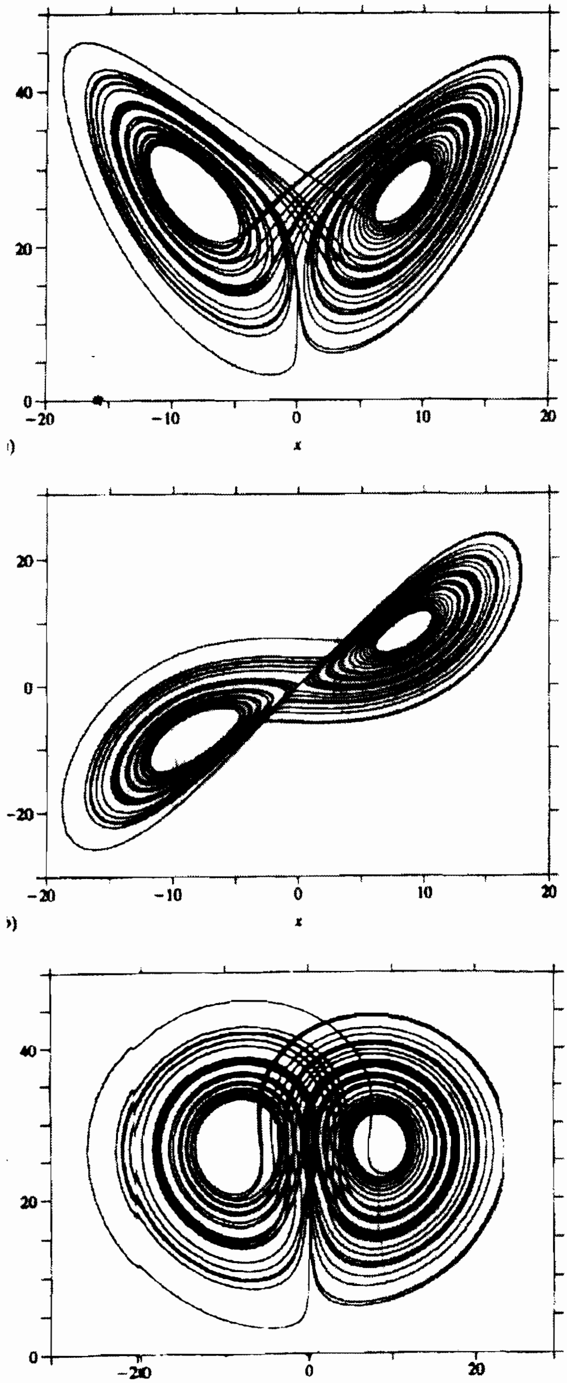
ويمكن التـحقق من أن نقطـتى الاتزان C, C^1 (نقـطة الاتزان فـى نظام المـعادلات التفاضيلة تناظر النقطة الثابتة) هى $C, C^1 = (\pm 8.48 , \pm 8.48)$

فى المستوى XZ, XY

وفى المستوى XZ, XY, YZ على التراتيب

وتكون $C, C^1 = (\pm 8.48, 8.48, 27)$

فى البداية يسـير المسار حول C (الجناح الأول) ويلف حلزونيا خارجًا عدةً مرات حـــول C^1 (الجناح الآخر). ويقتـرب الشكل من الجاذب الغريب فى عـشرين ثانية. فيمكن أن نرى الجاذب الغريـب كعدد من الحلزونات حولC تتبعهـا حلزونات حول C^1 مســارات غير مـتقاطـعة (لأنهـا فى فراغ ذو ثـلاثة أبعـاد). وهكذا يـبدو تعـاقب الحلزونات كتعاقب عشوائى random. والإجراءات الحسابية تبين أن جوار المسارات الغـريبة من الجـاذب الغريب تـتحدد بدالـة قوى power function. وعـلـــى ذلـك فالمسارات التى تبدأ قريبة جدًا من بعض تنفصــل سريعًا مفتقده أى ارتباط فيما بينها. ولذلك فإنه يوجد حـساسية معتمده على الأحوال الابتدائـيه. وإذا أعيدت الحسابات واستخدام كمبـيوتر آخر أو برنامج مختلـف فمن المحتمل أن تتباعد الـنتائج الجديدة عن الموجودة بالـشكل السابق حتى لأن المســارين المحسوبين $X(t)$ سريعًا مـا يكونان غيـر مرتبطـان بالرغم مـن أنهما يـعبران عــن نفس الجاذب. وعـلى ذلك فالمـسارات trajectories التى تتقارب للجاذب تكون لها حـاسيه للأحوال الابتدائيه. والحساسيه فى شـكل (٣٨) تناظـر الحقيـقة بأن المـسارات المبتـدئه عنـد حالتـين قريبتـين تنتـهى بالالتفاف حول جناحى الفراشة.



(أ)

(ب)

جـ

شكل (٣٩) أ ، ب ، جـ

وعمومًا فالجاذب الغريب للورنز له ملامح أخرى. فالمسارات الداخلية تكون كثيفةdense. وهذا يعنى أنه متعدى transitive دناميكيا أو أنه لا يمكن تقطيعيه in-decomposable إلى قطع صغيرة لا متغيره تحت السريان Flow. وله نقط اتزان. وأنه شكل فراكتال.

إرجع مرة ثانية وتأمل جاذب لورنز الغريب. تأمل الناحية الجمالية شكل دقيق ساحر لا تتقاطع طياته (مساراته) ذات اليمين وذات الشمال (لأنه فى فراغ زى ثلاثة أبعاد مثل أستك على حرف 8 برفع الجزء الأوسط للأستك تجده غير متقاطع فى الفراغ الثلاثى). هذا الفراكتال (الجاذب الغريب) وليد لنقط عشوائية لا نظاميه يبرز من خلالها. ولم يُعطى لشكله اسم الجاذب الغريب للورنز إلا بعد سنوات عديدة. واسترجع أنه نتج من حسابات. عدد قليل من معادلات تفاضيلة لاكتشاف سر من أسرار الطبيعه مرتبط بالطقس.

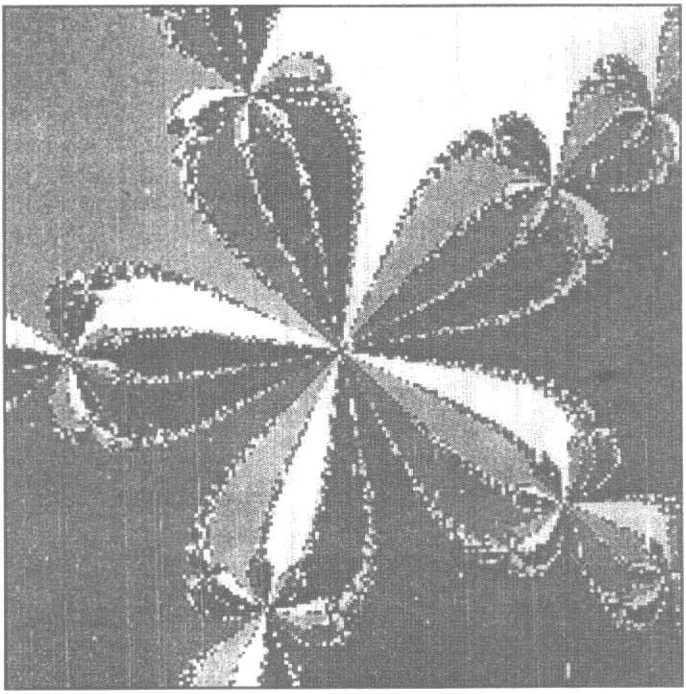
هذا الشكل فتح فيما بعد آفاقًا لدراسات فى الرياضيات والهيولية (الفوضى) chaos والنظم الديناميكية وتكنولوجيا الاتصالات والعلوم المعاصرة. وعمومًا فجاذب لورنز الغريب يعتبر الآن جاذب كلاسيكى وإذا كان جاذب لورنز تولد من خلال حل معادلات تفاضيلة. فهل تتخيل أن حل معادلات بالتكرار المرحلى يمكن أن يولد فراكتالات جاذب غريب؟.... هذا سوف نتناوله فى البند التالى.

٥-٤- حل معادلات (فى المستوى المركب) باستخدام التكرار المرحلى. وتوليد فراكتالات بديعة.

سبق أن أشرنا إلى طريقة نيوتن فى حل المعادلات باستخدام التكرار المرحلى من خلال التوصل إلى تقريبات لحلول مخمنه. وقد وجد أنه عندما تكون الحلول أعدادًا مركبه complex numbers أنه المنطقه المشتركة بين أى حلين تكون على شكل معقد غريب جميل لا يتصوره العقل.. هو شكل فراكتال. فإذا إخترنا أو قمنا بتخمين نقطة قريبة من أحد الحلول فى منطقة الحدود بين الحلول بإستخدام الحاسب فإننا نجد التكرارات المرحلية تعطى نتائج.. عبارة عن نقط تتراقص عشوائيا قبل أن تتقارب

لأحد الحلول عند الحدود مباشرة فى التكرارات اللانـهائية. ومن هذه النقط العشوائية اللانظاميه يبرز فراكتالات تتميز بجمال فريد. وما دامت هذه الفراكتالات تولدت من خلال عمليات هيوليه (أو جوازا فوضويه) chaotic فهى أيضًا جاذب غريب.

هل تتصور أن شـكل (٤٠) نشأت الفراكتالات الخـمسة فيه من إستخـدام طريقة نيوتن فى حل معادلة من الدرجة الخامسة فى المستوى المركب أو بالأحرى من البحث عن القيم الصفريـة للدالة المركبة $Z \to Z^5 - 1$ فى المستـوى المركب complex plane. حيث تشير المقاييس الرمادية المختلفة إلى المناطق التى تُوصل إلى نفس الحل (أو التى عندها تكون الدالة صفر) عندما تكون نقطية البداية (للحل المخمن) فيها.



شكل (٤٠)

تأمل مرَّة ثانية هذا التشكيل البديع للفراكتال فى الشكل السابق... هل هو تشكيل زخرفى؟ هل هو أزهار طبيعيه؟ هل هـو ابداع ليد فنان؟.... لا إنه شكل رياضى قام بعملـه تكرار مرحلى يحـدد عملية إيجاد طريـقة لحل المعادلات.. تعال نـلقى ضوءاً

على هـذه الطريقة وجذورهـا التاريخية – نـرجع إلى المعادلـة المذكورة سابقًا لـعمل التكرار المرحلى

$$س_{ن+1} = س_{ن} - \frac{د(س_{ن})}{دَ(س_{ن})} \quad ، ن = ٠، ١، ٢، ..$$

المولد للمتتابعه $\{س_{ن}\}_{ن=٠}^{\infty}$.

التى تتقارب للجذر ζ .

حيث د:ح ← ح أى $f:R\to R$ (الدالة حقيقية). ζ هى صفر الدالة د أى $f(\zeta)=o$ ، دَ(س ن) هى تـفاضل الدالـة. وأخذ س. (أى Xo) قريـبة مـن الجذر ζ مـع بعـض شروط معينه.

والواقع أن أفـكار نيوتن حـول هذا الشأن (١٦٦٩) كانت أكـثر صوبة وتعـقيداً. وقد قام بتبـسيطها رافسون إلى المعـادلة السابقه فى ٢٠ سنة تـقريبًا أى فى (١٦٩٠). ولذا عـرفت بـطريـقة نـيوتـن ورافسـون Raphson. وقـد يصـنفهـا البـعض بـأنهـا طريقةالممـاس تبعًا لتـفسيرها الهـندسى.. لأن ميل الممـاس عند كل نهايـة صغرى = صفر. ولكن استخدم الصفر بديلا لخوازميات (إجراءات أخرى).

وقد حاول كيـلى بعد مائتى عـام أى فى ١٨٦٩ استخدامها لإيـجاد جذور أعداد مركبة لـدوال مركبه $f: C \to C$ بأخذ العـدد المركـب Z_0 أى $Z_0 \in C$ ، C مجمـوعة الأعداد المركبة واستخدام التكرار المرحلى الذى يحدد القاعدة.

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)}{f'(Zn)}, \; n = o, 1, 2....$$

ثم بحث فـى الشروط التى تجعل المتـتابعه $\{Z_n^\infty\}_{n=0}$ تـتقـارب converges إلـى الجذر. حيـث كان مهتما بـالمناطق التي تـتقارب فيها الـتكرارات المرحليـة إلى الجذر وسمـاها بأحواض جـذب الجذر ζ . وقد استطاع حـل المشكلة عندما كـانت الدالة المركبة f تربيعية (من الدرجة الثانية). ولكنه فشل بالنسبة للدالة التكعيبيه (من الدرجة الثالثة).

فمثلاً بالنسبة للدالة $f(z) = Z^3 - 1$ التى فشلت طريقة نيوتن التى استخدمها كيلى للتقارب لـها صفة من صفات الفـراكتال وهى البعد الفـراكتالى ولأنها تتطـابق (تقع على) مع حدود أحواض الجذب للجذور المركبه: $e^{2k\ n\ m\pi i/3}, k = o, 1, 2$

أى للجذور $e, e^{2\pi i/3}, e^{\pi i/3}$

أى (هـ، هـ$^{\frac{٢}{٣}\text{ط ت}}$، هـ$^{\frac{٤}{٣}\text{ط هـ ت}}$)

وهذه المـناطق (أحـواض الجذب) هى أشكـال فراكتـال بالغـه التعقـد لاحظنـاها بالنـسبة لأشكال التـماثلات فى حل المـعادلة $Z^5 - ١ = 0$ شكـل (٤٠) والتـى أظهـر جمالـها الكمـبيوتر أمـا شكل (٤١) أ فيـبين الفراكـتال (الجاذب الغـريب) أحواض الجذور الثلاثـة وهى صورة مشهورة نشرت فـى العديد من الكتـب - لاحظ تماثلات الزوايا $\frac{٢}{٣}$ط وإذا كانـت هذه صورة مشهورة؟ فهل توجد صـور أخرى لجذور نفس المعادلة المركبة $z^3 - ١ = 0$ ؟ وإذا كانت الإجابة بالإيجاب فماذا تظن ما الذى يحدث التغيير فى شكل الفراكتالات المتولدة عن حل نفس المعادلة؟

ربما تصـل إلى أن ذلك يرجـع إلى تغيـير القاعدة الـتى يُحددهـا التكرار المـرحلى للوصول إلـى التقارب Convergence أو بالأحرى طرق التكرار المـرحلى للتقارب. فى الـواقع لا يكـتفى الـرياضيـون التوصل إلـى حل بطـريقة مـا، ولكن يـبحثـوا فى التوصل إلى طريقة أمثل، فهم يتطلعون إلى الأفضل دائماً.

وبالفعل كانوا يتطلعون إلى إيجاد طرق أفـضل للتكرار المرحلى عن الطريقة التى تستخدم القاعدة السابقة المأخوذة عن طريقة نيوتن لتطبيقها على الدوال المركبة. وكان الدافع وراء ذلك:

(١) «إيجاد جذور معادلات غير خـطيه، ومعرفة الدقة accuracy وثبـات stabitity الخوارزميات ـ الاستراتيجيات (الإجراءات) الحسابية.

(٢) لاظهار جمال الرسوم التى تنتج بواسطة الكمبيوتر.

(٣) استخدام أساليب لتسريع التقارب.

وعن طريق الـطرق العددية والتـحليل العددى أمكـن التوصل إلى طرق لـلتكرار المرحلى (أو بالأحرى قواعد مختلفة يحددهـا التكرار المرحلى) أنتجت أشكالاً بديعه

مبهرة لفراكتالات ملونه غاية فى الجمال مختلفة. على سبيل المثال بالنسبة لمناطق (أحواض) جذور المعادلة المركبة التكعيبية $z^3 - 1 = 0$ للدالة $f(z) = z^3 - 1$.

