الوحدة السابعة

مبرهنة الزمر المتقدّمة
Advanced Group Theory

الفصل 34 مبرهنات التماثل Isomorphism Theorems

هناك كثير من المبرهنات المتعلقة بتماثل زمر العامل المعروفة بمبرهنات التماثل في مبرهنة الزمر: أولها المبرهنة 11.14، التي سنعيد ذكر نصّها ليسهل الرجوع إليها. تمثّل المبرهنة في الشكل 1.34

$$\begin{tikzcd} \phi[G] & & G \arrow[ll, "\phi"'] \arrow[dl, "\gamma_K"] \\ & G/K \arrow[ul, dashed, "\text{تماثل } \mu"] & \end{tikzcd}$$

الشكل 1.34

2.34 مبرهنة (**مبرهنة التماثل الأولى**): ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكلاً ذا نواة K، وليكن $\gamma_k: G \to G/K$ التشاكل القانوني، يوجد تماثل وحيد $\mu: G/K \to \phi[G]$، حيث إنّ $\phi(x) = \mu(\gamma_K(x))$ لكل $x \in G$.

ستساعد التمهيدية الآتية بصورة كبيرة في برهاننا وفهمنا الحدسي لمبرهنتي التماثل الأخريين.

3.34 تمهيدية لتكن N زمرة جزئية ناظمية للزمرة G، وليكن $\gamma: G \to G/N$ التشاكل القانوني، فإنّ الدالة ϕ من مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G، التي تحوي N إلى مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G/N المعطاة بـ $\phi(L) = \gamma[L]$ ، تكون دالة أحادية وغامرة.

البرهان تثبت المبرهنة 16.15 أنه إذا كانت L زمرة جزئية ناظمية من G وتحوي N، فإنّ $\phi(L) = \gamma[L]$ زمرة جزئية ناظمية من G/N، ولأنّ $N \leq L$، فإنّ كامل المجموعة المشاركة xN في G محتواة في L، وذلك لكل $x \in L$، إذن، وبحسب المبرهنة 15.13 $\gamma^{-1}[\phi(L)] = L$ ، وعليه، فإذا كانت L وM زمرتين جزئيتين ناظميتين من G، وكلاهما يحوي N، وإذا كانت $\phi(L) = \phi(M) = H$، فإنّ $L = \gamma^{-1}[H] = M$ ؛ ولذلك، فإنّ ϕ أحادية.

إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G/N، فإنّ $\gamma^{-1}[H]$ زمرة جزئية ناظمية في G، بحسب المبرهنة 16.15؛ ولأن $N \in H$ و $\gamma^{-1}[\{N\}] = N$ ، فنرى أنّ $N \subseteq \gamma^{-1}[H]$. إذن، $\phi\left(\gamma^{-1}[H]\right) = \gamma\left[\gamma^{-1}[H]\right] = H$، وهذا يثبت أنّ ϕ غامرة لمجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G/N. ♦

إذا كانت H وN زمرتين جزئيتين من الزمرة G، فسندع

$$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}.$$

نعرف **الموصل (join)** $H \vee N$ لـ H وN ليكون تقاطع الزمر الجزئية كلها في G التي تحوي HN؛ إذن، $H \vee N$ هي أصغر زمرة جزئية في G وتحوي HN، وبالطبع، فإنّ $H \vee N$ هي أصغر زمرة جزئية في G وتحوي كلًّا من H وN؛ لأن أيّ زمرة من هذه الصورة يجب أن تحوي HN. بوجه عام، HN ليست بالضرورة زمرة جزئية من G، وفي الأحوال كلها، فإنّ لدينا التمهيدية الآتية:

4.34 تمهيدية إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، وإذا كانت H أيّ زمرة جزئية من G، فإنّ $H \vee N = HN = NH$، وإضافة إلى ذلك، فإذا كانت H ناظمية كذلك، فإنّ HN ناظمية في G.

البرهان سنثبت أنّ HN زمرة جزئية من G، ومن ذلك تنتج $H \vee N = HN$ مباشرة. لتكن $h_1, h_2 \in H$ و$n_1, n_2 \in N$، ولأنّ N زمرة جزئية نظامية، فنحصل على $n_1h_2 = h_2n_3$ ، حيث $n_3 \in N$. إذن:

$$(h_1n_1)(h_2n_2) = h_1(n_1h_2)n_2 = h_1(h_2n_3)n_2 = (h_1h_2)(n_3n_2) \in HN,$$

وهذا يعني أنّ HN مغلقة على العملية المعرفة على G، من الواضح أنّ $e=ee$ تنتمي إلى HN، ولـ $h \in H$ و$n \in N$، فإنّ $(hn)^{-1} = n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n_4$ ، حيث $n_4 \in N$؛ لأنّ N زمرة جزئية نظامية، إذن، $(hn)^{-1} \in HN$، وهكذا، فإنّ $HN \leq G$. تثبت مناقشة شبيهة لهذه أنّ NH زمرة جزئية، وهكذا، فإنّ $NH = H \vee N = HN$.

افترض الآن أنّ H ناظمية كذلك في G، ولتكن $h \in H$، $n \in N$، $g \in G$، إذن،

$ghng^{-1} = (ghg^{-1})(gng^{-1}) \in HN$، وهكذا، فإنّ HN ناظمية في G بالتأكيد. ♦

5.34 مبرهنة (**مبرهنة التماثل الثانية**): لتكن H زمرة جزئية من G، ولتكن N زمرة جزئية ناظمية في G. إذن، $(HN)/N \simeq H/(H \cap N)$

البرهان ليكن $\gamma: G \to G/N$ التشاكل القانوني، ولتكن $H \leq G$. إذن، $\gamma[H]$ زمرة جزئية من G/N بحسب المبرهنة 2.13. الآن يزوّدنا تأثير γ في عناصر H فقط (يسمى **قصر** γ على H (*restricted*)) تشاكلًا يربط H بصورة غامرة مع $\gamma[H]$ ، ومن الواضح أنّ نواة هذا القصر هي مجموعة عناصر N الموجودة كذلك في H، أي التقاطع $H \cap N$، وترينا المبرهنة 2.34 أنه يوجد تماثل $\mu_1: H/(H \cap N) \to \gamma[H]$.

وفي المقابل، قصر γ على HN يزوّدنا كذلك بتشاكل يربط HN بصورة غامرة مع $\gamma[H]$ ؛ لأن $\gamma(n)$ هي العنصر المحايد N في G/N لكل $n \in N$، نواة γ عند قصرها على HN هي N، وتزوّدنا المبرهنة 2.34 بتماثل $\mu_2: (HN)/N \to \gamma[H]$.

ولأنّ $(HN)/N$ و$H/(H \cap N)$ تماثلان $\gamma[H]$ كليهما، فإنه يوجد تماثل بينهما، وبالتأكيد، $\phi: (HN)/N \to H/(H \cap N)$، حيث $\phi = \mu_1^{-1}\mu_2$ سيكون تماثلًا. بصورة أكثر وضوحًا:

$$\phi(hn)N) = \mu_1^{-1}(\mu_2((hn)N)) = \mu_1^{-1}(h) = h(H \cap N)$$ ♦

6.34 مثال ليكن $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\}$، $N = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. من الواضح أنّ :

$HN = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $H \cap N = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \{0\}$. نحصل على $(HN)/N \simeq \mathbb{Z}$ وكذلك على $H/(H \cap N) \simeq \mathbb{Z}$. ▲

إذا كانت H وK كلتاهما زمرتين جزئيتين ناظميتين في G و$K \leq H$، فإنّ H/K زمرة جزئية ناظمية في G/K. تهتم مبرهنة التماثل الثالثة بهذه الزمر.

7.34 مبرهنة (**مبرهنة التماثل الثالثة**): لتكن H وK زمرتين جزئيتين ناظميتين في الزمرة G، بحيث $K \leq H$، فإنّ $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$.

البرهان ليكن $\phi: G \to (G/K)/(H/K)$ معطًى بـ $\phi(a) = (aK)(H/K)$، حيث $a \in G$ ، من الواضح أنّ ϕ غامرة لـ $(G/K)/(H/K)$، ولكل $a,b \in G$.

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= [(ab)K]\ (H/K) = [(aK)(bK)]\ (H/K)\\ &= [(aK)\ (H/K)]\ [(bK)]\ (H/K)]\\ &= \phi(a)\ \phi(b),\end{aligned}$$

وهكذا، فإنّ ϕ تشاكل، وتتكوّن النواة من تلك العناصر $x \in G$، حيث إنّ $\phi(x) = H/K$، هذه العناصر هي عناصر H فقط، إذن، ترينا المبرهنة 2.34 أنّ $G/H \simeq (G/K)\ /\ (H/K)$. ♦

لعرض المبرهنة 7.34 بطريقة لطيفة يمكننا أن نعدّ الدالة القانونية $\gamma_H \colon G \to G/H$ وكأنها حُللت عن طريق زمرة جزئية ناظمية K في G، $K \le H \le G$، لتُعطي

$$\gamma_H = \gamma_{H/K}\, \gamma_K,$$

لتنتج تماثلًا طبيعيًا، كما هو موضح في الشكل 8.34، وهناك طريقة أخرى لتصوير هذه المبرهنة، وذلك باستخدام الرسم البياني للزمر الجزئية في الشكل 9.34، حيث كل زمرة تكون زمرة جزئية ناظمية في G ومحتواة في التي فوقها، وكلما كبرت الزمرة الجزئية الناظمية، صغرت زمرة العامل؛ لذلك، يمكننا التفكير في G وكأنها ضعفت بـ H، أي إنّ G/H وكأنها أصغر من G عندما ضعفت

بـ K، حيث تنصّ المبرهنة 7.34 على أنه يمكن إضعاف G على طول الطريق هبوطًا إلى G/H بخطوتين: الأولى، إضعافها إلى G/K، ثمّ يضعف هذا إلى $(G/K)/(H/K)$ باستخدام H/K، والنتيجة النهائية هي نفسها (وفق التماثل) كإضعاف G بـ H.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, dash] \\ H \arrow[d, dash] \\ K \end{tikzcd}$$

الشكل **9.34**

$$\begin{tikzcd} G/H & G \arrow[l, "\gamma_H"'] \arrow[d, "\gamma_K"] \\ (G/K)=(H/K) \arrow[u] & G/K \arrow[l, "\gamma_{H/K}"] \end{tikzcd}$$

تماثل طبيعي

الشكل **8.34**

مثال 10.34 لتكن $K = 6\mathbb{Z} < H = 2\mathbb{Z} < G = \mathbb{Z}$. إذن: $G/H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$. الآن $G/K = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ تحوي العناصر

$$6\mathbb{Z},\ 1+6\mathbb{Z},\ 2+6\mathbb{Z},\ 3+6\mathbb{Z},\ 4+6\mathbb{Z},\ 5+6\mathbb{Z}.$$

من هذه المجموعات المشاركة الست، تقع $6\mathbb{Z}$، $2+6\mathbb{Z}$، و$4+6\mathbb{Z}$ في $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. إذن، $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})\ /\ (2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ تحوي عنصرين، وتماثل $\mathbb{Z}_2$ كذلك، أو بدلاً من ذلك، فإننا نرى أنّ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_6$، وترتبط $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ بهذا التماثل مع الزمرة الجزئية الدورية $\langle 2 \rangle$ في $\mathbb{Z}_6$. إذن،

$$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_6/\langle 2\rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$ ▲

تمارين 34

حسابات

عند استخدام مبرهنات التماثل الثلاث، فمن الضروري عادة معرفة الارتباط الحقيقي المعطى بهذا التماثل، وليس مجرد حقيقة أن هذه الزمر متماثلة، تعطينا التمارين الستة الأولى تدريبًا على ذلك.

1. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_3$ تشاكلًا، بحيث $\phi(1) = 2$.

أ. أوجد النواة K لـ ϕ.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في $\mathbb{Z}_{12}/K$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. أعطِ الارتباط بين $\mathbb{Z}_{12}/K$ و$\mathbb{Z}_3$ المعطى بالدالة μ الموصوفة في المبرهنة 2.34 .

2. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_{12}$ تشاكلًا، بحيث $\phi(1)= 10$.

أ. أوجد النواة K لـ ϕ.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في $\mathbb{Z}_{18}/K$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. أوجد الزمرة $\phi[\mathbb{Z}_{18}]$.

د. أعطِ الارتباط بين $\mathbb{Z}_{18}/K$ و $\phi[\mathbb{Z}_{18}]$ المعطاة في الدالة μ الموصوفة في المبرهنة 2.34.

3. في الزمرة $\mathbb{Z}_{24}$، لتكن $H=\langle 4\rangle$ و$N=\langle 6\rangle$.

أ. عدّد العناصر في HN (التي يمكن كتابتها على صورة $H+N$ لهذه الزمر الجمعية) و $H \cap N$.

ب. عدّد العناصر في HN/N، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. عدّد مجموعات المشاركة في $H/(H\cap N)$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

د. أعطِ الارتباط بين $H/(H\cap N)$ وHN/N الموصوف في إثبات المبرهنة 5.34.

4. أعد التمرين 3 للزمرة $\mathbb{Z}_{36}$، حيث $H=\langle 6\rangle$ و $N=\langle 9\rangle$.

5. في الزمرة $G=\mathbb{Z}_{24}$، لتكن $H=\langle 4\rangle$ و $N=\langle 9\rangle$.

أ. عدّد مجموعات المشاركة في G/H، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في G/K، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

جـ. عدّد مجموعات المشاركة في H/K، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

د. عدّد مجموعات المشاركة في $(G/K)/(H/K)$، ذاكرًا عناصر كل مجموعة مشاركة.

هـ. أعطِ الارتباط بين G/H و$(G/K)/(H/K)$ الموصوف في إثبات المبرهنة 7.34.

6. أعد التمرين 5 للزمرة $G=\mathbb{Z}_{36}$، حيث $H=\langle 9\rangle$ و$K=\langle 18\rangle$.

