الوحدة الثامنة

الزمر في الطبولوجيا [1]
Groups in Topology

[1] الوحدة الثامنة ليست متطلبًا لبقية الكتاب.

الفصل 41 مركب المبسطات والزمر الشباهية Simplicial Complexes and Homology Groups

تحفيز

تهتم الطبولوجيا بالمجموعات التي نملك عنها فكرة كافية، وإلى أيّ حدّ يجب أن تكون نقطتان فيها قريبتين من بعضهما؛ لنتمكن من تعريف دالة متصلة، فنقول عن اثنتين من هذه المجموعات – أو الفضاءات الطبولوجية إنّ لها البنية نفسها، إذا وجدت دالة أحادية غامرة من إحداهما للأخرى، بحيث إنّ كلا الدالة ومعكوسها متصل، وببساطة، فهذا يعني أنّ أحد الفضاءين يمكن أن يوسع، أو يلوى، أو يشوّه بطريقة أخرى من غير أن يشق أو يقطع، ليبدو تمامًا مثل الآخر؛ إذن، الكرة الكبرى طبولوجيًّا لها البنية نفسها لكرة أصغر، ومحيط الدائرة له بنية محيط المربع نفسها، وهكذا، حيث تسمى الفضاءات ذات البنية المتشابهة بهذا المعنى **متماثلة استمراريًّا** (***homeomorphic***). نأمل أن يدرك الطالب أنّ مفهوم التماثل المستمر في الطبولوجيا بوصفه مفهوم التماثل (حيث المجموعات لها البنية الجبرية نفسها) في الجبر.

المشكلة الرئيسة في الطبولوجيا هي إيجاد شروط ضرورية وكافية ومفيدة – مختلفة عن مجرد التعريف – لفضاءين ليكونا متماثلين استمراريًّا، بوجه عام، يصعب إيجاد الشروط الكافية، بينما الشروط الضرورية متوافرة وسهلة، ولكنّ بعضها مهمّة جدًّا ومفيدة، والفضاء "الظريف" تُربط به أنواع متعددة من الزمر، مثل: زمرة الشباه، وزمر الشباه المقابلة، وزمر التحاول، وزمر التحاول المقابلة.

إذا كان الفضاءان متماثلين استمراريًّا، فيمكن إثبات أنّ زمر أحدهما تماثل الزمر المقابلة لها المرتبطة بالآخر؛ إذن، شرط ضروري للفضاءات لتكون متماثلة استمراريًّا، أن تكون زمرها متماثلة، ويمكن أن تعكس بعض هذه الزمر صفات مفيدة لهذه الفضاءات، إضافة إلى ذلك، تُنشئ الدالة المتصلة من أحد الفضاءين إلى الآخر تشاكلاً من زمر أحدهما إلى زمر الآخر، ويمكن أن تظهر تشاكلات الزمر هذه خصائص مفيدة للدوال.

إذا لم يستطع الطالب فهم الفقرات السابقة، فلا داعي للقلق، فقد كان هدف الفقرات السابقة مجرد تحفيز لما سيأتي، وهدف هذا الفصل هو وصف بعض الزمر – زمر الشباه – المرتبطة ببعض الفضاءات البسيطة – في عملنا – وهي عادة بعض المجموعات الجزئية من الفضاء الإقليدي المعروف^3•.

أفكار تمهيدية

أولًا، نقدّم فكرة المبسط من الرتبة n الموجه في الفضاء الإقليدي، حيث $n = 0, 1, 2, 3$ **المبسط الصفري الموجه** (***oriented 0 – simplex***) هو مجرد النقطة P، و**المبسط الأحادي الموجه** (***oriented 1 – simplex***) هو القطعة المستقيمة الموجهة $P_1 P_2$، التي تصل بين النقطتين P_1 وP_2، وتظهر وكأنها تتحرك من P_1 إلى P_2، أمّا **المبسط الثنائي الموجه** (***oriented 2- simplex***)، فهو المنطقة المثلثة $P_1P_2P_3$ – كما في الشكل 1.41– مع اتجاه محدّد للحركة حول المثلث بوصفه مثالًا، وهو محدّد بالسهم في الشكل 1.41 كالترتيب $P_1P_2P_3$، من الواضح أنّ الترتيب $P_1P_2P_3$ مثل الترتيب $P_2P_3P_1$ و$P_3P_1P_2$، ولكنه معاكس للترتيب $P_1P_3P_2$، $P_3P_2P_1$ و $P_2P_1P_3$.

سنتفق على أنّ:

$$P_1P_2P_3 = P_2P_3P_1 = P_3P_1P_2 = -P_1P_3P_2 = -P_3P_2P_1 = -P_2P_1P_3$$

لاحظ أنّ $P_iP_jP_k$ يساوي $P_1P_2P_3$، إذا كانت:

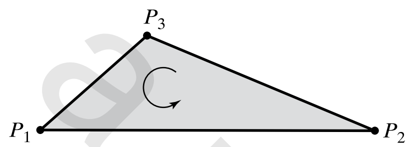
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

تبديلة زوجية، وتساوي $-P_1P_2P_3$ إذا كانت التبديلة فردية، كذلك يمكن القول عن المبسط الأحادي الموجه $P_1\,P_2$، لاحظ كذلك أنه لـ $n = 0,1,2$، المبسط من الرتبة n الموجه هو شيء له بعد n.

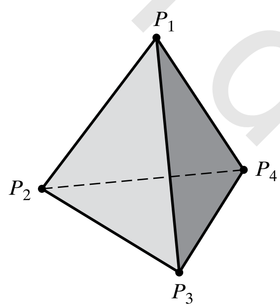
يجب أن يكون تعريف المبسط الثلاثي الموجه واضحًا الآن، حيث يُعطى **المبسط الثلاثي الموجه** (***oriented 3- simplex***) بوصفه متتالية مرتبة $P_1P_2P_3P_4$ لـ أربعة رؤوس لرباعي السطوح المجسم، كما في الشكل 2.41، حيث نتفق على أنّ $P_1P_2P_3P_4 = \pm\, P_iP_jP_rP_s$، بحسب ما إذا كانت التبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & r & s \end{pmatrix}$$

زوجية أم فردية، وتنطبق تعريفات مماثلة لـ $n > 3$، ولكن سنتوقف هنا مع الأبعاد التي يمكن أن نجسدها، فهذه المبسطات **موجهة** (***oriented***)، أولها **توجه** (***orientation***)، أي، نحن مهتمون بترتيب الرؤوس تمامًا، كما نحن مع النقاط الحقيقية، حيث تقع هذه الرؤوس، مبسطاتنا كلها ستكون موجهة، وسوف نسقط الصفة من الآن فصاعدًا.



الشكل 1.41



الشكل 2.41

سنعرف الآن حدود المبسط ذي البعد n لـ $n= 0, 1,2,3$. المصطلح حدود حدسي، نعرف **حدود المبسط الصفرى** (***boundary of a 0- simplex***) ***P*** ليكون المبسط الخالي، الذي سنرمز له في هذه المرة بـ "0". الرمز هو:

$$"\partial_0\left(P\right)=0"$$

حدود المبسط 1– ***P_1P_2 (boundary of a 1- simplex)*** معرّف بـ :

$$\partial_1(P_1P_2)=P_2-P_1$$

أي، الفرق الصوري بين نقطة النهاية ونقطة البداية، ومثلها **حدود المبسط الثنائي** (***boundary of a 2- simplex***) معرّف بـ:

$$\partial_2\left(P_1P_2P_3\right)=\ P_2P_3-\ P_1P_3\ +\ P_1P_2 .$$

الذي يمكن تذكره بالقول: إنه الجمع الشكلي للحدود التي نحصل عليها بإسقاط كل P_i بالتتابع من المبسط الثنائي $P_1P_2P_3$، وجعل الإشارة + إذا أسقط الحدّ الأول، – إذا أسقط الثاني، و+ إذا أسقط الثالث، وبالرجوع إلى الشكل 1.41، نرى أنّ هذا يقابل الحركة حول ما نسميه عادة الحدود في الاتجاه المحدد للسهم، لاحظ كذلك أنه يمكن تذكر المعادلة $\partial_1\left(P_1P_2\right)=P_2\ -\ P_1$ بالطريقة نفسها؛ إذن، نحن نتجه إلى تعريف **حدود المبسط الثلاثي** (***boundary of a 3- simplex***) الآتي:

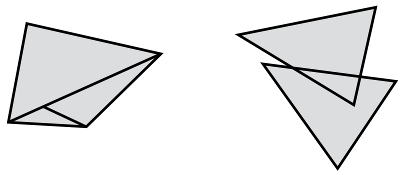
$$\partial_3\left(P_1P_2P_3P_4\right)=\ P_2P_3P_4-\ P_1P_3P_4\ +\ P_1P_2P_4\ -P_1P_2P_3$$

تتحقق تعريفات مشابهة لـ ∂_n حيث $n>3$، وكل فرد من المُجمعات في حدود المبسط يسمى **وجهًا للمبسط** (***face of a simplex***)؛ إذن، $P_2P_3P_4$ وجه $P_1P_2P_3P_4$، ولكن $P_1P_3P_4$ ليس وجهًا، وعلى أيّ حال، فإنّ $P_1P_4P_3$ = $-P_1P_3P_4$ وجه لـ $P_1P_2P_3P_4$.

افترض أنّ لديك مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ مقسمة "بصورة رائعة" إلى مبسطات، على سبيل المثال سطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41، الذي يمكن تقسيمه إلى أربعة مبسطات ثنائية منسجمة مع بعضها بصورة رائعة؛ إذن، توجد لدينا في سطح رباعي السطوح، بعض المبسطات الصفرية، أو الرؤوس لرباعي السطوح، بعض المبسطات الأحادية أو حواف رباعي السطوح، بعض المبسطات الثنائية، أو المثلثات في رباعي السطوح، بوجه عام، لتقسيم فضاء ما "بصورة رائعة" إلى مبسطات، نحتاج إلى الحقائق الآتية:

1. كل نقطة في الفضاء تنتمي على الأقل إلى مبسط واحد.

2. كل نقطة في الفضاء تنتمي فقط إلى عدد منتهٍ من المبسطات.



الشكل 3.41

3. لكل مبسطين مختلفين (تبعًا للاتجاه)، إما ألا توجد بينهما نقاط مشتركة أو أحدهما (ربما ما عدا الاتجاه) وجه للآخر أو وجه لوجه في الآخر... إلخ، أو أنّ مجموعة النقاط المشتركة (ربما ما عدا الاتجاه) وجه، أو وجه لوجه... إلخ، ولكل مبسط، يستثنى الشرط (3) الصور مثل تلك المعروضة في الشكل 3.41، حيث يسمّى الفضاء المقسم إلى مبسطات تبعًا لهذه المتطلبات **مركب مبسطات** (***simplicial complex***).

السلاسل، والدورات، والحدود

لنصف بعض الزمر المرتبطة بمبسط مركب X، سنوضّح كل تعريف بحالة سطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41، **الزمرة $C_n(X)$ للسلاسل ذات الرتبة n (الموجهة) لـX(*group $C_n(X)$ of (oriented) $n-$chains*)**، هي الزمرة الإبدالية الحرّة المولدة بالمبسطات ذات الرتبة n (الموجهة) لـ X؛ إذن، كل عنصر في $C_n(X)$ مجموع منتهٍ على الصورة $\sum_i m_i\sigma_i$، حيث σ_i مبسطات ذات رتبة n لـ X و $m_i \in \mathbb{Z}$، وننجز الجمع للسلاسل بأخذ الجمع الجبري لمعاملات كل ظهور في السلاسل لمبسط محدد.

4.41 مثال في سطح رباعي السطوح S، كل عنصر في $C_2(S)$ يكون على الصورة:

$$m_1P_2P_3P_4 + m_2P_1P_3P_4 + m_3P_1P_2P_4 + m_4P_1P_2P_3$$

حيث $m_i \in \mathbb{Z}$، وبوصفه توضيحًا للجمع، لاحظ أنّ:

$$(3P_2P_3P_4 - 5P_1P_2P_3) + (6P_2P_3P_4 - 4P_1P_3P_4)$$
$$= 9P_2P_3P_4 - 4P_1P_3P_4 - 5P_1P_2P_3$$

ويكون العنصر في $C_1(S)$ على الصورة:

$$m_1P_1P_2 + m_2P_1P_3 + m_3P_2P_4 + m_4P_2P_3 + m_5P_2P_4 + m_6P_3P_4$$

ويكون العنصر في $C_0(S)$ على الصورة:

$$m_1P_1 + m_2P_2 + m_3P_3 + m_4P_4 \quad \blacktriangle$$

الآن، إذا كان σ مبسطًا ذا رتبة n، فإنّ $\partial_n(\sigma) \in C_{n-1}(X)$ لكل $n = 1, 2, 3$. لنعرّف $C_{-1}(X) = \{0\}$ الزمرة التافهة في عنصر واحد؛ وهكذا، سنحصل على $\partial_0(\sigma) \in C_{-1}(X)$، ولأنَّ $C_n(X)$ إبدالية حرة، ولأننا نستطيع تعيين التشاكل لمثل هذه الزمرة بإعطاء قيمها على المولدات، فنرى أنّ ∂_n تعطي **تشاكل حدود (boundary homomorphism)** وحيدًا، الذي سنرمز له مرة أخرى بـ "∂_n" ويربط $C_n(X)$ بـ $C_{n-1}(X)$، حيث $n = 0, 1, 2, 3$.

مثال 5.41 لدينا:

$$\partial_n\left(\sum_i m_i\sigma_i\right) = \sum_i m_i\partial_n(\sigma_i)$$

على سبيل المثال:

$$\begin{aligned}\partial_1(3P_1P_2 - 4P_1P_3 + 5P_2P_4) &= 3\partial_1(P_1P_2) - 4\partial_1(P_1P_3) + 5\partial_1(P_2P_4)\\ &= 3(P_2 - P_1) - 4(P_3 - P_1) + 5(P_4 - P_2)\\ &= P_1 - 2P_2 - 4P_3 + 5P_4\end{aligned}$$

▲

يُذكّر الطالب مرة أخرى، أنه في أيّ وقت يكون لديه فيه تشاكل، فإنّ هناك شيئين مهمّين جدًّا، هما: النواة ومجموعة الصور، حيث تتألف نواة ∂_n من تلك السلاسل ذات الحدود 0 والبعد n، أمّا عناصر النواة فهي **الدورات ذات الرتبة n (n – cycles)**، والرمز المعتاد لنواة – أي زمرة ∂_n **الدورات ذات البعد n (group of n cycles)** – هي "$Z_n(X)$".

مثال 6.41

إذا كان $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$، فإنّ

$$\partial_1(z) = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + (P_1 - P_3) = 0،$$

إذن، z دورة أحادية، وعلى أيّ حال، إذا جعلنا $c = P_1P_2 + 2P_2P_3 + P_3P_1$،

فإنّ $\partial_1(c) = (P_2 - P_1) + 2(P_3 - P_2) + (P_1 - P_3) = -P_2 + P_3 \neq 0$

إذًا $c \notin Z_1(X)$ ▲

لاحظ أنّ $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$ في المثال 6.41 تقابل دائرة واحدة – أو دورة – حول المثلث ذي الرؤوس P_1، P_2، و P_3.

مجموعة صور ∂_n – **زمرة الحدود ذات الرتبة $(n-1)$ (group of $(n-1)$ – boundaries)** – تتألف بالضبط من السلاسل ذات البعد n، التي تكون حدود السلاسل ذات البعد n، ويرمز لهذه الزمرة بـ:

"$B_{n-1}(X)$".