ومن المشوق أن نكتفى بذكر أهم هذه الطرق وقاعدة بعض منها التى يحددها التكرار المرحلى والشكل الناتج من استخدامها (وللمزيد من الدراسة أنظر مرجع(12)).

٥-٤-١- طرق التكرار المرحلى، والفراكتالات البديعة المتولدة من حل المعادلة المركبة التكعيبه[١٢] $Z^3 - 1 = 0$

١- طريقة نيوتن للجذور المتعددة muttiple roots (بدرجة. للتقارب): انظر شكل (٤١) ب

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)\, f'(Zn)}{f'(Zn)^2 - f(Zn)\, f''(Zn)}$$

٢- طريقة هويتاكر Whitacker للاسراع المحدب convex acceleration أنظر شكل (٤١)ب - وهى تعرف أيضًا باسم طريقة الوتر المتوازى تبعًا لتفسيرها الهندسى. وهى تبسيط لطريقة نيوتن بتحاشى حساب المشتقة عن طريق عمل التقريب $f'(Z) = \frac{1}{\lambda}$

حيث λ بارامتر نختاره لكى تكون الدالة $F(Z) = Z - \lambda f(Z)$ انقباضية (انكماشيه) contractive . وعلى ذلك لها نقطة ثابتة هى جذر للدالة f انظر شكل (٤١) جـ (وهى بدرجة تقارب 2) وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)}{2 f'(Zn)} \left(2 - L_f(Zn)\right)$$

حيث $$L_f(Z) = \frac{f(Z)\, f''(Z)}{f'(Z)^2}$$

٣- طريقة هويتاكر للاسراع المحدب المضاعف double convex acceleration

أنظر شكل (٤١) د (وهى بدرجة تقارب ٣) أو تستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Zn)}{4 f'(Zn)} \left[2 - L_f(Zn) + \frac{4 + L_f(Zn)}{2 - L_f(Zn)(2 - L_f(Zn))} \right]$$

٤ ـ طريقة هالى Halley وتعرفه بطريقة مماس القطوع الزائدة Tangent hyperbolas وهى طريقـة مشهورة لحل معادلات غـير خطية. (وهى بـدرجة تقارب ٣). أنظر شكل (٤١) هـ وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \quad \frac{2}{2 - 2f(Z_n)} = Z_n - \frac{1}{\dfrac{f'(Z_n)}{f(Z_n)} - \dfrac{f''(Z_n)}{2f'(Z_n)}}$$

٥ ـ طريقة شـبشف Chebyshev وتعرف بطريقة أويلر شبشـف لتفسيرها الهندسى لماس القطـع المكافئة للدوال الحقيقـية. وهى كالسابقة مشـهورة لحل معادلات غير خطية. (وهى بدرجة تقارب ٣). انظر شكل (٤١) وهى تستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \left[1 - \frac{Lf(Z_n)}{2} \right]$$

٦ ـ الطـريقة الخـارقة لهـا لى Super Halley method أو المعـروفة بطريـقة نيـوتن للإسراع المحدب أو طريقـة هالى ـ فيرنر Halley - Werner . وهى من أشـهر وأقوى الـطرق التى تحـول المعادلة إلـى معادلـة ذات نقطة ثـابتة. (وهى بـدرجة تقارب ٣) انظر شكل (٤١)ز. وتتسخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{2f'(Z_n)} \frac{2 - Lf(Z_n)}{1 - Lf(Z_n)} = Zn - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \quad 1 + \left[\frac{\frac{1}{2} Lf(Z_n)}{1 - Lf(Z_n)} \right]$$

كل هذه الـطرق للتكرار المـرحلى السابقـة تحسب f، ومشـتقهـا فى كل خـطوة للطريـقة لنقطة واحدة. ولـكن يوجد طرق مرحليـة التكرار المتعدد الـتى تحسب فيها قيمة f، والمشتقة لأكثر من نقطة فى كل خطوة.

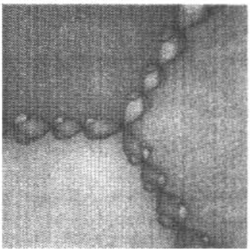
٧ ـ طريقة تروب ـ أوستروسكى Traub - Ostrowsti (وهى تقدم أكبر درجة للتقارب (انظر شكل (٤٧)٢، مثلها مثل طريقة چارات Jarrat انظر شكل (٤١)ح. وطريقة چارات العكسية انظر شكل (٤١) ط.

وتستخدم طريقة تروب ـ أوستروسكى القاعدة:

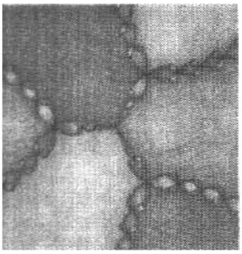
$$Z_{n-1} = Z_n - u(Z_n)\frac{f(Z_n) - u(Z_n) - f(Z_n)}{2f(Z_n - u(Z_n)) - f'(Z_n)}$$

وعموماً عن طريق استخدام الطرق المختلفة للتكرار المرحلى التى ذكرناها وطرقاً أخرى وباستخدام امكانيات تكنوچوليا الرسوم الكمبيوترية وألوان الكمبيوتر أمكن التوصل إلى بديع أشكال الفراكتال فى المناطق القريبة من الجذور (أحواض الجذور) التى تظهر ملونة على شاشة الكمبيوتر. بتطبيقها على الدالة $f(z): z^3 - 1$. وقد استخدم اللون الأصفر لأحواض جذب الجذور $1, e^{2\pi i/3}, e^{4\pi I/3}$ مع التفتيح والتغميق نسبة إلى عدد التكرارات المرحلية للتوصل (للتقارب) للجذر بالدقة المطلوبة. ومع وضع علامة اللون الأسود للنقط المناظرة لطريقة التكرار المرحلى بداية بالنقط Zo التى لا تصل إلى جذر.

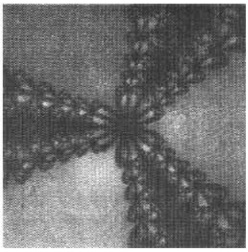
والإنبهار والاستمتاع بهذه الأشكال (انظر شكل (٤١) أ ـ ط)[١٢] ليس فقط لروعة جمالها أو اختلاف أشكالها باختلاف الطرق التكرارية المرحلية المختلفة. ولكن فى عملية تكوينها البديع من تحركات عشوائية للنقط حتى تبرز الفراكتالات (الجذاب الغريب) لكل منها.



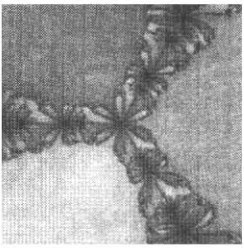
(أ)



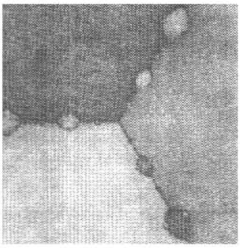
(ب)



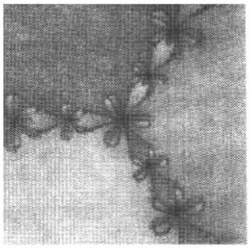
(جـ)



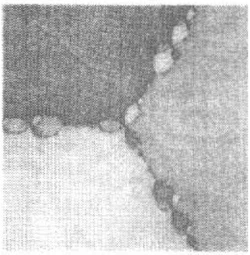
(د)



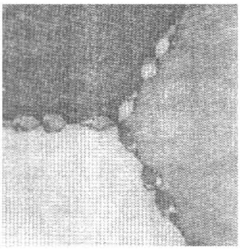
(هـ)



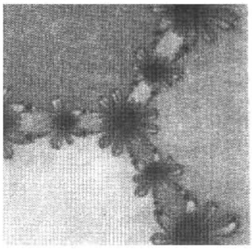
(و)



(ز)



(ح)



(طـ)

شكل (٤١)

وختاماً، فقد استرسلت فى هذا البنـد لأن المعلم فى دراسته وتدريسه يتعرض لحل المعادلات بصفـة عامة وباستخدام طريـقة نيوتن القائمـة على التكرار المرحلـى بصفة خاصة، ولايـجاد الجذور التكـعيبية للـواحد الصحيـح وفى استخدام الخـواريزمات. والخواريزمات هى بـبساطة اجراءات أو تكرار خطوات مـعينة كالتى تستـخدمها فى القسمة ا لمطولة. وهى تنصب أيضاً على التكرار المرحلى.

مثل هذه الأفكار تثير ما قدمناه، حيث يمكن أن تكون دافعاً للمعلم لفهم أعمق أو اشراك تلاميـذه فى الاستمتاع بـالفراكتالات البـديعية ا لمرتبـطة بحل $ز^{٣} - ١ = ٠$ أو معايشة الفـكر الرياضى المعاصر. فما قد يهـمنا فى تدريس الرياضيات التـقليدية هو إيجاد جـذور المعادلة أو بالأحـرى مجموعة الحـل لها. أما الفـكر الرياضى المـعاصر فيهـتم بالبحـث عن تصرفاتـه وديناميكيـات الدالة فى منـطقة الجوار لجذور المـعادلة وحدودها. بالاضافة إلـى أننا كنا نستعين بالـرسم البيانى كأقصى ما يمـكن استخدامه كوسـيلة لـتوضيح إجـراءات الحل الجبـرى أو ايجاد الحـل. أما فى الفـكر الريـاضى المعاصـر فقد تلاحم اسـتخدام الكمـبيوتر بإمكـانياته الهـائلة فى رصد الـتكرارات المرحليـة وفى الرسوم الكمبـيوترية graphics والحركة وتكـنولوجيا استراتـيجيات الألوان فى دراسة ما وراء الحل، وللتوصل إلى الفراكتـالات البديعة المختلفة وعملية تكوينها فى منـاطق أحواض الجذب. وذلك باستخدام طرق تكرارية مرحـلية مختلفة قدمها ريـاضيون (شكليـون ـ متخصصون فـى التحليل الـرياضى) نتيجـة دراستهم لتكون أكـثر دقة وأكثر سرعـة تقارب وأعلى درجة تـقارب.... وقد اكتفيـت بتقديم بعضاً مـن هذه الطرق وقواعدهـا لإثارة المعلم للـدراسة المستقلـة ليعرف المزيد عـنها وعن طرق استثارتها فى كتب التحليل العددى الجديدة.

فى البنـدين السابقين قـدمنا جاذب لورنز الغـريب، وجاذب غريب مرتـبط بحل معادلات مركبة باستخدام طرق تكرارية مرحلـية. والآن تعال نعيد التفكير فى أجمل وأعقد فراكـتال مشهور هو أيـضا جاذب غريب. وهو ما يـعرف بفراكتال مـجموعة

ماندلبروت ومجموعة جزئية منها عرفت من قبل معروفة باسم مجموعة چوليا، فى البند التالى.

٥ - ٥ : أشهر وأجمل جاذب غريب - مجموعة ماندلبروت - مجموعة چوليا

تعال نتأمل مرّة أخرى شكل (٦)، (٧) بالفصل الثالث. هل تتصور أن صوراً بهذا الجمال الفريد هى نتائج إجراءات رياضية تخص دوال مركبة فى المستوى المركب تربيعية بقاعدة بسيطة؟ هل تتصور أيضاً أن ظهورها على شاشة الكمپيوتر ببطء يحتاج إلى برنامج ببضعه أسطر (أوامر) قليلة فقط؟ وأنه يبرز من خلال اضطرابات ولا نظام عشوائى من نقط ـ هيولية Chaos؟

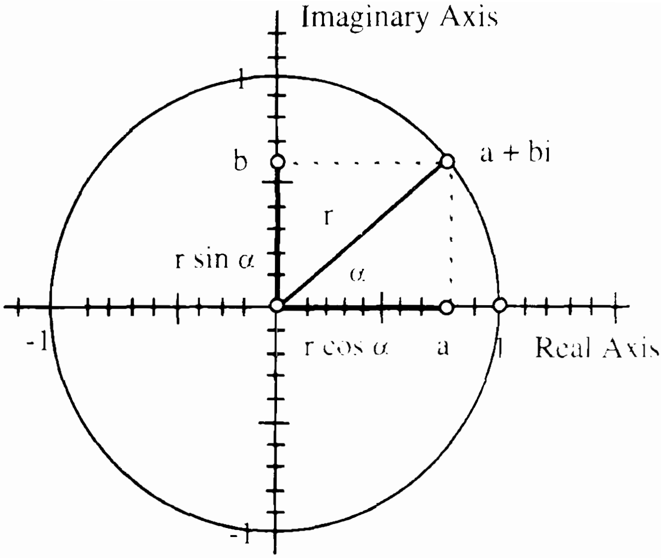
كمعلم رياضيات لن يشبعك التطلع إلى الصورة وتلمس نواحيها الجمالية، ولكنك تتطلع بحب استطلاع لمعرفة ولو القليل عن الأساس الرياضى فى تكوينها (توليدها) وهذا ما سوف نتعرض له.

ولقد توصلنا فى بند (٥-١، ٥-٢) إلى أن نظم الدوال التكرارية مرحليا IFS استخدمت فى توليد فراكتالات جاذب غريب وفراكتالات تحاكى الطبيعة. وأن هذه الدوال خطية وانكماشية أما توليد أشهر وأجمل جاذب غريب والمسمى مجموعة ماندلبروت فهو يتولد بواسطة التكرار المرحلى لدوال تربيعية فى المستوى المركب. مثل هذه الدوال تعتبر حالة خاصة من فصل معادلات الفروق difference equations ذات البعدين ومن أمثلتها الدالة اللوچستيه Logistic mapping .

$$f(x) = rx\ (1 - x)$$

الحقيقة أو المركبة والتى تستخدم كمدخل لدراسة الهيولية Chaos.

والآن تعال نسترجع معلوماتنا عن تمثيل الأعداد المركبة فى المستوى المركب انظر شكل (٤٢).



شكل (٤٢) يمثل النقط فى المستوى المركب

المستوى المركب C يتكون من النقط على الصورة a + bi حيث $\sqrt{-١} = i$. المسافة r من نقطة الأصل إلى النقطة a + bi تسمى المقياس modulus. إذا وقعت هذه النقطة على دائرة الوحدة فإن r = 1. تُمثل النقطة أيضاً $a + bi = r(\cos \propto) + r(\sin \propto)$.

٥ - ٥ - ١ - بعض مجموعات جوليا

كان جوليا [١٠] Gaston Julia (١٩١٨) مهتما بالدوال التكرارية مرحليا Iterated Functions وخاصة الدوال المركبة. فمثلا الدالة: $Z^2 \rightarrow Z^2$ ، $Z \in C$.