براهين

7. أثبت مباشرة باستخدام تعريف الزمر الجزئية الناظمية أنه إذا كانت H وN زمرتين جزئيتين من الزمرة G، و N ناظمية في G، فإنّ $H\cap N$ ناظمية في H.

8. لتكن H، وK، وL زمرًا جزئية ناظمية في G، بحيث $H<K<L$، ولتكن $A=G/H$، $B=K/H$، و$C=L/H$.

أ. أثبت أنّ B و C زمرتان جزئيتان ناظميتان في A، وأنّ $B<C$.

ب. أيّ زمر عامل لـ G تماثل $(A/B)/(C/B)$؟

9. لتكن K وL زمرتين جزئيتين ناظميتين في G، حيث $K\vee L=G$، و $K\bigcap L=\{e\}$. أثبت أنّ $G/K\simeq L$ و$G/L\simeq K$.

الفصل 35 سلاسل الزمر Series of Groups

السلسلة الناظمية وتحت الناظمية

يركز هذا الفصل على فكرة السلسلة في الزمرة، التي تعطي فهمًا أكثر عمقًا لبنية G، حيث تتحقق النتائج لكلتا الزمر الإبدالية وغير الإبدالية، وهي ليست بتلك الأهمية للزمر الإبدالية منتهية التولد؛ بسبب مبرهنتنا القوية 12.11، حيث إنّ الكثير من توضيحاتنا ستكون مأخوذة من الزمر الإبدالية، لتسهيل الحسابات.

1.35 تعريف للسلسلة تحت الناظمية للزمرة G **(subnormal or (subinvariant) series)** متتالية منتهية $H_0, H_1, \ldots H_n$ من الزمر الجزئية في G، حيث $H_i < H_{i+1}$ و H_i زمر جزئية ناظمية في H_{i+1}، وحيث $H_0=\{e\}$ و $H_n= G$. **السلسلة الناظمية** لـ G **(normal (or invariant) series)** متتالية منتهية $H_0,H_1, \ldots, H_n$ من الزمر الجزئية الناظمية في G، حيث إنّ: $H_i< H_{i+1}$، $H_0=\{e\}$، و $H_n= G$. ■

لاحظ أنّ مفهومي السلسلة الناظمية وتحت الناظمية ينطبقان في الزمر الإبدالية؛ لأن الزمر الجزئية كلها ناظمية، فضلًا عن أنّ السلسلة الناظمية دائمًا تحت ناظمية، ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحًا، وقد عرّفنا السلسلة تحت الناظمية قبل السلسلة الناظمية؛ لأن مفهوم السلسلة تحت الناظمية أكثر أهمية لعملنا.

2.35 مثال مثالان لسلسلتين ناظميتين في $\mathbb{Z}$ مع الجمع، هما:

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

و

$$\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}.$$

▲

3.35 مثال لتكن الزمرة D_4 لتماثلات المربع، كما في المثال 10.8. السلسلة:

$$\{\rho_0\} < \{\rho_0,\mu_1\} < \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} < D_4$$

سلسلة تحت ناظمية، أضف إلى ذلك أنه يمكننا أن نتحقق باستخدام الجدول 12.8 إنها ليست سلسلة ناظمية؛ لأن $\{\rho_0,\mu_1\}$ ليست ناظمية في D_4. ▲

4.35 تعريف للسلسلة تحت الناظمية (الناظمية) $\{K_j\}$ **تصفية للسلسلة تحت الناظمية (الناظمية)** $\{H_i\}$ **(refinement of a subnormal (normal) series)** للزمرة G، إذا كان $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$، أي إنّ كل H_i هي أحد الـ K_j. ■

5.35 مثال السلسلة:

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 24\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

تصفية للسلسلة

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

لقد أُدرج الحدّان، $4\mathbb{Z}$ و$24\mathbb{Z}$. ▲

إنّ زمر العامل H_{i+1} / H_i ذات أهمية في دراستنا لبنية G، وهي معرفة في السلاسل الناظمية وتحت الناظمية؛ لأن H_i ناظمية في H_{i+1} في كلتا الحالتين.

6.35 تعريف ككون السلسلتين تحت الناظميتين (الناظميتين) $\{H_i\}$ و$\{K_j\}$ للزمرة G نفسها **متماثلتين (iso-morphic)**، إذا وجد تقابل بين مجموعتي زمر العامل $\{H_{i+1}/ H_i\}$ و$\{K_{j+1}/ K_j\}$، حيث إنّ زمرتي العامل المتقابلتين متماثلتان. ■

من الواضح أن السلسلتين تحت الناظميتين (الناظميتين) المتماثلتين، لهما عدد الزمر نفسه.

7.35 مثال السلسلتان في $\mathbb{Z}_{15}$،

$$\{0\} < \langle 5\rangle < \mathbb{Z}_{15}$$

و

$$\{0\} < \langle 3\rangle < \mathbb{Z}_{15}$$

متماثلتان. كلا $\mathbb{Z}_{15}/\langle 5\rangle$ و$\langle 3\rangle/\{0\}$ تماثل $\mathbb{Z}_5$، و$\mathbb{Z}_{15}/\langle 3\rangle$ تماثل $\langle 5\rangle / \{0\}$ أو $\mathbb{Z}_3$. ▲

مبرهنة شراير (Schreier Theorem)

سنكمل لبرهان أنّ أيّ سلسلتين تحت ناظميتين في زمرة G لهما تصفيتان متماثلتان. هذه مبرهنة أساسية في مبرهنة السلاسل، البرهان ليس صعبًا جدًّا، إلّا أنه من المعلوم أنّ بعض الطلاب يتوهون في أثناء البرهان، ويميلون للشعور بأنهم لن يستطيعوا فهم المبرهنة، سنعطي توضيحًا للمبرهنة قبل أن ندخل إلى برهانها.

8.35 مثال لنحاول إيجاد تصفيات متماثلة للسلسلتين:

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

و

$$\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

الموجودتين في المثال 2.35. لتكن التصفية:

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

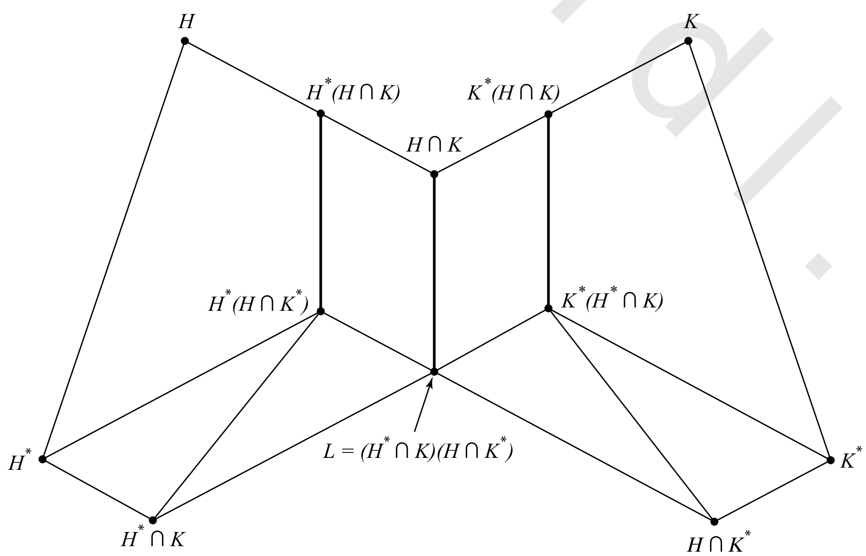
لـ $\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ ، والتصفية $\{0\} < 72\mathbb{Z} < 18\mathbb{Z} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

لـ $\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ في كلتا الحالتين. تحوي التصفيتان أربع زمر عامل تماثل $\mathbb{Z}_9$، $\mathbb{Z}_2$، $\mathbb{Z}_4$، و$72\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{Z}$. الترتيب الذي تظهر فيه زمر العامل مختلف بالتأكيد. ▲

سنبدأ بتمهيدية تقنية طورت على يد زاسنهاوس (Zassen Haus). تسمى هذه التمهيدية أحيانًا تمهيدية الفراشة؛ لأن الشكل 9.35 – الذي يرافق التمهيدية– له هيأة الفراشة.

لتكن H وK زمرًا جزئية من الزمرة G، ولتكن H^* زمرة جزئية ناظمية من H و K^* زمرة جزئية ناظمية من K، بتطبيق العبارة الأولى من التمهيدية 4.34 على H^* و$H \cap K$ بوصفها زمرًا جزئية من H، نرى أنّ $H^*(H \cap K)$ زمرة، وتثبت مناقشة شبيهة أنّ $H^*(H \cap K^*)$، و$K^*(H \cap K)$، و$K^*\ (H^* \cap K)$ زمر كذلك، وليس من الصعب إثبات أنّ $H^* \cap K$ زمرة جزئية ناظمية من $H \cap K$ (انظر التمرين 22)، والمناقشة نفسها باستخدام التمهيدية 4.34 مطبقة على $H^* \cap K$ و$H \cap K^*$ بوصفها زمرًا جزئية من $H \cap K$، تثبت أنّ $L= (H^* \cap K)(H \cap K^*)$ زمرة. إذن، ينتج لدينا المخطط البياني للزمر الجزئية المعروض في الشكل 9.35 ، ليس من الصعب إثبات علاقات الاحتواء المبينة في الرسم.

لأنّ كلتا $H \cap K^*$ و$H^* \cap K$ زمرة جزئية ناظمية في $H \cap K$، تثبت العبارة الثانية في التمهيدية 4.34 أنّ $L= (H^* \cap K)(H \cap K^*)$ زمرة جزئية ناظمية في $H \cap K$. لقد ميّزنا علاقة الزمرة الجزئية الناظمية هذه بالخط الثقيل في منتصف الشكل 9.35، وندعي أنّ الخطين الثقيلين الآخرين يرمزان لعلاقات زمر جزئية ناظمية، وأنّ زمر العامل الثلاث المعطاة بالزمر الجزئية الناظمية الثلاث كلها متماثلة، ولإثبات هذا، سنعرّف التشاكل $\phi\colon H^*(H \cap K) \to (H \cap K)/L$ ، ونثبت أنّ ϕ غامرة لـ $(H \cap K)\ /\ L$ ونواتها $H^*(H \cap K^*)$، وسينتج حينها مباشرة عن المبرهنة 2.34 أنّ $H^*(H \cap K^*)$ ناظمية



الشكل 9.35

في $H^*(H \cap K)$، وأنّ $H^*(H \cap K)\ /\ H^*(H \cap K^*) \simeq (H \cap K)\ /\ L$. ونحصل على نتيجة مشابهة بالتناظر للزمر على يمين الخط الثقيل في الشكل 9.35.

ليكن $\phi: H^*(H \cap K) \to (H \cap K)/L$ معرفًا كالآتي:
لـ $h \in H^*$ و $x \in H \cap K$ ، دع $\phi(hx)= xL$. سنثبت أنّ ϕ تشاكل بحسب التعريف، لتكن $h_1, h_2 \in H^*$ و $x_1, x_2 \in H \cap K$، فإذا كان $h_1x_1= h_2x_2$، فإنّ
$h_2^{-1} h_1 = x_2x_1^{-1} \in H^* \cap (H \cap K) =H^* \cap K \subseteq L$ ، وإذن، $x_1L= x_2L$. وهكذا فإنّ ϕ حسن التعريف، ولأنّ H^* ناظمية في H، فيوجد h_3 في H^* حيث إنّ $x_1h_2 = h_3 x_1$، إذن:

$$\phi((h_1x_1)(h_2x_2)) = \phi((h_1h_3)(x_1x_2)) = (x_1x_2)L$$
$$= (x_1 L)(x_2L) = \phi(h_1x_1)\phi(h_2x_2)$$

إذن، ϕ تشاكل.

من الواضح أنّ ϕ غامرة لـ $(H \cap K) / L$.

أخيرًا، إذا كانت $h \in H^*$ و $x \in H \cap K$، فإنّ $\phi(hx)= xL = L$ ، إذا وفقط إذا كانت $xL= L$، أو إذا وفقط إذا كانت $x \in L$، أو إذا وفقط إذا كانت

$hx \in H^*L= H^*(H^*\cap K)\ (H \cap K^*) = H^*(H \cap K^*)$، إذن، $Ker(\phi) = H^*(H \cap K^*)$. لقد برهنا التمهيدية الآتية:

10.35 تمهيدية (**تمهيدية زاسنهاوس**): لتكن H و K زمرًا جزئية من الزمرة G، ولتكن H^* و K^* زمرًا جزئية ناظمية من H و K، على الترتيب، فإنّ:

1. $H^*(H \cap K^*)$ زمرة جزئية ناظمية في $H^*(H \cap K)$.
2. $K^*(H^*\cap K)$ زمرة جزئية ناظمية في $K^*(H \cap K)$.
3. $H^* (H \cap K) / H^* (H \cap K^*) \simeq K^*(H \cap K) / K^* (H^*\cap K)$
$\simeq (H \cap K)/[(H^* \cap K)(H \cap K^*)]$

11.35 مبرهنة (**مبرهنة شراير**): لأيّ سلسلتين تحت ناظميتين (ناظميتين) في زمرة G توجد تصفيتان متماثلتان.

البرهان لتكن G زمرة، ولتكن:

$$\{e\}=H_0<H_1<H_2<....<H_n=G \qquad (1)$$

و

$$\{e\}=K_0<K_1<K_2<....<K_m=G \qquad (2)$$

سلسلتين تحت ناظميتين في G. لـ i حيث $0 \le i \le n\text{-}1$ ، كوّن سلسلة الزمر:

$$H_i = H_i (H_{i+1} \cap K_0) \le H_i (H_{i+1} \cap K_1) \le \cdots \le H_i (H_{i+1} \cap K_m) = H_{i+1}.$$

يُدرج هذا $m\text{-}1$ زمرة – ليست بالضرورة مختلفة – بين H_i و H_{i+1}. إذا صنعنا هذا لكل i حيث $0 \le i \le n\text{-}1$، وجعلنا $H_{i,j}= H_i (H_{i+1} \cap K_j)$، فإننا نحصل على سلسلة الزمر:

$$\begin{aligned}\{e\} = H_{0,0} &\le H_{0,1} \le H_{0,2} \le \cdots \le H_{0,m-1} \le H_{1,0}\\ &\le H_{1,1} \le H_{1,2} \le \cdots \le H_{1,m-1} \le H_{2,0}\\ &\le H_{2,1} \le H_{2,2} \le \cdots \le H_{2,m-1} \le H_{3,0}\\ &\le \cdots\\ &\le H_{n-1,1} \le H_{n-1,2} \le \cdots \le H_{n-1,m-1} \le H_{n-1,m}\\ &=G. \qquad (3)\end{aligned}$$

تحوي السلسلة (3) هذه $nm+1$ زمرة – ليست بالضرورة مختلفة، و $H_{i,0}=H_i$ لكل i. بحسب بدهية زاسنهاوس، السلسلة (3) تحت ناظمية، أي إنّ كل زمرة ناظمية في الزمرة التي تليها، هذه السلسلة تصفي السلسلة (1).