مثال 7.41 بالرجوع إلى المثال 6.41، نرى أنه إذا كان:

$$P_1P_2 + 2P_2P_3 + P_3P_1$$

سلسلة أحادية في $C_1(X)$، فإنّ $P_3 - P_1$ تكون حدودًا صفرية، لاحظ أنّ $P_3 - P_2$ تحدّ P_2P_3.
▲

لنحسب الآن $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ لمثال أكثر تعقيدًا، ففي الطبولوجيا، إذا كانت الزمرة هي الزمرة التافهة المكوّنة فقط من العنصر المحايد 0، فإننا نرمز لها في العادة بـ "0" بدلاً من "$\{0\}$". سنتبع هذه العادة فيما يأتي.

مثال 8.41 لنحسب لـ $n = 0, 1, 2$ الزمر $Z_n(S)$ و $B_n(S)$ لسطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41.

أولاً – للحالات الأسهل – لأنَّ المبسط ذا البعد الأكبر في المسطح هو المبسط الثنائي، فإننا نحصل على $C_3(S) = 0$؛ إذن،

$$B_2(S) = \partial_3\left[C_3(S)\right] = 0$$

وكذلك، لأنَّ $C_{-1}(S) = 0$ بحسب تعريفنا، فنرى أنّ:

$$Z_0(S) = C_0(S)$$

إذن، $Z_0(S)$ الإبدالية الحرّة لها أربعة مولدات، P_1، و P_2، و P_3، و P_4، ومن السهل ملاحظة أنّ صورة الزمرة بالتشاكل مولدة بصور المولدات في الزمرة الأصلية، ولأنَّ $C_1(S)$ مولدة بـ P_1P_2، و P_1P_3، و P_1P_4، و P_2P_3، و P_2P_4، و P_3P_4، فنرى أنّ $B_0(S)$ مولدة بـ:

$$P_2 - P_1,\ P_3 - P_1,\ P_4 - P_1,\ P_3 - P_2,\ P_4 - P_2,\ P_4 - P_3$$

وعلى أيّ حال، فإنّ $B_0(S)$ ليست إبدالية حرّة على هذه المولدات، على سبيل المثال:

$P_3 - P_2 = (P_3 - P_1) - (P_2 - P_1)$، ومن السهل ملاحظة أنّ $B_0(S)$ إبدالية حرّة على $P_2 - P_1$، $P_3 - P_1$، و $P_4 - P_1$.

لِنَسْعَ – الآن – خلف الزمرة الأصعب $Z_1(S)$. العنصر c في $C_1(S)$ هو الجمع الشكلي للمضاعفات الصحيحة للحوافّ P_iP_j، من الواضح أنّ $\partial_1(c) = 0$ إذا وفقط إذا كان كل رأس تبدأ به ما مجموعها (بحساب التكرار) r من الحوافّ في c ، فهو كذلك نقطة النهاية لـ r من الحوافّ بالضبط؛ إذن:

$$\begin{aligned}
z_1 &= P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_2,\\
z_2 &= P_1P_4 + P_4P_3 + P_3P_1,\\
z_3 &= P_1P_2 + P_2P_4 + P_4P_1,\\
z_4 &= P_1P_3 + P_3P_2 + P_2P_1
\end{aligned}$$

كلها دورات أحادية، وهذه هي بالضبط حدود المبسطات الثنائية المفردة، نزعم أنّ ألـ z_i تولد $Z_1(S)$. ليكن $z \in Z_1(S)$، واختر رأسًا محدّدًا، وليكن P_1؛ لنعمل على الحوافّ التي تكون P_1 نقطة نهاية لها، فهذه الحواف هي: P_1P_2، و P_1P_3، و P_1P_4.
ليكن m_j معامل P_1P_j في z ؛ إذن:

$$z + m_2 z_4 - m_4 z_2$$

هو دورة كذلك، ولكن لا تحوي الحوافّ P_1P_2 أو P_1P_4؛ إذن، الحافّة الوحيدة التي يكون فيها P_1 رأسًا في الدورة $z + m_2 z_4 - m_4 z_2$ هي ربما P_1P_3، ولكن هذه الحافة لا يمكن أن تظهر بمعامل لا يساوي صفرًا؛ لأنها في هذه الحالة ستشارك في مضروب غير صفري للرأس P_1 للحدود، ما يناقض حقيقة أنّ حدود الدورة تساوي صفرًا. إذن $z + m_2 z_4 - m_4 z_2$ تتألف من حوافّ المبسط الثنائي $P_2P_3P_4$، ولأنه في أيّ دورة أحادية يظهر كل من P_2، و P_3 و P_4 عددًا متساويًا من المرات بوصفها نقاط بداية ونهاية للحواف في الدورة – عادًّا التكرار – ، فنرى أنّ:

$$z + m_2 z_4 - m_4 z_2 = r z_1$$

حيث r عدد صحيح؛ إذن، تُولد $Z_1(S)$ بألـ z_i – في الحقيقة بأيّ ثلاثة من ألـ z_i – لأنَّ ألـ z_i هي الحدود المختلفة لـ المبسطات الثنائية – كما لاحظنا – فإننا نرى أنّ:

$$Z_1(S) = B_1(S)$$

على الطالب أن يرى ماذا تعني هذه الحسابات هندسيًّا باستخدام الشكل 2.41.

أخيرًا، نصف $Z_2(S)$، حيث يتولد – الآن – $C_2(S)$ بالمبسطات $P_2P_3P_4$، و $P_3P_1P_4$، و $P_1P_2P_4$، و $P_2P_1P_3$، فإذا كان لـ $P_2P_3P_4$ معامل r_1 ولـ $P_3P_1P_4$ معامل r_2 في دورة ثنائية، فإنّ للحافّة المشتركة P_3P_4 معاملاً $r_1 - r_2$ في حدودها.

إذن، يجب أن يكون $r_1 = r_2$، وبمناقشة مشابهة، نرى أنه في أيّ دورة تكون كل من المبسطات الثنائية الأربعة لها المعاملات نفسها؛ إذن، يتولد $Z_2(S)$ بـ :

$$P_2P_3P_4 + P_3P_1P_4 + P_1P_2P_4 + P_2P_1P_3$$

بمعنى أنّ $Z_2(S)$ دوري غير منته، مرة أخرى، على الطالب أن يترجم هذه الحسابات هندسيًّا باستخدام الشكل 2.41، لاحظ أنّ اتجاه كل مجمّع يربط بالذهاب حول المثلث في اتجاه عقارب الساعة، عندما ينظر لها من خارج رباعي السطوح. ▲

$\partial^2 = 0$ والزمر الشباهية

نصل الآن إلى واحدة من أكثر المعادلات أهمية في الرياضيات، سننصّ عليها فقط في حالة $n = 1, 2, 3$، ولكنها متحققة لكل $n > 0$.

9.41 مبرهنة لتكن X مبسطة مركبة، ولتكن $C_n(X)$ السلسلة ذات الرتبة n لـ X، حيث $n = 0, 1, 2, 3$؛ إذن، يربط تركيب التشاكل $\partial_{n-1}\partial_n$ من $C_n(X)$ إلى $C_{n-2}(X)$ كل شيء مع 0، حيث $n = 1, 2, 3$ بمعنى أنه لكل $c \in C_n(X)$، $\partial_{n-1}(\partial_n(c)) = 0$. نستخدم الرمز "$\partial_{n-1}\partial_n = 0$"، أو باختصار أكثر "$\partial^2 = 0$".

البرهان لأنَّ التشاكل يتحدد تمامًا بقيمه على المولدات، فمن الكافي أن نتحقق أنه لكل مبسط σ ذي رتبة n، يكون $\partial_{n-1}(\partial_n(\sigma)) = 0$، فإذا كانت $n = 1$، فالنتيجة واضحة؛ لأن ∂_0 تربط كل شيء بـ 0. عندما $n = 2$،

$$\begin{aligned}\partial_1\left(\partial_2(P_1P_2P_3)\right) &= \partial_1(P_2P_3 - P_1P_3 + P_1P_2)\\ &= (P_3 - P_2) - (P_3 - P_1) + (P_2 - P_1)\\ &= 0\end{aligned}$$

ستكون حالة $n = 3$ تمرينًا ممتازًا للطالب في تعريف مشغّل الحدود (انظر التمرين 2). ♦

10.41 نتيجة لـ $n = 0, 1, 2, 3$، $B_n(X)$ زمرة جزئية من $Z_n(X)$.

البرهان لـ $n = 0, 1, 2$، يكون $B_n(X) = \partial_{n+1}\left[C_{n+1}(X)\right]$؛ ولذلك، إذا كان $b \in B_n(X)$ فيجب أن نحصل على $b = \partial_{n+1}(c)$، حيث $c \in C_{n+1}(X)$؛ إذن:

$$\partial_n(b) = \partial_n(\partial_{n+1}(c)) = 0,$$

وهكذا، فإنّ $b \in Z_n(X)$.

إذا كانت $n = 3$، ولأننا غير مهتمين بالمبسطات ذات البعد الأكبر من 3، فإنّ $B_3(X) = 0$. ♦

11.41 تعريف تسمى زمرة العامل $H_n(X) = Z_n(X)/B_n(X)$ **الزمرة الشباهية ذات البعد n لـ X** (**n – dimensional homology group of X**). ■

12.41 مثال لنحسب $H_n(S)$ لـ $n = 0, 1, 2, 3$، حيث S هو سطح رباعي السطوح في الشكل 2.41.

لقد أوجدنا $Z_n(S)$ و $B_n(S)$ في المثال 8.41، الآن، $C_3(S) = 0$، وهكذا، فإنّ كلًّا من $Z_3(S)$ و $B_3(S)$ يساوي 0، وهذا يؤدي إلى أنّ

$$H_3(S) = 0$$

وكذلك، فإنّ $Z_2(S)$ دورية غير منتهية، وقد رأينا أنّ $B_2(S)=0$ ؛ إذن، $H_2(S)$ دورية غير منتهية، أي إنّ

$$H_2(S)\simeq\mathbb{Z}$$

رأينا أن $Z_1(S)=B_1(S)$، وهذا يؤدي إلى زمرة العامل $Z_1(S)/B_1(S)$ وهي الزمرة التافهة من عنصر واحد، أي إنّ:

$$H_1(S)=0$$

أخيرًا، كانت $Z_0(S)$ إبدالية حرّة على P_1، وP_2، وP_3 وP_4، بينما تولدت $B_0(S)$ من

$$P_4\text{-}P_3 \text{ و } P_2\text{-}P_1 \text{ و}, P_3\text{-}P_1 \text{ و}, P_4\text{-}P_1 \text{ و}, P_3\text{-}P_2 \text{ و}, P_4\text{-}P_2$$

ونزعم أنّ كل مجموعة مشاركة في $Z_0(S)/B_0(S)$ ، تحوي فقط عنصرًا واحدًا على الصورة P_1.

ليكن $z\in Z_0(S)$ ، وافترض أنّ معامل P_2 في z هو s_2، ومعامل P_3 هو s_3، ومعامل P_4 هو s_4؛ إذن:

$$z-\left[s_2(P_2-P_1)+s_3(P_3-P_1)+s_4(P_4-P_1)\right]=rP_1$$

حيث r عدد صحيح، وهكذا، فإنّ $z\in\left[rP_1+B_0(S)\right]$، أي إنّ كل مجموعة مشاركة تحوي عنصرًا على صورة rP_1، وإذا احتوت المجموعة المشاركة كذلك على $r'P_1$، فإنّ $r'P_1\in\left[rP_1+B_0(S)\right]$ ، وهذا يؤدي إلى أنّ $(r'-r)P_1$ تنتمي لـ $B_0(S)$ ، ومن الواضح أنّ المضروب الوحيد لـ P_1 بحيث يكون حدودًا، هو الصفر؛ وإذن، $r=r'$ والمجموعة المشاركة تحوي فقط عنصرًا وحيدًا على صورة rP_1 ؛ إذن، يمكننا اختيار rP_1 بوصفها ممثلات للمجموعات المشاركة في حسابات $H_0(S)$ ؛ إذن، $H_0(S)$ دورية غير منتهية – أي إنّ

$$.H_0(S)\simeq\mathbb{Z} \qquad \blacktriangle$$

قد تبدو هذه التعريفات والحسابات معقدة للطالب، فالأفكار طبيعية جدًّا، ولكننا نعترف بأنها مربكة بعض الشيء في الكتابة، وعلى أيّ حال، فإنّ المناقشة المستخدمة في هذه الحسابات نموذجية في مبرهنة الشباه، بمعنى أنك إذا فهمتها، فإنك ستفهم حساباتنا الأخرى كلها، إضافة إلى ذلك، يمكننا أن نجعلها هندسية، تظهر في صورة الفضاء.

سيكرس الفصل المقبل لمزيد من الحسابات للزمر الشباهية لبعض الفضاءات البسيطة المهمّة.

■ تمارين 41

تمارين مقترحة

1. افترض أنّ $c = 2P_1P_3P_4 - 4P_3P_4P_6 + 3P_3P_2P_4 + P_1P_6P_4$ سلسلة ثنائية في مبسطة مركبة معينة X.

أ. احسب $\partial_2\left(c\right)$ ب. هل c دورة ثنائية؟   جـ. هل $\partial_2\left(c\right)$ دورة أحادية؟

2. احسب $\partial_2(\partial_3(P_1P_2P_3P_4))$، وأثبت أنها 0، مكملاً إثبات المبرهنة 9.41.

3. صف $C_i(P)$، و $Z_i\ (P)$، و $B_i\ (P)$، و $H_i\ (P)$ للفضاء المكوّن فقط من المبسط الصفري P. (في الحقيقة هذه مسألة سهلة).

4. صف $C_i\ (X)$، و $Z_i\ (X)$، و $B_i\ (X)$، و $H_i\ (X)$ للفضاء X المكوّن من المبسطتين الصفريتين المختلفتين P و P'.
(ملاحظة: القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين ليست جزءًا من الفضاء).

5. صف $C_i\ (X)$ ، و $Z_i\ (X)$ ، و $B_i\ (X)$ ، و $H_i\ (X)$ للفضاء X المكوّن من المبسطة الأحادية P_1P_2.

6. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل حدود تكون دورة.

________ ب. كل دورة تكون حدودًا.

________ جـ. $C_n\ (X)$ زمرة إبدالية حرّة دائمًا.

________ د. $B_n\ (X)$ زمرة إبدالية حرّة دائمًا.

________ هـ. $Z_n\ (X)$ زمرة إبدالية حرّة دائمًا.

________ و. $H_n(x)$ إبدالية دائمًا.

________ ز. المبسط الثنائي هو حدود المبسط الثلاثي.

________ ح. السلسلة الأحادية هي حدود المبسط الثنائي.

________ ط. السلسلة الثنائية هي حدود الدورة الثلاثية.

________ ي. إذا كان $Z_n\ (X) = B_n\ (X)$، فإنّ $H_n\ (X)$ هي الزمرة التافهة بعنصر واحد.

المزيد من التمارين

7. عرّف المصطلحات الآتية لتعمم بصورة طبيعية تعريفات الكتاب المعطاة للأبعاد 0، و1، و2، و3.

أ. المبسط ذو الرتبة n الموجه.

ب. حدود المبسط ذي الرتبة n الموجه.

جـ. وجه في مبسط ذي الرتبة n موجه.

8. بالاستمرار في فكرة التمرين 7، ما الطريقة السهلة التي يمكن بها الإجابة عن سؤال عن تعريف

$C_n(X)$، $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ ، $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ لمركب المبسطات X، الذي ربما حوى بعض المبسطات ذات بعد أكبر من 3؟

9. باتباع الأفكار في التمرينين 7 و 8، برهن على أن $\partial^2 = 0$ بوجه عام، أي إنّ $\partial_{n-1}(\partial_n(c)) = 0$ لكل $c \in C_n(X)$، حيث يمكن أن تكون n أكبر من 3.