ترسم كل نقطة فى المستوى بتربيع إحداثيات النقطة فوق نقطة أخرى فى المستوى. وكان جوليا شغوفاً بمعرفة تصرف النقط على المدى الطويل فى المستوى المركب بالتكرار المرحلى لهذه الدالة المركبة التربيعية البسيطة. فمثلا صورة النقطة a+ bi بالدالة التربيعية $Z \rightarrow Z^2$ أو $(f(z) = Z^2)$ هى النقطة التى يمكن تمثيلها:

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2\,abi$$

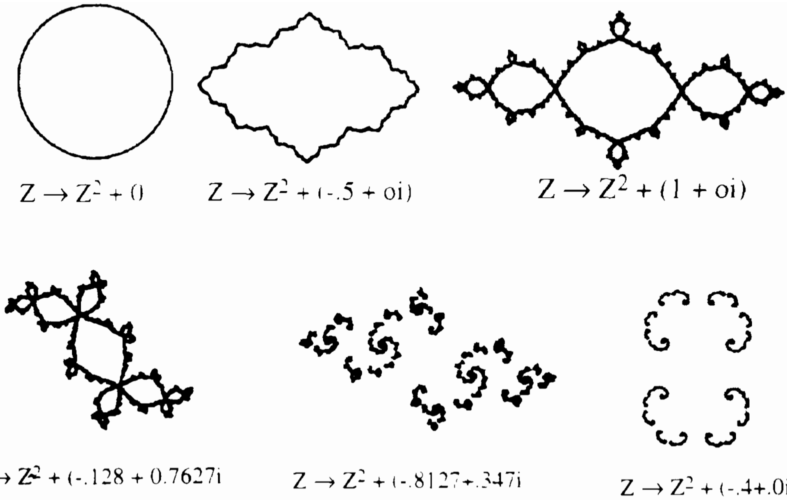
$$r(\cos \propto) + r\,(\mathrm{Sin} \propto))^2 = r^2\,(\cos\,(2\propto) + i\,\sin\,(2\propto))$$

إذا كان المقياس r أكبر من 1 أى $r > 1$ فإن تربيعه يكون أكبر منه أى $r^2 > r$. ومع التكرار المرحلى فإن صورة النقطة تبتعد اكثر واكثر من نقطة الأصل مع تضاعف الزاوية فى كل تكرار. إما إذا كان المقياس r أقل من الواحد أى $r < 1$ فإن تربيعه يكون أقل منه $r^2 < r$.

وعلى ذلك عند $r < 1$ ومع التكرارات المرحلية المتعاقبة تقترب الصورة من نقطة الأصل مع تضاعف الزاوية فى كل تكرار. أما إذا كانت $r = 1$ فإن الصور تقع على الدائرة. وبتصور التكرار المرحلى المتعاقب لهذه الدالة $z \to z^2$ فإن كل النقط داخل الدائرة تبدو كأنها تدور حلزونياً ناحية نقطة الأصل. أما النقط خارج الدائرة فتدور حلزونيا ناحية اللانهاية. وتبقى النقط على الدائرة عليها. أى أن النقط داخل الدائرة وخارجها. تبدو أنها تتحرك بعيداً عن الدائرة. ولذا فإن الدائرة (أو ما يناظرها) تسمى بمجموعة التنافر للدالة reppeling set. وإذا كانت مجموعة التنافر للدالة ذات مسارات متصلة Path connected (بمعنى لأى نقطتين فيه يوجد مسار متصل بينهما يقع فى المجموعة) فإنها تسمى مجموعة جوليا. وعلى ذلك فالدائرة هى مجموعة تنافر وفى ذات الوقت مسار متصل ولذا فهى مجموعة جوليا.

أما إذا أخذنا الدالة التربيعية $z \to z^2 + c$.

حيث C بارامتر عدد مركب. عندما يكون $C = O$ فإن مجموعة جوليا تكون دائرة. أما إذا أخذنا C عدد مركب لا يساوى الصفر $C \neq O$ فإن مجموعات جوليا تصير أكثر تعقيداً. انظر شكل (٤٣).



شكل (٤٣) عينة من مجموعات چوليا باختلاف البارامتر c

أما مجموعة چوليا الرائعة الجمال فـى شكل (٦) فى فصل ٣ السابق فإن البارمتر $c = a + bi$ حيث: $c = o.2232 - 0.7296\,i$.

$(-0.4452514 \le b \le -0.4451650)$ ،$(-0.3194417 \le a \le -0.3193553)$

ـ لاحظ المدى الصغير جدًا للجزء الحقيقى a، والجزء التخيلى b الذى ينتج شكل (٦) الرائع.

عموماً قد تأخـذ مجموعات چوليا أشكال مـنحنى فراكتال معقدة أو نـقط مبعثرة تسمى غبار الفراكتال لچوليا.

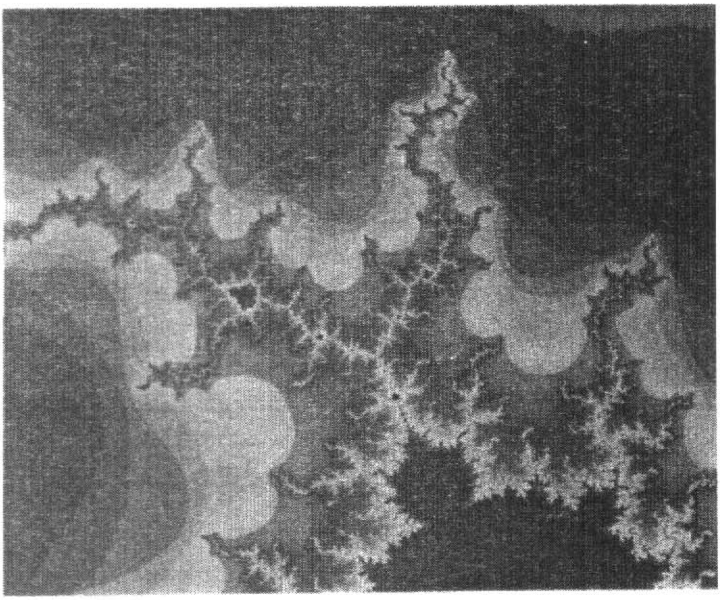
٥-٢٥-: مجموعة ماندلبروت

استرعى اهتمام ماندلبروت مجموعات چوليا. وراح يدرس قيم البارماتر c للدالة $z \to z^2 + c$ التى تؤدى إلى أن تـكون مجموعات چوليـا متصلة connected ومـن خلال دراسـته الـدائبـة. اكتـشف المجـموعـة التـى تحمـل اسمـه... وهى مـجمـوعة

ماندلبروت. حيث استخدم النقطة الإبتدائية التى يبدأ منها عملية التكرار المرحلى النقطة $z = o + oi$.

وفى عام ١٩٧٨ استطاع ماندلبروت كتابة برنامج كمپيوترى لرسم مجموعة كل نقط فى مستوى الپارامتر التى تحقق شرط أن يكون لها مجموعة چوليا المتصلة.

وعلى ذلك فإن مجموعة ماندلبروت ببساطة هى مجموعة كل النقط c فى مستوى الپارامتر للدالة $z \to z^2 + c$ فى المستوى المركب لها مجموعة چوليا المتصلة Connected.



شكل (٤٤) أجزاء من مجموعة ماندلبروت

فى شكل (٤٤) (أو شكل ٨ فى الفصل الثالث) الپارامتر $c = a + bi$ يكون $-1.23 \le a \le -1.1$، $0.25 \le b \le 0.358$

أما فى شكل (٧) الفصل الثالث يكون $-2.25 \le a \le 2.25$، $-1.25 \le b \le 1.25$.

لاحظ الفروق الصغيـرة فى الجزء الحقيقى والجزء التخيلى التـى تحدث هذا التغير الكبير فى الشكلين (٤٤)، (٧ السابق فى الفصل الثالث).

لاحظ أيضا وجود دوريات للتفرعات (قـرون الاستشعار ـ مثل الهوائى ـ anten-na) من الـكرويات (شكـل اللمـبة) bulbs. منهـا دوريات ثنائيـة، وثلاثية وربـاعية للدورة شكل (٤٤).

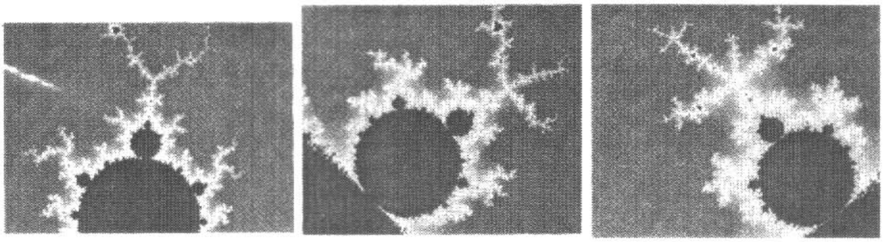
تعتبر النقطة $o + io$ النقطة الحرجة للدالة. فهى النقطة الوحيدة اللامتغيرة invari-ant تحت الـدالة $z \rightarrow z^2 + c$. فكل النقط الأخرى فى مجمـوعة ماندلبروت تختلف من تكرار مرحلى لتكرار آخر تالى. وبـالتكرار المرحلى نجد أن بعض النقط C تستـقر مـباشـرة فى دورات دوريـة Periodic cycles. فـمثـلا بأخـذ $c= - 1 + o\ i$ فـــإن التكرارات المرحلية المتعاقبة تتبدل بين النقطتين $o + oi$ & $-1 + oi$. مكونة دورة cy-cle من دورتـين 2 periods. وبأخذ النقطـة الإبتدائية $c = 1.317 + oi$ فنجد الـنقط بالتكرار المرحلى تستقر فى أربع دوريات تتكون من النقط:

$-1.1429527 + oi$ ، $-0.016591 + oi$ ،

$-1.36884 + oi$ ، $0.4171897 + oi$

ومن المثـير فى مجـموعة مانـدلبروت أن دوريات الـنقط تحت الـدالة $z \rightarrow z^2 + c$ تجمع نفس الدوريـة مع الكرويات bulbs . فمثلا عنـد كل كرويه bulb السـاق مع التفـرعات (قرون الاستـشعار) تكون دوريـة. فمثلا شـكل (٤٥) أ قرن الاستـشعار الرئيسى يتكـون من ساق وفرعين مجموعهم ٣ لتشيـر إلى أن دورية الكروية هى ٣. وفى شـكل (٤٥)ب ـ (١ سـاق + ٣ فرع = ٤) تـشيـر إلى أن الـدورية ٤ لـلكـروية الخارج منها أربعة قرون استشعار.

وشكل (٤٥) جـ يبين أن الدوريـة ٥ (السـاق الخارج من الـكروية الصـغيرة + ٤ فروع متفرعة منها).



(أ) Period 3 Bulb Antenna

(ب) Period 4 Bulb Antenna

(جـ) Period 5 Bulb Antenna

شكل (٤٥)

عمـوماً الملامـح السابـقة تلـقى الضوء عـلى غمـوض وسحر وامـكانيـة تبسـيط المعالجات الرياضية لأغرب وأعقد فراكتال جاذب غريب مثير للتفكير والخيال يخلب الفؤاد والروح بجماله.

٥-٦ - أشكال بديعة وزخارف حدودياتها فراكتالات

كلنا يعرف ألغاز تكوين الصور من أشكال صغيرة متعرجة Zigzag Puzzle.

هل تعتقدأن شكل السطح الناتج يكون متشابهاً ذاتيا؟ (أى فراكتال؟).

هل يمكن تغطية سطح بأشكال حدودها منحنيات فراكتال؟

من خلال الإجابـة على السؤال الأول أمكن التـوصل إلى هندسة عصـرية جديدة هى الـهنـدسة غـير الابـدالية اخـترعـها وبـلورها الـرياضـى روچر بـنروز فـى أخر السبعينات. تضمن إثارتها تكوينات هندسية بديعة لا تتكرر بإنتظام أى لها صفة شبه دوريةSemi - Periodic أو aperiodic.

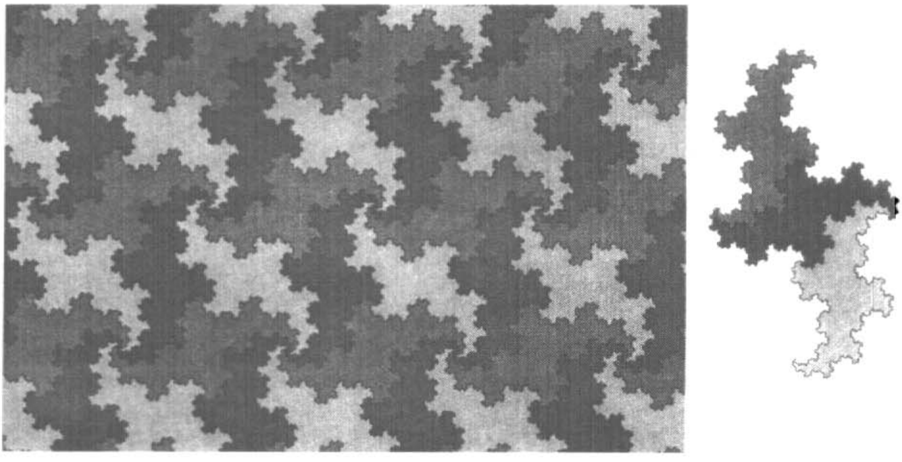
أما السؤال الثانى فكـانت إجابته نتيجة اللعب بأفكار رياضـية، وتوليد فراكتالات على حدود وحدات التكوينات الهندسية بعض رياضيين مثل الرياضى مارك مكلور.

ما يهمنا هنا هو تقديم بند (فقرة) لإراحة الذهن والتجديد العقلى يتضمن بديع تكوينات هندسية من هذا المنطلق.

كما نعلم يمكن تغطية (أو بالأحرى تبليط tiling) سطح باستخدام مربعات (أو بلاطات tiles) غير متداخلة not overlapping لا تقع على بعض إلا عند الحدود (الاضلاع). وأيضاً يمكن تغطية (تبليط) السطح بأشكال هندسية منتظمة مثل الأشكال السداسية التى يقوم بعملها النحل.

وقد تكون الأشكال الهندسية التى تملأ السطح (تبلط السطح) غير بسيطة أو تتكون البلاطة من تجميع لأشكال بسيطة.

ولكن الغريب أننا نجد أنه يمكن تغطية السطح بأشكال (بلاطات) حدودياتها فراكتال حيث يبدو أن أجزاء من حدودها تتعشق مع بعض. انظر شكل (٤٦) أ، ب.



(ب) (أ)

شكل (٤٦)

لاحظ أن الشكل (أ) يتكون من ثلاثة أشكال متطابقة، حدودياتها فراكتال تتعشق أجزاء منها مع بعضها البعض ويمكن توليد هذا الشكل (أ) وكذلك الشكل (ب) عن

طريق نظام من دوال انكماشية (تشابه بمعامل تصغير مع دوران، وانتقال) IFS. ويسمى كل شكل صغير بلاطة أو الشكل (ب) وحدة تكوين بلاطات Patch of tiles.

والواقع أن ملء (أو تبليط السطح) بأشكال رسوم لكائنات فى الطبيعة (حصان بحر أو slamender أو نباتات...) ابتدعها المهندس الفنان إشر Escher.

وبالطبع قد لا يكون الشكل الناتج (للسطح مثلا) متشابهاً ذاتيا. ولكن كما يسمى يكون التشابه الذاتى مختلطاً mixed، أو digxaph similar sets[٩] أو المتولد عن طريق digraph IFS. أى أن الشكل المتكون لا يكون متشابه ذاتياً كلية ولكن فيه بعض الدورية أى شبه دورى Semi Periodic.

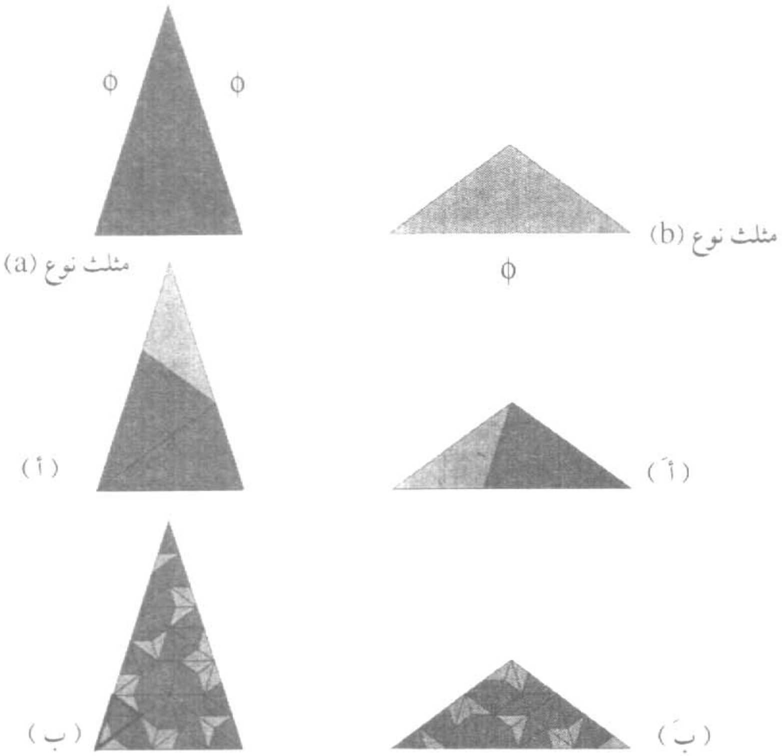
وقد استخدم بنروز نوعين من المثلثات (أ)، (ب) كبلاطات أساسية.