بطريقة مماثلة، نضع $K_{j,i}=K_j(K_{j+1}\cap H_i)$، حيث $0\le i\le n$ و$0\le j\le m-1$، هذا يعطي السلسلة تحت الناظمية:

$$\begin{aligned}\{e\} = K_{0,0} &\le K_{0,1} \le K_{0,2} \le \cdots \le K_{0,n-1} \le K_{1,0}\\ &\le K_{1,1} \le K_{1,2} \le \cdots \le K_{1,n-1} \le K_{2,0}\\ &\le K_{2,1} \le K_{2,2} \le \cdots \le K_{2,n-1} \le K_{3,0}\\ &\le \cdots\\ &\le K_{m-1,1} \le K_{m-1,2} \le \cdots \le K_{m-1,n-1} \le K_{m-1,n}\\ &= G. \end{aligned} \tag{4}$$

السلسلة (4) تحوي $mn+1$ زمرة – ليست بالضرورة مختلفة – و $K_{j,0}=K_j$ لكل j، وهذه السلسلة تصفي السلسلة (2).

ونحصل بحسب بدهية زاسنهاوس 10.35 على:

$$H_i(H_{i+1}\cap K_{j+1})/H_i(H_{i+1}\cap K_j)\simeq K_j(K_{j+1}\cap H_{i+1})/K_j(K_{j+1}\cap H_i),$$

أو

$$H_{i,j+1}/H_{i,j}\simeq K_{j,i+1}/K_{j,i} \tag{5}$$

حيث $0\le i\le n-1$ و $0\le j\le m-1$. التماثلات في العلاقة (5) تعطي تقابلا لتماثل زمر العامل بين السلسلة تحت الناظمية (3) و(4). ولتبيين هذا التقابل، لاحظ أنّ $H_{i,0}=H_i$ و $H_{i,m}=H_{i+1}$، بينما $K_{j,0}=K_j$ و $K_{j,n}=K_{j+1}$، حيث تحوي كل سلسلة في (3) و(4) مصفوفة مستطيلة من mn رمزًا $\le$، وكل $\le$ تعطي زمرة عامل، إضافة إلى أنّ زمر العامل التي تظهر من الصف r لـ $\le$ في السلسلة (3) ترتبط بزمر العامل التي تظهر في العمود r لـ $\le$ في السلسلة (4)، وبحذف الزمر المكررة من السلسلتين (3) و(4)، نحصل على سلسلتين تحت ناظميتين من الزمر المختلفة، التي تكون تصفيتين متماثلتين للسلسلتين (1) و (2). وهذا يثبت المبرهنة للسلاسل تحت الناظمية.

للسلاسل الناظمية، حيث ألـ H_i و K_j جميعها ناظمية في G، نلاحظ فقط أنّ الزمر $H_{i,j}$ و $K_{j,i}$ المكوّنة في الأعلى كلها تكون ناظمية كذلك في G، وهكذا ينطبق البرهان نفسه. ناظمية $H_{i,j}$ و$K_{j,i}$ هذه تنتج مباشرة من الجزء الثاني في البدهية 4.34، ومن حقيقة أنّ تقاطع الزمر الجزئية الناظمية في الزمرة يعطي زمرًا جزئية ناظمية. ♦

مبرهنة جوردان – هولدر (*Jordan- Hölder Theorem*)

نأتي الآن إلى اللب الحقيقي للمبرهنة.

12.35 تعريف تكون السلسلة تحت الناظمية $\{H_i\}$ في الزمرة G **سلسلة تركيب (Composition Series)** إذا كانت زمر العامل H_{i+1}/H_i كلها بسيطة، وتكون السلسلة الناظمية $\{H_i\}$ في G **سلسلة رئيسة (principal or Chief series)** إذا كانت زمر العامل H_{i+1}/H_i كلها بسيطة. ■

لاحظ أنه في الزمر الإبدالية ينطبق مفهوما سلسلة التركيب والسلسلة الرئيسة. وكذلك فلأنّ كل سلسلة ناظمية هي كذلك سلسلة تحت ناظمية، فإنّ أيّ سلسلة رئيسة هي كذلك سلسلة تركيب لأي زمرة، إبدالية أم لا.

13.35 مثال إن $\mathbb{Z}$ لا تحوي سلاسل تركيب (وكذلك لا تحوي سلاسل رئيسة): لأنه إذا كانت

$$\{0\} = H_0 < H_1 < \cdots < H_{n-1} < H_n = \mathbb{Z}$$

سلسلة تحت ناظمية، فيجب أن تكون H_1 على الصورة $r\mathbb{Z}$، حيث $r \in \mathbb{Z}^+$، ولكن عندها H_1 / H_0 تماثل $r\mathbb{Z}$، وهي دورية غير منتهية وتحوي الكثير من الزمر الجزئية الناظمية الفعلية غير التافهة، على سبيل المثال: $2r\mathbb{Z}$؛ إذن، لا تحوي $\mathbb{Z}$ سلاسل تركيب (وكذلك لا تحوي سلاسل رئيسة). ▲

14.35 مثال السلسلة

$$\{e\} < A_n < S_n$$

حيث $n \geq 5$ سلسلة تركيب (وكذلك سلسلة رئيسة) في S_n؛ لأن $A_n/\{e\}$ تماثل A_n، وهي بسيطة لكل $n \geq 5$، و S_n / A_n تماثل $\mathbb{Z}_2$، وهي بسيطة. وبالمثل، السلسلتان في المثال 7.35 سلسلتا تركيب (وكذلك سلسلتان رئيستان) في $\mathbb{Z}_{15}$، إنهما متماثلتان، كما أُثبت في ذلك المثال. هذا يوضح نظريتنا الرئيسة، التي سينُصّ عليها قريبًا. ▲

لاحظ أنه بحسب المبرهنة 8.15، H_{i+1}/ H_i بسيطة، إذا وفقط إذا كانت H_i زمرة جزئية ناظمية أعظمية في H_{i+1}؛ إذن، يجب أن تكون كل H_i في سلسلة التركيب زمرة جزئية ناظمية أعظمية في H_{i+1}. لبناء سلسلة تركيب لزمرة G، نصطاد فقط زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-1} في G، ثم زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-2} في H_{n-1}، وهكذا، إذا توقفت هذه العملية بعدد منتهٍ من الخطوات، فنكون قد حصلنا على سلسلة تركيب.

لاحظ أنه بحسب المبرهنة 18.15، لا يمكن أن يكون هناك تصفية أبعد من ذلك لسلسلة تركيب. لبناء سلسلة رئيسة، يجب علينا أن نصطاد زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-1} في G، ثمّ زمرة جزئية ناظمية أعظمية H_{n-2} في H_{n-1} وهي كذلك ناظمية في G، وهكذا. المبرهنة الرئيسة كما يأتي:

15.35 مبرهنة (مبرهنة جوردان – هولدر): أيّ سلسلتي تركيب (رئيستين) في زمرة G متماثلتان.

البرهان لتكن $\{H_i\}$ و$\{K_i\}$ سلسلتي تركيب (رئيستين) في G، فبحسب المبرهنة 11.35، فإنّ لهما تصفيتين متماثلتين؛ ولكن، لأن زمر العامل فيها كلها بسيطة، فتثبت المبرهنة 18.15 عدم وجود أيّ تصفية أبعد من ذلك؛ إذن، يجب أن تكون $\{H_i\}$ و $\{K_i\}$ متماثلتين. ♦

في الزمر المنتهية، يمكننا أن نعُدّ سلسلة التركيب نوعًا من تحليل الزمرة إلى زمر عامل بسيطة، ومماثلاً لتحليل العدد الصحيح الموجب إلى عوامل أولية، وفي كلتا الحالتين، التحليل وحيد، تبعًا لترتيب العوامل.

■ **نبذة تاريخية**

كان الظهور الأول لما بات يعرف بمبرهنة جوردان– هولدر عام 1869م، بوصفه تعليقًا على عمل جالوا من خلال عالم الجبر الفرنسي المتألق كامايل جوردان (1922– 1938) (Camille Jordan)، فقد كان السياق الذي ظهرت به في دراسة زمر التباديل المرتبطة بجذور معادلات كثيرات الحدود، حيث أثبت جوردان أنه على الرغم من أنّ متتالية الزمر الجزئية الناظمية G، I، J، ... لزمرة المعادلة ليست بالضرورة وحيدة، ومع ذلك، فإنّ متتالية مؤشرات سلسلة التركيب هذه وحيدة، وقد أعطى جوردان برهانًا في عمله العظيم عام 1870م أطروحة في التعويض والمعادلات الجبرية (Treatiseon Substitu-tions and Algebraic Equations). هذا العمل الأخير – ظل مع ذلك محددًا لما أصبح يطلق عليه الآن زمر التباديل – بقي الموضوع القياسي لمبرهنة الزمر سنوات عدة.

كان الجزء الخاص بهولدر في المبرهنة، أنّ متتالية زمر العامل في سلسلة التركيب وحيدة تبعًا للترتيب، وكان من عمل أوتو هولدر (Otto Holer 1859 – 1937)، الذي أدى دورًا مهمًّا جدًّا في تطور مبرهنة الزمر بعد أن أُعطي التعريف المجرد الكامل للزمرة، ومن بين مشاركاته الأخرى، أنه أعطى أول تعريف مجرد "لزمرة العامل"، وحدّد بنية الزمر المنتهية جميعها ذات الرتبة غير المقسومة بمربع كامل.

16.35 مبرهنة إذا كان لـ G سلسلة تركيب (رئيسة)، وإذا كانت N زمرة جزئية ناظمية فعلية في G، فيوجد سلسلة تركيب (رئيسة) تحوي N.

البرهان السلسلة تحت ناظمية $\{e\} < N < G$ وكذلك هي سلسلة ناظمية؛ ولأن G تحوي سلسلة تركيب $\{H_i\}$، فإنه وبحسب المبرهنة 11.35 يوجد تصفية لـ لسلسلة تحت ناظمية تماثل تصفية $\{H_i\}$، أمّا بوصفها سلسلة تركيب، فلا يوجد لـ $\{H_i\}$ تصفية أبعد من ذلك. إذن، يمكن تصفية $\{e\} < N < G$ إلى سلسلة تحت ناظمية، حيث إنّ زمر العامل فيها كلها بسيطة – أي سلسلة تركيب– ، وتتحقق مناقشة شبيهة إذا بدأنا بسلسلة رئيسة $\{K_j\}$ في G ♦

17.35 مثال سلسلة تركيب (وكذلك رئيسة) في $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ وتحوي $\langle(0,1)\rangle$، هي:

$$\{(0,0)\} < \langle(0,3)\rangle < \langle(0,1)\rangle < \langle 2\rangle \times \langle 1\rangle < \langle 1\rangle \times \langle 1\rangle = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9.$$

التعريف الآتي أساسي في تشخيص معادلات كثيرات الحدود التي يمكن التعبير عن حلولها باستخلاص الجذور.

18.35 تعريف تسمى الزمرة G **قابلة للحل (Solvable)**، إذا كانت تحوي سلسلة تركيب $\{H_i\}$، حيث إنّ زمر العامل H_{i+1} / H_i كلها إبدالية. ■

وبحسب مبرهنة جوردان – هولدر، نرى أنه في زمرة قابلة للحل، كل سلسلة تركيب $\{H_i\}$، يجب أن تكون زمر العامل H_{i+1} / H_i إبدالية.

مثال 19.35 الزمرة S_3 قابلة للحل؛ لأن سلسلة التركيب

$$\{e\} < A_3 < S_3$$

لها زمر عامل تماثل $\mathbb{Z}_3$ و$\mathbb{Z}_2$، التي هي إبدالية. والزمرة S_5 ليست قابلة للحل؛ لأن A_5 بسيطة، والسلسلة

$$\{e\} < A_5 < S_5$$

سلسلة تركيب، و $A_5/\{e\}$ تماثل A_5، وهي ليست إبدالية. يمكن إثبات أنّ A_5 ذات الرتبة 60 هي أصغر زمرة غير قابلة للحل، وهذه الفكرة مرتبطة بصورة قريبة من حقيقة أنّ معادلة كثيرة حدود من الدرجة 5، ليست بوجه عام قابلة للحل باستخلاص الجذور، بخلاف معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجة ≤ 4. ▲

السلسلة المركزية المتصاعدة

سنذكر سلسلة تحت ناظمية لزمرة G يمكن تكوينها باستخدام مراكز الزمر. ذكر الفصل 15 أنّ $Z(G)$ مركز الزمرة G معرف بـ

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ لكل } g \in G\},$$

وأنّ $Z(G)$ زمرة جزئية ناظمية في G، فإذا كان لدينا جدول زمرة منتهية، فمن السهل إيجاد المركز، وسيكون العنصر a في مركز G، إذا وفقط إذا كانت العناصر في الصف المقابل لـ a الواقعة أقصى اليسار، معطاة بترتيب العناصر نفسه في العمود أسفل a الواقعة في أعلى الجدول.