10. ليكن X مركب مبسطات. لمبسط σ ذي رتبة n (موجه) لـ X، **الحدود المقابلة () " لـ (coboundary)** هي السلسلة ذات الرتبة $(n+1)$، $\sum \tau$ ، بحيث إنّ الجمع مأخوذ على المبسطات τ كلها ذوات الرتبة $(n + 1)$، التي يكون σ وجهًا لها. بمعنى أنها المبسطات τ التي تظهر في المجموع، وهي بالضبط تلك التي تكون σ أحد مجاميع $\partial_{n+1}(\tau)$ الاتجاه مهم هنا! إذن، P_2 وجه لـ P_1P_2، ولكن P_1 ليس كذلك. على أيّ حال، P_1 وجه لـ P_2P_1. ليكن X مركب مبسطات يتكوّن من المجسم رباعي السطوح في الشكل 2.41.

أ. احسب $\delta^{(0)}(P_1)$ و $\delta^{(0)}(P_4)$.

ب. احسب $\delta^{(1)}(P_3P_2)$.

جـ. احسب $\delta^{(2)}(P_3P_2P_4)$.

11. باتباع فكرة التمرين 10، ليكن X مركب مبسطات، ولتكن الزمرة $C^{(n)}(X)$ المكوّنة من **السلاسل ذات الرتبة n المقابلة (n – cochains)** مثل الزمرة $C_n(X)$.

أ. عرّف $\delta^{(n)} : C^{(n)}(X) \to C^{(n+1)}(X)$ بطريقة موازية لتلك التي عرّفنا بها

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

ب. أثبت أنّ $\delta^2 = 0$، أي إنّ $\delta^{(n+1)}(\delta^{(n)}(c)) = 0$ لكل $c \in C^{(n)}(X)$.

12. باتباع الأفكار في التمرينين 10 و 11، عرّف الزمرة $Z^{(n)}(X)$ المكوّنة من الدورات ذات الرتبة n المقابلة لـ X، الزمرة $B^{(n)}(X)$ المكوّنة من الحدود ذات الرتبة n المقابلة لـ X، وأثبت أنّ: $B^{(n)}(X) \le Z^{(n)}(X)$.

13. باتباع الأفكار في التمارين 10، و11، و12، عرّف الزمرة الشباهية المقابلة ذات البعد n ، $H^{(n)}(X)$ لـ X. احسب $H^{(n)}(S)$ **لسطح رباعي** السطوح S في الشكل 2.41.

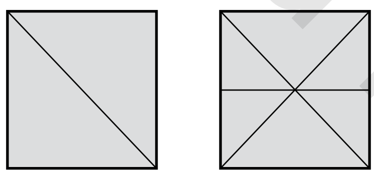
الفصل 42 حساب الزمر الشباهية Computations of Homology Groups

المثالثة

افترض أنك تود حساب الزمر الشباهية لسطح كرة، فأول ما يحتمل أن تقوله – إذا كنت منتبهًا – إنّ سطح الكرة ليس مركب مبسطات؛ لأن هذا السطح منحنٍ والمثلث سطح مستوٍ. تذكّر أنّ الفضاءين يكونان متماثلين طبولوجيًّا إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بالثّني، بالفتل وهكذا. تخيّل أنّ للمبسط الثلاثي، رباعي السطوح، سطحًا مطاطيًّا، وأنه مملوء بالهواء، فإذا كان السطح المطاطي مرنًا، مثل مطاط البالون، فسيحوّل نفسه فورًا إلى كرة، وستظهر الوجوه الأربعة لرباعي السطوح "كمثلثات" رسمت على سطح الكرة، وهذا يوضح ما نعنيه بمثالثة الفضاء. فمصطلح المثالثة لا يشير بالضرورة إلى التقسيم لمبسطات ثنائية فقط، بل أيضًا يستخدم في التقسيم إلى مبسطات من الرتبة n لأيّ $n \geq 0$، فإذا قُسّم الفضاء إلى أجزاء، بحيث إنه بالقرب من كل نقطة يمكن للفضاء أن يشوّه، ليبدو مثل جزء من الفضاء الإقليدي ^{n}، والأجزاء التي قُسّم إليها الفضاء تظهر بعد هذا التشوّه بوصفها جزءًا من مركب مبسطات، فإنّ التقسيم الأصلي للفضاء هو **مثالثة للفضاء (triangulation of the space)**. تعرّف الزمر الشباهية للفضاء رسميًّا تمامًا، كما في الفصل السابق.

الخصائص الثابتة

هناك اثنتان من الخصائص الثابتة المهمّة جدًّا للزمر الشباهية، تحتاج براهينها إلى آليات كثيرة جدًّا، ولكن من السهل علينا شرحها بصورة تقريبية. أولًا، تعرّف الزمر الشباهية لفضاء بدلالة المثالثة، ولكن في الحقيقة هي زمر متساوية (أي متماثلة) بغض النظر كيف تمت مثالثة الفضاء، على سبيل المثال: يمكن مثالثة المنطقة المربعة بطرق عدة، تعرض اثنتان منها في الشكل 1.42. الزمر الشباهية هي نفسها بغض النظر عن أيّ مثالثة استخدمت في حسابها. هذا ليس واضحًا!



الشكل 1.42

للصفة الثابتة الثانية، إذا كان فضاء مثالثة يماثل باستمرار فضاء آخر (على سبيل المثال، يمكن أن يحول للآخر من غير تمزيق أو قطع)، فإنّ زمرتي الشباه للفضاءين متساويتان (أي متماثلتين) لكل بعد n، هذا ليس واضحًا مرة أخرى، سنستخدم هاتين الحقيقتين من غير برهان.

2.42 مثال الزمر الشباهية لسطح كرة تساوي تلك التي تخصّ سطحًا رباعي السطوح في المثال 12.41؛ لأنّ كلا الفضاءين متماثلان استمراريًّا. ▲

الكرات والخلايا نوعان مهمّان من الفضاءات في الطبولوجيا، لنقدّمهما ونقدم الرموز المعتادة، **فالكرة ذات البعد n** S^n **(n – sphere)**، هي مجموعة النقاط كلها على بعد وحدة واحدة من نقطة الأصل في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^{n+1}$ ذي البعد $(n+1)$، إذن، الكرة الثنائية S^2 هي ما يدعى عادة سطح الكرة في $\mathbb{R}^3$، S^1 هي حدود دائرة، وS^0 هي نقطتان، وبالطبع، اختيار 1 للبعد عن نقطة الأصل ليس مهمًّا، الكرة الثنائية ذات نصف القطر 10 تماثل استمراريًّا تلك ذات نصف القطر 1، وتماثل استمراريًّا سطح مجسم القطع الناقص للسبب نفسه، أمّا **الخلية ذات البعد n** E^n **(n – cell or n – ball)** وهي مجموعة النقاط كلها في $\mathbb{R}^n$ على بعد 1 عن نقطة الأصل؛ إذن، E^3 هي ما ننظر إليه عادة بوصفها كرة مصمتة، E^2 منطقة دائرية، و E^1 قطعة مستقيمة.

3.42 مثال الملاحظات في الأعلى والحسابات في المثال 2.41 تثبت أنّ كلتا $H_2(S^2)$ و $H_0(S^2)$ تماثل $\mathbb{Z}$، و $H_1(S^2)=0$. ▲

الفضاءات المتصلة والمتقلصة

هناك تفسير لطيف جدًّا لـ $H_0(X)$ لفضاء مثالثة X. يكون الفضاء متصلًا إذا أمكن ربط أيّ نقطتين بطريق (مفهوم لن نعرّفه) يقع تمامًا في الفضاء، فإذا كان الفضاء غير متصل، فيمكن تقسيمه إلى أجزاء، كل منها متصل، ولكن لا يمكن ربط أيّ اثنين منها بطريق في الفضاء، حيث تسمى هذه الأجزاء **مركبات متصلة (connected components of the space)**.

4.42 مبرهنة إذا كان الفضاء X مثالثيًّا إلى عدد منته من المبسطات، فإنّ $H_0(X)$ يماثل $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}$، ورقم بيتي m (Betti number) لعدد العوامل $\mathbb{Z}$ هو عدد المركبات في X.

البرهان الآن، $C_0(X)$ زمرة إبدالية حرّة مولدة بعدد منتهٍ من الرؤوس P_i في مثالثة X، وكذلك $B_0(X)$ مولدة بتعابير على صورة:

$$P_{i2}-P_{i1},$$

حيث $P_{i1}P_{i2}$ حافّة في المثالثة.

نثبّت P_{i1}. أي رأس P_{ir} في المركبة نفسها المتصلة في X لـ P_{i1} يمكن ربطها مع P_{i1} بسلسلة منتهية.

$$P_{i_1}P_{i_2},P_{i_2}P_{i_3},\ldots,P_{i_{r-1}}P_{i_r}$$

من الحواف؛ إذن:

$$P_{i_r}=P_{i_1}+(P_{i_2}-P_{i_1})+(P_{i_3}-P_{i_2})+\cdots+(P_{i_r}-P_{i_{r-1}}),$$

مثبتًا أنّ $P_{ir}\in[P_{i1}+B_0(X)]$. من الواضح أنه إذا كانت P_{i_s} ليست في المركبة نفسها المتصلة مع P_{i_1}، فإنّ $P_{is}\notin[P_{i1}+B_0(X)]$؛ لأنه لا توجد حافة تصل المركبتين. وهكذا، إذا اخترنا رأسًا واحدًا من كل مركبة متصلة، فإنّ كل مجموعة مشاركة لـ $H_0(X)$ تحوي بالضبط ممثلاً واحدًا، الذي يكون مضاعفًا صحيحًا لأحد الرؤوس المختارة. تمّ إثبات المبرهنة. ♦

5.42 مثال لدينا مباشرة

$$H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$$

حيث $n > 0$؛ لأن S^n متصلة عندما $n > 0$، وعلى أيّ حال:

$$H_0(S^0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(انظر الفصل 41، تمرين 4). وكذلك

$$H_0(E^n) \simeq \mathbb{Z}$$

حيث $n \geq 1$. ▲

يكون الفضاء **متقلصًا (Contractible)** إذا أمكن ضغطه إلى نقطة من غير تمزيق أو قطع، ولكن تبقى دائمًا في الحيز الذي تشغله بالأصل. سنذكر فقط نصّ المبرهنة الآتية:

6.42 مبرهنة إذا كان X فضاء متقلصًا ومثالثة إلى عدد منتهٍ من المبسطات، فإنّ $H_n(X) = 0$ لكل $n \geq 1$.

7.42 مثال من الحقائق المعروفة أنّ S^2 ليست متقلصة، وليس من السهل إثبات هذه الحقيقة، على أيّ حال، ربما ينوي الطالب أن يأخذها بوصفها حقيقة واضحة، أنه لا يمكن ضغط "سطح الكرة" لتصبح نقطة دون تمزيقها، مبقيًا إياها دائمًا في الفضاء الأصلي S^2 الذي تشغله، إذ إنه ليس من العدل ضغطها جميعها إلى "مركز الكرة". لقد رأينا أن $H_2(S^2) \neq 0$ ولكنها تماثل $\mathbb{Z}$.

افترض – على أيّ حال – أننا أخذنا $H_2(E^3)$، حيث يمكننا أن نعُدّ E^3 مجسمًا رباعي السطوح في الشكل 2.41؛ لأنه متماثل استمراريًّا مع E^3. السطح S لرباعي السطوح هذا متماثل استمراريًّا مع S^2، والمبسطات هنا لـ E^3 هي نفسها لـ S (أو S^2)، التي اختبرناها في المثالين 8.41 و 12.41، ما عدا المبسط الثلاثي S الذي ظهر الآن. تذكر أنّ مولد $Z_2(S)$، وعليه، $Z_2(E^3)$ كان بالضبط حدود S جميعها بالنظر إليها في E^3، إنها $\partial_3(\sigma)$، عنصر في $B_2(E^3)$، وهكذا، فإنّ: $Z_2(E^3) = B_2(E^3)$ و $H_2(E^3) = 0$.

لأنه من الواضح أنّ E^3 متقلص، فإنّ هذا متوافق مع المبرهنة 6.42. ▲

بوجه عام، E^n متقلص لكل $n \geq 1$، وهكذا وباستخدام المبرهنة 6.42:

$$H_i(E^n) = 0$$

لكل $i > 0$.

مزيد من الحسابات

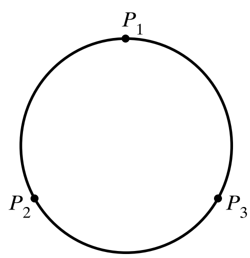
رأينا تفسيرًا جميلًا لـ $H_0(X)$ في المبرهنة 4.42، وكما وضّحت الأمثلة السابقة، فإنّ الدورة الأحادية في فضاء مثالثي تتولد بمنحنيات مغلقة في الفضاء المشكل من الحوافّ في المثالثة، ويمكن التفكير في الدورات الثنائية على أنها مولدة من الكرات الثنائية، أو أيّ سطوح ثنائية البعد مغلقة في الفضاء. تشكيل زمرة العامل:

$$H_1(X) = Z_1(X) / B_1(X)$$

تقريبًا يؤدي إلى عدّ المنحنيات المغلقة التي تظهر في الفضاء، ولم تكن هناك ببساطة؛ لأنها تظهر بوصفها حدودًا لقطعة ثنائية البعد (أي مجموعة المبسطات الثنائية كلها) في الفضاء، وبالمثل، تشكيل $H_2(X) = Z_2(X) / B_2(X)$ يؤدي تقريبًا لعدّ السطوح ثنائية البعد المغلقة في الفضاء، التي لا يمكنها أن "تملأ في المجسم" ضمن الفضاء، بمعنى أنها ليست حدودًا لمجموعة بعض المبسطات الثلاثية؛ إذن، لـ $H_1(S^2)$، كل منحنى مغلق مرسوم على سطح كرة ثنائية يحدّ قطعة ثنائية البعد في الكرة، وإذن، $H_1(S^2) = 0$، وعلى أي حال، السطح ثنائي البعد المغلق المحتمل الوحيد، S^2 نفسها، لا يمكن أن "تملأ المجسم" ضمن كامل الفضاء S^2 نفسه، وهكذا، فإنّ $H_2(S^2)$ إبدالية حرّة بمولد واحد.

8.42 مثال تبعًا للمناقشة في الأعلى، يمكن أن يتوقع المرء أنّ $H_1(S^1)$ إبدالية حرّة بمولد واحد، أي تماثل $\mathbb{Z}$؛ لأن الدائرة نفسها ليست حدًّا لجزء ثنائي البعد من S^1، حيث ترى أنه لا يوجد جزء ثنائي البعد في S^1. سنحسب، ونرى ما إذا كان هذا صحيحًا حقًّا.

مثالثة S^1 معطاة في الشكل 9.42. الآن $C_1(S^1)$ مولد بـ P_1P_2, P_2P_3 و P_3P_1، فإذا كانت السلسلة الأحادية دورة، فإنّ حدودها صفر، وهكذا، فيجب أن تحوي P_1P_2.