النوع الأول (a) هو مثلث أبعاده ϕ،ϕ، 1 والنوع الثانى (b) مثلث أبعاده 1، 1،ϕ حيث ϕ النسبة الذهبية $\frac{\sqrt{٥}+١}{٢}$.

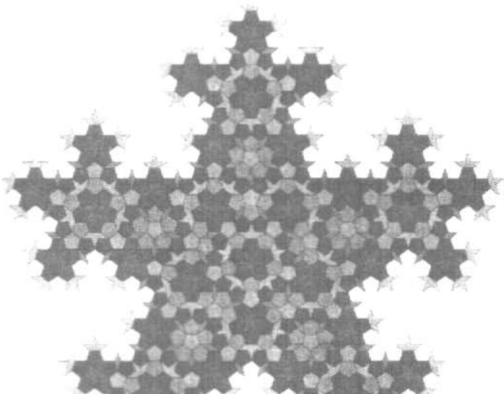
انظر شكل(٤٧). لاحظ أنه يمكن تكوين المثلث (أ) أيضا من مثلثين أصغر من نوع (a) ومثلث أصغر من نوع (b). كما يمكن تكوين المثلث (b) من مثلث من نوع (a) ومثلث من نوع(b) أصغر أيضا (باستخدام نظام الدوال المتكررة مرحليا IFS: تشابه تصغير، تحويل دوران وتحويل انتقال) . وأيضا التوصل للمثلث (a) ، (b) من تشكيلات بلاطات منها كما فى شكلى ب، بَ.

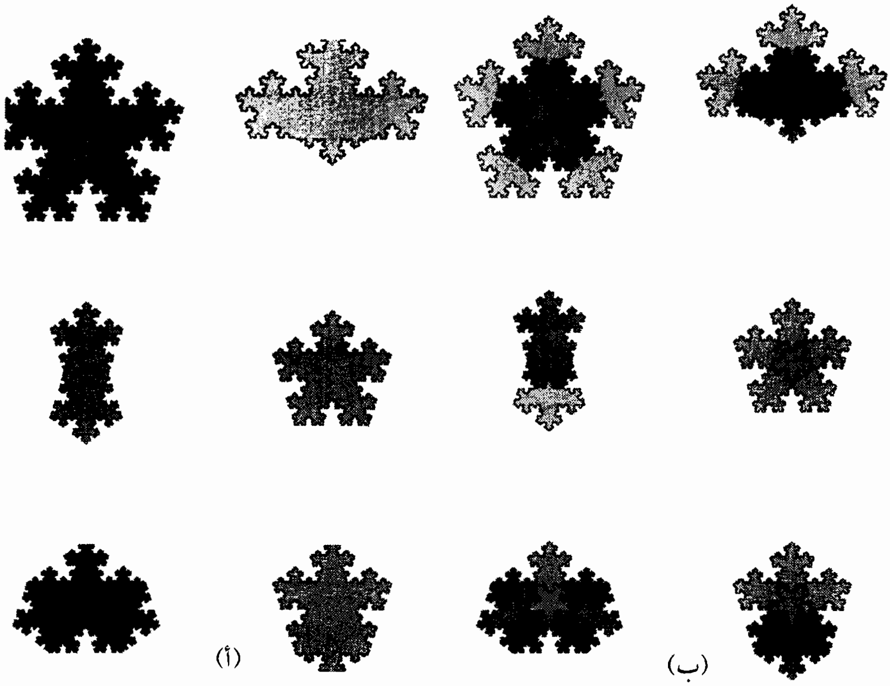
ومن هذه البلاطات نوع (a)، (b) كون تجميع Patches منها على شكل نجمة ونصف نجمعة المخمس. ومعين والمخمس وسماها النجوميات الخماسية الساحرة لبنروز Penrose Pentacles لاحظ هذه النجوميات فى جزء من التبليط شكل (٤٨).

أما ماكلور[٩] فقد ولد أحرف نجوميات بنروز (النجمة ـ نصف النجمة ـ المعين المخمس) فراكتالات ـ لاحظ أن هذه الفراكتالات هى فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج فى شكل (٤٩) أ ثم كون منها التجميعات فى شكل (٤٩) جـ، ثم التبليط فى شكل (٥٠) بالاستعانة بـ IFS والتيوبولوچى.

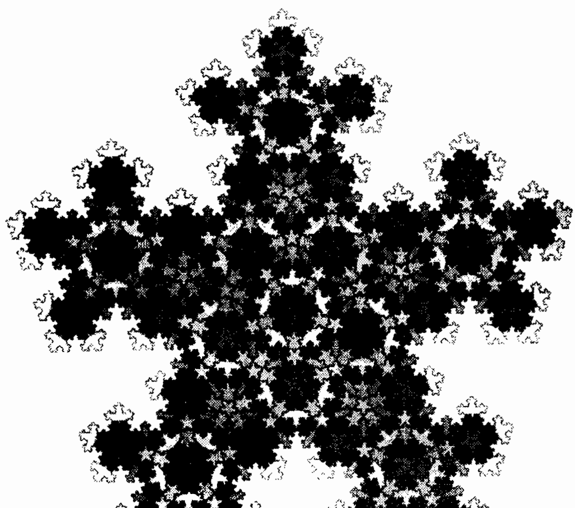


شكل (٤٧)


شكل (٤٨)



شكل (٤٩)



شكل (٥٠)

حاولت من خلال عرض محتوى هذا الفصل إثارة دوافعك لأعمال ابتكارية وتنمية تذوقك للجمال الرياضى، وإكسابك مقدرات فى التحليل للربط بين النواحى الجبرية فى التحليل العددى والنواحى الهندسية. والانطلاق فى عمل التكوينات والتشكيلات الرياضية الفنية غير العادية. وتنمية المرونة فى التفكير الرياضى كما يفعل الرياضيون المعاصرون للتوصل إلى المستوى الأمثل. وكذلك معايشة الرياضيين خلال عملهم الابتكارى الرياضى من استثارة الفكرة عن طريق أعمال سابقة لرياضيين آخرين حتى بلورتها وإختراع كل متكامل (كهندسة جديدة أو موضوع جديد) منها. وذلك مرورًا ببعض أو كل مراحل العمل الرياضى الابتكارى[٣]: التحضير ـ المعالجات الرياضية (التريض) mathematization ـ التحضين incubation ـ الالهام ـ التحقيق.

والآن بعد قراءتك لهذا الفصل مرَّة أخرى. حاول أن تتلمس المواضع التى أحاول فيها مساعدتك على تحقيق الأهداف السابقة وأهداف أخرى ذكرتها فى الفصول السابقة. بقصد تنمية النواحى الابتكارية فيك والتى تعكسها فى تدريسك الابتكارى مسترشدًا ببعض النقط التى أقدمها فيما يلى. ثم استكمل هذه النقاط وسجل آراءك وأفكارك وانعكاساتك حولها في مذكراتك.

(١) حيَّر الرياضى هادامارد، الذى كتب كتاب «حول الاختراع الرياضى» وهو رياضى ابتكارى كبير من أن نظرية يقدمها هو يجد رياضيا آخر يبنى نظرية عليها ويثبتها. ويتعجب لماذا لم يستطع أن يثبت النظرية المبنية على نظريته بالرغم من أنها مباشرة من نظريته؟ ومن المشوق أن نعرف أن الرياضى الكبير هادامارد هو تلميذ الرياضى پوانكريه (صاحب نظرية التوپولوچى الجبرى)، وأن هادمارد كان أستاذاً لأستاذى (المرحوم الأستاذ الدكتور سليمان عبدالعاطى) فى وقت كانت الجامعات المصرية تستقدم أكبر الرياضيين العالميين للتدريس فيها لفترة.

عموماً قـدمت فى هذا الفصل من خـلال عرض نبذة تاريخية عـن أفكار ما، أن رياضيين استـثيروا بأعمال رياضيين آخريـن، فكانت حافزاً لهم علـى استكمال هذه الأعمال وبـلورتها وعمل بـناء رياضى (نظريـة أو هندسة...) منهـا. فمثلا قدمت:

(أ) نبذة تـاريخية تبين تـأثر وتعجب مـاندلبروت لمجمـوعات چوليا حفـزته إلى ابتكار أو عمل مجموعة ماندلبروت كأعجب وأجمل فراكتال.

(ب) نبذة تاريخية عن حل المعادلات بالتكرار المرحلى بطريقة نيوتن أثارت حل المعادلات المركبة وتوليد الفراكتالات الخاصة بها.

(جـ) نـبذة تـاريخيـة عن لـورنز مع الاشـارة إلى أنه كـان عاشـقاً للـرياضـيات والألغاز الرياضية منـذ صغره.. عكست اهتمامه بحل لغز الـتنبؤ بالطقس وأدت لإبتكـاره جاذب لورنز العجـيب، وتفسيـر مبدأ الحساسيـة للأحوال الابتدائية.

(د) جذور فكـرة الحساسية للأحـوال الابتدائية لپـوانكريه وماكسـويل... وذلك لأربى فيك الاستثارة من أى عمل رياضى قـديم أو حديث لتنطلق وتتشجع لإعادة بنائه أو تكملته.

(٢) التدريب على المرونة فى التفكير الرياضى والتوصل إلى المستوى الأمثل. وذلك من خـلال عرض طرق مـختلـفة للـتكرار المرحـلى لحل نـفس المعـادلة المركـبة التكعـيبية ($Z^3 - 1 = 0$) والتوصل إلى أشكال مختلفـة بديعة للفراكتالات عند مناطق جذب الحـلول. والتأكيد على أن هـذه الطرق المختلفة هى طـرق عصرية لرياضـيين فى ا لتـحليل العـددى يحاول كل مـنهم التوصـل إلى مستـوى أمثل لسرعة التقارب وزيادة درجة التقارب مثلا.

(٣) ابراز تزاوج التـحليل العددى (النـواحى الجبرية) بالأشـكال الهندسية المخـتلفة النـاتجة من استـخدام الطـرق التكراريـة المرحلـية المختلـفة، ودور التـكنولوچـيا المتقدمة لرسوم الكمبيوتر والتلوين فى إظهار صور الفراكتالات المرتبطة بها.

(٤) اعطاء الفرصة لتنمية استقلالية التعلم عن طريق التنويه عن مراجع التحليل العددى لمعرفة المزيد عن اجراءات واشتقاق قواعد الطرق التكرارية المرحلية المذكورة.

(٥) إعطاء الفرصة لتتوصل إلى تعميم رياضى كعمل ابتكارى يمر بالمراحل: التحضير ـ التربيض ـ التحضين ـ الالهام ـ التحقيق عند تقديم الفراكتالات الخاصة بحل معادلات مركبة.

فمثلا لاستثارة تفكيرك قدمت صورة عن حل معادلة مركبة لخمسة جذور: $z^5 - 1 = 0$ ثم التركيز على حل معادلة مركبة تكعيبية بطرق تكرارية مختلفة $z^3 - 1 = 0$ وذلك لاعطاء الفرصة للتوصل إلى البحث عن القيم الصفرية للدالة (أو بالأحرى جذور المعادلة عندما $f(z) = 0$) المركبة بصفة عامة: $f(z) = z^n - 1$ فى المستوى المركب التى لها n من الجذور عند المواقع $e^{2k\pi/n}$ حيث $k=1.2...n$ وبتخمين (البداية) عند النقطة Z_0 وبالتكرار المرحلى تصل إلى أقرب جذر لها Z_k (أو ζ)... وعلى ذلك يقسم المستوى بقطاعات (ن من المناطق). هذه المناطق هى فراكتالات.

(٦) التعود على اللعب بالأفكار والأشكال الرياضية لاستثارة الأعمال الابتكارية وللترويح عن الذهن والتجديد العقلى. وذلك من خلال تقديم تشكيلات نجوم Pentacles بنروز ونجوم ماكلور التى حدودياتها فراكتالات.

(٧) ربط أجزاء (الكرويات ـ رجل الثلج) عن فراكتالات مجموعةماندلبروت بالتفرعات منها بالدورية للتوصل من أشياء مختلفة غريبة لقوانين رياضية.

(٨) التشويق لمعرفة المزيد عن الهيولية Chaos المرتبطة بتكوين فراكتالات الجاذب الغريب ومنها الفراكتالات المرتبطة بحلول المعادلات المركبة بالطرق التكرارية المرحلية.

والآن حاول استكمال ما سبق وتوظيفه لتنمية إبتكارك التدريسى فى مواقف مشابهة أو مغايرة.

المراجع

١- باري پاركر (تـرجمة علي يوسف عـلي) (٢٠٠٢): «الهيلوليـة في الكون» القاهرة - المجـلس الأعلى للثقافة.

٢ - جيمس جـلايك (ترجمة علـي يوسف علي) (٢٠٠٠): «الهـيلوليه تصـنع علمًا جديـدًا» - القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.

٣ - أ.د/ نظلـة حسن أحمد خضـر (٢٠٠١): «أصول تدريس الرياضـيات» ـالفصل الأول - الـقاهرة - عالم الكتب ط/ ١٠.

4- Drazin, P.G. (1998): "Non linear Systems" Cambridge Univ. Press.

5 - Gelbrich, G. & Giesche, K (1998): "Fracral Escher Salamenders and other Animals". The Mathematical Intelligencer Vol 20 no 20 New York, Springer Verlag pp 31 - 35.

6 - Gleick, J. (1987): "Chaos: Making a New Science" New York: Viking Press.

7 - Hafner, C (1999): "Post - Modern Electromagnetics Using Intelligent Maxwell Solvers: "Egland - John Wiley pp 42 - 83.

8 - Maganzini, c (1997): Cool Mathemetics' U.S Price Stern Sloan Iuc.

9 - Mcclure, M: Digraph Self - Similar Sets and Aperiodic Tiling" The Mathematical Intelligencer, Vol 24 No 2 , New York, Springer Verlag pp 33 - 41.

10 - Thomas, D.A (2002): "Modern Geometry" U.S. Brooks/ Cole Thomas Learning.

11 - Thompson, J.M.T & Stewart, H.B. (2002): None linear Dynamics and Chaos" England, John Wiley/ 2nd ed.

12- Varona, L.J (2002): "Graphic and Numerical comparizon between Iterative Methods": The Math Intel. Vol 24 No 2, New York Spriger. Verlag pp 39 - 45.

13 - Viana, M (2002): "whats New on Lorenz Strange Attractors". The Math Intel. Vol 22 No2 pp 4 - 19 New York, Springer Verlag.