الآن، لتكن G زمرة، وليكن $Z(G)$ مركز G، ولأنّ $Z(G)$ ناظمية في G، فيمكننا صنع زمرة العامل $G/Z(G)$، وأن نجد المركز $Z(G/Z(G))$ لزمرة العامل هذه، ولأنّ $Z(G/Z(G))$ ناظمية في $G/ Z(G)$، وإذا كانت $\gamma : G \to G/Z(G)$ الدالة القانونية، فتكون $\gamma^{-1}[Z(G/Z(G))]$ بحسب المبرهنة 15.16، زمرة جزئية ناظمية $Z_1(G)$ في G، وهكذا يمكننا صنع زمرة العامل $G/Z_1(G)$ ونجد مركزها، خذ $(\gamma)^{-1}$ لها لتحصل على $Z_2(G)$، وهكذا.

مثال 20.35 تسمى السلسلة

$$\{e\} \leq Z(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \cdots$$

الموصوفة في المناقشة السابقة **سلسلة مركزية متصاعدة للزمرة** G

(Ascending Central Series Of The Group G). ■

مثال 21.35 مركز S_3 هو مجرد العنصر المحايد $\{\rho_0\}$. إذن، السلسلة المركزية المتصاعدة لـ S_3 هي:

$$\{\rho_0\} \leq \{\rho_0\} \leq \{\rho_0\} \leq \cdots$$

مركز الزمرة D_4 لتماثلات المربع في المثال 10.8 هو $\{\rho_0, \rho_2\}$. (هل تذكر أننا قلنا: إنّ هذه الزمرة ستعطينا أمثلة جميلة على أشياء كثيرة ناقشناها؟)؛ لأن $D_4/\{\rho_0, \rho_2\}$ من الرتبة 4 فهي إبدالية، ومركزها هو كل $D_4/\{\rho_0, \rho_2\}$. إذن، السلسلة المركزية المتصاعدة لـ D_4 هي:

$$\{\rho_0\} \leq \{\rho_0, \rho_2\} \leq D_4 \leq D_4 \leq D_4 \leq \cdots$$ ▲

تمارين 35

حسابات

في التمارين 1 إلى 5، أعطِ تصفيتين متماثلتين للسلسلتين.

1. $\{0\} < 10\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ و $\{0\} < 25\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

2. $\{0\} < 60\mathbb{Z} < 20\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ و $\{0\} < 245\mathbb{Z} < 49\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$

3. $\{0\} < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$ و $\{0\} < \langle 8 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$

4. $\{0\} < \langle 18 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{72}$ و $\{0\} < \langle 24 \rangle < \langle 12 \rangle < \mathbb{Z}_{72}$

5. $\{(0, 0)\} < (60\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (10\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $\{(0, 0)\} < \mathbb{Z} \times (80\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (20\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

6. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_{60}$ وبرهن على أنها متماثلة.

7. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_{48}$ وبرهن على أنها متماثلة.

8. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

9. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

10. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$.

11. أوجد مركز $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.

12. أوجد مركز $S_3 \times D_4$.

13. أوجد السلسلة المركزية المتصاعدة لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.

14. أوجد السلسلة المركزية المتصاعدة لـ $S_3 \times D_4$.

مفاهيم

في التمرينين 15 و16، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

15. سلسلة التركيب لزمرة G هي متتالية منتهية

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_{n-1} < H_n = G$$

من الزمر الجزئية من G، حيث إنّ H_i زمرة جزئية ناظمية أعظمية في H_{i+1}، حيث $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

16. الزمرة القابلة للحلّ هي تلك التي لها سلسلة تركيب من الزمر الإبدالية.

17. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_______ أ. كل سلسلة ناظمية هي كذلك تحت ناظمية.

_______ ب. كل سلسلة تحت ناظمية هي كذلك ناظمية.

_______ جـ. كل سلسلة رئيسة هي كذلك سلسلة تركيب.

_______ د. كل سلسلة تركيب هي كذلك سلسلة رئيسة.

_______ هـ. كل زمرة إبدالية لها بالضبط سلسلة تركيب واحدة.

_______ و. كل زمرة منتهية لها سلسلة تركيب.

_______ ز. الزمرة قابلة للحلّ، إذا وفقط إذا كان لها سلسلة تركيب مع زمر عامل بسيطة.

_______ ح. S_7 زمرة قابلة للحلّ.

_______ ط. يوجد بعض التشابه بين مبرهنة جوردان – هولدر والمبرهنة الأساسية في الحساب، التي تنصّ على أنّ كل عدد صحيح موجب أكبر من 1، يمكن تحليله إلى حاصل ضرب أعداد أولية وحيدة تبعًا للترتيب.

_______ ي. كل زمرة منتهية رتبتها عدد أولي قابلة للحلّ.

18. أوجد سلسلة تركيب لـ $S_3 \times S_3$. هل $S_3 \times S_3$ قابلة للحلّ؟

19. هل الزمرة D_4 لتماثلات المربع في المثال 10.8 قابلة للحلّ؟

20. لتكن G هي $\mathbb{Z}_{36}$. ارجع إلى إثبات المبرهنة 11.35 ولتكن السلسلة تحت الناظمية (1) هي:

$$\{0\} < \langle 12 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{36}$$

ولتكن السلسلة تحت الناظمية (2) هي:

$$\{0\} < \langle 18 \rangle < \mathbb{Z}_{36}$$

أوجد السلسلتين (3) و(4)، واعرض زمر العامل المتماثلة كما وصف في الإثبات. اكتب السلسلتين (3) و(4) كالمصفوفة المستطيلة المعروضة في الكتاب.

21. أعد التمرين 20 للزمرة $\mathbb{Z}_{24}$ مع السلسلة تحت الناظمية (1)

$$\{0\} < \langle 12 \rangle < \langle 4 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$$

ولتكن السلسلة (2)

$$\{0\} < \langle 6 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{24}.$$

براهين

22. لتكن H^*، H، وK زمرًا جزئية من G، بحيث إنّ H^* ناظمية في H. أثبت أنّ $H^* \cap K$ ناظمية في $H \cap K$.

23. أثبت أنه إذا كانت

$$H_0 = \{e\} < H_1 < H_2 < \cdots < H_n = G$$

سلسلة تحت ناظمية (ناظمية) للزمرة G، وإذا كانت H_{i+1}/H_i من رتبة منتهية s_{i+1}، فإنّ G من رتبة منتهية $s_1 s_2 \ldots s_n$.

24. أثبت أنه لا يمكن لزمرة إبدالية غير منتهية أن تحوي سلسلة تركيب. [مساعدة: استخدم التمرين 23 مع حقيقة أنّ أيّ زمرة إبدالية غير منتهية يجب أن تحوي زمرة جزئية ناظمية فعلية].

25. أثبت أنّ الضرب المباشر المنتهي لزمر قابلة للحلّ يكون قابلًا للحل.

26. أثبت أنّ الزمرة الجزئية K من زمرة G قابلة للحلّ تكون قابلة للحل كذلك. [مساعدة: لتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \cdots < H_n = G$ سلسلة تركيب في G. أثبت أنّ الزمر المختلفة بين $K \cap H_i$ ، حيث $i= 0, ..., n$ تشكل سلسلة تركيب لـ K. لاحظ أنّ:

$$(K \cap H_i) / (K \cap H_{i-1}) \simeq [H_{i-1}(K \cap H_i)] / [H_{i-1}]$$

بحسب المبرهنة 5.34، حيث $H= K \cap H_i$ و$N= H_{i-1}$ ، وأنّ $H_{i-1}(K \cap H_i) \leq H_i$.].

27. لتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \cdots < H_n = G$ سلسلة تركيب في الزمرة G. لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G، وافترض أنّ N زمرة بسيطة. أثبت أنّ الزمر المختلفة بين H_0، $H_i N$، حيث $i= 0, ..., n$ تشكل كذلك سلسلة تركيب لـ G. [مساعدة: $H_i N$ زمرة بحسب التمهيدية 4.34. أثبت أنّ $H_{i-1} N$ ناظمية في $H_i N$. بحسب المبرهنة 5.34

$$(H_i N) / (H_{i-1} N) \simeq H_i / [H_i \cap (H_{i-1} N)]$$

الزمرة الأخيرة تماثل

$$[H_i / H_{i-1}] / [(H_i \cap (H_{i-1} N)) / H_{i-1}]$$

بحسب المبرهنة 7.34. ولكن H_i / H_{i-1} بسيطة].

28. لتكن G زمرة، ولتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \cdots < H_n = G$ سلسلة تركيب لـ G. لتكن N زمرة جزئية ناظمية في G، ولتكن $\gamma : G \to G/N$ الدالة القانونية. أثبت أنّ الزمر المختلفة بين $\gamma\ [H_i]$، حيث $i= 0,..,n$ تشكل سلسلة تركيب في G/ N. [مساعدة: لاحظ أنّ الدالة

$$\psi: H_i N \to \gamma[H_i] / \gamma[H_{i-1}]$$

المعرفة بـ

$$\psi(h_i n) = \gamma(h_i n)\ \gamma[H_{i-1}]$$

تشاكل نواته $H_{i-1} N$. بحسب المبرهنة 2.34

$$\gamma[H_i] / \gamma[H_{i-1}] \simeq (H_i N) / (H_{i-1} N)$$

أكمل من خلال المبرهنة 5.34، كما هو موضح في المساعدة للتمرين 27].

29. أثبت أنّ صورة التشاكل لزمرة قابلة للحلّ تكون قابلة للحلّ. [مساعدة: طبّق التمرين 28 لتحصل على سلسلة تركيب لصورة التشاكل. المساعدات للتمرينين 27 و28 ترينا كيف تبدو صور زمر العامل في سلسلة التركيب].

الفصل 36 مبرهنات سيلو Sylow Theorems

تعطينا المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (المبرهنة 12.11) معلومات كاملة عن الزمر الإبدالية المنتهية جميعها، حيث إنّ دراسة الزمر المنتهية غير الإبدالية معقدة أكثر، وتعطينا مبرهنات سيلو بعض المعلومات المهمة عنها.

نعلم أنّ رتبة الزمرة الجزئية لزمرة منتهية G يجب أن تقسم $|G|$، فإذا كانت G إبدالية، فتوجد زمرة جزئية من كل رتبة تقسم $|G|$، وقد أثبتنا في المثال 6.15 أنّ A_4 – ذات الرتبة 12 – لا تحوي زمرة جزئية من الرتبة 6. إذن، الزمر غير الإبدالية G من الممكن ألا تحوي زمرًا جزئية من إحدى الرتب d التي تقسم $|G|$؛ "ومعكوس مبرهنة لاجرانج" لا يتحقق، وتعطينا مبرهنات سيلو معكوسًا ضعيفًا. تحديدًا، إنها تثبت أنه إذا كانت d قوة لعدد أولي وd تقسم $|G|$، فإنّ G تحوي زمرة جزئية من الرتبة d. (لاحظ أنّ 6 ليست قوة لعدد أولي)، وتعطي مبرهنات سيلو كذلك معلومات تتعلق بعدد مثل هذه الزمر الجزئية وعلاقتها مع بعضها، وسنرى أنّ هذه المبرهنات مفيدة جدًّا في دراسة الزمر المنتهية غير الإبدالية.

تعطي براهين مبرهنات سيلو تطبيقًا آخر على تأثير الزمرة في مجموعة، الموصوف في الفصل 16. في هذه المرة، المجموعة نفسها مصنوعة من الزمرة؛ في بعض الأحيان المجموعة هي الزمرة نفسها، وهي – أحيانًا – مجموعة المجموعات المشاركة لزمرة جزئية، وفي أحيان أخرى هي مجموعة زمر جزئية.

الزمر – p

أعطى الفصل 17 تطبيقًا على صيغة بيرنسايد، التي تحصي عدد المدارات في مجموعة –G منتهية، حيث تنبع معظم نتائج هذا الفصل من معادلة تحسب عدد العناصر في مجموعة –G منتهية.

لتكن X مجموعة –G منتهية. تذكّر أنه إذا كان $x \in X$، فإن مدار x في X بالنسبة إلى G، هو: $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. افترض وجود r من المدارات في X بالنسبة إلى G، ولتكن $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ تحوي عنصرًا من كل مدار في X. كل عنصر الآن في X هو بالتحديد في مدار واحد. إذن:

$$|X| = \sum_{i=1}^{r} |Gx_i| \tag{1}$$

يمكن أن تكون هناك مدارات بعنصر واحد فقط في X. لتكن $X_G = \{x \in X \mid gx = x$ لكل $g \in G\}$. إذن، X_G هي بالضبط اتحاد المدارات ذات العنصر الواحد في X. لنفترض وجود s من المدارات ذات العنصر الواحد، حيث $0 \le s \le r$. إذن، $|X_G| = s$، وبإعادة ترتيب الـ x_i – إذا كان ذلك ضروريًا -. فإنه يمكننا كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$|X| = |X_G| + \sum_{i=s+1}^{r} |Gx_i|. \tag{2}$$

نحصل على معظم نتائج هذا الفصل من المعادلة (2). سنعرض مبرهنة سيلو كما في (Hungerford [10])، حيث ينسب الفضل إلى (R. J. Nunke) في خطوات البرهان، وينسب الفضل في إثبات المبرهنة 3.36 (مبرهنة كوشي) إلى (J. H. Mckay).

المبرهنة 1.36 الآتية ليست مبرهنة عدّ بالضبط، ولكن لها استنتاج عددي، فهي تعدّ مقياس p، حيث تبدو المبرهنة قوية بصورة مذهلة، وفي بقية هذه الوحدة، إذا اخترنا المجموعة الصحيحة، وتأثير الزمرة الصحيح فيها، وطبّقنا المبرهنة 1.36 ، فإنّ ما نريده يقع تمامًا في يدنا! مقارنة بالبراهين الأقدم، فإنّ المناقشة جميلة جدًّا ورائعة.

خلال هذا الفصل، سيكون p دائمًا عددًا صحيحًا أوليًّا.

1.36 مبرهنة لتكن G زمرة من الرتبة p^n ، ولتكن X مجموعة $G-$ منتهية، فإنّ $|X| \equiv |X_G|$ (مقياس p).