الشكل 9.42

و P_2P_3 العدد نفسه من المرات، وإلّا فإنّ حدودها ستحوي مضاعفًا غير صفري لـ P_2. مناقشة مشابهة تتحقق لأيّ حافتين؛ إذن، $Z_1(S^1)$ تولّد بـ $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1$، ولأنَّ $B_1(S^1)=\partial_2\left[C_2(S^1)\right]=0$، فلا توجد مبسطات ثنائية، ونرى أنّ $H_1(S^1)$ إبدالية حرّة بمولد واحد. أي إنّ:

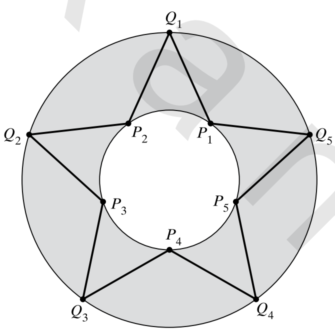
$$H_1(S^1)\simeq\mathbb{Z} \qquad \blacktriangle$$

يمكن برهان أنه لـ $n>0$، $H_n(S^n)$ و $H_0(S^n)$ تماثل $\mathbb{Z}$، بينما $H_i(S^n)=0$ لِـ $0<i<n$.

للتوافق مع مصطلحات الطبولوجيا، سنسمي العنصر في $H_n(X)$ – الذي هو – مجموعة مشاركة لـ $B_n(X)$ في $Z_n(X)$ "**فصلًا شباهيًا**" **(homology class)**. والدورات في الفصل الشباهي نفسه **شباهيات (homologous)**.

مثال 10.42 لنحسب الزمر الشباهية لمنطقة طوقية مستوية X بين دائرتين لهما المركز نفسه. تظهر المثالثة في الشكل 11.42، وبالطبع؛ لأنّ X متصلة، فإننا نستنتج أنّ:

$$H_0(X)\simeq\mathbb{Z}$$



الشكل 11.42

إذا كانت z أيّ دورة أحادية، وإذا كان r معامل P_1P_2 في z، فإنّ $z-r\partial_2(P_1P_2Q_1)$ دورة من غير P_1P_2 شباهي لـ z، وبالاستمرار في هذه المناقشة، نرى أنه توجد دورة أحادية شباهية لـ z ولا تحوي حوافّ على الدائرة الداخلية للطوق، وباستخدام المثلثات "الخارجية"، نستطيع أن نضبط أكثر بمضاعفات $\partial_2(Q_iP_iQ_j)$، ونصل إلى z' التي لا تحوي حوافّ Q_iP_i. ولكن إذا كانت Q_5P_1 تظهر في z' بمعامل لا يساوي صفرًا، فإنّ P_1 ستظهر بمعامل لا يساوي صفرًا في $\partial_1(z')$، مناقضًا حقيقة أنّ z' دورة، وبالمثل، فلا حافّة Q_iP_{i+1} يمكن أن تظهر حيث $i=1,2,3,4$ إذن، z شباهي لدورة مكوّنة من حوافّ فقط في الدائرة الخارجية، وبمناقشة مألوفة، مثل هذه الدورة يجب أن تكون على الصورة:

$$n(Q_1Q_2+Q_2Q_3+Q_3Q_4+Q_4Q_5+Q_5Q_1)$$

وعندئذٍ، فمن الواضح أن $H_1(X)\simeq\mathbb{Z}$

أظهرنا أننا نستطيع "دفع" أيّ دورة أحادية إلى الدائرة الخارجية، وبالطبع، كان بإمكاننا أن ندفعها إلى الدائرة الداخلية على حدّ المساواة.

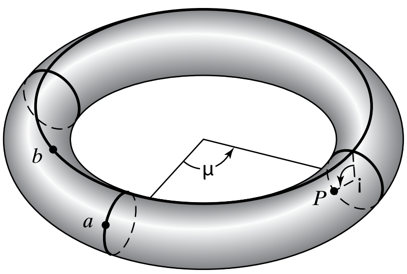
لـ $H_2(X)$، لاحظ أنّ $Z_2(X)=0$؛ لأن كل مبسط ثنائي يحوي في حدوده حافة في كلتا الدائرتين الداخلية والخارجية للطوق، التي لا تظهر في أيّ مبسط ثنائي، وحدود أيّ سلسلة ثنائية غير صفرية يجب أن تحوي بعض المضاعفات غير الصفرية لهذه الحوافّ.

إذن $H_2(X)=0$ ▲

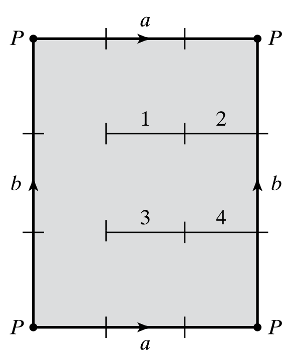
12.42 مثال سنحسب الزمر الشباهية لسطح طارة X، التي تبدو مثل سطح الكعكة المحلاة، كما في الشكل 13.42، ولتخيل المثالثة في الطارة، تصوّر أنك قطعتها عند الدائرة المعلمة a، ثمّ اقطع كامل الدائرة المعلمة b، ثمّ مهّدها كما في الشكل 14.42، وبعد ذلك ارسم المثلثات، ولاستعادة الطارة من الشكل 14.42، صل الحافة اليسرى b مع الحافة اليمنى b، بحيث تسير الأسهم في الاتجاه نفسه، هذا يعطي أسطوانة مع الدائرة a عند كل نهاية، ثمّ اطو الأسطوانة، وصل الدائرتين a، ومرّة ثانية محافظًا على سير الأسهم في الاتجاه نفسه حول الدائرتين.

لأن الطارة متصلة ، فإن $H_0(X)\simeq\mathbb{Z}$

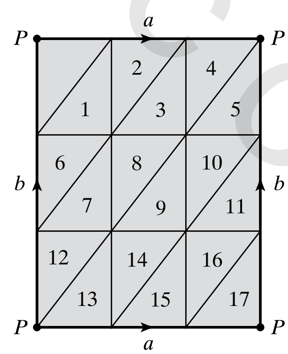
في $H_1(X)$، لتكن z دورة أحادية، فبتغيير z بمضاعف حدود المثلث رقم 1 في الشكل 14.42، تستطيع أن تحصل على دورة شباهية لا تحوي الجانب / من المثلث 1، ثمّ بتغيير الدورة الأحادية الجديدة بمضاعف مناسب لحدود المثلث 2، يمكنك أيضًا أن تزيل الجانب | من 2، وبالاستمرار يمكننا عندها



الشكل 13.42



الشكل 15.42



الشكل 14.42

إزالة / من 3، ا من 4، / من 5، ــ من 6، / من 7، ا من 8، ا من 9، ا من 10، / من 11، ـ من 12، / من 13، ا من 14، / من 15، ا من 16، و / من 17. الدورة الناتجة – شباهية لـ z – يمكنها فقط أن تحوي الحوافّ الظاهرة في الشكل 15.42، ولكن لا يمكن لمثل هذه الدورة أن تحوي – بمعامل لا يساوي صفرًا – أيًّا من الحوافّ التي رقّمناها في الشكل 15.42، أو لن يكون لها حدود 0؛ إذن، z شباهية لدورة أحادية لها حوافّ فقط على الدائرة a أو الدائرة b (ارجع إلى الشكل 13.42).

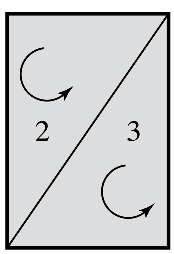
من المأمول بمناقشة مشابهة، أنّ كلّ حافة على الدائرة a يجب أن تُظهر عددًا متساويًا من المرّات، وكذلك الحال صحيح بالنسبة إلى الحواف على الدائرة b؛ وعلى أيّ حال، الحافة على الدائرة b ليس من الضروري إظهارها عددًا مساويًا من المرات لتلك الحواف التي تظهر على a. إضافة إلى ذلك، إذا كان لسلسة ثنائية فقط حدود تحتوي a و b، فإنّ المثلثات كلها الموجهة عكس عقارب الساعة يجب أن تظهر بالمعاملات نفسها، بحيث تشطب الحوافّ الداخلية، وحيث إنّ حدود مثل هذه السلسلة الثنائية تساوي 0؛ إذن، كل فصل شباهي (مجموعة مشاركة) يحوي فقط عنصرًا واحدًا.

$$ra+sb,$$

حيث r و s أعداد صحيحة؛ إذن، $H_1(X)$ إبدالية حرّة بمولدين ممثلين بالدائرتين a و b؛ ولذلك:

$$H_1(X)\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$$

أخيرًا، لـ $H_2(X)$، يجب أن تحوي الدورة الثنائية المثلث 2 في الشكل 14.42، في اتجاه معاكس لعقارب الساعة، وبالعدد نفسه من المرات التي تحوي فيها المثلث 3 – كذلك في اتجاه عكس عقارب الساعة – لكي لا تكون الحافّة المشتركة/ لهذين المثلثين حدودًا، فهذه الاتجاهات موضحة في الشكل 16.42، ويتحقق مثل هذا لأيّ مثلثين متجاورين، وكذلك أيّ مثلث في اتجاه عكس عقارب الساعة يجب أن يظهر بالعدد نفسه من المرّات في دورة ثنائية، ومن الواضح أنّ أيّ مضاعف للجمع الشكلي للمبسطات الثنائية كلها – في اتجاه عكس عقارب الساعة – يكون دورة ثنائية؛ إذن، $Z_2(X)$ دورية غير منتهية، مماثلة لـ $\mathbb{Z}$. وكذلك $B_2(X)=0$، ولا توجد هناك مبسطات ثلاثية، وهكذا $H_2(X)\simeq\mathbb{Z}$ ▲



الشكل 16.42

■ تمارين 42

في هذه التمارين، لا تحتاج إلى كتابة تفاصيل حساباتك ومناقشاتك.

حسابات

1. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين أحاديتين متماسّتين، أي الشكل الثامن.

2. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين ثنائيتين متماسّتين.

3. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية مع حلقة طوقية (كما في الشكل 11.42) التي لا تمسّ الكرة الثنائية.

4. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية مع حلقة طوقية دائرتها الداخلية هي الدائرة العظمى للكرة الثنائية.

5. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من دائرة تلامس كرة ثنائية بنقطة واحدة.

6. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية ذات مقبض (انظر الشكل 17.42).

7. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. مركبات المبسطات المتماثلة استمراريًّا لها زمر شباهية متماثلة.

______ ب. إذا كان لمركبي مبسطتين زمر شباهية متماثلة، فإنّ الفضاءين متماثلان استمراريًّا.

______ جـ. S^n تماثل E^n استمراريًّا.

______ د. $H_n(X)$ تافهة لـ $n > 0$، إذا كان X فضاءً متصلًا مع مثالثة منتهية.

______ هـ. $H_n(X)$ تافهة لـ $n > 0$، إذا كان X فضاءً متقلصًا مع مثالثة منتهية.

______ و. $H_n(S^n) = 0$ لـ $n > 0$.

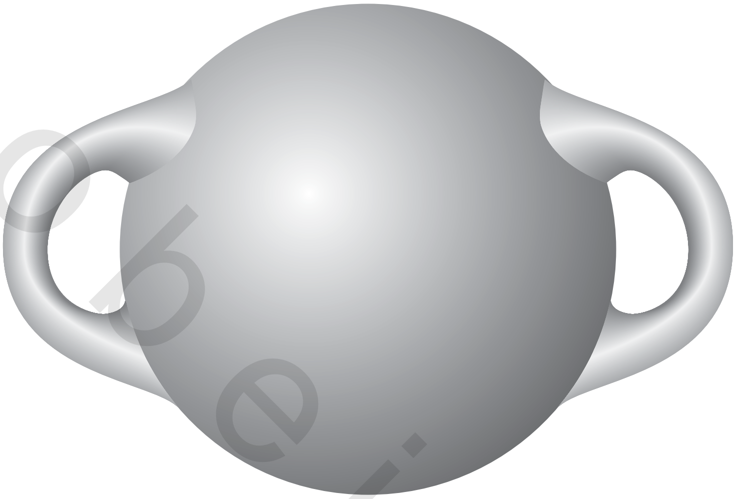
______ ز. $H_n(E^n) = 0$ لـ $n > 0$.

______ ح. الطارة تماثل S^2 استمراريًّا.

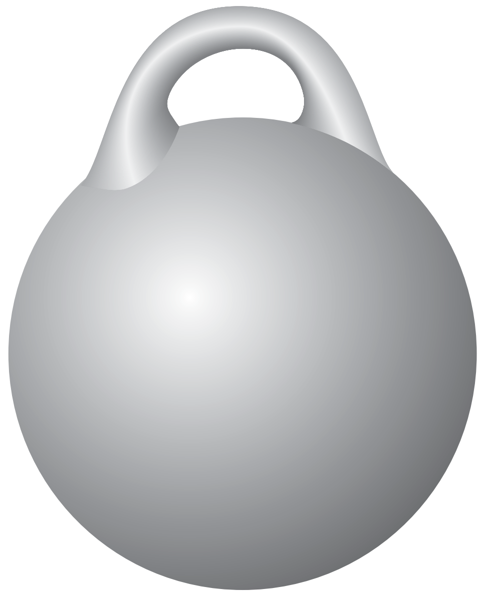
______ ط. الطارة تماثل E^2 استمراريًّا.

______ ي. الطارة تماثل استمراريًّا كرة عليها مقبض (انظر الشكل 17.42).

8. احسب الزمر الشباهية لفضاء مكوّن من سطحي طارتين بلا نقاط مشتركة.



الشكل 18.42



الشكل 17.42

9. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من سطحي طورتين مكدّستين، مكدّسة كما قد يُكدّس أنبوبان داخليان.

10. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من طارة مماسّة لكرة ثنائية عند نقاط الدائرة العظمى جميعها للكرة الثنائية، أي بالون يرتدي أنبوبًا داخليًا.

11. احسب الزمر الشباهية للسطح المكوّن من كرة ثنائية بمقبضين (انظر الشكل 18.42).

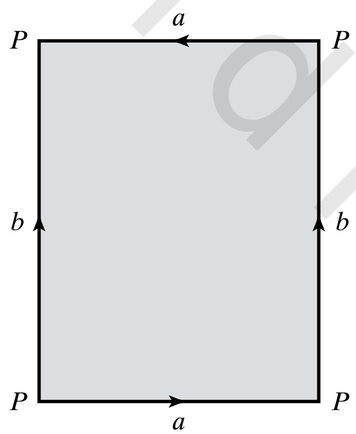
12. احسب الزمر الشباهية للسطح المكوّن من كرة ثنائية مع n من المقابض (تعميم للتمرينين 6 و 11).

الفصل 43 المزيد من الحسابات والتطبيقات على علم الشباه
More Homology Computations and Applications

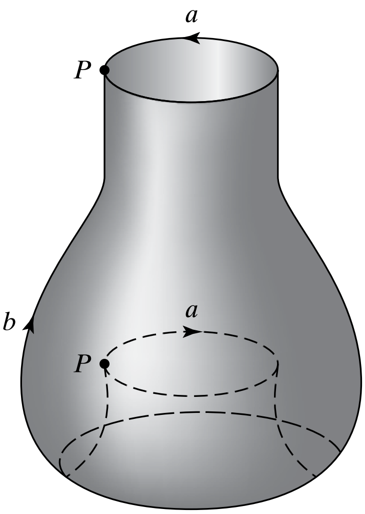
السطوح أحادية الجانب

الزمر الشباهية التي أوجدناها حتى الآن كلها كانت إبدالية حرّة، بحيث لم تكن هناك عناصر غير صفرية ذات رتب منتهية، ويمكن برهان أنّها الحالة دائمًا للزمر الشباهية لسطوح مغلقة (أي سطح مثل S^2، التي لا حدود لها)، التي يكون لها جانبان، ومثالنا الآتي سيكون لسطح مغلق أحادي الجانب، قارورة كلاين (*Klein bottle*)، وسيكون لزمرة الشباه ذات البعد 1 زمرة جزئية ملتوية غير تافهة تعكس الفتل في السطح.