الفصل السادس

معلم الرياضيات وتطوير تدريسه من خلال هندسة الفراكتال

الفصل السادس

معلم الرياضيات وتطوير تدريسه من خلال هندسة الفراكتال

مقدمة:

فى الواقع يعد تراجع أعداد الطلبة (والطالبات) الدارسين للرياضيات فى المرحلة الثانوية بصفة خاصة وتدنى مستوى الرياضيات للتلاميذ بصفة عامة، مؤشراً خطيراً ينذر بالتخلف الحضارى والثقافى. وهذا يستدعى وقفة حاسمة لإعادة الثقة بالرياضيات لمعالجة جفاف الرياضيات بالمقرارات والكتب المدرسية بالمراحل المختلفة. ويرجع جفافها لاعتمادها (خاصة بالمرحلة الثانوية) على الصرامة الرياضية والتخصصية والشكلية على حساب المعنى أو الفائدة التطبيقية أو دلالتها فى الحياة العصرية.. أو عدم إثارتها للخيال والإبتكار.

هل يمكن للمعلم الأستعانة بأفكار وملامح هندسة الفراكتال فى معالجة هذا العيب وذلك بتحبيب التلاميذ فى الرياضيات وإثارة دوافعهم للتعلم الاستقلالى فى تعلم الرياضيات مدى الحياة بإستمتاع وحب وتقدير ولتحفيزهم للمساهمة فى صنع المعرفة الرياضية وتطبيقاتها ؟! ولهذا سوف أحاول مساعدة المعلم فى الاستفادة من قراءة الفصول السابقة حول هندسة الفراكتال فى تطوير تدريسه للرياضيات المدرسية ليكون تعلمها أكثر متعة وإثارة للخيال والإبتكار، وتصبح ذات معنى وصلة بكافة فروع المعرفة، وقريبة منهم ومن عالمهم المعاصر. وذلك بإنتقاء أفكار منها وحول نشأتها ونموها وتطعيم تدريسه بها أو للاثراء المعرفى الرياضى للتلاميذ أو بتجديد الأنشطة الرياضية لهم. وكذلك بتطبيق ما تثيره ملامح وخصائص هندسة الفراكتال فى تحسين تدريس الرياضيات المدرسية. هذا وقد استخدمت فى عرض محتوى الفصول السابقة مداخل وأساليب لتنمية الابتكار التدريس بصفة عامة لمعلم الرياضيات أشرت إليها فى التعقيبات على هذه الفصول.

إلا أننى هنا أحاول إتاحة الفرصة للمعلم لأن يكون سيد نفسه فى توليد حافز داخلى يقتنع فيه بأهمية معرفته لهندسة الفراكتال ليتخذ موقفاً إيجابيا من تعلمه وتعليمه لها. ومساعدة المعلم للتعرف على كيفية استفادته منها ومن خصائصها (ملامحها وأفكارها..) ليجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، أكثر معلوماتية، أكثر إتاحة، أكثر واقعية، أكثر حداثة up to date كما نوضح فى بنود هذا الفصل الذى نختتم به الباب الثانى.

٦ - ١ - معلم الرياضيات وموقفه من هندسة الفراكتال

المعلم هو الذى يستطيع تحديد استفادته من معرفته بهندسة الفراكتال فى تنمية ثقافته الرياضية المتجددة والمهنية وفى تحسين تدريسه. فهو الوحيد الذى يقدر مدى ما تأثر به وما تفاعل معه بعقله أو بإحساسه أو بعمله أثناء قراءته ودراسته لها، ويريد مشاركة الغير فيما جذب انتباهه وشوقه وأمتعه وحيره فيها من زملائه وتلاميذه وأقرانه وأهله... ويساعده فى ذلك إعادة القراءة والدراسة مرة أو مرات أخرى لزيادة الفهم وليكون انطباعات وانعكاسات وتأملات تحدد موقفه من هذه الهندسة العصرية. ثم يستغل موقفه منها فى توجيه اهتماماته إما بدراسة المزيد عن الموضوعات التى قدمناها فى الفصول المختلفة بقصد التعلم الاستقلالى autonomous learning أو فى إتاحة الفرصة لتلاميذه وزملائه... للتعرف عليها ودراستها، من خلال إنتقائه للأفكار والخصائص.. التى يشعر بأهميتها فى جذب وتحبيب تلاميذه فيها ثم ينطلق من ذلك إلى توظيفها فى خدمة تحسين تدريسه. وفى تربية جيل بعقلية رياضية إبتكارية واسع الاطلاع لكل جديد فى الرياضيات، عاشق للرياضيات ومتعلق بجمالها ومقدر لعظمتها وفائدتها، مثاراً بدوافع داخلية لتحقيق ذاته وللمشاركة فى نمو المعرفة الرياضية وتطبيقاتها.

ومن الاتجاهات المعاصرة التى ينادى بها الرياضيون التربويون فى تدريس الرياضيات للقرن الواحد والعشرين هو التوصل إلى طرق مجددة تعمل على حل مشكلة : كيف تكون الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، أكثر معلوماتيه، أكثر واقعية، أكثر إتاحة، أكثر حداثة.

وأعتقد أن هندسة الفراكتال بما تتمتع به من خصائص وملامح يمكن أن يكون لها دور رائد فى حل هذه المشكلة. ومن ثم فإننى أقدم فيما يلى توظيف هندسة الفراكتال وأفكار تثيرها خصائصها وملامحها لمساعدة المعلم فى هذا الصدد.

٦ - ٢ - توظيف هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية more live

تكون الرياضيات أكثر حيوية (أو حياة) عندما يشعر التلميذ أنها : (أ) أقرب للطبيعة nature والحياة تفسرها وتنمو من خلالها ومن خلال التأمل والتدبر فى الطبيعة والكون (ب) أنها كائن يتميز بالدينامكية (الحركة والتغير) dynamics (جـ) أنها إنسانية ليس فقط بمدلول روبين هيرش ولكن لأنها تخاطب العقل والقلب والمشاعر والإحساس والخيال، بالإضافة إلى أن لها لمسات فنية وجمالية تدعو إلى الإنجذاب والتعلق بها.

والآن أدعوك أيها المعلم القارئ أن تجوب بخاطرك تجمع شتات ما قرأته للفصول السابقة لتؤيد أن هندسة الفراكتال مثال لرياضيات أكثر حيوية بتحقيق النقط السابقة. ستجد نفسك توصلت إلى الكثير ومنها ما أوضحه فيما يلى:

٦-٢-١: توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر حيوية

أ- **هندسة الفراكتال أكثر حيوية لأنها أقرب للطبيعة والحياة**: ويتضح ذلك مما يأتى:

- ارتبطت نشأة هندسة الفراكتال من التأمل فى أشكال السحاب ، والأشجار، الشواطىء ... البحر... البرق كمحاولة لوصف كثير من الأشكال فى الطبيعة التى عجزت عنها الهندسة الاقليدية.

تعدد الأمثلة لفراكتالات فى الطبيعة توضح التماثل الذاتى مثل مقطع فى ثمرة القرنبيط - تفرعات الأغصان - تفراعات نهر وروافده - تفرعات الأوعية الدموية- تفرعات القصبة الهوائية - تفرعات جذور النبات... - انبعاجات سطح المعادن - تعرجات شاطئ بحر .. ريش طائر - قمم أشجار - قمم جبال.

- ارتبط نمو وبلورة هندسة الفراكتال بحل مشكلات لظواهر طبيعية كانت تغفل من قبل فى الإتصالات، التنبؤ بالطقس، البيولوجى. حركة مياه البحر نواحى

الشاطئ، فى الكون والأجرام السماوية (الفلك) .. وذلك عن طريق اكتشاف الهيولية chaos (أو جوازاً الفوضى) كمفهوم (وظاهرة) نشأ مرتبطاً بهندسة الفراكتال ثم نما كعلم مستقل معاصر.

- تدعو هندسة الفراكتال إلى التأمل والتفكر فى الطبيعة ولذا سميت بهندسة الطبيعة فى بادئ نشأتها .

ب - هندسة الفراكتال أكثر حيوية باعتبارها كائن يتميز بالديناميكية (الحركة والتغير) Dyuamics

مما يميز أى كائن حى هو تركيبه الداخلى الذى يحافظ على خصائصه الفريدة، وحركته الدائبة حتى ولو يبدو ساكناً. حتى الحجر يمكن اعتباره كائناً حياً ما دام محافظاً على هيكله. وعلامة شيخوخته وفنائه تظهر عندما يتفتت من تلقاء نفسه. وقد حدث هذا عندما تفتت أجزاء من أحجار أبو الهول sphinx فكان ذلك مؤشراً أسرع العلماء بمعالجة بقية الأجزاء بمواد تحافظ على حياته. هذا الحجر الساكن يتحرك داخله بلايين الجسيمات فى ذراته. وقد يكون الهيكل محسوساً له حيز فى الفراغ أو غير محسوس ومتغير الا أنه يحافظ على خواصه مثل الهواء (والغازات) وحركته (البراونيه).

أما بالنسبة لهندسة الفراكتال فيمكن توضيح ديناميكاياتها (الحركة والتغير) من خلال:

تتجلى الحركة الدائبة للنقط وتراقصها عند الحدود بعشوائية ولا نظام قبل أن يبرز من خلالها فى بطئ وشيئا فشيئا فراكتالات الجاذب الغريب مثل:

(١) تصرفات الدوال المركبة complex للنقط القريبة من جذور معادلاتها (أو أصفار الدالة) وحركاتها dynamism عند حدود الأحواض كنتاج لحركات عشوائية لا نظامية كما تظهر شيئا فشيئا فراكتالات من بين تحرك دائم لمثل هذه النقط العشوائية (على شاشة الكمبيوتر).

(٢) تصرفات الدوال المركبة التربيعية بتحديد قيم معينة للبارامتر يجعل المسار فى مجموعة التنافر متصلاً، يؤدى إلى تكوين الأشكال البديعة الساحرة من خلال

ظهور وتحرك نقط عشـوائياً (وكأنها الحركة البراونيه للـغازات) ولا نظامياً. هذه الأشكال الـبديعة الـساحرة التـى تظهر رويـداً رويداً هى فراكـتالات مجمـوعة ماندلـبروت ومجمـوعات جوليـا حيث نجد النـقط عند الحـدود كأنها كـائنات محتاره هل تتحرك نحو الفراكتال أو خارجه عنه ؟ وتأخذ وقتاً طويلاً حتى تحدد موقفها.

(٣) استخـدام نظام الدوال التـكرارية المرحـلية IFS فى تـوليد فـراكتالات تحـاكى الطبيـعة مثل ريشه طـائر مثلا. حيث يتـيح الكمبيوتـر الفرصة لمشاهـدة الشكل دائب الحركة والتـغير فى التكرارات المرحليـة النهائية حتى ظهور شـكل الريشة من بين النقط العشوائية اللانظامية.

(٤) استخدام برمجيات الـصور المتحركة مع توليد الفراكتالات التـى تحاكى الطبيعة تعطى حياة عـلى المناظرالطبيعيـة (الفرضيه virtual) والظواهـر الطبيعيـة التى تصاحبها. سواء فى استخدامها فى أفلام الكارتون أو فى دراسة وتمثيل الظواهر الطبيعية.

جـ - هندسة الفراكتال أكثر حيويه لأنها أكثر إنسانية. ويتضح ذلك مما يأتى:

- بمدلول روبين هيرش فإن هندسة الفركـتال تكون إنسانية لأن الرياضى الانسان هو الذى اختـرعها، ولأنها اجتماعـية بمعنى أن مجمـوعة من الرياضيين سـاهموا فى تنميـتها أو نتجت من أفـكار رياضيين فى عـقود مختلفة سـابقة وحاليه. مثـل اعتماد هندسةالـفراكتال على أعمـال جوليا (ومجموعاتـه) وأعمال كانتور (ومجـموعته) وأعمال هاوسدورف(وبُعد الصندوق الذى قدمه).. وأعمال لورنز (وظاهرة الفراشة التى أثارها جاذبة الغـريب). كما إعتمد الرياضيون والعلماء علـى هندسة الفراكتال فى ابتـكار هندسات وعـلوم عصرية جديـدة مثل هندسـة حدوة الحصان للـرياضى سمال Smale ونظرية الهيوليه chaos .

- بالإضـافة إلـى ذلك فـهنـدسة الـفراكتـال تخـاطب الـعقـل والمشـاعر والخـيال والأحاسيس وتتفاعل معها. فبساطة الرياضـيات التى تولد الفراكتالات تبهر العقل ، وجمال الـفراكتالات (المضبـوطة) فى الرياضيـات لها جمال نـستشعره فى الـعقل.

وأيضا IFS يعتمد على أفكار بسيطة للتحويلات الهندسية الانكماشية فى فراغ المتجهات (الخطى) تجعل العقل يألفها. إلا أن عدم اعتماد ماندلبروت على المعالجات الرياضية الصارمة لا ترضى عقل الرياضيين الشكليين. بينما التحقق من أعماله بواسطة الكمبيوتر يجد الرياضيون التطبيقيون وشبه العمليين جمال عقلى فيها.

- الأشكال البديعة لفراكتالات مجموعة ماندلبروت ومجموعات چوليا وفراكتالات حلول المعادلات المركبة والجاذبات الغريبة الأخرى ، استطاع الكمبيوتر بتكنياته الحديثة فى الرسوم والألوان والزوم أن يبرز جمالها الأخاذ فتشعر بجمالها فى القلب والوجدان كلوحات فنية فريدة تتوه فيها بمشاعرك وخيالك وتحتار فى جمال تشكيلاتها وكأنها لكائنات وأزهار متحركة مليئة بالحياة. فمثلا ارجع وتأمل مجموعة جوليا (شكل (٦) ، الفصل ٣) ، هل تتصور أنها إبداع (ابتكار) رياضى وليس تكوين فنى لأشياء طبيعية وتجريدية.

- لوحات بولاك لفراكتالات تعكس إحساسه لايقاعات الطبيعة تستأثر العقل والإحساس والقلب بجمالها وغرابة تكويناتها.

- اشتراك الفنانين مع الرياضيين واضعى برمجيات الفراكتال أنتج لوحات فنية بالكمبيوتر على شاشته أو يمكن طبعها، لها مذاق جمالى مميز وغريب وفريد. يمكن تصنيفها تحت أنواع من فنون الرسم المعروفة.

- محاولة تكوينك فراكتالات مشهورة (مثل فراكتال كوخ لرقائق الثلج، فراكتال بينو، فراكتال سبيرنيسكى ..) عن طريق المولد بالتكرار المرحلى، تجدك تقوم بعمل شئ مشوق تشعر بالإثارة والسعادة فى نجاحك فى تكوينه شيئا فشيئا فى التكرار المرحلى الثانى والثالث. وتشعر أنك قمت بعمل شئ خاص بك . وتجدك تتطلع لعمل فراكتالات من مولد آخر من عندك. وهذا مدعاة لتنمية مقدراتك الابتكارية أيضاً.

- من إعجابك بجمال الفراكتالات أو لوحات من الفراكتلات.. ربما تود أن تكوِّن هوايه لتجميع collection أشكال فراكتالات فى الطبيعة... لوحات فنية

مستوحاه من فراكتالات. أعمال قمت بها حول هندسة الفراكتالات- معلومات - أفكار...

وذلك على غرار هوايه جمع طوابع البريد أو الأحجار الطبيعية أو العملات النقدية... فتكامل المعرفة مع العمل مع الأحاسيس والخيال هى أساس العمل الإبتكارى المشوق. بالإضافة إلى أن ذلك يدفعك لتكوين هواية التجميع التى تقوى اعتزازك بما تعمله وتتعلمه كشئ خصوصى لك.