البرهان باستخدام مصطلحات المعادلة (2)، نعلم أنّ $|Gx_i|$ تقسم $|G|$ بحسب المبرهنة 16.16 ، وعليه، فإنّ p تقسم $|Gx_i|$، حيث $s+1 \leq i \leq r$، وهكذا، فإنّ المعادلة (2) تثبت أنّ p تقسم $|X| - |X_G|$، إذن، $|X| \equiv |X_G|$ (مقياس p). ♦

2.36 تعريف ليكن p عددًا أوليًّا. تسمى الزمرة G زمرة $p-$ **(p- group)** إذا كان كل عنصر في G ذا رتبة قوّة للعدد الأولي p. والزمرة الجزئية في G هي **زمرة جزئية** $p-$ من G إذا كانت الزمرة الجزئية هي نفسها زمرة $p-$. ■

إنّ هدفنا في هذا الفصل إثبات أنّ الزمرة المنتهية G تحوي زمرة جزئية من رتبة تساوي كل قوة لعدد أولي يقسم $|G|$. ستثبت مبرهنة كوشي بوصفها خطوة أولى، التي تقول: إنه إذا كان p يقسم $|G|$، فإنّ G تحوي زمرة جزئية من الرتبة p.

3.36 مبرهنة (**مبرهنة كوشي** Cauchy's Theorem) ليكن p عددًا أوليًّا. لتكن G زمرة منتهية، وليكن p يقسم $|G|$، فإنّ G تحوي عنصرًا من الرتبة p، وعليه، زمرة جزئية من الرتبة p.

البرهان نكوّن المجموعة X من المتعددات $p-$ $(g_1, g_2, ..., g_p)$ كلها من عناصر G التي تتمتع بخاصية أنّ حاصل ضرب الإحداثيات في G يساوي e، أي إنّ:

$$X = \{(g_1, g_2, \cdots, g_p) \mid g_i \in G \quad \text{و} \quad g_1 g_2 \cdots g_p = e\}.$$

ندّعي أنّ p تقسم $|X|$. عند تكوين المتعددات $p-$ في X، فيمكننا أن ندع $g_1, g_2, .., g_{n-1}$ لتكون أيّ عناصر في G، و g_p تحدد بصورة وحيدة بوصفها $(g_1 g_2 ... g_{p-1})^{-1}$. إذن، $|X| = |G|^{p-1}$ ، ولأنّ p تقسم $|G|$، فنرى أنّ p تقسم $|X|$.

لتكن σ الحلقة $(1,2,3,..,p)$ في S_p. سندع σ تؤثر في X كالآتي:

$$\sigma(g_1, g_2, \cdots, g_p) = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \cdots, g_{\sigma(p)}) = (g_2, g_3, \cdots, g_p, g_1)$$

لاحظ أنّ $(g_2, g_3, \cdots, g_p, g_1) \in X$؛ لأن $g_1(g_2g_3 \cdots g_p) = e$ يؤدي إلى أن $g_1 = (g_2g_3 \cdots g_p)^{-1}$، وهكذا، فإنّ $(g_2g_3 \cdots g_p)g_1 = e$ كذلك. إذن، σ تؤثر في X، وسنعدّ تأثير الزمرة الجزئية $\langle\sigma\rangle$ في S_p على X بالتكرار بطريقة طبيعية.

الآن، $p = |\langle\sigma\rangle|$، وهكذا، فبإمكاننا تطبيق المبرهنة 1.36، حيث نعلم أنّ $|X| \equiv |X_{\langle\sigma\rangle}|$ (مقياس p)، ولأنّ p تقسم $|X|$، فإنّ p تقسم $|X_{\langle\sigma\rangle}|$ كذلك، لنختبر $X_{\langle\sigma\rangle}$، يُترَك –الآن– $(g_1, g_2, .., g_p)$ ثابتًا بـ σ، وإذن، بكل $\langle\sigma\rangle$، إذا وفقط إذا كان $g_1 = g_2 = .. = g_p$، حيث نعرف على الأقل عنصرًا واحدًا في $X_{\langle\sigma\rangle}$، $(e, e, ..., e)$، ولأنّ p تقسم $|X_{\langle\sigma\rangle}|$، فيجب أن يكون هناك p عنصر على الأقل في $X_{\langle\sigma\rangle}$ إذن، يوجد عنصر $a \in G$، $a \neq e$، حيث إنّ $(a, a, \cdots, a) \in X_{\langle\sigma\rangle}$، وهكذا $a^p = e$، وإذن، رتبة a تساوي p، وبالطبع، $\langle a\rangle$ زمرة جزئية من G من الرتبة p. ♦

4.36 نتيجة

لتكن G زمرة منتهية. تكون G زمرة $-p$ ، إذا وفقط إذا كان $|G|$ قوة لـ p.

البرهان

سنترك برهان هذه النتيجة للتمرين 14. ♦

مبرهنات سيلو

لتكن G زمرة، ولتكن $\mathscr{L}$ مجموعة الزمر الجزئية في G جميعها. سنجعل ۶ مجموعة $-G$ بجعل G تؤثر في $\mathscr{L}$ بالترافق، أي إنه إذا كانت $H \in \mathscr{L}$ – أي $H \leq G$ – و $g \in G$، فإنّ g تؤثر في H، ما يعطي الزمرة الجزئية المرافقة $g\,H\,g^{-1}$. (لتجنب الإرباك، لن نكتب هذا التأثير أبدًا على الصورة gh)، من السهل الآن رؤية أنّ $G_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ زمرة جزئية من G (التمرين 11)، وH زمرة جزئية ناظمية في G_H ، ولأنّ G_H تتألف من عناصر G جميعها التي تترك H ثابتة تحت تأثير المرافقة، فإنّ G_H أكبر زمرة جزئية في G تحوي H بوصفها زمرة جزئية ناظمية.

5.36 تعريف

الزمرة الجزئية G_H التي نوقشت توًّا هي **منظّم** H في **G (normalizer)**، وسيرمز لها بالرمز $N[H]$ من الآن فصاعدًا. ■

في إثبات التمهيدية الآتية، سنستخدم حقيقة أنه إذا كانت H زمرة جزئية منتهية في الزمرة G، فإنّ $g \in N[H]$ إذا كان $ghg^{-1} \in H$ لكل $h \in H$، ولرؤية هذا، لاحظ أنه إذا كان $gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1}$ ، فإنّ $h_1 = h_2$ بخاصية الحذف في الزمرة G. إذن، دالة الترافق $i_g : H \to H$ المعطاة بـ $i_g(h) = ghg^{-1}$ دالة أحادية؛ ولأن $|H|$ منتهية، فإنّ i_g دالة غامرة من H إلى H، أي إنّ $gHg^{-1} = H$ و $g \in N[H]$.

6.36 تمهيدية

لتكن H زمرة p- جزئية من الزمرة المنتهية G، فإنّ:

$$(N[H] : H) \equiv (G : H) \quad (\text{مقياس } p).$$

نبذة تاريخية

تنسب مبرهنات سيلو إلى الرياضي النرويجي (Peter Ludvig Mejdell Sylow) (1832 – 1918)، الذي نشرها في بحث مختصر عام 1872م، فقد نصّ سيلو على هذه المبرهنات مستخدمًا زمر التباديل (لأن التعريف المجرد للزمر المجردة لم يكن قد أُعطي بعد)، وقد أعاد جورج فروبينس إثبات هذه المبرهنات للزمر المجردة عام 1887م، على الرغم من ملاحظته أنّ كل زمرة هي في الحقيقة زمرة تباديل (مبرهنة كيلي [المبرهنة 16.8]، وقد طبّق سيلو نفسه مباشرة المبرهنات على مسألة حل المعادلات الجبرية، وبرهن على أنّ أيّ معادلة ذات زمرة جالوا من رتبة تساوي قوة لعدد أولي p، يمكن حلها باستخلاص الجذور.

أمضى سيلو معظم حياته المهنية بوصفه معلمًا في مدرسة عليا في هالدن في النرويج، ولم يعيّن في موقع في جامعة كريستينا إلا عام 1898م، حيث كرّس ثماني سنوات من عمره لمشروع تحرير أعمال ابن بلده (Niels Henrik Able) الرياضية.

البرهان لتكن $\mathscr{L}$ مجموعة مجموعات المشاركة اليسرى لـ H في G، ولندع H تؤثر في $\mathscr{L}$ بالإزاحة من اليسار، بحيث $h(xH) = (hx)H$. إذن، تصبح $\mathscr{L}$ مجموعة -H. لاحظ أنّ $|\mathscr{L}| = (G : H)$

لنحدد $\mathscr{L}_H$، أي مجموعات المشاركة اليسرى التي تترك ثابتة تحت تأثير عناصر H جميعها. الآن، $xH = h(xH)$ إذا وفقط إذا كان $H = x^{-1}h(xH) \in$، أو إذا وفقط إذا كان $H = x^{-1}hxH$. إذن، $xH = h(xH)$ لكل $h \in H$، إذا وفقط إذا كان $x^{-1}h(x^{-1})^{-1} \in H$ لكل $x^{-1}hx = h \in$ H، أو إذا وفقط إذا كان $x^{-1} \in N[H]$ (انظر إلى التعليق السابق للتمهيدية)، أو إذا وفقط إذا كان $x \in N[H]$. إذن، مجموعات المشاركة اليسرى في $\mathscr{L}_H$ هي تلك المحتواة في $N[H]$، وعدد هذه المجموعات المشاركة هو $(N[H] : H)$، وهكذا، فإنّ $|\mathscr{L}_H| = (N[H] : H)$.

لأنّ H زمرة -p، فإنّ رتبتها قوة لـ p بحسب النتيجة 4.36، وتخبرنا المبرهنة 1.36 الآن بأنّ

$|\mathscr{L}_H| \equiv |\mathscr{L}|$ (مقياس p)، أي أنّ $\left(N\left[H\right]:H\right) \equiv \left(G:H\right)$ (مقياس p). ♦

7.36 نتيجة لتكن H زمرة -p جزئية من الزمرة المنتهية G، فإذا كان p يقسم $(G: H)$، فإنّ $N[H] \neq H$.

البرهان ينتج عن التمهيدية 6.36 أنّ p تقسم $\left(N\left[H\right]:H\right)$، التي يجب ألا تساوي 1. إذن، $H \neq N\left[H\right]$. ♦

إننا مستعدون الآن لأولى مبرهنات سيلو، التي تؤكد وجود زمرة جزئية في G من رتبة تساوي قوة عدد أولي لأيّ قوة عدد أولي تقسم $|G|$.

8.36 مبرهنة (**مبرهنة سيلو الأولى**) لتكن G زمرة منتهية، وليكن $|G| = p^n m$، حيث $n \geq 1$ و p لا تقسم m، فإنّ

1. تحوي G زمرة جزئية من الرتبة p^i لكل $1 \leq i \leq n$.

2. تكون كل زمرة جزئية H في G من الرتبة p^i، زمرة جزئية ناظمية في زمرة جزئية من الرتبة p^{i+1}، حيث $1 \leq i < n$.

البرهان 1. نعلم من مبرهنة كوشي أنّ G تحوي زمرة جزئية من الرتبة p. (المبرهنة 3.36). سنستخدم الاستقراء الرياضي في إثبات أنّ وجود زمرة جزئية من الرتبة p^i ، حيث $i < n$ يؤدي إلى وجود زمرة جزئية من الرتبة p^{i+1}. لتكن H زمرة جزئية من الرتبة p^i ولأنّ $i < n$، فنرى أنّ p تقسم $(G: H)$، ونعلم من التمهيدية 6.36 أنّ p تقسم $(N[H]:H)$: لأنّ H زمرة جزئية ناظمية في $N[H]$، فيمكننا صنع $N[H]/H$، ونرى أنّ p تقسم $|N[H]/H|$، وبحسب مبرهنة كوشي، يوجد لزمرة العامل $N[H]/H$ زمرة جزئية K من الرتبة p، إذا كان $\gamma: N[H] \to N[H]/H$ التشاكل القانوني، فإنّ $\gamma^{-1}[K] = \{x \in N[H] | \gamma(x) \in K\}$ زمرة جزئية من $N[H]$ ومن ثم من G، هذه الزمرة الجزئية تحوي H ومن الرتبة p^{i+1}.

2. نعيد البناء في الجزء 1، ونلاحظ أنّ $H < \gamma^{-1}[K] \leq N[H]$، حيث $|\gamma^{-1}[K]| = p^{i+1}$، ولأنّ H ناظمية في $N[H]$، فإنها بالطبع ناظمية في الزمرة التي ربما تكون أصغر. $\gamma^{-1}[K]$ ♦

9.36 تعريف **زمر سيلو الجزئية -p (Sylow p- Subgroup)** في الزمرة G ، هي زمرة جزئية -p أعظمية في G، أي إنها زمرة جزئية - p ، وغير محتواة في زمرة جزئية - p أكبر منها. ■

لتكن G زمرة منتهية، حيث $|G| = p^n m$ كما في المبرهنة 8.36. تثبت المبرهنة أنّ زمر سيلو الجزئية -p في G هي بالضبط تلك الزمر الجزئية من الرتبة p^n، فإذا كانت P زمرة سيلو الجزئية -p، فإنّ كل مرافقة gPg^{-1} لـ P هي كذلك زمرة سيلو جزئية -p وتنصّ مبرهنة سيلو الثانية على أنه يمكن الحصول على زمر سيلو الجزئية -p جميعها من P بهذه الطريقة، أي إنّ أيّ زمرتي سيلو جزئيتين -p تكونان مترافقتين.

10.36 مبرهنة (**مبرهنة سيلو الثانية**) لتكن P_1 وP_2 زمرتي سيلو جزئيتين -p في زمرة منتهية G، فإنّ P_1 وP_2 زمرتان جزئيتان مترافقتان في G.