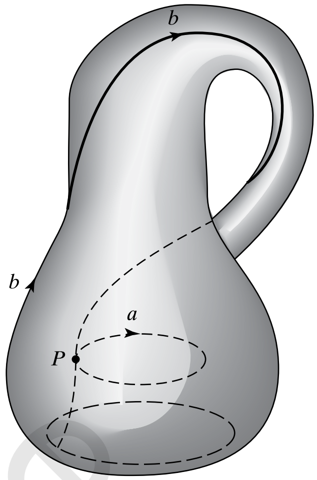
1.43 مثال لنحسب زمر الشباه لقارورة كلاين X، حيث يصور الشكل 2.43 قارورة كلاين مقطعة إلى أجزاء، تمامًا كما صوّر الشكل 13.42 الطارة مقطعة إلى أجزاء، والفرق الوحيد أنّ الأسهم في أعلى وأسفل الحافة a للمستطيل في اتجاهات متعاكسة هذه المرة، ولاستعادة قارورة كلاين من الشكل 2.43 مرة أخرى، اثنِ المستطيل الواصل بين الحافّتين المعلمتين بـ b، بحيث تتطابق اتجاهات الأسهم، ما يعطي أسطوانة تظهر مشوّهة بدفع الجزء الأسفل منها قليلًا لأعلى داخل الأسطوانة، كما في الشكل 3.43، فمثل هذا التشوّه مشروع في الطبولوجيا، ويجب – الآن – وصل الدائرتين a بحيث تدور الأسهم في الاتجاه نفسه. لا يمكن فعل هذا في $\mathbb{R}^3$. يجب أن تتخيل أنك في $\mathbb{R}^4$، بحيث يمكنك ثني عنق القارورة من حول و"خلال" الجانب من غير التقاطع مع الجانب، كما هو ظاهر في الشكل 4.43، ومع القليل من التفكير، بإمكانك أن ترى أنّ السطح الناتج له في الحقيقة جانب واحد، بمعنى أنك لو بدأت من أيّ مكان، ثمّ أصبحت تطلي "جانبًا واحدًا" فستنتهي بطلاء كل شيء. لا يوجد مفهوم الداخل في قارورة كلاين.



الشكل 2.43



الشكل **3.43**



الشكل **4.43**

نستطيع حساب الزمر الشباهية لقارورة كلاين تمامًا كما حسبنا الزمر الشباهية للطارة في المثال 12.42، بتقسيم الشكل 2.43 إلى مثلثات بالضبط كما فعلنا بالطارة.

بالطبع،

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

لأن X متصلة. وكما أوجدنا للطارة، إذا قمنا بمثالثة قارورة كلاين بتقسيم الشكل 2.43 إلى مثلثات، تكون كل دورة أحادية شباهية لدورة على الصورة:

$$ra + sb$$

حيث r و s أعداد صحيحة، فإذا كانت لسلسلة ثنائية حدود تحوي a و b فقط، فمرة أخرى، المثلثات كلها الموجهة عكس عقارب الساعة يجب أن تظهر بالمعاملات نفسها، بحيث إنّ الحوافّ الداخلية ستلغي بعضها، وقد كانت حدود مثل هذه السلسلة الثنائية في حالة الطارة تساوي 0، ولكنها هنا $k(2a)$، حيث k عدد مرات ظهور كل مثلث؛ إذن، $H_1(X)$ زمرة إبدالية مولدة بالفصلين الشباهيين لـ a و b والعلاقتين $a + b = b + a$ و $2a = 0$؛ لذلك:

$$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$$

زمرة مع معامل ملتو 2 وعدد بيتي 1. مناقشتنا السابقة بخصوص السلاسل الثنائية تبرهن على عدم وجود دورات ثنائية هذه المرة، وهكذا، فإنّ

$$H_2(X) = 0 \qquad \blacktriangle$$

ليس بالضرورة ظهور المعامل الملتوي في بعض الزمر الشباهية لسطح أحادي الجانب ذي حدود. ولإكمال الموضوع، سنعطي هذا المثال التقليدي لشريط موبيوس (*Möbius strip*).

5.43 مثال ليكن X شريط موبيوس، الذي يمكن تكوينه بأخذ مستطيل ورقي وربط النهايتين المعلمتين بـ a بنصف ثنية، بحيث تنطبق الأسهم كما هو موضح بالشكل 6.43. لاحظ أنّ شريط موبيوس سطح له حدود، وأنّ حدوده مجرّد منحنًى مغلق (متماثل استمراريًّا مع الدائرة) مكوّن من l و l'، من الواضح أنّ شريط موبيوس – تمامًا مثل قارورة كلاين – له فقط وجه واحد، بمعنى أنه لو طلب منك تلوين وجه واحد فقط منه، فستنتهي بتلوين كامل السطح، بالتأكيد؛ لأن X متصلة

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

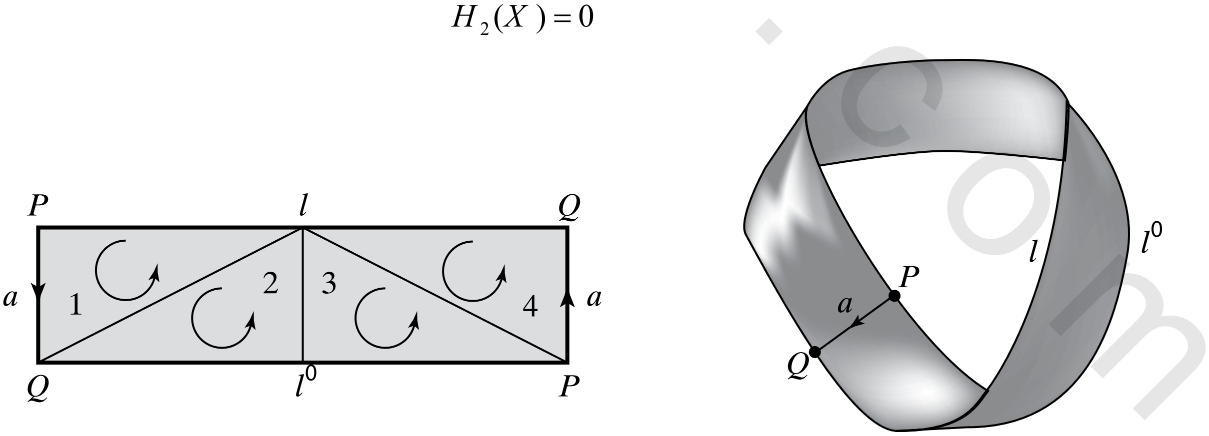
لتكن z أيّ دورة أحادية، وبالطرح بصورة متتالية لمضاعفات مناسبة للمثلثات 2، و 3، و 4 في الشكل 6.43، يمكننا حذف حوافّ / من المثلث 2، ا من المثلث 3، و \ من المثلث 4؛ إذن، z شباهية. لدورة z' التي تكون حوافّها فقط على l و l' و a، وكما في السابق يجب أن يظهر كلا الحدّين على l' العدد نفسه من المرات؛ ولكن، إذا كانت c سلسلة ثنائية مكوّنة من الجمع الشكلي للمثلثات الموجهة كما هو ظاهر في الشكل 6.43، فإننا نرى أنّ $\partial_2(c)$ تتألف من الحوافّ على l و l' إضافة إلى $2a$، ولأنَّ كلتا الحافّتين على l'، فيجب أن تظهر في z' بالعدد نفسه من المرات، وبطرح مضاعف مناسب لـ $\partial_2(c)$ نرى أنّ z شباهية لدورة حوافّها تقع فقط على l و a، وبمناقشة شبيهة، فإنّ هذه الحوافّ كلها الموجهة بصورة ملائمة، يجب أن تظهر بعدد المرات نفسه في هذه الدورة الجديدة، وهكذا، فإنّ الفصل الشباهي الذي يحوي الجمع الشكلي لها يولد $H_1(X)$؛ إذن:

$$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$$

تبدأ هذه الدورة المولدة عند Q، وتذهب حول الشريط، ثمّ تقطعه عند P من خلال a، ثمّ تصل إلى نقطة بدايتها.

فإذا كانت z'' دورة ثنائية، فيجب أن تحوي المثلثات 1، و 2، و 3، و 4 في الشكل 6.43 بعددٍ متساوٍ r من المرات وفي الاتجاه المعين؛ ولكن، عندها تصبح $\partial_2(z'')$ تساوي $r(2a+l+l') \neq 0$ و $Z_2(X)=0$؛ إذن،

$$H_2(X) = 0$$ ▲



الشكل 6.43

مميّز أويلر

لنتحول من حساب الزمر الشباهية إلى القليل من الحقائق والتطبيقات الممتعة. ليكن X مركب مبسطات منتهيًا (أو فضاءً مثالثيًّا) مكوّنًا من مبسطات ثلاثية البعد أو أقل. ليكن n_0 العدد الكلي للرؤوس في المثالثة، وn_1 عدد الحوافّ، وn_2 عدد المبسطات الثنائية، وn_3 عدد المبسطات الثلاثية، فيمكن إظهار العدد

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = \sum_{i=0}^{3} (-1)^i n_i$$

بصورة متساوية بغض النظر عن طريقة مثالثة الفضاء X، حيث يسمى هذا العدد **مميّز أويلر (Euler characteristic)** $\chi(X)$ للفضاء. سننصّ فقط على المبرهنة المدهشة الآتية:

7.43 مبرهنة ليكن X مركب مبسطات منتهيًا (أو فضاءً مثالثيًّا) بُعده ≤ 3. وليكن $\chi(X)$ مميز أويلر للفضاء X، وليكن β_j عددًا بيتيًّا لـ $H_i(X)$، فإنّ:

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j$$

تتحقق هذه المبرهنة كذلك لفضاء X بُعْدُه أكبر من 3، بتعميم واضح لتعريف مميّز أويلر لبعد أكبر من 3.

8.43 مثال افترض أن المجسم رباعي السطوح E^3 في الشكل 2.41، هنا $n_0 = 4$، $n_1 = 6$، $n_2 = 4$، و $n_3 = 1$، وهكذا فإنّ:

$$\chi(E^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$$

تذكر أننا رأينا أنّ $H_3(E^3) = H_2(E^3) = H_1(E^3) = 0$ و $H_0(E^3) \simeq \mathbb{Z}$.

إذن، $\beta_3 = \beta_2 = \beta_1 = 0$ و$\beta_1 = 1$، وهكذا

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j = 1 = \chi(E^3)$$

للسطح S^2 في رباعي السطوح في الشكل 2.41، لدينا $n_0 = 4$، $n_1 = 6$، $n_2 = 4$، و $n_3 = 0$، وإذن:

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$

وكذلك، $H_3(S^2) = H_1(S^2) = 0$، وكلا $H_2(S^2)$ و $H_0(S^2)$ يماثل $\mathbb{Z}$؛ إذن، $\beta_3 = \beta_1 = 0$ و $\beta_2 = \beta_0 = 1$، وهكذا

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j = 2 = \chi(S^2)$$

أخيرًا، لـ S^1 في الشكل 9.42، $n_0 = 3$، $n_1 = 3$، و $n_2 = n_3 = 0$، وإذن:

$$\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$$

هنا، كلا $H_1(S^1)$ و$H_0(S^1)$ يماثل $\mathbb{Z}$، و$H_3(S^1) = H_2(S^1) = 0$؛ إذن، $\beta_0 = \beta_1 = 1$

و$\beta_2 = \beta_3 = 0$، ما يعطي:

$$\sum_{j=0}^{3} (-1)^j \beta_j = 0 = \chi(S^1)$$ ▲

دوالّ الفضاءات

تصنع الدالة المتصلة f التي تربط الفضاء X بالفضاء Y تشاكلاً f_{*_n} تربط $H_n(X)$ مع $H_n(Y)$ لـ $n \geq 0$، حيث يحتاج برهان وجود هذا التشاكل إلى آليات أكثر ممّا نودّ تطويره هنا، ولكن لنحاول وصف كيفية حساب هذه التشاكلات لبعض الحالات الخاصة، إذ يمثل الآتي حقيقة:

إذا كانت $z \in Z_n(X)$، وإذا كانت $f(z)$ – مفترضة بوصفها نتيجة لاختيار z، ووضعها في Y بصورة واضحة – يتعيّن أن تكون دورة من الرتبة n في Y، فإنّ

$$f_{*n}(z + B_n(X)) = f(z) + B_n(Y)$$

بمعنى أنه إذا كانت z تمثّل فصلًا شباهيًّا في $H_n(X)$، و $f(z)$ دورة ذات رتبة n في Y، فإنّ $f(z)$ تمثّل صورة الفصل الشباهي تحت f_{*_n} للفصل الشباهي الذي يحوي z.

لنوضّح هذا، ونحاول أن نرى فقط ما نعنيه هنا بـ $f(z)$.

9.43 مثال افترض دائرة الوحدة

$$S^1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

في $\mathbb{R}^2$، لأيّ نقطة في S^1 إحداثيات $(\cos\theta, \sin\theta)$، كما شاهدنا في الشكل 10.43.
لتكن $f : S^1 \to S^1$ معطاة بـ:

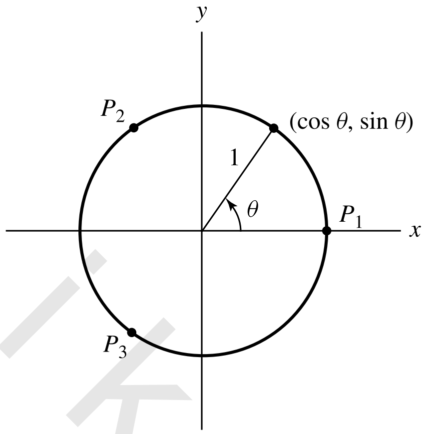
$$f((\cos\theta, \sin\theta)) = (\cos 3\theta, \sin 3\theta).$$

من الواضح أنّ الدالة f متصلة، يجب – الآن – أن تولّد f

$$f_{*1} : H_1(S^1) \to H_1(S^1)$$

هنا، $H_1(X^1)$ تماثل $\mathbb{Z}$، وتولد بالفصل الشباهي $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$، كما رأينا في المثال 8.42، والآن، إذا كانت P_1، و P_2، و P_3 موزّعة على أبعاد متساوية حول الدائرة، فإنّ f تربط كلًّا من الأقواس P_1P_2، و P_2P_3، و P_3P_1 مع محيط الدائرة كله، أي إنّ

$$f\ (P_1P_2) = f\ (P_2P_3) = f\ (P_3P_1) = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1.$$



الشكل 10.43

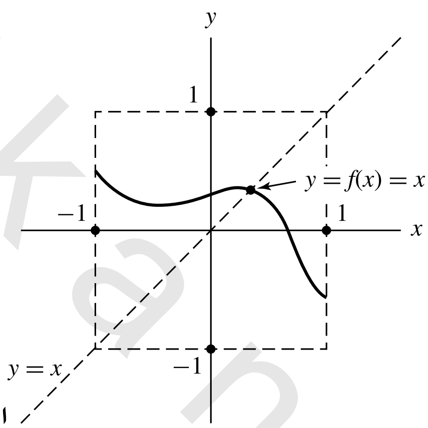
إذن:

$$\begin{aligned} f_{*1}(z + B_1(S^1)) &= 3(P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1) + B_1(S^1) \\ &= 3z + B_1(S^1) \end{aligned}$$

أي إنّ f_{*1} تربط مولد $H_1(S^1)$ بثلاثة أمثاله، وهذا يعكس بوضوح حقيقة أنّ f تلفّ S^1 حول نفسها ثلاث مرات. ▲

يوضح المثال 9.43 زعمنا السابق بأنّ تشاكلات الزمر الشباهية المرتبطة بدالة متصلة f، يمكن أن تعكس صفات مهمّة للدالة.