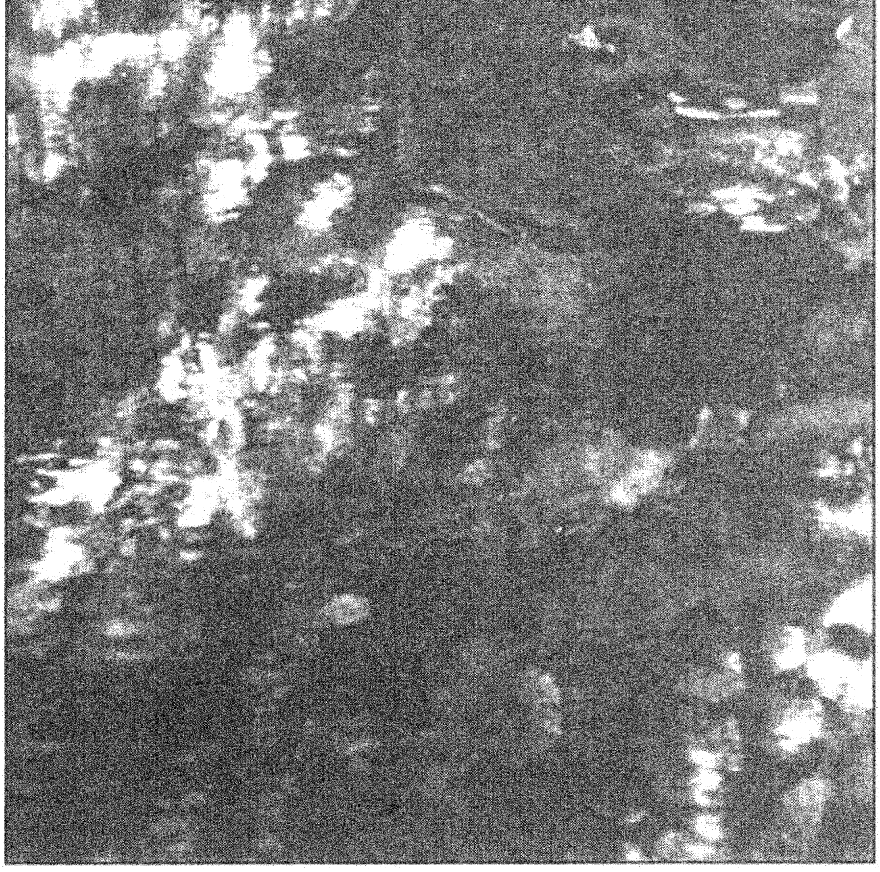
والآن تعال نستفيد من طبيعة هندسة الفراكتال الحيوية فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، بعرض بعض الأفكار الارشادية فيما يلى.

٦-٢-٢: استفادة معلم الرياضيات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية.

يمكنك الأستفادة من الملامح التى تجعل هندسة الفراكتال أكثر حيوية فى الاسترشاد بها لجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية وذلك بجعلها أقرب للطبيعة، وديناميكية وإنسانية كما نوضح فيما يلى:

أ- كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية عن طريق ربطها بالطبيعة.

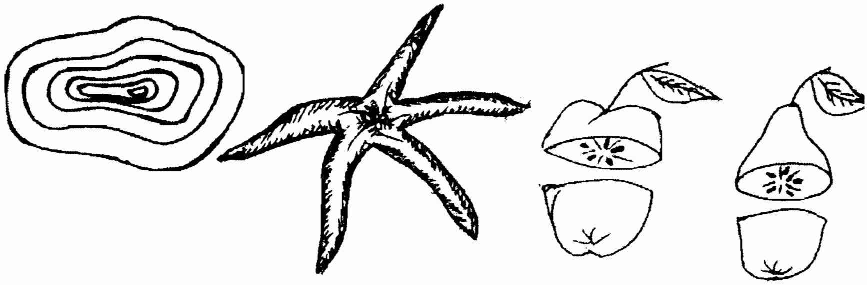
الطفل - الإنسان .. جزء من الطبيعية يجد نفسه فيها وبالقرب منها ويحب كل ما يقربه منها. التأمل فيها يحفر فى ذاكرة (الطفل) صورة عن العالم المحيط به يعدل فيها بخيراته ويتعلم منها [عن طريق عمليات الاستيعاب (التمثيل فى الذاكرة) والتطويع - كما يقول بياجيه] . أنظر شكل (٥١) لطفل غارق فى التأمل لكائنات ونباتات وحركة دائبة على سطح الماء وأسفله. من بديع صنع الخالق.



وعلى ذلك فيستحسن أن يستغل المعلم ذلك عند تقديمه لأى أفكار رياضية ابتدائية بسيطة أو متقدمة، فيربطها بالطبيعة أو معلومات عن الطبيعية مع إعطاء الفرصة للتأمل والتدبر فيها كمنبع للأفكار الرياضية. فمثلا:

(١) عند بداية تعلم الطفل الأعداد من المشوق ربط كل عدد بما يمثله فى الطبيعة حوله وفى جسمه وفى الكائنات مباشرة أو من خلال التفتيش والبحث عنها فى الصور والمصادر الأخرى ومساعدة الطفل على الاستكشاف والاستقراء من مجموعات متكافئة مختلفة كل الاختلاف فى طبيعتها وأشكالها:

- ربط الواحد بالشمس الواحدة، القمر الواحد، القرن الواحد لوحيد القرن، المنقار الواحد للعصفور الأنف الواحد للطفل......
- ربط الاثنين بالعينين، والأذنيين، والرجلين للطفل، وجناحى طائر، وجناحى فراشة....
- ربط الثلاثة بخصلات ضفيرة الشعر، بأصابع بعض الطيور، بأصابع بعض الحيوانات (كالفيل)...
- ربط الأربعة بأرجل بعض الحيوانات، بحجرات القلب، بصوابع رجل التمساح...
- ربط الخمسة بأصابع يد الطفل ورجله، بالسمكة النجمية.. ومن الممتع أن يستكشف الطفل أن مقطع أحد الثمار للفاكهه مثل الكمثرى تحتوى على خمس فتحات للبذور أنظر شكل (٥٢ أ). وإذا كانت المدرسة فيها أو فى مكان قريب منها مزرعة فواكه نعطى له الفرصة ليتأمل أشجار الفواكه التى نأكلها ويتأمل أزهارها فيجد كل زهرة تتكون من خمس وريقات(بتولات) وعندما تنضج الثمرة تتحول إلى ورقات خضراء أسفل الثمرة[٧].... وهكذا.



(ب) (أ)

شكل (٥٢)

أما الصفر فيمكن ربطه مثلاً بثعبان ليس له أرجل أو سمكة ليس لها منقار أو طائر ليس له زعنفة.. ويأتى الضرب فى الصفر عن طريق عدد أرجل فى ثعبان ٠ × ١ = ٠، وعدد أرجل فى ثعبانين ٠ × ٢ = ٠ .... وهكذا.

(١) عند تقديم الكسور يمكن ربط الكسر ١\٣ بنسبة اليابس والماء على سطح الكرة الأرضية، وهى نفسها النسبة بين الأجزاء الصلبة والسائلة فى جسم الإنسان..

(٣) عند تقديم الأعداد الموجهة الصحيحة يمكن ربطها بمعلومات عن قمة أعلى جبل وعمق شاطئ بحر، مثلا قمة إفرست ٨٨٤٨ م أعلى سطح البحر وعمق شاطئ البحر الميت ٤٠٠ م تحت سطح البحر.

(٣) عند تقديم الدالة التربيعية يمكن ربط شكلها البيانى بمسار حركة دولفين أو ماء من نافورة أو فك أسنان...

(٤) عند تقديم الدوائر المتحدة المركز يمكن ربطها بمقطع ساق شجرة كشكل تقريبى (شكل (٥٢) ب)

(٥) ربط النظام العدى الثنائى بالانقسام الثنائى للأميبا.

(٦) ربط الأعداد الكبيرة بعدد الثوانى فى السنة، وبعد الشمس عن الأرض وعن الكواكب الأخرى...

(٧) ربط المعادلات التفاضلية بنماذج منحنيات النمو والاخماد والنموذج اللوجستى [للبلجيكى فيرهيلست].

هذا ويمكنك الاستعانة بمعلومات فى كتب البيولوجى، وفى الانسكلوبيديات) ومن مواقع من الطبيعة فى الأنترنت وربطها بالأفكار الرياضية التى تقدمها...

ب - كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية بإثارة وتوضيح الديناميكية (الحركة والتغير).

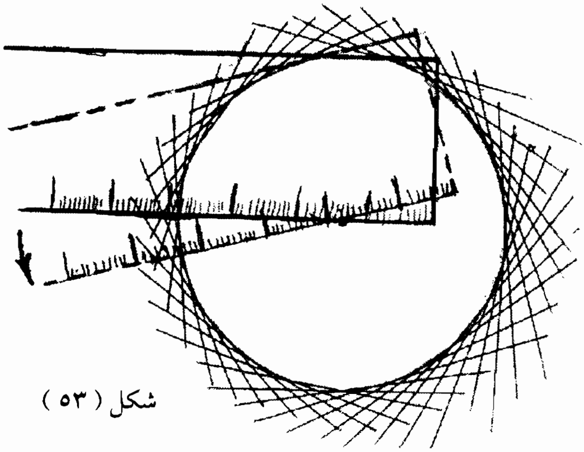
أول ما يتبادر إلى الذهن هو تطعيم تدريس الأعداد المركبة وحل المعادلات المركبة ببعض ما قدمناه عن حلول المعادلة $Z^3 - ١ = 0$ والدالة التربيعية $Z \rightarrow Z^2 + C$ واستخدام الكمبيوتر فى توضيح ديناميكيات تصرف النقط بالقرب من جذور المعادلة أو حدود الدالة التربيعية ،والهيوليه chaos التى تسبق ظهور فراكتالات جذور المعادلة أو مجموعة ماندلبروت ومجموعات جوليا.

فى الواقع كان الدافع وراء إختراع الرسوم المتحركة الكمبيوترية للعالم الرياضى والفنان والموسيقى المعاصر بلن Blenn هو جعل الرياضيات ممتعة فى تعلمها وفى فهمها. حيث حرك دافعيته كتاباً يحوى رسوم كاريكاتيريه قرأها فى شبابه جعله يفهم النظرية النسبية. وعلى ذلك فالإحساس بالحركة والتغير يزيد من متعة المتعلم بحيويه ما يتعلمه.

والواقع أن الاحساس بالرياضيات ككائن متحرك يمكن أن تنميه ليس فقط عن طريق تحرك الأشكال بالتحويلات الهندسية أو عن طريق العمليات الانشائية ورسم المحل الهندسى. وأيضا عن طريق تنمية الاحساس بتحرك النقط أثناء رسم الأشكال الهندسية والبيانية سواء بأدوات الرسم العادية أو بالرسم والحركة بالكمبيوتر. وأيضا عن طريق التجزئ والتشكيل dissection وتكوين الأشكال .. فمثلاً:

(١) عند رسم قطعة مستقيمة (أو شكل هندسى بسيط) نتيح الفرصة للطفل (المتعلم) أن يستشعر حركة سن القلم محاذياً للمسطرة كأنه يحرك نقطاً مستقيمة متعاقبة.

(٢) عند زيارة الملاهى نتيح الفرصة للطفل مشاهدة العجلة الدائرة الرأسية قبل الركوب وهى ساكنة ثم وهى تتحرك وتزداد سرعتها كتمهيد لرسم الدائرة من نقط متحركة. وكذلك كتمهيد لتحويل الدوران. كما نوحى له وهو يرسم الدائرة بالبرجل كأنه يعبر النقط المتحركة حول محيطها أثناء الرسم أو يمكن رسم الدائرة كغلاف لمستقيمات باستخدام مسطرة متحركة تمس نقطة من جانب وترسم قطعة مستقيمة من جانب آخر شكل (٥٣).



شكل (٥٣)

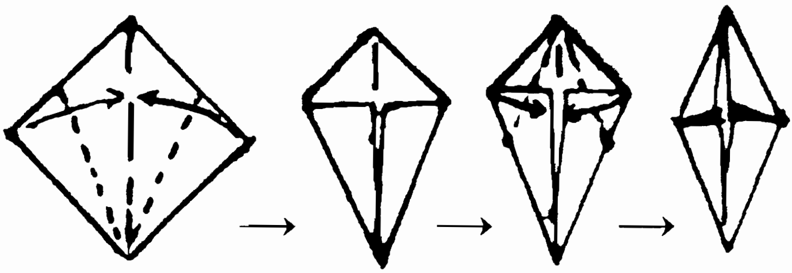
(٣) عند رسم الدالة الخطية نعطى نفسي الانطباع للنقط المتحركة التى يرسمها القلم فى تعاقب لتمثيل الدالة بيانيا. وعند رسم الدالة ص = م س + ١ أو ص = س+جـ بتغيير قيم البارامتر م نوحى بالتحرك الموازى للمستقيم، وبتغيير قيم البارامتر جـ نوحى بالتحريك الدورانى للمستقيم.

(٤) عند رسم الدالة التربيعية ص = أ س٢ نوحى بتحريك فرعى القطع المكافئ من قرب إلى بعد بتغيير قيم البارامتر فى كل حالة من كسر موجب أقل من ١، ثم أعداد صحيحة موجبة وكذلك بالنسبة للدالة الأسية ص = أ^{س} وتغيير قيم البارامتر أ وهكذا.

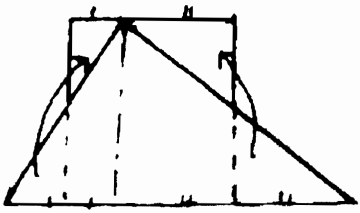
(٥) عند عمل الأشكال الهندسية المجسمة من شبكة (تغريد) مستويه (كشبكة مكعب من ست مربعات، يمكن توضيح الحركة من خلال الرسم (كمجموعة متحركة للنقط على حدود الشبكة) ومن خلال الطى واللصق فى عمل الجسم. وكذلك يمكن توضيح الحركة عند استخدام نماذج تجزئ الهرم وإعادة تركيبه.

(٦) يمكن استخدام التجزئ والتشكيل فى توضيح قاعدة مساحة شكل أو نظرية (مثل نظرية فيثاغورث) لاثارة التغير والحركة كخاصية أساسية فى تكوين الأشكال الرياضية شكل (٥٤) أ.

(٧) استخدام طى وثنى وفرد الورق فى عمل أشكال هندسية أو التوصل لعلاقات رياضية بالقص واللصق يوضح أيضاً الديناميكية (والاحساس بالتغير والحركة) شكل (٥٤) ب.



(أ) عمل معين من طى ورقة مربعة



(ب) التوصل إلى قاعدة مساحة مثلث

شكل (٥٤)

(٨) الاستعانة بوسائل Geometric Sketch pad , Gava Sketch pad الإلكترونية تظهر ديناميكية النماذج الهندسية بالكمبيوتر.

وعموماً البرمجيات لتحريك الأشكال الهندسية أو التى تظهر الحركة فى تكوينها أو عرضها تضفى مزيداً من الديناميكية التى تؤدى إلى مزيد من الاستمتاع فى التعلم.

جـ - كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية بجعلها أكثر إنسانية.

تمشياً مع ماقدمناه لتوضيح أن هندسة الفراكتال أكثر إنسانية، فإن جعل الرياضيات المدرسية أكثر إنسانية مثلها يأتى عن طريق إتاحة الفرص للتلميذ (المتعلم) أن يصنع ويعمل الرياضيات بمفرده أو بالاشتراك مع غيره،وان يشعر أن الرياضيات تخاطب عقله ووجدانه وإحساسه وخياله بما يدفعه لتعلمها وليتذوق جمالها فى العقل والقلب.

وعلى ذلك فالطرق التى تساعد على الإكتشاف والإبتكار كالطريقة المعملية.. أو طريقة مساعدة الأقران أو التعلم التعاونى تساهم فى تنمية شعور المتعلم بأن الرياضيات إنسانية لأنها من صنع الإنسان، وهى إجتماعية يشترك فى صنعها أكثر من فرد.