البرهان هنا سندع إحدى الزمرتين الجزئيتين تؤثر في مجموعات المشاركة اليسرى للأخرى، ونستخدم المبرهنة 1.36. لتكن $\mathscr{L}$ مجموعة مجموعات المشاركة اليسرى لـP_1 ، ولندع P_2 تؤثر في $\mathscr{L}$ كالآتي: $y(xP_1) = (yx)P_1$، حيث $y \in P_2$. إذن، $\mathscr{L}$ مجموعة -p_2. وبحسب المبرهنة 1.36، فإنّ $|\mathscr{L}| \equiv |\mathscr{L}_{P2}|$ (مقياس p)، $|\mathscr{L}| = (G:P_1)$ ولا تقبل القسمة على p، وهكذا، فإنّ $|\mathscr{L}_{P2}| \neq 0$. لتكن $xP_1 \in \mathscr{L}_{P2}$، إذن، $yxP_1 = xP_1$ لكل $y \in P_2$، وهكذا، فإنّ $x^{-1}yxP_1 = P_1$ ولأنّ $|P_1| = |P_2|$، فيجب أن نحصل على $P_1 = x^{-1}P_2x$، وهكذا، فإنّ P_1 وP_2 بالتأكيد زمرتان جزئيتان مترافقتان. ♦

مبرهنة سيلو الأخيرة تعطي معلومات عن عدد زمر سيلو الجزئية - p. بعض التوضيحات معطاة بعد المبرهنة، والمزيد معطًى في الفصل المقبل.

11.36 مبرهنة (**مبرهنة سيلو الثالثة**) إذا كانت G زمرة منتهية وp تقسم $|G|$، فإنّ عدد زمر سيلو الجزئية -p مطابق لـ 1 مقياس p، ويقسم $|G|$.

البرهان لتكن P إحدى زمر سيلو الجزئية -p في G. لتكن $\mathscr{L}$ مجموعة كل زمر سيلو الجزئية -p، ولندع P تؤثر في $\mathscr{L}$ بالترافق، حيث إنّ $x \in P$ ترسل $T \in \mathscr{L}$ إلى xTx^{-1}، فبحسب المبرهنة 1.36، فإنّ $|\mathscr{L}| \equiv |\mathscr{L}_P|$ (مقياس p). لنحسب $\mathscr{L}_P$.

إذا كانت $T \in \mathscr{L}_P$، فإنّ $xTx^{-1} = T$ لكل $x \in P$. إذن، $P \leq N[T]$، وبالطبع، $T \leq N[T]$ كذلك، ولأنّ كلا P وT زمر سيلو جزئية -p في G، فهي كذلك زمر سيلو جزئية -p في $N[T]$، ولكنهما عند ذلك يصبحان مترافقين في $N[T]$ بحسب المبرهنة 10.36، ولأنّ T زمرة جزئية ناظمية في $N[T]$، فإنها المرافق الوحيد لنفسها في $N[T]$. إذن، $T = P$، وهكذا، فإنّ $\mathscr{L}_P = \{P\}$، ولأنّ $|\mathscr{L}| \equiv |\mathscr{L}_P| = 1$ (مقياس p)، فنرى أنّ عدد زمر سيلو الجزئية -p مطابق لـ 1 مقياس p.

لندع الآن G تؤثر في $\mathscr{L}$ بالترافق. فلأنّ زمر سيلو الجزئية -p كلها مترافقة، فيوجد مدار واحد فقط في $\mathscr{L}$ تحت G، وإذا كانت $P \in \mathscr{L}$، فإنّ $|\mathscr{L}| = |$ مدار $p| = (G : G_P)$ بحسب المبرهنة 16.16 (في الحقيقة G_P هي منظّم P)؛ ولكن $(G: G_P)$ يقسم $|G|$، وهكذا، فإنّ عدد زمر سيلو الجزئية -p يقسم $|G|$. ♦

12.36 مثال زمر سيلو الجزئية -2 في S_3 لها رتبة 2. الزمر الجزئية من الرتبة 2 في S_3 في المثال 7.8، هي:

$$\{\rho_0,\mu_1\}, \qquad \{\rho_0,\mu_2\}, \qquad \{\rho_0,\mu_3\}.$$

لاحظ أنه توجد ثلاث زمر جزئية، وأنّ $1 \equiv 3$ (مقياس 2)، وكذلك 3 تقسم 6 (رتبة S_3) يمكننا التحقق بسهولة أنّ: $i_{\rho_1}[\{\rho_0, \mu_1\}] = \{\rho_0, \mu_2\}$ و $i_{\rho_2}[\{\rho_0,\mu_1\}] = \{\rho_0,\mu_3\}$ حيث $i_{\rho_j}(x) = \rho_j x \rho_j^{-1}$، موضحة أنها جميعها مترافقة. ▲

13.36 مثال لنستخدم مبرهنات سيلو في برهان أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 15. لتكن رتبة G 15، فندعي أنّ G تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 5، وبحسب المبرهنة 8.36، تحوي G على الأقل زمرة جزئية واحدة من الرتبة 5، وبحسب المبرهنة 11.36 عدد مثل هذه الزمر الجزئية يطابق 1 مقياس 5، ويقسم 15، ولأنّ 1، و6، و11 هي الأعداد الصحيحة الموجبة الوحيدة الأقل من 15 وتطابق 1 مقياس 5، ولأنّ العدد 1 هو الوحيد بينها الذي يقسم 15، فنرى أنّ G تحوي بالضبط زمرة جزئية واحدة P من الرتبة 5؛ ولكن لكل $g \in G$، يربط التماثل الذاتي الداخلي i_g المعرّف على G، حيث $i_g(x) = gxg^{-1}$، الزمرة الجزئية P بصورة غامرة بزمرة جزئية gPg^{-1}، وهي الأخرى من الرتبة 5. إذن، يجب أن يكون لدينا $gPg^{-1} = P$ لكل $g \in G$، وهكذا، فإنّ P زمرة جزئية ناظمية في G؛ لذلك، فإنّ G ليست بسيطة (سيثبت المثال 10.37 أنّ G يجب أن تكون في الحقيقة إبدالية؛ ولذلك، فيجب أن تكون دورية). ▲

إننا على ثقة بأنّ المثال 13.36 أعطى لمحة عن قوة المبرهنة 11.36. لا تقلل أبدًا من أهمية مبرهنة تُعدّ شيئًا، حتى لو كان مقياس p.

تمارين 36

حسابات

املأ الفراغات في التمارين 1 – 4.

1. زمرة سيلو جزئية –3 في زمرة رتبتها 12 لها رتبة ــــــــــــــــ.

2. زمرة سيلو جزئية –3 في زمرة رتبتها 54 لها رتبة ــــــــــــــــ.

3. الزمرة من الرتبة 24 يجب أن تحوي ــــــــ أو ــــــــ زمرة سيلو جزئية –2. (استخدم المعلومات المعطاة فقط في المبرهنة 11.36).

4. الزمرة من الرتبة (17) (5) (3) = 255 يجب أن تحوي إما ــــــــ أو ــــــــ زمرة سيلو جزئية –3 و ــــــــ أو ــــــــ زمرة سيلو جزئية –5.

(استخدم فقط المعلومات المعطاة في المبرهنة 11.36).

5. أوجد زمر سيلو الجزئية –3 في S_4 كلها. وبيّن أنها مترافقة.

6. أوجد زمرتي سيلو جزئيتين –2 في S_4، وأثبت أنهما مترافقتان.

مفاهيم

في التمارين 7 إلى 9، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

7. ليكن p عددًا أوليًا. الزمرة -p هي زمرة بخاصية أنّ كل عنصر فيها له رتبة p.

8. المنظم $N[H]$ للزمرة الجزئية H في G هي مجموعة التماثلات الذاتية الداخلية كلها التي تربط H بصورة غامرة بنفسها.

9. لتكن G زمرة، حيث إنّ p يقسم رتبها. زمرة سيلو جزئية -p في الزمرة، هي أكبر زمرة جزئية P في G لها خاصية أنّ رتبتها هي إحدى قوى p.

10. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

ــــــــ أ. أيّ زمرتي سيلو جزئيتين -p في زمرة منتهية مترافقتان.

ــــــــ ب. تثبت المبرهنة 11.36 أنّ أيّ زمرة من الرتبة 15 لها فقط زمرة سيلو جزئية – 5 واحدة.

ــــــــ جـ. كل زمرة سيلو جزئية -p في زمرة منتهية لها رتبة من قوى p.

ــــــــ د. كل زمرة جزئية -p في أيّ زمرة منتهية تكون زمرة سيلو الجزئية -p.

ــــــــ هـ. تحوي كل زمرة إبدالية منتهية زمرة سيلو جزئية -p واحدة فقط لكل عدد أولي p يقسم رتبة G.

ــــــــ و. المنظم في G للزمرة الجزئية H هو دائمًا زمرة جزئية ناظمية في G.

ــــــــ ز. إذا كانت H زمرة جزئية في G، فإنّ H دائمًا زمرة جزئية ناظمية في $N[H]$.

ــــــــ ح. تكون زمرة سيلو الجزئية -p في زمرة منتهية G ناظمية، إذا وفقط إذا كانت زمرة سيلو الجزئية -p الوحيدة في G.

_______ **ط.** إذا كانت G زمرة إبدالية وH زمرة جزئية من G، فإنّ $N[H] = H$.

_______ **ي.** الزمرة ذات الرتبة p^n حيث p عدد أولي، لا تحوي زمرة سيلو جزئية -p.

براهين

11. لتكن H زمرة جزئية في الزمرة G. أثبت أنّ $G_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ زمرة جزئية في G.

12. لتكن G زمرة منتهية، ولتكن الأعداد الأولية p و$q \neq p$ تقسم $|G|$. أثبت أنه إذا كانت G تحوي بالضبط زمرة سيلو جزئية -p فعلية واحدة، فإنها زمرة جزئية ناظمية، وهكذا فإنّ G ليست بسيطة.

13. أثبت أنّ أيّ زمرة من الرتبة 45 تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 9.

14. أثبت النتيجة 4.36.

15. لتكن G زمرة منتهية، وليكن p عددًا أوليًا يقسم $|G|$. لتكن P زمرة سيلو جزئية -p في G، فأثبت أنّ $N[N[P]] = N[P]$.
[مساعدة: ناقش أنّ P هي زمرة سيلو الجزئية -p الوحيدة في $N[N[P]]$، ومن ثم استخدم المبرهنة 10.36].

16. لتكن G زمرة منتهية، وليكن العدد الأولي p يقسم $|G|$، ولتكن P زمرة سيلو جزئية -p في G، ولتكن H أيّ زمرة جزئية -p في G، فأثبت أنه يوجد $g \in G$، حيث إنّ $gHg^{-1} \leq P$.

17. أثبت أنّ زمرة من الرتبة $(35)^3$ تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 125.

18. أثبت عدم وجود زمر بسيطة من الرتبة $255 = (3)\,(5)\,(17)$.

19. أثبت عدم وجود زمر بسيطة من الرتبة $p^r m$، حيث p عدد أولي، r عدد صحيح موجب، و$m < p$.

20. لتكن G زمرة منتهية. افترض G كمجموعة -G، حيث G تؤثر في نفسها بالترافق.

أ. أثبت أنّ G_G هو المركز $Z(G)$ لـ G. (انظر الفصل 15).

ب. استخدم المبرهنة 1.36 في إثبات أنّ مركز زمرة -p. منتهية غير تافهة يكون غير تافه.

21. ليكن p عددًا أوليًا. أثبت أنّ الزمرة المنتهية من الرتبة p^n تحوي زمرًا جزئية ناظمية H_i، حيث $0 \leq i \leq n$ و $|H_i| = p^i$ و $H_i \leq H_{i+1}$، حيث $0 \leq i < n$ [مساعدة: انظر التمرين 20، وخذ فكرة من الفصل 35].

22. لتكن G زمرة منتهية، ولتكن P زمرة جزئية -p ناظمية في G، فأثبت أنّ P محتواة في كل زمرة سيلو جزئية -p في G.

الفصل 37 تطبيقات على مبرهنات سيلو Applications of the Sylow Theory

سنعطي في هذا الفصل كثيرًا من التطبيقات على مبرهنات سيلو. إنه من المثير رؤية مدى سهولة استنتاج حقائق معينة عن زمر ذات رتب خاصة، وعلى أيِّ حال، فيجب أن ندرك أننا نعمل فقط مع زمر منتهية، وأننا حقيقة نحرز تقدمًا بسيطًا في المسألة العامة لتحديد بنية الزمر المنتهية جميعها، فإذا كانت رتبة الزمرة تحوي فقط عددًا صغيرًا من العوامل، فإنّ التقنيات الموضحة في هذا الفصل، يمكن أن تكون ذات فائدة في تحديد بنية الزمرة. سيتم توضيح هذا أكثر في الفصل 40، حيث سنثبت أنه من الممكن أحيانًا وصف الزمر كلها (تبعًا للتماثل) من رتبة معينة، حتى لو كانت بعض الزمر ليست إبدالية، وعلى أي حال، إذا كانت رتبة الزمرة المنتهية مركبة بصورة كبيرة، أي لها عدد كبير من العوامل، فإنّ المشكلة بوجه عام أصعب بكثير.

تطبيقات على الزمر -p ومعادلة الفصول

1.37 مبرهنة كل زمرة ذات رتبة تساوي قوة لعدد أولي (أي زمرة -p منتهية) قابلة للحل.

البرهان إذا كانت رتبة G تساوي p^r، فينتج مباشرة من المبرهنة 8.36، أنّ G تحوي زمرة جزئية H_i من الرتبة p^i ناظمية في زمرة جزئية H_{i+1} من الرتبة p^{i+1}، حيث $0 \le i < r$. إذن:

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \cdots < H_r = G$$

سلسلة تركيب، حيث زمر العامل جميعها من الرتبة p، وهكذا فهي إبدالية، بل في الحقيقة هي دورية. إذن، G قابلة للحل. ♦

استخدمت البراهين الأقدم لمبرهنات سيلو معادلة الفصول، وقد تمّ تجنب ذكر معادلة الفصول بصورة واضحة في براهين الفصل 36، مع أنّ المعادلة (2) هناك هي صورة عامة لها. سنطور الآن معادلة الفصول التقليدية لتصبح مألوفة لديك.