أخيرًا، سنستخدم هذه المفاهيم في الاستدلال على برهان مبرهنة برور للنقطة الثابتة المشهورة (*Brouwer Fixed – Point Theorem*)، حيث تنصّ هذه المبرهنة على أنّ: للدالة المتصلة f من E^n إلى نفسها نقطة ثابتة، أي إنه يوجد $x \in E^n$، بحيث إنّ $f(x) = x$، لنرى ماذا يعني هذا لـ E^2، منطقة دائرية. تصوّر أنّ لديك صفحة رقيقة من المطاط شُدّت على طاولة لتكوّن قرصًا دائريًّا، علّم الحدود الخارجية لدائرة المطاط على الطاولة بقلم الرصاص، ثم شدّ، واضغط، واثنِ، وافتل، واطوِ المطاط بأيّ صورة من غير تمزيقه، ولكن اتركه دائمًا داخل الدائرة التي رسمتها بالرصاص على الطاولة، عندما تنتهي من ذلك، فإنّ نقطة على المطاط ستبقى تمامًا النقطة نفسها على الطاولة التي بدأت بها.

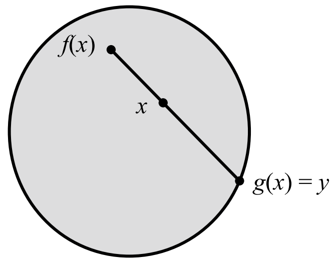


الشكل 11.43

البرهان الذي سنوجزه مناسب لأيّ $n > 1$. في حالة $n = 1$، بالنظر إلى رسمة الدالة $f : E^1 \to E^1$، نجد أنّ المبرهنة تنصّ ببساطة على أنه لأيّ ممرّ متصل يصل الجانبين الأيمن والأيسر للمربع، يجب أن يقطع القطر في مكان ما، كما هو موضح في الشكل 11.43، وعلى الطالب أن يتخيل بناء برهاننا مع E^3 وحدودها S^2 و E^2 وحدودها S^1، حيث يحتوي البرهان شكلًا يوضّح البناء في حالة E^2.

12.43 مبرهنة (مبرهنة برور للنقطة الثابتة) للدالة المتصلة f من E^n إلى نفسها نقطة ثابتة، حيث $n \ge 1$.

البرهان عُدّت حالة $n = 1$ في الأعلى. لتكن f دالة من E^n إلى E^n، حيث $n > 1$، وسنفترض أنّ f من غير نقاط ثابتة ونتوصل إلى تناقض.



الشكل 13.43

إذا كان $f(x) \neq x$ لكل $x \in E^n$، فبإمكاننا أن نعُدّ القطعة المستقيمة من $f(x)$ إلى x، لنمدّ هذه القطعة المستقيمة في الاتجاه من $f(x)$ إلى x حتى تصل إلى S^{n-1} حدود E^n عند النقطة y، هذا يعرّف لنا دالة $g : E^n \to S^{n-1}$، حيث $g(x) = y$، كما هو موضح في الشكل 13.43، لاحظ أنه إذا كانت y على الحدود، فإنّ $g(y) = y$، الآن، ولأنَّ f متصلة، فإن g متصلة كذلك بصورة واضحة وجميلة. (**الدالة المتصلة (continuous function)** هي – تقريبًا – دالة تربط النقاط القريبة كفاية من بعضها بنقاط قريبة من بعضها، فإذا كانت x_1 و x_2 قريبتين كفاية من بعضهما، فإنّ $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قريبتان كفاية من بعضهما كذلك، بحيث إنّ القطعة المستقيمة التي تصل $f(x_1)$ و x_1 قريبة من القطعة المستقيمة التي تصل $f(x_2)$، و x_2 وهكذا، فإن $y_2 = g(x_2)$ قريبة من $y_1 = g(x_1)$؛ إذن، g متصلة، وتربط E^n بـ S^{n-1}، وهكذا، فهي تولد تشاكلا

$$g_{*(n-1)} : H_{n-1}(E^n) \to H_{n-1}(S^{n-1})$$

قلنا: إنّ $H_{n-1}(E^n) = 0$، حيث $n > 1$؛ لأن E^n متقلصة، وتحققنا من ذلك لـ $n = 2$ و $n = 3$، ولأنَّ $g_{*(n-1)}$ تشاكل، فيجب أن نحصل على $g_{*(n-1)}(0)=0$، ولكنّ الدورة من الرتبة $(n - 1)$ التي تمثّل الفصل الشباهي 0 في $H_{n-1}(E^n)$ هو كامل المركب S^{n-1} مع الاتجاه الصحيح للمبسطات، و $g(S^{n-1}) = S^{n-1}$؛ لأن $g(y) = y$ لكل $y \in S^{n-1}$؛ إذن:

$$g_{*(n-1)}(0) = S^{n-1} + B_{n-1}(S^{n-1}).$$

الذي هو مولد $\neq 0$ لـ $H_{n-1}(S^{n-1})$، تناقض. ♦

وجدنا البرهان السابق جميلًا جدًّا، ونأمل أن تجده كذلك.

■ تمارين 43

تمارين مقترحة

1. تحقق بالحسابات المباشرة أنّ كلتا المثالثتين للمنطقة المربعة X في الشكل 1.42 تعطي القيمة نفسها لمميز أويلر $\chi(X)$.

2. وضّح المبرهنة 7.43 – كما فعلنا في المثال 8.43 – لكل من الفضاءات الآتية:

أ. المنطقة الحلقية في المثال 10.42.

ب. الطارة في المثال 12.42.

جـ. قارورة كلاين في المثال 1.43.

3. هل لكل دالة متصلة من منطقة مربعة إلى نفسها نقطة ثابتة؟ لماذا نعم؟ أو لماذا لا؟ هل لكل دالة متصلة من فضاء مكوّن من خليّتين ثنائيتين غير متقاطعتين إلى نفسه نقطة ثابتة؟ لماذا نعم؟ أو لماذا لا؟

4. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين ثنائيتين تمسّان قارورة كلاين بنقطة واحدة.

5. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من قارورتي كلاين وبلا نقاط مشتركة.

6. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كلّ زمرة شباهية لفضاء متقلص زمرة تافهة بعنصر واحدة.

________ ب. كلّ دالة متصلة من مركب مبسطات X إلى مركب مبسطات Y، يولد تشاكلاً من $H_n(X)$ إلى $H_n(Y)$.

________ جـ. الزمر الشباهية كلّها إبدالية.

________ د. الزمر الشباهية كلّها إبدالية حرّة.

________ هـ. الزمر الشباهية ذات البعد 0 كلّها إبدالية حرّة.

________ و. إذا كان للفضاء X مبسطات من الرتبة n، وليس لأيّ منها بعد أكبر من n و $H_n(X) \neq 0$ فإنّ $H_n(X)$ إبدالية حرّة.

________ ز. حدود سلسلة ذات رتبة n، سلسلة ذات رتبة $(n-1)$.

________ ح. حدود سلسلة ذات رتبة n، دورة ذات رتبة $(n-1)$.

________ ط. الحدود ذات الرتبة n تشكل زمرة جزئية من الدورات ذات البعد n.

________ ي. تكون الزمرة الشباهية ذات البعد n لمركب مبسطات دائمًا زمرة جزئية من السلاسل ذات الرتبة n.

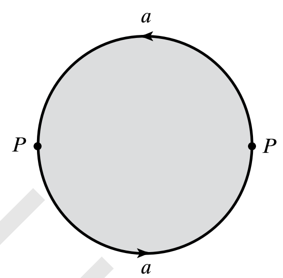
المزيد من التمارين

7. أوجد مميز أويلر لكرة ثنائية لها n من المقابض. (انظر الفصل 42، تمرين 12).

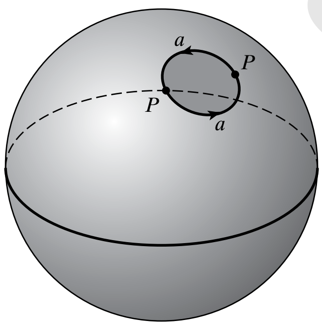
8. يمكننا صنع مستوًى إسقاطي حقيقي طبولوجيًّا X، باستخدام الشكل 14.43 بربط أنصاف الدوائر a، بحيث تجمع النقاط المتقابلة حول القطر معًا، وتتطابق اتجاهات الأسهم، ولا يمكن عمل هذا في الفضاء الإقليدي الثلاثي $\mathbb{R}^3$؛ لذا، يجب على المرء الذهاب إلى $\mathbb{R}^4$، ونقوم بمثالثة هذا الفضاء X بدءًا بالنموذج المعروض في الشكل 14.43، وحساب زمره الشباهية.

9. يمكن تشكيل القرص الدائري المعروض في الشكل 14.43 طبولوجيًّا ليظهر بوصفه كرة ثنائية لها ثقب، كما هو معروض في الشكل 15.43. نكوّن مستوًى إسقاطيًّا حقيقيًّا من هذه الصورة بخياطة الثقب، بحيث تُخاط نقاط حافّة الثقب المتقابلة حول القطر معًا، لا يمكن عمل هذا في $\mathbb{R}^3$.

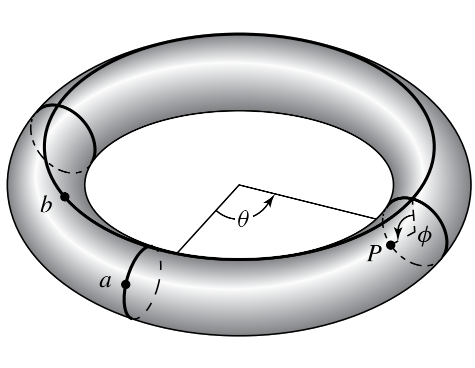
بتعميم هذه الفكرة، تعطي الكرة الثنائية ذات ألـ q ثقبًا، التي تُخاط بنقاط حوافّ الثقوب المتقابلة حول القطر مع بعضها بوصفها كرة ثنائية ذات q من القبعات المتقاطعة. أوجد الزمر الشباهية لكرة ثنائية ذات q من القبعات المتقاطعة. (لرؤية المثالثة، اعرض الفضاء مثل القرص في الشكل 14.43، ولكن مع $q-1$ من الثقوب اللازم خياطتها، كما وصف في الأعلى. ثمّ قم بمثالثة القرص مع هذه الثقوب).



الشكل **14.43**



الشكل **15.43**



الشكل **16.43**

ملاحظة: يمكن إثبات أنّ كل سطح مغلق لطيف بما فيه الكفاية – منطو ثنائي مغلق (*closed 2-manifold*) – متماثل استمراريًا مع كرة ثنائية بعدد $h \geq 0$ من المقابض إذا كان السطح ثنائي الجوانب، ومتماثلًا استمراريًا مع كرة ثنائية مع $q > 0$ من القبعات المتقاطعة إذا كان أحادي الجانب، والعدد h أو q – كما قد تكون الحالة – يسمّى **جنس السطح (genus of the surface)**.

10. يمكن وصف كل نقطعة P على طارة منتظمة X عن طريق زاويتين θ و ϕ، كما هو مبين في الشكل 16.43، أي إنه بإمكاننا ربط الإحداثيين (θ, ϕ) بـ P. صف الدالة المتولدة f_{*n} من $H_n(X)$ إلى $H_n(X)$ لـ $n = 0, 1, 2$، لكل من الدوال f المعرّفة على الطارة X إلى نفسها المعطاة في الأسفل، بإيجاد صور مولدات $H_n(X)$ الموصوفة في المثال 12.42. ترجم تشاكلات الزمر هذه هندسيًا، كما فعلنا في المثال 9.43.

أ. $f : X \to X$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (2\theta,\phi)$

ب. $f : X \to X$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (\theta,2\phi)$

جـ. $f : X \to X$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (2\theta,2\phi)$

11. بالرجوع إلى التمرين 10، يمكن ربط الطارة X بصورة غامرة بدائرتها b (التي تماثل استمراريًا S^1) بتشكيلة من الدوال. لكل من هذه الدوال $f : X \to b$ المعطاة في الأسفل، صف التشاكل $f_{*n} : H_n(X) \to H_n(b)$ حيث $n = 0, 1, 2$، بوصف صور مولدات $H_n(X)$ كما في التمرين 10.

أ. $f : X \to b$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (\theta,0)$

ب. $f : X \to b$ المعطى بـ $f((\theta,\phi)) = (2\theta,0)$

12. كرّر التمرين 11، ولكن بإظهار الدالة f بوصفها دالة من الطارة X إلى نفسها، مولدة الدوال

$$f_{*n} : H_n(X) \to H_n(X)$$

13. افترض الدالة f على قارورة كلاين في الشكل 2.43، المعطاة بربط النقطة Q على المستطيل في الشكل 2.43 بصورة غامرة بالنقطة على b المقابلة لها مباشرة (الأقرب لها). لاحظ أنّ b كرة أحادية طبولوجيًا. احسب الدوال المتولدة $f_{*n} : H_n(X) \to H_n(b)$ حيث $n = 0, 1, 2$، بوصف صور مولدات $H_n(X)$.

الفصل 44 الجبر الشباهي Homological Algebra

سلسة المركبات والدوالّ

كانت الطبولوجيا الجبرية مسؤولة عن الاندفاع في اتجاه جديد في الجبر، حيث ترى، أنه لو كان لديك مركب مبسطات X، فإنك تحصل على سلسلة من الزمر $C_k(X)$ ودوال ∂_k بصورة طبيعية، كما هو مبين في المخطط

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

حيث $\partial_{k-1}\partial_k = 0$، ثمّ يمكنك تجريد الجزء الجبري البحت في هذا الموقف، وتعدّ أيّ متتالية من الزمر الإبدالية A_k والتشاكلات $\partial_k : A_k \to A_{k-1}$، بحيث إنّ $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ لكل $k \geq 1$، ولكي لا تحتاج دائمًا إلى $k \geq 1$ في $\partial_{k-1}\partial_k = 0$، فمن المناسب أن تعُدّ متواليات "ثنائية اللانهاية" من الزمر A_k لكل $k \in \mathbb{Z}$، وقد جرت العادة في التطبيقات أن تكون $A_k = 0$ لكل $k < 0$ و $k > n$. دراسة مثل هذه المتتاليات والدوال لمثل هذه المتتاليات هو موضوع الجبر الشباهي.

1.44 تعريف **السلسلة المركبة** (**Chain Complex**) $\langle A, \partial \rangle$ متتالية ثنائية اللانهاية

$$A = \{\ldots, A_2, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \ldots\}$$

من الزمر الإبدالية A_k، مع مجموعة $\partial = \{\partial_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ من التشاكلات، بحيث إنّ $\partial_k : A_k \to A_{k-1}$ و $\partial_{k-1}\partial_k = 0$. ■

بوصفه تشابهًا ملائمًا لترميزنا في مبرهنة الزمر، سنكون مهملين، وندع "A" ترمز للسلسلة المركبة $\langle A, \partial \rangle$ نستطيع الآن التقليد بوضع جبري كامل لبنائنا وتعريفاتنا في الفصل 41.

2.44 مبرهنة إذا كانت A سلسلة مركبة، فإنّ الصورة تحت تأثير ∂_k زمرة جزئية من نواة ∂_{k-1}.