أما جعل الرياضيات المدرسية ممتعة للعقل والوجدان فيكون عن طريق توجيه الأهتمام والتشوق لجمالها الظاهر فى أنماطها العددية والهندسية، بالاضافة إلى توفير الفرص لمساعدة المتعلم على النجاح فى والاستقراء واكتشاف مفاهيمها وأفكارها من هذه الأنماط. كذلك توجيه الاهتمام إلى جمالها الباطن فى استدلالاتها ومنطقتها وقوانينها، واستخدام المداخل التى تبسط الرياضيات تتيح للمتعلم استيعابها بحب وتقدير.

الاحساس بالجمال الرياضى يمكن تنميته أيضا عن طريق الاحساس بعبق الماضى الذى يختص بإعادة ذكرى من ساهموا فى صنع (ابتكار) بعض موضوعات الرياضيات المدرسية وحكاياتهم حول نشأتها. وأيضاً عن طريق ربط الرياضيات بالفنون (الموسيقى التى كانت جزءاً من الرياضيات حتى القرن ١٦ ثم استقلت عنها،

الرسم، النحت، الزخرفة، القديمة لقدماء المصريين والزخرفة الاسلامية والزخرفة الحديثة ....

وعموماً فالأنشطة الرياضية تسهم مساهمة كبيرة فى تنمية الرياضيات الانسانية وذلك لما تتضمنها من ألغاز محيرة، وألعاب، وأنماط، وتشكيلات، وأعمال مبهرة مشوقه للرياضيين (كما سوف نوضح فى الجزء الثانى بإذن الله: معلم الرياضيات وتجديدات فى الأنشطة). كما أن التطبيقات الحيوية (غير المصطنعة) الحقيقية والمشاكل التى تثيرها تتطلب إحساس أكبر فى حلها بالطرق الرياضية الحالية أو المجددة.

٦-٣ : توظيف هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتيه.

يتميز عصرنا بأنه عصر المعلوماتيه نظراً للانفجار المعرفى والمعلوماتى، والتقدم التكنولوجى الكبير فى أجهزة الكمبيوتر والإتصالات، الذى أتاح التعامل مع تخزين واسترجاع ومعالجة الكم الهائل من البيانات والمعلومات وتداولها وإنجاز الأعمال المتعلقة بالمعلومات بدقة بالغة وسرعة كبيرة . كما أدى التطور الهائل فى أنظمة المعلومات، وأنظمة الخبير expert system التى تعتمد على قواعد معرفية ومنطقيه، إلى محاكات العقل والسلوك الإنسانى للقيام بأعمال وسلوكيات ذكية تخدم مجالات متعددة علمية ورياضية وتعليمية وصناعية وتجارية...

وقد رأينا أنه لولا التقدم التكنولوجى الكبير لنظم المعلومات أو بالأحرى الكمبيوتر ما كانت لتتبلور وتظهر هندسة الفراكتال. من هذا المنطلق نوضح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتية والأستفادة من ذلك لتصور كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر معلومايته.

٦-٣-١ : توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه.

نحاول توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه من خلال إبراز اقتران اتضاح وتكوين وتفسير أفكارها وتطبيقاتها بالكمبيوتر (برمجيات + hard ware). وذلك بإعتبار الكمبيوتر بإمكانياته المتقدمة كنظام معلوماتى فمثلا:

(١) تكويـن الفراكتـالات من المولد بـالتكرار المرحـلى أو بأنظـمة الدوال المرحـلية الـتكـرار IFS أو فراكتالات الجاذب الغـريب يمكن إظهارها وتوضيـح عملية تكوينها عن طريق الكمبيوتر.

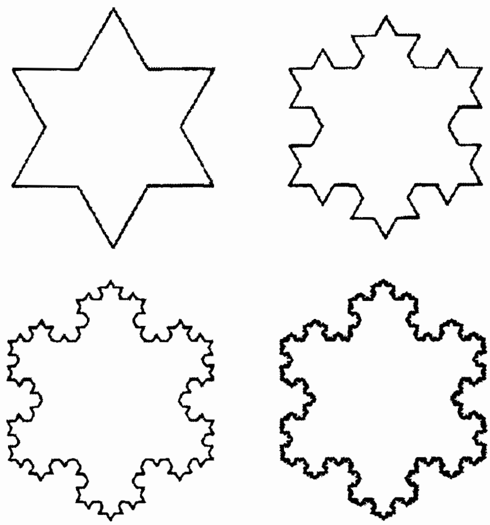
(٢) إمكانات الكمـبيوتر المتطورة استطاعـت إظهار الفراكتالات البديعـة: مجموعة ماندلـبروت. مجموعات چـوليا. وفراكتالات حـلول المعادلات المركبـة خاصة التكعيبية.

(٣) يمكن عمل برامج كمبيوترية بأسطر قليلة لإنتاج الفراكتال مثل:

برامج بلغة اللـوجو لعمل فراكتالات مشهورة أنظر شكـل (٥٥) برنامج لعمل فراكتال (منحنى) كوخ لرقائق الثلج.

- برنامج لعمل فراكتال (مجموعة) جوليا بلغة البيسك انظر شكل (٥٦) الذى ينتج الشكل (٦) بالفصل الثالث.

- برنامج لعمل فراكتال (مجموعة) ماندلبروت بلغة البيسك أنظر شكل (٥٧) الذى ينتج الشكل (٧) بالفصل الثالث.



Logo Code	Comments
to flake : n pu ht rt 60 bk 90 It 30 pd make "* 1 repest: n [make " * 3*:* make "1200 / :* repeat 3 [Ifelse :n = 0 [fd:I] [line : n : I] rt 120] pu home pd setfc : n fill end to line : n : I ifelse : n = 1 [fd :I it 60 fd:1 rt 120 fd : I It 60 fd : I] [line n: - 1 :1 It 60 line :n-1 : rt 120 line : n -1 : I It 60 line : n - 1 : I] end	The name of the main procedure is to flake :n. The notatiin : indicates a variable requiring a keyboard input. entered as flake 1. flake 2. flake 3. and so on. The length of the original segment is set by make "I 200 / : * The original triangle is drawn by repeat 3 [ifelse : n = 0 [fd:I] [line : n : I] rt 120] Do not insert a carriage return in this line. The body of the procedure to line :n :I is a single line.Do not insert carriage returns at the end of first. second. or third lines.

شكل (٥٥) برنامج بلغة اللوجو لتكوين فراكتال (منحنى) كوخ لرقائق الثلج[٨]

List of the BASIC program JULIA

```
10 XS % = 80: YS % = 128: NIT % = 200 : M = 4
11 REM These specify the numbers of steps for x,y : the maximum number of
    iterations : and the effective size of infinity
20 INPUT "AR. AI". AR , AI
21 REM These are these are the real and imaginary parts of a
30 INPUT " XMIN, XMAX, YMIN, YMAX", XN, XX, YN, YX
31 REM These specify the rectangle of the complex plane for z = x + iy
40 MODE 0
50 GAPX = ( XX - XN ) XS % : GAPY = (YX - YN ) / YS %
51 REM These evaluate the steps for x and y
60 FOR NY % = 0 TO YS % - 1
70 FOR  NX % = 0 TO XS % - 1
80 X = XN + GAPX * NX % :Y = YN + GAPY * NY % : COUN % = 0
81 REM This specifies the coordinates of the pixel (in the complex z - plane )
    whose colour must be found next
90    COUN % = COUN % + 1
100 X2 = X X : Y2 = Y Y
110 Y = 2 X Y + Al : x =    X 2 - Y2 + AR
111 REM Lines 100. 110 replace z = x + iy by z^2 + a
120 IF X 2 + Y2 < MAND COUN % < NIT % THEN GOTO 90
121 REM X2 + Y2 = 1 = 1^2
130 C % = 7 COUN % NIT %
140  GCOL 0.7 - C %
141 REM Lines 120 - 140 determine crudely the colour of the pixel according
    to how many iterations COUN % it has taken for / z /^2 to exceed M . a
    rough estimate of infinity.
150 PLOT 69 NX %  8 . NY % 4
160    NEXT NX % NEXT NY %
170 STOP
```

you need to answer the cuc (line 20) by typing in the real and the imaginary parts of a to specify the set. The next four numbers specify the Cartesian coordinates of the four vertices of the rectangle in the complex z - plane in which the program will represent the Julia set. You might try, for your first run. to type in 0 . 32, 0.043 and thereafter - 2 ., 2., - 1.5, 1.5, For your second run try typing in - 0. 12375, 0.56508 and thereafter - 2., 2., - 1.5. 1.5. Then you might care to experiment for yourself.

شكل (٥٦) برنامج (جوليا) بلغة البيسك وأسفله ارشادات للتشغيل[٤]

Table 3 . 5 List of the BASIC program MANDEL

```
10 RS % = 80 : IS % = 128 : NIT % = 100 : M = 4
11 REM These specify the numbers of steps for ar, a, : the maximum number
   of iterations: and the effective size of infinity
20 INPUT " ARMIN. ARMIN. ARMAX, AIMIN, AIMAX" ARN. ARX.
   AIN. AIX
21 REM These specify the rctangle of the complex plane for a = a. + ia.
30 MODE 0
40 GAPR = ( ARX - ARN ) RS % : GAPI = ( AIX - AIN ) IS %
41 REM These evaluate the steps for a. and a.
50 FOR NI % = 0 TO IS % - 1
60 AI = AIN + GAPI NI %
70 FOR NR % = 0 TO RS % - 1
80 AR = ARN + GAPR NR %
81 REM This specifies the coordinates of the pixel ( in the complex a- plane
   ) whose colour must be found next
90 X = 0 : Y = 0 : COUN % = 0
100 COUN % = COUN % + 1
110 X 2 = X X : Y2 = Y Y
120 Y = 2 X Y + AI : X = X2 - Y2 + AR
121 REM Lines 110, 120 replace z = x + iy by z ^2 + a
130 IF X 2 + Y2 < M AND COUN % < NIT % THEN GOTO 100
131 REM X2 + Y2 = / z / ^2
140 C % = COUN % / 10
150 IF C% = 5 THEN C% = 4
160 IF C % = 6 OR C % = 7 THEN C % = 5
170 IF C % = 8 OR C % = 9 THEN C % = 6
180 IF C % > 9 THEN C % = 7
190 GCOL 0 , 7 - C %
191 REM Lines 140 - 190 determine the pixel colour from the value of
   COUN %
200 PLOT 69. NR % 8, NI % 4
210 NEXT NR % : NEXT NI %
220 STOP
```

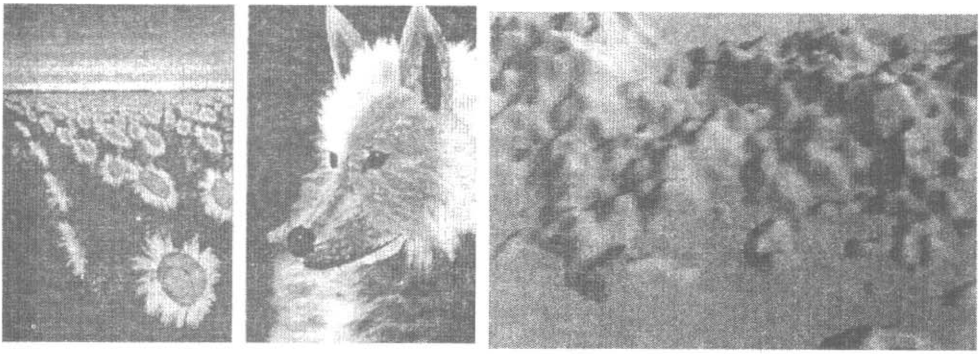
TO run tdhe program you need to answer the cue (line 20) by typing in four numbers to specify the Cartesian coordinates of the four vertices of the rectangle in the complex a- plane in which the pro - gram will plot the Mandelbrot set. You might the input - 2 . 25, 2 . 25, - 1.25, 1.25 for a start, and for your next run- 1.23, - 1.1, 0.25, 0.358 to emulate Fig . 3.13.

شكل (٥٧) برنامج (ماندل) بلغة البيسك وأسفله ارشادات للتشغل[٤]

(٤) استخدام فنانين لبرمجيه الفراكتال أنتج لوحاً فنية متعددة فريدة بذوق عصرى أنظر شكل (٩) الفصل الثالث.

(٥) تطبيقات حيوية لهندسة الفراكتال مثل استخدامها لمحاكات الظواهر الطبيعية جعلها تسهم فى إمكانية عرضها. وبدونها كانت ستأخذ مكاناً للتخزين كبيراً جداً يستحيل إيجاده حتى فى الأجهزة الحديثة.

(٦) استخدام هندسة الفراكتال فى تكوين الصور الفرضية لخلفيات أفلام القصص الخيالية التليفزيونية والسينمائية. أنظر شكل (٥٨) الذى يبين استخدام هندسة الفراكتال فى عمل بقعة أرض خيالية كخلفية لأحد أفلام الخيال العلمى.



شكل (٥٨) فراكتال بقعة أرض

٦-٣-٢ : استفادة معلم الرياضيات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتية :

على نفس المنوال الذى وضحنا فيه أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه، بإقتران تكوين مفاهيمها وأفكارها وتطبيقاتها بالكمبيوتر كنظام معلوماتى نقدم بعض التصورات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتية ، مثل

(١) معظم الكتب المدرسية متوفرة على أقراص CD. Rom . ولو أنها نسخة الكترونية غير مشوقه (ولها عيوب الكتب المدرسية الحالية) ألا أن المعلم يستحسن أن يشجع استخدامها.

(٢) الأستعانة ببعض الكتب الأجنبية التى يصاحبها CD. Rom لتوضيح الأشكال وتحريكها واستخدام الزوم ولعرض ديناميكيات عمل النماذج الهندسية ولإمكانية عمل الوصل Link مع مواقع انترنت . بحيث تحوى هذه الكتب موضوعات رياضية لها علاقة بالرياضيات المدرسية.

(٣) تشجيع التلاميذ على إستخدام power point والبرمجيات التى تساعد على تحريك الأشكال والنصوص وإنتاج الرسوم على خطوات.

(٤) تشجيع الزيارة والأستعارة من المكتبات الالكترونية مثل الموجودة فى مراكز سوزان مبارك الاستكشافية والمرتبطة بموضوعات فى الرياضيات المدرسية.

(٥) تشجيع التلاميذ على إنتاج الرسوم الهندسية والأشكال البيانية والأشكال الإحصائية وجداولها باستخدام الكمبيوتر.

(٦) إستخدام مواقع تعليم الرياضيات على الإنترنت.

(٧) تشجيع التلاميذ والزملاء المعلمين على عمل search بالكمبيوتر لموضوع مرتبط بما فى الرياضيات المدرسية.

(٨) تشجيع التواصل مع المعلمين والتلاميذ بالخارج على الدردشة chattaing حول موضوعات وأفكار وأساليب تدريس وعرض الرياضيات المدرسية.

(٩) يوجد العديد من الكتب الأجنبية والمجلات متوفرة على مواقع بالانترنت، يمكن الأستفادة منها فى المجالات القريبة من الرياضيات المدرسية وتدريسها يمكن أن يستفيد منها المعلم ويفيد تلاميذه بها.

٦-٣-٣: الأستفادة من هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر إتاحة.