لتكن X مجموعة -G منتهية، حيث G زمرة منتهية. تخبرنا المعادلة (2) في الفصل 36 بأنّ:

$$|x| = |x_G| + \sum_{i=s+1}^{r} |Gx_i| \qquad (1)$$

حيث x_i عنصر في المدار i في X. سنعتمد الآن حالة خاصة من المعادلة (1)، حيث $X = G$ وتأثير G في G بالترافق، وهكذا تنقل $g \in G$ العنصر $x \in X = G$ إلى gxg^{-1}. إذن:

$$\begin{aligned} X_G &= \{x \in G \mid gxg^{-1} = x \quad \text{لكل} \quad g \in G\} \\ &= \{x \in G \mid xg = gx \quad \text{لكل} \quad g \in G\} = Z(G), \end{aligned}$$

مركز G، فإذا جعلنا $n_i = |Gx_i|$ و $c = |Z(G)|$ في المعادلة (1)، فإننا نحصل على:

$$|G| = c + n_{c+1} + \cdots + n_r \qquad (2)$$

حيث n_i عدد عناصر المدار i في G تحت تأثير الترافق في نفسها، لاحظ أنّ n_i تقسم $|G|$ لـ $c+1 \leq i \leq r$؛ لأننا نعلم في المعادلة (1) أن $(G : G_{xi}) = |Gx_i|$، التي هي من قواسم $|G|$.

2.37 تعريف المعادلة (2) هي **معادلة الفصول لـ G (Class equation)**. كل مدار في G تحت الترافق بـ G، **هو فصل ترافق في G (Conjugate Class)**. ■

3.37 مثال من السهل التحقق أنه في S_3 في المثال 7.8 تكون فصول الترافق

$$\{\rho_0\}, \{\rho_1, \rho_2\}, \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.$$

معادلة الفصول في S_3 هي:

$$6 = 1+2+3.$$ ▲

لتوضيح استخدام معادلة الفصول، نثبت المبرهنة التي طلب التمرين (b) 20 في الفصل 36 أن نبرهنها.

4.37 مبرهنة يكون مركز زمرة -p منتهية غير تافهة G غير تافه.

البرهان في المعادلة (2) لـ G، كل n_i تقسم $|G|$، حيث $c+1 \leq i \leq r$، وهكذا، فإنّ p تقسم كل n_i، وكذلك فإنّ p تقسم $|G|$. إذن، p تقسم c. الآن، $e \in Z(G)$، وهكذا $c \geq 1$؛ لذلك، $p \geq c$، ويوجد $a \in Z(G)$، بحيث $a \neq e$. ♦

نتحول الآن إلى تمهيدية على الضرب المباشر، التي ستُستخدم في المبرهنات التي تلي.

5.37 تمهيدية لتكن G زمرة تحوي زمرتين جزئيتين ناظميتين H وK، حيث إنّ $H \cap K = \{e\}$ و $H \vee K = G$. إذن، G تماثل $H \times K$.

البرهان سنبدأ بإثبات أنّ $hk = kh$، حيث $k \in K$ و $h \in H$. خذ المبدل $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})$، ولأنّ H وK زمرتان جزئيتان ناظميتان في G، فإنّ التجميعين في الأقواس يثبتان أنّ $hkh^{-1}k^{-1}$ في كلا H وK، ولأنّ $H \cap K = \{e\}$، فنرى أنّ $hkh^{-1}k^{-1} = e$، وهكذا $hk = kh$.

ليكن $\phi: H\times K \to G$ معرّفًا بـ $\phi(h,k) = hk$ إذن:

$$\phi((h,k)(h',k')) = \phi(hh',kk') = hh'kk'$$
$$= hkh'k' = \phi(h,k)\phi(h',k'),$$

وهكذا، فإنّ ϕ تشاكل.

إذا كان $\phi(h,k) = e$، فإنّ $hk= e$، وهكذا، فإنّ $h = k^{-1}$، وكلا h وk في $H \cap K$. إذن، $h= k= e$؛ ولذلك، $Ker(\phi) = \{(e, e)\}$ و ϕ أحادية.

بحسب التمهيدية 4.34، نعلم أنّ $HK= H \vee K$، و$H \vee K= G$ بالإفتراض. إذن، ϕ غامرة لـ G، و$H \times K \simeq G$. ♦

6.37 مبرهنة للعدد الأولي p، كل زمرة من الرتبة p^2 إبدالية.

البرهان إذا كانت G غير دورية، فإنّ كل عنصر ما عدا e يجب أن يكون من الرتبة p. ليكن a أحد هذه العناصر؛ إذن، الزمرة الجزئية الدورية $\langle a\rangle$ من الرتبة p لا تستنفذ G، وكذلك ليكن $b \in G$، حيث $b \notin \langle a\rangle$؛ إذن، $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}$؛ لأن العنصر c في $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle$ ، حيث $c \neq e$ سيكون مولدًا لكل من $\langle a\rangle$ و$\langle b\rangle$، معطيًا $\langle b\rangle = \langle a\rangle$، ما يناقض الإنشاء، ومن المبرهنة 8.36، $\langle a\rangle$ ناظمية في زمرة جزئية من الرتبة p^2 في G، أي ناظمية في G كلها، وبالمثل $\langle b\rangle$ ناظمية في G، الآن $\langle a\rangle \vee \langle b\rangle$ زمرة جزئية في G، وتحوي بصورة فعلية $\langle a\rangle$ ، ورتبتها تقسم p^2؛ إذن، يجب أن تكون $\langle a\rangle \vee \langle b\rangle$ هي G كلها؛ إذن، فرضيات البدهية 5.37 متحققة، وG تماثل $\langle b\rangle \times \langle a\rangle$؛ ولذلك فهي إبدالية. ♦

المزيد من التطبيقات

سنتحوّل إلى مناقشة ما إذا كانت زمر بسيطة من رتب معينة موجودة، وقد رأينا أنّ كل زمرة ذات رتبة عدد أولي تكون بسيطة، وكذلك أثبتنا أنّ A_n بسيطة حيث $n \geq 5$. وأنّ A_5 أصغر زمرة بسيطة ذات رتبة ليست عددًا أوليًا، إذ إنّ هناك تخمينًا من بيرنسايد بأنّ أيّ زمرة منتهية بسيطة ذات رتبة غير أولية، يجب أن تكون ذات رتبة زوجية، وقد كان النصر حينما برهن هذا [21] (Thompson and Feit).

7.37 مبرهنة إذا كانت p وq عددين أوليين مختلفين و$p < q$، فإنّ كل زمرة ذات رتبة pq لها زمرة جزئية وحيدة من الرتبة q ، وهذه الزمرة الجزئية ناظمية في G، وهكذا فإنّ G ليست بسيطة، وإذا كان q لا يطابق 1 مقياس p، فإنّ G إبدالية ودورية.

البرهان تخبرنا المبرهنتان 8.36 و11.36 بأنّ G تحوي زمرة سيلو جزئية -q، وأنّ عدد هذه الزمر الجزئية يطابق 1 مقياس q ويقسم pq؛ ولذلك، يجب أن يقسم p، ولأنّ $p < q$، فإنّ الاحتمال الوحيد هو العدد 1؛ إذن، توجد زمرة سيلو جزئية -q واحدة Q في G، حيث يجب أن تكون الزمرة Q ناظمية في G؛ لأنها تحت تماثل ذاتي داخلي ستحمل إلى زمرة من الرتبة نفسها، أي هي نفسها؛ إذن، G ليست بسيطة.

بالمثل، توجد P زمرة سيلو جزئية -p في G، وعددها يقسم pq، ويطابق 1 مقياس p، هذا العدد يجب أن يكون 1 أو q، فإذا كان q لا يطابق 1 مقياس p، فإنّ العدد يجب أن يكون 1 وP ناظمية في G، لنفترض أنّ $q \not\equiv 1$ (مقياس p). لأنّ كل عنصر في Q مختلف عن e له رتبة q، وكل عنصر في P مختلف عن e له رتبة p، فنحصل على $Q \cap P = \{e\}$، وكذلك $P \vee Q$ يجب أن تكون زمرة جزئية من G تحوي Q فعليًّا ورتبتها تقسم pq؛ إذن، $Q \vee P = G$ وبحسب البدهية 5.37 تماثل $Q \times P$ أو $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$؛ إذن، G إبدالية ودورية. ♦

سنحتاج إلى تمهيدية أخرى لبعض مناقشات العدّ الآتية.

8.37 تمهيدية إذا كانت H وK زمرتين جزئيتين منتهيتين في الزمرة G، فإنّ:

$$|HK| = \frac{(|H|)\,(|K|)}{|H \cap K|}$$

البرهان تذكر أنّ $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. ليكن $|H| = r$ و$|K| = s$ ، و $|H \cap K| = t$. الآن تحتوي HK على الأكثر rs عنصرًا، وعلى أيّ حال، فمن الممكن أن يكون h_1k_1 يساوي h_2k_2، حيث $h_1, h_2 \in H$ و$k_1, k_2 \in K$؛ أي يمكن أن يكون هناك بعض التداخل، فإذا كان $h_1k_1 = h_2k_2$، فدع

$$x = (h_2)^{-1}h_1 = k_2(k_1)^{-1}$$

يثبت $x = (h_2^{-1})h_1$ أنّ $x \in H$، و $x = k_2(k_1)^{-1}$ يثبت أنّ $x \in K$؛ إذن، $x \in (H \cap K)$،

$$h_2 = h_1x^{-1} \quad \text{و} \quad k_2 = xk_1 \text{ و}$$

من الناحية الأخرى، إذا كانت $y \in (H \cap K)$، فندع $h_3 = h_1\, y^{-1}$ و $k_3 = yk_1$؛ إذن، من الواضح أنّ $h_3k_3 = h_1k_1$، حيث $h_3 \in H$ و$k_3 \in K$؛ إذن، يمكن تمثيل $hk \in HK$ على صورة h_ik_i، حيث $h_i \in H$ و$k_i \in K$ بعدد من المرات يساوي عدد عناصر $H \cap K$، أي t من المرات؛ لذلك، عدد العناصر في HK يساوي rs/t. ♦

التمهيدية 8.37 هي نتيجة أخرى تعدّ الأشياء؛ لذلك لا تقلل من قيمتها، ستستخدم البدهية بالصورة الآتية: لا يمكن لزمرة منتهية G أن تحوي زمرتين جزئيتين H وK كبيرتين جدًّا مع تقاطع صغير جدًّا، أو أنّ رتبة HK ستتجاوز رتبة G، وهذا مستحيل، على سبيل المثال: الزمرة من الرتبة 24 لا يمكن أن تحوي زمرتين جزئيتين من الرتبة 12 و8 وتقاطعًا من الرتبة 2.

تتألف بقية هذا الفصل من تمارين عدّة توضح تقنيات إثبات أنّ الزمر من رتبة معينة جميعها إبدالية، أو أنّ لها زمرة جزئية ناظمية فعلية، أي إنها ليست بسيطة. سنستخدم حقيقة واحدة ذكرناها سابقًا في التمارين فقط، الزمرة الجزئية H ذات الدليل 2 في زمرة منتهية G هي دائمًا ناظمية؛ لأنه – وبالعدّ– نرى أنّ مجموعات المشاركة اليسرى هي فقط H ومجموعة المشاركة التي تتكوّن من جميع عناصر G التي ليست في H، ومجموعات المشاركة اليمنى مثلها؛ إذن، كلّ مجموعة مشاركة يمنى هي مجموعة مشاركة يسرى، وH ناظمية في G.

9.37 مثال لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة p^r حيث $r > 1$، حيث p عدد أولي؛ لأنه وبحسب المبرهنة 8.36، تحوي مثل هذه الزمرة G زمرة جزئية من الرتبة p^{r-1} وناظمية في زمرة جزئية من الرتبة p^r، التي يجب أن تكون G كلها؛ إذن، الزمرة من الرتبة 16 ليست بسيطة، إنها تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 8. ▲

10.37 مثال كل زمرة من الرتبة 15 دورية (وهكذا، فهي إبدالية، وليست بسيطة؛ لأن 15 ليس عددًا أوليًّا)؛ هذا لأنّ $(3)\ (5) = 15$، و5 لا تطابق 1 مقياس 3، وبذلك نكون انتهينا بحسب المبرهنة 7.37. ▲

11.37 مثال لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 20؛ لأن مثل هذه الزمرة G لها زمر سيلو جزئية –5، وعددها يطابق 1 مقياس 5 ، وهو من قواسم ألـ 20؛ ولذلك فهو 1، زمرة سيلو الجزئية –5 هذه ناظمية؛ لأنها تساوي مرافقاتها جميعها. ▲

12.37 مثال لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 30، وقد رأينا أنه إذا وجدت زمرة سيلو جزئية -p واحدة فقط، حيث p عدد أولي يقسم 30، فنكون انتهينا، وبحسب المبرهنة 11.36، فإنّ احتمالات عدد زمر سيلو الجزئية –5 هي 1 أو 6 ، وتلك لزمر سيلو الجزئية –3 تساوي 1 أو 10؛ ولكن، إذا كان لـ G زمر سيلو جزئية –5، فإنّ تقاطع أيّ اثنتين منها هو زمرة جزئية ذات رتبة تقسم 5؛ ولذلك هي فقط $\{e\}$؛ إذن، تحوي كل منها 4 عناصر من الرتبة 5، التي لا تنتمي إلى الأخريات؛ إذن، يجب أن تحوي G 24 عنصرًا من الرتبة 5، وبالمثل، إذا كانت G تحوي 10 زمر سيلو جزئية –3، فإنها تحوي على الأقل 20 عنصرًا من الرتبة 3، سيحتاج نوعا زمر سيلو معًا على الأقل إلى 44 عنصرًا في G؛ إذن، توجد زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 5 أو من الرتبة 3. ▲

مثال 13.37 لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 48، وسنثبت بالطبع، أنّ الزمر G ذات الرتبة 48 تحوي زمرًا جزئية ناظمية من الرتبة 16 أو الرتبة 8، وبحسب المبرهنة 11.36، فإنّ G تحوي واحدة أو ثلاث زمر سيلو جزئية -2 من الرتبة 16، فإذا كانت هناك زمرة جزئية واحدة فقط من الرتبة 16، فإنها تكون ناظمية في G.