البرهان افترض

$$A_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} A_{k-2}$$

الآن، $\partial_{k-1}\partial_k = 0$؛ لأن A سلسلة مركبة، بمعنى أنّ $\partial_{k-1}\left[\partial_k\left[A_k\right]\right] = 0$، وهذا يخبرنا مباشرة بأنّ $\partial_k\left[A_k\right]$ محتواة في نواة ∂_{k-1}، وهو ما نودّ برهانه. ♦

3.44 تعريف إذا كانت A سلسلة مركبة، فإنّ النواة $Z_k(A)$ لـ ∂_k **هي زمرة الدورات ذات الرتبة k** (***group of k-cycles***)، والصورة $B_k(A) = \partial_{k+1}\left[A_{k+1}\right]$ **هي زمرة الحدود ذات الرتبة k** (***group of k-boundaries***)، وزمرة العامل $H_k(A) = Z_k(A)/B_k(A)$ **هي زمرة الشباه الـ k لـ A** (***k th homology group of A***). ■

ذكرنا في الفصل السابق أنه لمركبتي مبسطات X و Y، تولد الدالة المتصلة من X إلى Y تشاكلاً من $\mathrm{H}_k(X)$ إلى $H_k(Y)$، حيث تنتج هذه الدالة للزمر الشباهية كالآتي:

لمثالثات مناسبة لـ X و Y، تولد الدالة f تشاكلاً f_k من $C_k(X)$ إلى $C_k(Y)$، التي تتمتع بخاصية مهمّة، وهي أنها تتبدل مع ∂_k، أي إنّ

$$\partial_k f_k = f_{k-1}\partial_k$$

لنعد إلى حالة الجبر المجرد، ونرى كيف يولد هذا دالة على الزمر الشباهية.

4.44 مبرهنة (**التمهيدية الأساسية**): لتكن A و A' مع المجموعتين ∂ و ∂' من التشاكلات سلسلتين مركبتين، وافترض وجود مجموعة f من التشاكلات $f_k : A_k \to A'_k$، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\partial'_{k+2}} & A'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & A'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & A'_{k-1} & \xrightarrow{\partial'_{k-1}} & \cdots
\end{array}$$

افترض- زيادة على ذلك- أنّ كل مربع منها تبديلي، بمعنى أنّ:

$$f_{k-1}\partial_k = \partial'_k f_k$$

لكل k، فإنّ f_k تولد تشاكلًا طبيعيًا $f_{*k} : H_k(A) \to H_k(A')$

البرهان لتكن $z \in Z_k(A)$، الآن:

$$\partial'_k(f_k(z)) = f_{k-1}(\partial_k(z)) = f_{k-1}(0) = 0$$

وهكذا، فإنّ $f_k(z) \in Z_k(A')$ ، لنحاول تعريف $f_{*k} : H_k(A) \to H_k(A')$ بـِ

$$f_{*k}(z + B_k(A)) = f_k(z) + B_k(A') \qquad (1)$$

يجب علينا أولًا إثبات أنّ f_{*k} حسنة التعريف، أي إنها مستقلة عن خيارنا لممثل $z + B_k(A)$، افترض أنّ ، $z_1 \in (z + B_k(A))$، وهكذا $(z_1 - z) \in B_k(A)$، يوجد $c \in A_{k+1}$ يجب أن $z_1 - z = \partial_{k+1}(c)$. ولكن حينها

$$f_k(z_1) - f_k(z) = f_k(z_1 - z) = f_k(\partial_{k+1}(c)) = \partial'_{k+1}(f_{k+1}(c))$$

وهذا الحدّ الأخير هو عنصر في $\partial'_{k+1}\left[A'_{k+1}\right] = B_k(A')$؛ إذن،

$$f_k(z_1) \in (f_k(z) + B_k(A'))$$

إذن، الممثلان للمجموعة نفسها المشاركة في $H_k(A)=Z_k(A)/B_k(A)$ يرتبطان بممثلين لمجموعة مشاركة واحدة في $H_k(A')=Z_k(A')/B_k(A')$، وهذا يثبت أنّ $f_{*k}:H_k(A)\to H_k(A')$ حسنة التعريف كما في المعادلة (1).

الآن، نحسب: f_{*k} بأخذ f_k على ممثلات المجموعات المشاركة، ونعرّف عملية الزمرة على زمرة العامل بتطبيق عملية الزمرة للزمرة الأصلية على ممثلات المجموعات المشاركة، وينتج مباشرة عن حقيقة أنّ تأثير f_k في $Z_k(A)$ هو تشاكل من $Z_k(A)$ إلى $Z_k(A')$، أنّ f_{*k} تشاكل من $H_k(A)$ إلى $H_k(A')$. ♦

إذا كانت مجموعات الدوالّ f، و ∂، و ∂' تحقق خاصية – المعطاة في المبرهنة 4.44 – أنّ المربعات تبديلية، فإنّ f **تتبدل مع** ∂ (**commutes with**).

بعد تعريف آخر، سنعطي ما يبدو تافهًا، ولكنه توضيح مهم جدًّا لمبرهنة 4.44.

5.44 تعريف السلسلة المركبة $\langle A',\partial'\rangle$ **هي مركب جزئي من السلسلة المركبة** $\langle A,\partial\rangle$ **(subcomplex of a chain complex)**، إذا كان لكل k، A'_k زمرة جزئية من A_k و$\partial'_k(c)=\partial_k(c)$ لكل $c\in A'_k$، أي إن ∂'_k و ∂_k لهما التأثير نفسه في عناصر الزمرة الجزئية A'_k من A_k. ■

6.44 مثال لتكن A سلسلة مركبة، ولتكن A' مركبة جزئية من A. لتكن i مجموعة دوال الإدخال كلها $i_k:A'_k\to A_k$ المعطاة بـ $i_k(c)=c$ لكل $c\in A'_k$. من الواضح أنّ i تتبدل مع ∂؛ إذن، تتولد لدينا تشاكلات $i_k:A'_k\to A_k$، ومن الطبيعي أن يظن المرء أنّ i_{*k} يجب أن تكون دالة تماثل من $H_k(A')$ إلى $H_k(A)$.

ولكن هذا ليس بالضرورة صحيحًا، على سبيل المثال: افترض الكرة الثنائية S^2 بوصفها مركبًا جزئيًّا من الخلية الثلاثية E^3. يعطي هذا $i_2:C_2(S^2)\to C_2(E^3)$، ما يولد

$$i_{*2}:H_2(S^2)\to H_2(E^3)$$

إلّا أننا رأينا أنّ $H_2(S^2)\simeq\mathbb{Z}$، بينما $H_2(E^3)=0$؛ إذن، فمن الممكن ألا تكون i_{*2} دالة تماثل. ▲

علم الشباه النسبي

افترض أنّ A' مركب جزئي من السلسلة المركبة A. الوضع الطبولوجي الذي جاء منه هذا هو عدّ المركب الجزئي للمبسطات Y (بالمعنى الواضح) من مركب المبسطات X، عندها، يمكننا ببساطة أن نعُدّ $C_k(Y)$ بوصفها زمرة جزئية من $C_k(X)$، تمامًا مثل الحالة في الجبر أن لدينا A_k' زمرة جزئية من A_k، ومن الواضح أنّ لدينا

$$\partial_k\left[C_k(Y)\right] \le C_{k-1}(Y)$$

لنتعامل الآن مع حالة الجبر، ونتذكر أنه بإمكاننا تطبيقه على حالة الطبولوجيا في أيّ وقت.

إذا كان A' مركبًا جزئيًا من السلسلة المركبة A، فيمكننا تكوين المجموعة A/A' من زمر العامل A_K/A'_K، حيث ندّعى أنّ A/A' تعطي مرة أخرى سلسلة مركبة بطريقة طبيعية، ويجب علينا أن نصنع مجموعة $\overline{\partial}$ من التشاكلات

$$\overline{\partial}_{\mathrm{k}} : (A_k/A'_k) \to (A_{k-1}/A'_{k-1})$$

بحيث إنّ $\overline{\partial}_{k-1}\overline{\partial}_k = 0$. محاولة تعريف $\overline{\partial}_k$ واضحة، أي عرّف

$$\overline{\partial}_k(c + A_k') = \partial_k(c) + A_{k-1}'$$

لكل $c \in A_k$. يجب علينا إثبات ثلاثة أمور ، هي : أنّ $\overline{\partial}_k$ حسنة التعريف، وأنها تشاكل، وأن $\overline{\partial}_{k-1}\overline{\partial}_k = 0$

أولاً، لإثبات أنّ $\overline{\partial}_k$ حسنة التعريف، ليكن c_1 كذلك ينتمي إلى $c + A_k'$؛ إذن، $(c_1 - c) \in A_k'$، وهكذا، فإنّ:

$\partial_k(c_1 - c) \in A_{k-1}'$؛ إذن:

$$\partial_k(c_1) \in (\partial_k(c) + A_{k-1}')$$

كذلك. يثبت هذا أنّ $\overline{\partial}_k$ حسنة التعريف.

تثبت المعادلة

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_k((c_1 + A_k') + (c_2 + A_k')) &= \overline{\partial}_k((c_1 + c_2) + A_k') \\ &= \partial_k(c_1 + c_2) + A_{k-1}' \\ &= (\partial_k(c_1) + \partial_k(c_2)) + A_{k-1}' \\ &= \overline{\partial}_k(c_1 + A_k') + \overline{\partial}_k(c_2 + A_k')\end{aligned}$$

أنّ $\overline{\partial}_k$ تشاكل.

أخيرًا،

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_{k-1}(\overline{\partial}_k(c + A_k')) &= \overline{\partial}_{k-1}(\partial_k(c) + A_{k-1}') \\ &= \partial_{k-1}(\partial_k(c)) + A_{k-2}' = 0 + A_{k-2}'\end{aligned}$$

وإذن، $\overline{\partial}_{k-1}\overline{\partial}_k = 0$.

المناقشة السابقة نموذج للحسابات الاعتيادية للعاملين بالجبر الشباهي، إضافة إلى أنّ جمع الأعداد الصحيحة وضربها اعتيادي لك، وقد قدمناها بتفصيل كبير، على المرء أن يكون حذرًا بعض الشيء في متابعة البعد، أي متابعة الدليل السفلي، وفي الحقيقة، لا يكتب المحترفون في الجبر الشباهي عادة هذه الأدلة، ولكنهم يعرفون تمامًا مع أيّ زمرة يعملون، لقد أعطينا الأدلة السفلية كلها لتبقى متابعًا أيّ الزمر بالضبط قيد الحساب، لنلخّص العمل السابق بمبرهنة.

7.44 مبرهنة إذا كان A' مركبًا جزئيًا من السلسلة المركبة A، فإنّ المجموعة A/A' من زمر العامل

A_k/A_k' مع المجموعة $\overline{\partial}$ من التشاكلات، بحيث تعرّف $\overline{\partial}_k$ بـ

$$\overline{\partial}_k(c+A_k')=\partial_k(c)+A_{k-1}'$$

لكل $c\in A_k$، تشكل سلسلة مركبة.

لأنَّ A/A' سلسلة مركبة، فبإمكاننا صنع زمر شباهية $H_k(A/A')$.

8.44 تعريف زمرة الشباه $H_k(A/A')$ **هي الزمرة الـ k الشباهية النسبية لـ A مقياس A'.**

(k th relative homology group of A modulo A') ■

في حالة الطبولوجيا، حيث Y مركب جزئي من مركب المبسطات X، سنستعمل المصطلحات العادية في الطبولوجيا، ونرمز للزمرة الـ k الشباهية النسبية المتولدة من المركب الجزئي $C(Y)$ من السلسلة المركبة $C(X)$ بـ " $H_k(X,Y)$ ". سلاسل Y" كلها ستوضع لتساوي 0" ، وهذا يقابل هندسيًا تقلص Y إلى نقطة.

9.44 مثال ليكن X مركب مبسطات مكوّنًا من حوافّ (مستثنيًا الداخل) للمثلث في الشكل 10.44، وليكن Y مركبًا جزئيًا مكوّنًا من الحافّة P_2P_3. لقد رأينا أنّ $H_1(X)\simeq H_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$، حيث إنّ تقلص P_2P_3 إلى نقطة يؤدي إلى إنهيار حافة المثلث، كما هو مشاهد في الشكل 11.44، لا يزال الناتج يساوي S^1 طبولوجيًا؛ إذن، نتوقع مرة أخرى أنّ نحصل على $H_1(X,Y)\simeq\mathbb{Z}$.

مولدات $C_1(X)$ هي P_1P_2، و P_2P_3 و P_3P_1، ولأنَّ $P_2P_3\in C_1(Y)$، فنرى أنّ مولدات

$C_1(X)/C_1(Y)$ هي $P_1P_2+C_1(Y)$ و $P_3P_1+C_1(Y)$.

لإيجاد $Z_1(X,Y)$، نحسب:

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_1(nP_1P_2+mP_3P_1+C_1(Y))&=\partial_1(nP_1P_2)+\partial_1(mP_3P_1)+C_0(Y)\\&=n(P_2-P_1)+m(P_1-P_3)+C_0(Y)\\&=(m-n)P_1+C_0(Y)\end{aligned}$$

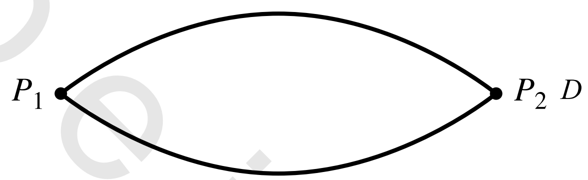
لأن $P_2,P_3\in C_0(Y)$؛ إذن ، يجب أن تكون $m=n$ لدورة، وهكذا، فإنّ مولد $Z_1(X,Y)$ هو

$H_1(X,Y) \simeq \mathbb{Z}$ فنرى بالتأكيد أنّ $B_1(X,Y)=0$ ، ولأنّ $(P_1P_2+P_3P_1)+C_1(Y)$ ،

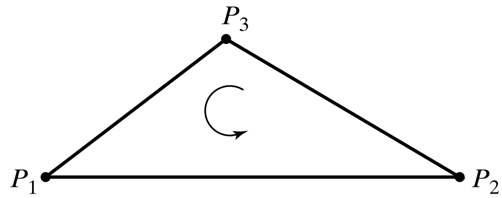
لأنّ $Z_0(X,Y)$ تولد $P_1+C_0(Y)$

و $\overline{\partial}_1(P_2P_1+C_1(Y))=(P_1-P_2)+C_0(Y)=P_1+C_0(Y)$

نرى أنّ $H_0(X,Y)=0$. هذا مميز للزمر الشباهية النسبية ذات البعد 0 لمركب مبسطات متصل ▲

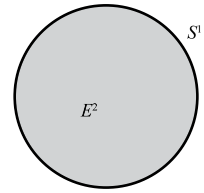


الشكل **11.44**



الشكل **10.44**

12.44 مثال لنعُدّ S^1 بوصفها مركبًا جزئيًّا (حدود) من E^2 ، ونحسب$H_2(E^2,S^1)$. تذكر أنّ E^2 قرص دائري، وبهذا يمكن أن نعُدّ S^1 حدوده (انظر الشكل 13.44). يمكنك تبيين تقلص S^1 إلى نقطة بتثبيت خيط مطاط على حوافّ قطعة دائرية من القماش، ثم تسحب الخيط، بحيث تتجمّع حوافّ الدائرة في نقطة واحدة. يكون الفضاء الناتج كيسًا مغلقًا أو S^2؛ إذن بينما $H_2(E^2)=0$؛ لأن E^2 فضاء متقلص، فنتوقع أن



الشكل **13.44**

$$H_2(E^2,S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

لغايات الحساب، يمكننا أن نعُدّ E^2 طبولوجيًّا كالمنطقة المثلثة في الشكل 10.44 و S^1 كحافّة للمثلث؛ إذن، يتولد $C_2(E^2,S^1)$ بـ $P_1P_2P_3+C_2(S^1)$ ،

و $$\overline{\partial}_2(P_1P_2P_3+C_2(S^1))=\partial_2(P_1P_2P_3)+C_1(S^1)$$
$$=(P_2P_3-P_1P_3+P_1P_2)+C_1(S^1)$$

ولكن $(P_2P_3-P_1P_3+P_1P_2)\in C_1(S^1)$ ، ما يؤدي إلى أنّ

$$\overline{\partial}_2(P_1P_2P_3+C_2(S^1))=0$$

إذن، $P_1P_2P_3+C_2(S^1)$ عنصر في $Z_2(E^2,S^1)$ ، ولأنّ

$$B_2(E^2,S^1)=0$$

فنرى أنّ

$$H_2(E^2,S^1)\simeq\mathbb{Z}$$

كما توقعنا ▲

المتتالية الشباهية المضبوطة لزوج

سنصف الآن المتتالية الشباهية المضبوطة لزوج، ونعطي تطبيقًا.