يرتبط هذا البند بالبند. السابق وقد ذكرنا فيما سبق (الفصل الثانى) وجود ١٨٠٠ موقع على الأنترنت يخص هندسة الفراكتال منها مئات الكتب في هذه الهندسة. وهذا يعكس أن هندسة الفراكتال أكثر إتاحة access. وبالتالى الرياضيات المدرسية يمكن أن تكون أكثر إتاحة عن طريق التعرف على بعض مواقع الأنترنت

التى تغذيها. وأيضاً توفير المراجع والكتب والمجلات المصاحبة للرياضيات المدرسية، مع تسهيل الاتصالات بالمكتبات المدرسية والثقافية والمكتبات المحلية القومية . وبالإضافة لمواقع الأنترنت التى قدمتها مع مراجع الفصول السابقة أقدم بعض المواقع الأخرى.

ـ مع ملاحظة أنه يمكن استخدام هذه المواقع بدون كتابة //:http فى البداية.

(١) بعض مواقع على الأنترنت تخص هندسة الفراكتال:

- Bogomonlym A : “fractal curves Dimension”
  http : // cut. theknet . com / do - you - know/ hilbert. html
- fractal coast - lines
  http : // polymer . bu . edu / java / java / coastline / coastline. htm
- Mandlebrot, B., 1982 : The fractal Geamtry of Nature
  http // www. soft ronix . com/

(٢) بعض مواقع على الأنترنت تخص كتب تاريخية واثرائية وتعليمية للرياضيات الدرسية

- http : // www - history. mc. st and . ac. uk/ Hist topics / Babylanion and Egyptian. html
- http : // www. history . mecst - and ac. uk / Mathenematicians / pythogoras . html
- Brundige, E . N. 1996 . The library of Alexandria.
  http : // www. persus. tufts . ed / Greek science/ studets / Ellen / Museum. html
- Abraham, R. H: The Visual Elements of Euclid
  http : // thales. vismath . org / euclid
- http : // www. NCTM. org
- http : // www. math. rice. ed
- The Ontari curricalum, Grades 1 - 8 (1997) Mathematics
  Ministry of Education and training, Ontari
  http : //www. ed . gov . on . ca
- van de walle, J (2001) Elementary and middle school mathematies : Teaching development , 4 Ed Addisan wesley, Longman Newyork . N7

http://mathworld.wdfram.com/leastsquaresfitting.com

http://www.maa.org/Fractals/Welcome.html

http://www.maa.org/Fractals/Panoram/Welcome.html

http://www.mathoorks.com

٦-٣-٤ الأستفادة من هندسة الفراكتال الأكثر واقعية فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر واقعية.

ما يقرب الرياضيات من الواقع reality هو أن تجعلها ذات معنى للمتعلم، وذات دلالة عملية ملموسة فى الحياة، وذات نفع (وصلة) فى تطبيقات تمس أرجاء الحياة أو فى التطبيقات الواقعية (غير المصطنعة) فى العلوم والمعرفة. بالإضافة إلى أنها تعيش (ذات دلالة فى) الواقع الحضارى الثقافى.

بعيداً عن الشكلية والطبيعة التجريدية الجافة للرياضيات نجد أن هندسة الفراكتال بالرغم من أنها متحدية challenging ألا أنها بإمكانية إتاحتها وتبسيطها لتكون فى المتناول. بالإضافة إلى تطبيقاتها فى العلوم الأخرى ومحاكات الطبيعة وعمل الصور الفرضية لمحاكاة الطبيعة، وأيضا لطبيعتها الحيوية والإنسانية نجد أن ذلك يبرر أنها أكثر واقعية

ويمكن الأستفادة من واقعية هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر واقعية هو ما قدم فى النقاط السابقة بالإضافة إلى:

(١) العمل على أن تكون للرياضيات معنى للمتعلم. وأركز هنا على على توفير الفرص للمتعلم ليجعل الرياضيات ذات معنى له وبما فى ذهنه فليس بالضرورة آن تكون الرياضيات ذات معنى عند المعلم (أو المؤلف للكتاب المدرسى) أن تكون أيضا ذات معنى للتلميذ الا إذا كان التدريس من القلب والمعلم متعلق بتلاميذه يحس إحساسهم ويفهم بعقولهم.

وفى الواقع يجمع البنائيون constructivist (مثل بياجيه) والسيكلوجين المعاصرون مثل فايجوتسكى Vygotsty هو أن ما يتُعلم هو ما يكون له معنى عند المتعلم. أو أن التعلم هو البحث عن المعنى. وما دمنا ذكرنا المتعلم فهو مركز التعلم. وما على المعلم إلا إتاحة الفرصة للمتعلم لتزويده بخبرات متكاملة وإبتكارية ومتفردة وهادفة بطرق مختلفة. وذلك ليساعده على تكوين معنى للرياضيات وتكوين بتواصله مع الآخرين معنى للمواقف ولتكوين معنى لتصرفات actions الناس والأفكار.

ويوجد عدة أساليب لتنمية المعنى للرياضيات عند المتعلم ومنها ما قدمه فلويلنجFlewelling (٢٠٠٢) عن طويق الأعمال التعليمية الثرية

rich learing tasks . والأعمال التعليمية الثرية هى التى تعطى التلاميذ الفرصة لكى:

- يستخدم ويتعلم أن يستخدم المعرفة بطريقة هادفة عصرية إبتكارية متكاملة ليدير الاستقصاءات والتساؤلات، والبحث investigation والتجارب لحل المشكلات ومن خلال ذلك : يكتسب المعرفة بفهم (المعرفة كمادة وكعملية للحصول عليها) وينمى اتجاهاته وعادات تكوين المعنى مدى الحياة.

أما جيوجهيجان فهو يركز على العلاقات كأساس لتنمية تفكير الطفل الرياضى وأن كل من المتعلم (التلميذ) والمعلم يسبحان navigate فى المعرفة من خلال البحث والتفتيش search عن المعنى. حيث يفتش التلميذ عن المعنى ويفتش المعلم عن فهمه لمعنى الرياضيات عند التلميذ. وعلى ذلك فالتعلم ظاهرة إبدالية

(إنعكاسيةReflexive) بين المتعلم والمعلم تنشأ على أساس العلاقة التى تأتى عن طريق النواحى الأجتماعية والنشاطية والإجراءات الأبتكارية.

وعلى ذلك فتأسيس المعنى يتطلب من وجهه نظرهم إيجابية من جانب المتعلم وتوفير أنشطة ثرية وفهم للمعنى الذى يكونه التلميذ عن الرياضيات.. من جانب المعلم. وهذا ضرورى ولكننى أرى أن مساعدة التلميذ لتكوين معنى للرياضيات

يكون على أساس تنمية وتكامل الإحساس مـع الأفكار مع العمل فى مناخ إجتماعى دافئ يجمع الزملاء التلاميذ والمعلم. فمثلا منذ ٢٠ عاماً قدمت طريقة يستطيع الطفل من خـلالها إعطـاء الاحساس والمـعنى لـعدد المليـون. وفيهـا يشتـرك مجموعـة من الأطفال عدد حبـات القمح فى مكيال (وعاء) معـين مملوء بالقمح ثم اشـتراكهم فى صب عدد مـن المكاييل فى مـكان فيجدوا أن ملـيون جنيه قمـح تعمل كومة كـبيرة. وبذلك ينمو إحساسهم بكبر عدد المليون مقـرونا بمعرفتهم عنه وبعملهم فى التوصل إلى معناه.

وعلى ذلك يـمكن مساعدة الـتلميذ علـى تكوين معنـى للرياضيات عـن طريق إتاحة الفرصة له ومناقشـته فى توضيح روابطها connections مع الحياة ومـع العلوم الأخرى.

(٢) الأستفادة من المداخل المشتـقة من رياضيات الشـارعstreet math وقد تسـمى الرياضيات غير الرسمية أو العرقية. وهى الرياضيات التى يستخدمها الأميون أو غير المـتعلمـين تعلـيماً نظـامياً لهـا. مثل البـائعين والـشرائيـن فى تعامـلاتهم الحسابـية، والحرفيين فـى استخداماتـهم للمقايـيس والتكبـير والتصغيـر وعمل الماكيتات فى إنـتاجهم والزراعيين فى استخدامـاتهم فى المسحsurvey والـرى وبـــذر البذور فى أحـواض تعتمد بطـريقة غير مباشـرة على التقسـيم الرأسى والأفقى (كالمواقع فى الهندسة التحليلية) وعلى التوازى..

(٣) تشجيـع استخدام النمـاذج والأجهزة التركيبـية والوسائل المعيـنة التعليـمية فى تقريب وتبسيط وتفسير وإعطاء معنى ملموس للأفكار الرياضية المجردة

(٤) استخدام طرق منبثقة من رياضيات الشـارع تقوم على الاستخدام الشفهى أكثر من الأسـتخدام الـكتـابى مثـل الحساب الـشفهـى أكثر مـن الحسـاب الكتـابى. المعالجـات الذهنية والتـصورية قبل المعـالجات الرياضيـة الصارمة.. فهذا يـعطى فرصة للتواصل والتلفظ غير الرسمى الذى يمهد للتجريد.

(٥) استخدام الأنشطة والألغاز والألعاب والرحلات لملاحظة الرياضيات فى الأشياء بالبيئة والمصانع والمزارع وأماكن الصيد والأماكن التجارية.. وعند المناقشة مع الخبراء فيها.. حيث يجد التلميذ أن معظم اللغة التى يستخدمها بالأرقام أو الصور أو الرسوم الرمزية.. بالإضافة إلى أن تعاون التلاميذ فى الإعداد للرحلة وتحديد الإشتراكات والمصروفات كلها تلزم تعاملات رياضية. وكذلك الإجابة على بعض الأسئلة والأستفسارات مثل رسم مسار طريق الرحلة، زمن الرحلة الذى أخذته، السرعة المتوسطة التى يسير بها أوتوبيس الرحلة، أعداد الزائرين للموقع.. تقدم تطبيقات واقعية ملموسة للرياضيات فى الحساب والرسوم الرياضية والإحصائية.

(٦) تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية والرياضيات فيما حول التلميذ فى الصناعة والتكنولوجيا الحديثة على غرار ربط الرياضيات بالطبيعة، حتى يعيش التلميذ الرياضيات فيما حوله. فمثلا عند تقديم الداله من الدرجة الثانية فى مجهول يمكن ربط تمثيلها البيانى لقطع مكافئ بسلك متدلى أو عقد أو أبوة لكوبرى أو بشكل معمارى..

(٧)تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية والرياضيات فى الفيزياء أو العلوم الكيمائية والبيولوجية وعلوم الفضاء وتوجد أمثلة لا حصر لها لهذه الروابطء connections . وكذلك تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية وكافة المواد المعرفية والفنية التى يدرسها التلميذ (المتعلم) فمثلا فى دراسة قصة معينة يطلب من المتعلم رسم موقع فى أحد أحداثها..

(٨) التأكيد على تنمية الحماس والتحدى والمثابرة والتشوق فى دراسة أى موضوع فى الرياضيات المدرسية، وتشجيع البحث والتفتيش فى مصادر المعرفة من كتب ومجلات ومواقع على الأنترنت.. لما له علاقة بما يدرسونه التلاميذ فى الرياضيات.

(٩) وأخيراً التأكيد على تنمية استقلالية التعليم وتنمية النواحى الابتكارية التجديدية فى التلاميذ والمعلمين على السواء.

٦ - ٣ - ٥ : الأستفادة من هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حداثة

قد نتفق جميعاً لتحقيق هذا الهدف أن نقوم بتطعيم الرياضيات المدرسية بهندسة الفراكتال وبزرع وتنمية الفكر المعاصر الذى أنتجها سواء بإدخال أجزاء منها رسمياً فى المقررات أو من خلال عمل الروابط connections بموضوعات ذات علاقة ببعض أفكارها، أو من خلال تقديم بعض أفكارها ومفاهيمها وأشكالها كنشاط غير رسمى أو كنشاط ترويحى مصاحب أو كنشاط ثقافى حر. ويمكن الأستعانة بما جاء فى الفصول المختلفة لهذا الكتاب. بالإضافة إلى ما أثار تطلعاتك فى التعلم الاستقلالى لك لدراسة المزيد عن هندسة الفراكتال والتعمق فيها أو دراسة رياضيات عصرية أخرى مثل الهندسة غير الابدالية، هندسة حدوة الحصان، النظم الديناميكية غير الخطية...

عموماً يمكن الإستعانة أيضا بالمراجع والمواقع للأنترنت للفصول المختلفة لاختيار الروابط فى الرياضيات المعاصرة الأكثر لياقة تطعم بها الرياضيات المدرسية كمادة وفكر.

تعقيب (٦) تضامين وانعكاسات حول تنمية الابتكار التدريس لمعلم الرياضيات

أترك لك كتابة هذا التعقيب بصدق وبعقلية إبتكارية حاولت تنميتها فيك. وذلك من خلال الانطلاق نحوب الماضى والحاضر فى عالم الرياضيات ونجوب الكون فى السماء والبحر لنستكشف هندسة الفراكتال وجذورها ونجوب علوم وتكنولوجيا الحاضر لنتعرف على دلالة هندسة الفراكتال ثم نرسو على واقعنا بين الحين والحين لنعمل دفعه نستعيد فيها حماسنا ومقدراتنا الابتكارية الرياضية لتحسين وضع الرياضيات المدرسية وتدريسها . وقد حاولت أن أتقرب من المعلم القارئ وأعيش مع تفكيره وأضع نفسى فى مكانة كأننى أحاول معرفة وتعلم ما أقرأه فى فصول هذا

الكتاب لأول مـرة. فالمادة الرياضية الـعصرية الجديدة عـليك فى هذا الكتـاب ليست بالـسهلة ولا بـالصعبـة وهى تتطـلب الانغـماس والتركـيز والتحـدى والمثابرة لـكى تتابعها. وقد بذلك مجـهوداً كبيرا لتيسيرها لك استنفدت فيهـا : خبراتى الطويلة فى تبسيط الـرياضيات العالية المتـقدمة (للصغير والكبـير) لتنمية الإبتكـار الرياضى وفى استخدام مدخل التدريـس من القلب النابع من المنهج الإنسانى لأتـفهمك من القلب حتى يكون عرض المحتوى منطقياً وإنسانياً وقريبا منك بقدر الإمكان.

كما إسـتغللت ثمـرة أعمالى فى تنـمية العبقـرية المجددة وفى الاختراع الـرياضى لأقدم المحتوى بأساليب ومداخل متعددة تنمى الابتكار التدريس لك.

والآن إقرأ مرة أخرى هذا الفصل وحاول كتابة انعكـاساتك التى تشعر بها بقلبك وتتفهـمها بعقلك وتـدفعك إلى أعمال ابتكـارية فى التدريس وفى اصـلاح وتحسين وتجديد واقع الرياضيات المدرسية. وفقك الله.

المراجع

١ - أ . د / نظلة حسن أحمـد خضر (٢٠٠١) : أصول تدريس الرياضيات، - القاهـرة - عالم الكتب ط / ١٠ .

٢ - أ . د / نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢) قضايا ومشكلات فى التربية العملية، القاهرة - عالم الكتب ط - ٣ .

٣ - أ . د / نظلة حسن أحمد خضر وآخرون : طرق تدريس الرياضيات (١) كتاب حكومى يصدر سنوياً لتأهيل معلمى المرحلة الابتدائية - هيئة الكتب - وزراة التربية والتعليم.

4) Drazin. P . G (1993) : "Non linear Systems"
uk - cambridge univ . press

5) Geoghegan. N (2002) "Learning Mathemtics"
SEARCH FOR Meaning"
Proceedings of the International conference - the
Humanistic Renaissance in Matematics Education - The
Mathematues Education into the 21 st century project P . P 141 - 144

6) Flewelling . G (2002) we need tasks that support
sense making.OP - cit pp. 130 - 134.

7) Maganzini c (1997) Cool Mathematics
US. Price Stern Sloan Inc.