لن نعمل تفاصيل الحسابات جميعها، فالحسابات عادية ومباشرة، وسنعطي التعريفات اللازمة كلها، وسنترك للطالب إكمال التفاصيل في التمارين.

14.44 تمهيدية ليكن A' مركبًا جزئيًّا من السلسلة المركبة A. لتكن j مجموعة التشاكلات الطبيعية

$j_k : A_k \to (A_k / A_k^{'})$، فإنّ

$$j_{k-1}\partial_k = \overline{\partial}_k j_k ,$$

بمعنى أنّ j يتبدل مع ∂.

البرهان سندع هذه الحسابات السهلة للتمارين. (انظر التمرين 12). ♦

15.44 مبرهنة تولد الدالة j_k في التمهيدية 14.44 تشاكلًا طبيعيًّا

$$j_{*k} : H_k(A) \to H_k(A / A^{'})$$

البرهان ينتج هذا مباشرة من التمهيدية 14.44 والمبرهنة 4.44. ♦

ليكن A' مركبًا جزئيًّا من السلسلة المركبة A. لتكن $h \in H_k(A / A^{'})$، فإنّ $h = z + B_k(A / A^{'})$، حيث $z \in Z_k(A / A^{'})$، وتبعًا لذلك، $z = c + A_k^{'}$، حيث $c \in A_k$. (لاحظ أننا وصلنا إلى c من h بخيارين متتابعين للممثلات). الآن $\overline{\partial}_k(z) = 0$، وهذا يؤدي إلى أنّ $\partial_k(c) \in A_{k-1}^{'}$، هذا وبالترافق مع $\partial_{k-1}\partial_k = 0$، يعطينا $\partial_k(c) \in Z_{k-1}(A^{'})$.

عرّف

$$\partial_{*k} : H_k(A / A^{'}) \to H_{k-1}(A^{'})$$

بـ

$$\partial_{*k}(h) = \partial_k(c) + B_{k-1}(A^{'})$$

يبدو هذا التعريف لـ ∂_{*k} معقدًا جدًّا. فكّر فيه كما يأتي: ابدأ بعنصر من $H_k(A / A^{'})$، مثل هذا العنصر يمثل – الآن – بدورة نسبية من الرتبة k مقياس A'؛ وبالقول: إنها دورة نسبية من الرتبة k مقياس A' يكافئ قولنا: إن حدودها في $A_{k-1}^{'}$، لأن حدودها في $A_{k-1}^{'}$ وهي حدود شيء ما في A_k، فهذه الحدود يجب أن تكون دورة من الرتبة $(k\text{-}1)$ في $A_{k-1}^{'}$؛ إذن، بدءًا بـ $h \in H_k(A / A^{'})$، نصل إلى دورة من الرتبة $(k\text{-}1)$ تمثل فصلًا شباهيًّا في $H_{k-1}(A^{'})$.

16.44 تمهيدية الدالة $\partial_{*k} : H_k(A/A') \to H_{k-1}(A')$ – التي عرّفناها توًّا– حسنة التعريف، وهي تشاكل من $H_k(A/A')$ إلى $H_{k-1}(A')$.

البرهان سنترك هذا البرهان للتمارين (انظر التمرين 13). ♦

لتكن i_{*k} الدالة في المثال 6.44. يمكننا الآن بناء المخطط الآتي:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{*k+1}} H_k(A') \xrightarrow{i_{*k}} H_k(A) \xrightarrow{j_{*k}} H_k(A/A')$$
$$\xrightarrow{\partial_{*k}} H_{k-1}(A') \xrightarrow{i_{*k-1}} H_{k-1}(A) \xrightarrow{j_{*k-1}} H_{k-1}(A/A') \xrightarrow{\partial_{*k-1}} \ldots \qquad (1)$$

17.44 تمهيدية تشكل الزمرة في المخطط (1) مع الدوال المعطاة سلسلة مركبة.

البرهان نحتاج فقط إلى التحقق من أنّ أيّ متتالية من دالّتين متتاليتين تعطي دائمًا 0. نترك هذا للتمارين (انظر التمرين 14). ♦

لأنَّ المخطط (1) يعطي سلسلة مركبة، فبإمكاننا (برعب!) أن نسأل عن الزمر الشباهية لهذه السلسلة المركبة، فقد كنا نهدف إلى هذا السؤال، والإجابة عنه في الحقيقة سهلة جدًّا، إذ إنّ الزمر الشباهية لهذه السلسلة المركبة كلها تساوي 0، وقد تظن أنّ مثل هذه السلسلة المركبة غير مهمّة. ولكن وعلى خلاف المتوقع، فإنّ لمثل هذه السلسلة المركبة اسم خاص.

18.44 تعريف تسمى متتالية الزمر A_k والتشاكلات ∂_k المكوّنة لسلسلة مركبة **متتالية مضبوطة** (***exact sequence***)، إذا كانت الزمر الشباهية للسلسلة المركبة كلها تساوي 0، أي إنه لكل k صورة ∂_k تساوي نواة ∂_{k-1}. ■

المتتاليات المضبوطة مهمّة جدًّا في الطبولوجيا، وسنعطي بعض الخصائص الأولية لها في التمارين.

19.44 مبرهنة تشكل الزمر والدوالّ في السلسلة المركبة في المخطط (1) متتالية مضبوطة.

البرهان سنترك هذا البرهان للتمارين. (انظر التمرين 15). ♦

20.44 تعريف المتتالية المضبوطة في المخطط (1)، هي **متتالية شباهية مضبوطة للزوج** (A, A'). ((A, A') **(exact homology sequence of the pair)**. ■

21.44 مثال لنعطي تطبيقًا للمبرهنة 9.44 في الطبولوجيا، فقد ذكرنا من غير برهان أنّ:

$H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ و $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$، ولكن $H_k(S^n) = 0$، حيث $k \neq 0, n$. وكذلك ذكرنا من غير برهان أنّ:

$H_k(S^E) = 0$، حيث $k \neq 0$؛ لأن E^n متقلصة. لنفترض صحّة النتيجة بالنسبة إلى E^n، ونستنتج منها النتيجة لـ S^n.

يمكننا أن نعُدّ S^n بوصفها مركبًا جزئيًّا من مركب المبسطات E^{n+1}، على سبيل المثال: تكافئ طبولوجيًّا المبسط من الرتبة $(n+1)$، وتكافئ S^n طبولوجيًّا حدودها، لنصنع

متتالية شباهية مضبوطة من الزوج (E^{n+1},S^{n})، لدينا:

$$\underbrace{H_{n+1}(S^n)}_{=0} \xrightarrow{i_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1},S^{n})}_{\simeq\mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_{*n+1}}$$

$$\underbrace{H_{n}(S^n)}_{=?} \xrightarrow{i_{*n}} \underbrace{H_{n}(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n}} \underbrace{H_{n}(E^{n+1},S^{n})}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*n}} \dots \xrightarrow{j_{*k+1}}$$

$$\underbrace{H_{k+1}(E^{n+1},S^{n})}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*k+1}} \underbrace{H_{k}(S^n)}_{=?} \xrightarrow{i_{*k}} \underbrace{H_{k}(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*k}} \dots \quad (2)$$

حيث $1 \le k < n$، وحقيقة أنّ E^{n+1} متقلصة تعطي $H_k(E^{n+1})=0$، حيث $k \ge 1$.
أشرنا إلى هذا في المخطط (2). باعتبار E^{n+1} مبسطًا من الرتبة $(n+1)$ و S^n بوصفها حدودًا لها، فإننا نرى أنّ $C_k(E^{n+1}) \le C_k(S^n)$، حيث $k \le n$ ؛ ولذلك، $H_k(E^{n+1},S^n)=0$ ، حيث $k \le n$ ، وقد أشرنا كذلك إلى هذا في المخطط (2). تمامًا كما في المثال 12.44، يرى المرء أنّ $H_{n+1}(E^{n+1},S^n) \cong \mathbb{Z}$، مولدة بالفصل الشباهي الذي يحوي بوصفه ممثلًا

$$P_1P_2...P_{n+2}+C_{n+1}(S^n)$$

لـ $1 \le k < n$، تخبرنا المتتالية المضبوطة في الصف الأخير في المخطط (2) أنّ $H_k(S^n)=0$ ؛ لأننا نرى من

أن $H_k(E^{n+1})=0$

$$H_k(S^n) = (\text{نواة } i_{*h})$$

ولكن من $H_{k+1}(E^{n+1},S^n)=0$ ، نرى أنّ (صورة ∂_{*K+1})=0 ومن أنّ المتتالية مضبوطة – (نواة i_{*k}) = (صورة ∂_{*K+1})– نحصل على $H_k(S^n)=0$، لكل $1 \le k < n$.

سلسلة التبريرات الآتية تؤدي إلى أنّ $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ بالرجوع إلى المخطط (2) في الأعلى.

1. لأن $H_{n+1}(E^{n+1})=0$ ، نحصل على (صورة j_{*n+1}) = 0.

2. إذن، ومن الضبط نحصل على (نواة ∂_{*n+1}) = (صورة j_{*n+1}) = 0، أي إنّ ∂_{*n+1} دالة تماثل.

3. لذلك، (صورة ∂_{*n+1}) $\simeq \mathbb{Z}$.

4. لأنَّ $H_n(E^{n+1})=0$، نحصل على(نواة i_{*k}) = $H_n(S^n)$.

5. ومن أنّ المتتالية مضبوطة، (نواة i_{*n}) = (صورة∂_{*n+1}) ، وهكذا $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. إذن، نرى أنّ $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ و $H_k(S^n)=0$ ، حيث $1 \le k < n$.

لأنَّ S^n متصلة، $H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ ، يمكن استنتاج هذه الحقيقة كذلك من المتتالية المضبوطة

$$\underbrace{H_1(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*1}} H_0(S^n) \xrightarrow{i_{*0}} \underbrace{H_0(E^{n+1})}_{\simeq\mathbb{Z}} \xrightarrow{j_{*0}} \underbrace{H_0(E^{n+1}, S^n)}_{=0}$$

▲

■ تمارين 44

تمارين مقترحة

1. لتكن A و B زمرتين مع الجمع، وافترض أنّ المتتالية:

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \to 0$$

مضبوطة. فأثبت أنّ $A \simeq B$.

2. لتكن A، B، C زمرًا مع الجمع، وافترض أنّ المتتالية:

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \to 0$$

مضبوطة. فأثبت أنّ:

أ. j دالة غامرة من B إلى C.

ب. i تماثل من A إلى B.

جـ. C تماثل $B / i\left[A\right]$.

3. لتكن A، وB، وC، وD زمرًا، ولتكن

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} D$$

متتالية مضبوطة. فأثبت أنّ الشروط الثلاثة الآتية متكافئة.

أ. i غامرة لـ B.

ب. j تربط بصورة غامرة B كلها بـ 0.

جـ. k دالة أحادية.

4. أثبت أنه إذا كان

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} F$$

متتالية مضبوطة من زمر الجمع، فإنّ العبارات الآتية متكافئة:

أ. تربط كل من h و j كل شيء بـ 0 بصورة غامرة.

ب. i تماثل من C غامرة لـ D.

جـ. g غامرة لـ B و k أحادية.

لمزيد من التمارين

5. المبرهنتان 4.44 و7.44 مرتبطتان جدًّا بالتمرين 39 في الفصل14 أظهر هذا الارتباط.

6. بحسابات مشابهة للمثالين 9.44و 14.44 في الكتاب، أوجد الزمر الشباهية النسبية $H_n(X, a)$ للطارة X والمركب الجزئي a– كما هو مبين في الشكلين 13.42 و 14.42. (لأنه بإمكاننا أن نعُدّ هذه الزمر الشباهية بوصفها زمرًا شباهية للفضاء الناتج عن X بتقليص a إلى نقطة، يتعيّن أن تكون هي الزمر الشباهية للطارة المتلاشية).

7. لمركب المبسطات X والمركبة الجزئية a في التمرين 6، كوّن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, a) ، وأثبت بحسابات مباشرة أنّ هذه المتتالية مضبوطة.

8. كرّر التمرين 6 ، حيث X قارورة كلاين في الشكل 2.43 والشكل 3.43 . (يتعيّن أن يعطي هذا الزمر الشباهية لقارورة كلاين المتلاشية).

9. لمركب المبسطات X والمركب الجزئي a في التمرين 8، كوّن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, a)، وأثبت بحسابات مباشرة أنّ هذه المتتالية مضبوطة.

10. أوجد الزمر الشباهية النسبية $H_n(X, Y)$، حيث X المنطقة الحلقية في الشكل 11.42 و Y المركب الجزئي المكوّن من دائرتي الحدود.

11. لمركب المبسطات X والمركب الجزئي Y في التمرين 10، كوّن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, Y)، وأثبت بحسابات مباشرة أنّ هذه المتتالية مضبوطة.

12. أثبت التمهيدية 14.44

13. أثبت التمهيدية 16.44

14. أثبت التمهيدية 17.44

15. أثبت المبرهنة 19.44 باستخدام الخطوات الآتية:

أ. أثبت أنّ (صورة i_{*k}) $\supseteq$ (نواة j_{*k}).

ب. أثبت أنّ (نواة j_{*k}) $\supseteq$ (صورة i_{*k}).

جـ. أثبت أنّ (صورة j_{*k}) $\supseteq$ (نواة ∂_{*k}).

د. أثبت أنّ (نواة ∂_{*k}) $\supseteq$ (صورة j_{*k}).

هـ. أثبت أنّ (صورة ∂_{*k}) $\supseteq$ (نواة i_{*k-1}).

و. أثبت أنّ (نواة i_{*k-1}) $\supseteq$ (صورة ∂_{*k}).

16. لتكن $\langle A, \partial \rangle$ و $\langle A', \partial' \rangle$ سلسلتي مركبات، ولتكن f وg مجموعتي تشاكلات $f_k : A_k \to A'_k$ و $g_k : A_k \to A'_k$ ، بحيث إنّ كلاً f و g تتبدل مع ∂. **التحاول الجبري (algebraic homotopy)** بين f و g هي المجموعة D من التشاكلات $D_k : A_k \to A'_{k+1}$ بحيث إنه لكل $c \in A_k$ ، نحصل على:

$$f_k(c) - g_k(c) = \partial'_{k+1}(D_k(c)) + D_{k-1}(\partial_k(c))$$

(يمكن اختصار هذا الشرط بـ $f - g = \partial D + D\partial$). أثبت أنه إذا وجد تحاول جبري بين f و g، أي إذا كانت f و g **متحاولة (homotopic)**، فإنّ f_{*k} و g_{*k} هو التشاكل نفسه من $H_k(A)$ إلى $H_k(A')$.