افترض أنّ هناك ثلاث زمر جزئية من الرتبة 16، ولتكن H وK اثنتين منها.

إذن، يجب أن تكون رتبة $H \cap K$ تساوي 8؛ لإنه إذا كانت $H \cap K$ ذات رتبة ≤ 4، فإنه وبحسب التمهيدية 8.37 تحوي HK على الأقل 64= 4 / (16) (16) عنصرًا، ما يناقض حقيقة أنّ G تحوي فقط 48 عنصرًا، فإذن $H \cap K$ ناظمية في كل من H وK (لأنها ذات دليل يساوي 2، أو بحسب المبرهنة 8.36)؛ إذن، منظم $H \cap K$ يحوي كلًّا من H وK، ويجب أن يكون ذا رتبة مضاعف > 1 لـ 16 وقاسمًا لـ 48؛ ولذلك، فهو 48؛ إذن، يجب أن تكون $H \cap K$ ناظمية في G. ▲

مثال 14.37 لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 36، ومثل هذه الزمرة G تحوي إما زمرة جزئية واحدة أو أربعة من الرتبة 9، فإذا كان هناك منها زمرة جزئية واحدة فقط، فإنها ناظمية في G، وإذا كان هناك أربعة من هذه الزمر الجزئية، فلتكن H وK اثنتين منها، وكما في المثال 13.37، يجب أن تحوي $H \cap K$ ثلاثة عناصر على الأقل، أو أنّ HK ستحوي 81 عنصرًا، وهذا مستحيل؛ إذن، منظم $H \cap K$ له رتبة مضاعف > 1 لـ 9 وقاسم لـ 36؛ إذن، يجب أن تكون الرتبة إما 18 أو 36، فإذا كانت الرتبة تساوي 18، فإنّ دليل المنظم يساوي 2؛ ولذلك، فهو ناظمي في G، أما إذا كانت الرتبة تساوي 36، فإنّ $H \cap K$ ناظمية في G. ▲

مثال 15.37 تكون كل زمرة G من الرتبة (17) (5) (3)= 255 إبدالية (ولذلك، فهي دورية بحسب المبرهنة الأساسية 12.11 وليست بسيطة؛ لأن 255 ليس عددًا أوليًّا)، وبحسب المبرهنة 11.36، الزمرة G تحوي زمرة جزئية H واحدة فقط من الرتبة 17؛ إذن، G/H لها رتبة 15 وهي إبدالية بحسب المثال 10.37، حيث نرى بحسب المبرهنة 20.15، أنّ زمرة المبدلات الجزئية C في G محتواة في H؛ إذن وبوصفها زمرة جزئية من H، فإنّ رتبة C إما 1 أو 17.

كذلك ترينا المبرهنة 11.36، أنّ G تحوي إما 1 أو 85 زمرة جزئية من الرتبة 3، وإما 1 أو 51 زمرة جزئية من الرتبة 5، وفي أيّ حال، فإنّ 85 زمرة جزئية من الرتبة 3 ستحتاج إلى 170 عنصرًا من الرتبة 3، و51 زمرة جزئية من الرتبة 5 ستحتاج إلى 204 عناصر من الرتبة 5 في G، كلاهما معًا سيحتاجان إلى 375 عنصرًا في G، وذلك مستحيل؛ إذن، توجد زمرة جزئية K رتبتها إما 3 أو 5 وناظمية في G؛ إذن، G/K لها رتبة (17) (5) أو (17) (3)، وفي كلتا الحالتين ترينا المبرهنة 7.37 أن G/K إبدالية؛ إذن، $C \leq K$ ولها رتبة إما 3، 5، أو 1، ولأنّ $C \leq H$ تثبت أنّ رتبة C إمّا 17 أو 1، فنستنتج أنّ رتبة C هي 1؛ إذن، $C = \{e\}$، و $G/C \simeq G$ إبدالية، وتثبت المبرهنة الأساسية 12.11 أنّ G دورية. ▲

تمارين 37

حسابات

1. لتكن D_4 زمرة تماثلات المربع في المثال 10.8.

أ. أوجد تحليل D_4 إلى فصول ترافق.

ب. اكتب معادلة الفصول لـ D_4.

2. بمناقشات شبيهة لتلك التي استخدمت في الأمثلة في هذا الفصل، أقنع نفسك بأنّ كل زمرة غير تافهة ذات رتبة غير أولية وأقل من 60، تحوي زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة، وبذلك تكون غير بسيطة. لا تحتاج إلى كتابة التفاصيل. (نوقشت أصعب الحالات في الأمثلة).

مفاهيم

3. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. كل زمرة من الرتبة 159 دورية.

______ ب. كل زمرة من الرتبة 102 لها زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة.

______ جـ. كل زمرة قابلة للحل رتبتها إحدى قوى عدد أولي.

______ د. كل زمرة ذات رتبة تساوي قوة عدد أولي قابلة للحل.

______ هـ. سيكون مضجرًا جدًّا إثبات أنه لا توجد زمرة ذات رتبة غير أولية بين 60 و168 بسيطة بالطرق الموضحة في الكتاب.

______ و. لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 21.

______ ز. تحوي كل زمرة بـ 125 عنصرًا 5 عناصر على الأقل تبدل مع عناصر الزمرة جميعها.

______ ح. تحوي كل زمرة من الرتبة 42 زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 7.

______ ط. تحوي كل زمرة من الرتبة 42 زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 8.

______ ي. الزمر البسيطة الوحيدة هي الزمر $\mathbb{Z}_p$ وA_n، حيث p عدد أولي و$n \neq 4$.

براهين

4. أثبت أن كل زمرة من الرتبة (5) (7) (47) إبدالية ودورية.

5. أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 96.

6. أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 160.

7. أثبت أنّ أيّ زمرة من الرتبة 30 تحوي زمرة جزئية من الرتبة 15. [مساعدة: استخدم آخر عبارة في المثال 12.37، ثم اذهب إلى زمرة العامل].

8. يحدد هذا التمرين فصول الترافق في S_n لكل $n \geq 1$.

أ. أثبت أنه إذا كانت $\sigma = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ دورة في S_n و τ أي عنصر في S_n، فإنّ $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau a_1, \tau a_2, \cdots, \tau a_m)$.

ب. ناقش مستخدمًا (أ) أنّ أيّ دورتين في S_n من الطول نفسه تكونان مترافقتين.

جـ. ناقش مستخدمًا (أ) و(ب) أنّ ضرب s من الدورات غير المتقاطعة في S_n وذات أطول r_i، حيث $i = 1, 2, \ldots, s$، مترافق مع أيّ ضرب آخر لـ s من الدورات غير المتقاطعة وذات أطول r_i في S_n.

د. أثبت أنّ عدد فصول الترافق في S_n يساوي $p(n)$، حيث $p(n)$ تساوي عدد الطرق – بإهمال ترتيب الحدود – التي يمكن كتابة n بوصفها مجموع أعداد صحيحة موجبة، يسمى العدد $p(n)$ **عدد تقسيمات n (number of partitions of n)** .

هـ. احسب $p(n)$ لـ $n= 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

9. أوجد فصول الترافق ومعادلة الفصول لـ S_4. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

10. أوجد معادلة الفصول لـ S_5 و S_6. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

11. أثبت أنّ عدد فصول الترافق لـ S_n . هي كذلك عدد الزمر الإبدالية المختلفة (تبعًا للتماثل) من الرتبة p^n ، حيث p عدد أولي. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

12. أثبت أنه إذا كانت $n > 2$، فإنّ مركز S_n هو الزمرة الجزئية المكوّنة من التبديلة المحايدة فقط. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

الفصل 38 الزمر الإبدالية الحرة Free Abelian Groups

سنقدم في هذا الفصل مفهوم الزمر الإبدالية الحرة، ونثبت بعض النتائج المتعلقة بها، حيث يختتم الفصل بعرض للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (المبرهنة 12.11).

الزمر الإبدالية الحرة

سنراجع أفكار مجموعة المولدات لزمرة G والزمر منتهية التولد، كما أعطيت في الفصل 7، وسنتعامل في هذا الفصل بصورة خاصة مع الزمر الإبدالية، ونستخدم مصطلحات الجمع، كما يأتي:

0 للعنصر المحايد، للعملية:

$$\begin{cases} na = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ من المرات}} \\ -na = \underbrace{(-a) + (-a) + \cdots + (-a)}_{n \text{ من المرات}} \end{cases} \text{حيث } a \in G,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

$0a = 0$ حيث 0 الأول في $\mathbb{Z}$ والثاني في G.

سنستمر باستخدام الرمز $\times$ للضرب المباشر للزمر بدلاً من استخدام رمز الجمع المباشر.

لاحظ أنّ $\{(1,0), (0,1)\}$ مجموعة مولدة لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$؛ لأن $(n,m) = n(1, 0) + m(0, 1)$ لأيّ (m,n) في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، حيث إنّ مجموعة المولدات هذه تتمتع بخاصية أنّ كل عنصر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ يمكن كتابته بطريقة وحيدة على الصورة $n(1, 0) + m(0, 1)$، أي إنّ المعاملات n وm في $\mathbb{Z}$ وحيدة.

1.38 مبرهنة لتكن X مجموعة جزئية من زمرة إبدالية غير صفرية G، فإنّ الشروط الآتية على X متكافئة.

1. يمكن كتابة كل عنصر a في G بطريقة وحيدة (ما عدا ترتيب الحدود) على الصورة $a = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r$، حيث $n_i \neq 0$ في $\mathbb{Z}$ وx_i عناصر مختلفة في X.

2. X تولد G، و$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r = 0$، حيث $n_i \in \mathbb{Z}$ وx_i عناصر مختلفة في X، إذا وفقط إذا كانت $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$.

البرهان افترض أنّ الشرط 1 صحيح، فلأنّ $G \neq \{0\}$، فإنّ $X \neq \{0\}$. ينتج من 1 أنّ $0 \notin X$؛ لأنه إذا كان $x_i = 0$ و$x_j \neq 0$، فإنّ $x_j = x_i + x_j$، ما سيناقض وحدانية كتابة x_j، ومن الشرط 1، x تولد G و$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r = 0$، إذا كانت $n_1 = n_2 = \ldots = n_r = 0$. افترض الآن أنّ $n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_rx_r = 0$، حيث إنّ بعض الـ $n_i \neq 0$؛ إذن:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + (n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r) \\ &= (n_1 + 1)x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r \end{aligned}$$

ما يعطي طريقتين لكتابة $x_1 \neq 0$، ما يناقض افتراض الوحدانية في الشرط 1؛ إذن، الشرط 1 يؤدي إلى الشرط 2.

سنثبت الآن أنّ الشرط 2 يؤدي إلى الشرط 1. ليكن $a \in G$، ولأنّ X تولد G، فنرى أنه يمكن كتابة a على الصورة: $a = n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r$.

افترض أنه يمكن كتابة a بطريقة أخرى باستخدام عناصر X، فباستخدام معاملات صفرية في التعبيرين عند الحاجة، بإمكاننا افتراض أنهما يشتملان على العناصر نفسها من X ، وأنهما على الصورة:

$$a = n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r$$

$$a = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_rx_r$$

بالطرح، نحصل على:

$$0 = (n_1 - m_1)x_1 + (n_2 - m_2)x_2 + \cdots + (n_r - m_r)x_r$$

وهكذا، فإنّ $n_i - m_i = 0$ بحسب الشرط 2، و $n_i = m_i$ ، حيث $i = 1,2,\ldots, r$؛ إذن، المعاملات وحيدة. ♦

2.38 تعريف تسمى الزمر الإبدالية التي لها مجموعة مولدات X تحقق الشروط في المبرهنة 1.38 **زمرة إبدالية حرة** (**Free Abelian Group**)، وتسمى X أساسًا (**basis**) للزمرة. ■

3.38 مثال الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إبدالية حرة و$\{(1, 0), (0, 1)\}$ أساس لها، وبالمثل، $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ أساس للزمرة الإبدالية الحرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$، وهكذا؛ إذن، الضرب المباشر المنتهي للزمرة $\mathbb{Z}$ مع نفسها زمر إبدالية حرة. ▲

4.38 مثال الزمرة $\mathbb{Z}_n$ ليست إبدالية حرة؛ لأن $nx = 0$ لكل $x \in \mathbb{Z}_n$، و$n \neq 0$، ما يناقض الشرط 2. ▲

افترض أنّ زمرة إبدالية حرة G لها أساس منتهٍ $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$، فإذا كان $a \in G$ و$a \neq 0$، فإنّ لـ a كتابة وحيدة على الصورة:

$$a = n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_rx_r \text{ حيث } n_i \in \mathbb{Z}\ .$$

(لاحظ أننا في الكتابة السابقة لـ a قد استخدمنا العناصر x_i كلها في الأساس المنتهي X، بوصفه مقابلا لكتابة a في الشرط 1 في المبرهنة 1.38، حيث يمكن أن يكون الأساس غير منتهٍ؛ إذن، في الكتابة السابقة لـ a، يجب أن نسمح باحتمالية أنّ بعض المعاملات n_i أصفار، بينما في الشرط 1 في المبرهنة 1.38 أشرنا إلى أنّ كل $n_i \neq 0$).

نعرّف

$$\phi: G \to \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{r \text{ من العوامل}}$$

بـ $\phi(a) = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ و $\phi(0) = (0,0,\ldots,0)$، إذ إنه من السهل التحقق أنّ ϕ تماثل. نترك التفاصيل للتمارين (انظر التمرين 9)، وننصّ على النتيجة بوصفها مبرهنة.

5.38 مبرهنة إذا كانت G زمرة إبدالية حرة غير صفرية ولها أساس بـ r من العناصر، فإنّ G تماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ r من العوامل.

إنها حقيقة أنّ أيّ أساسين لزمرة إبدالية حرة G تحويان العدد نفسه من العناصر، سنثبت هذا فقط في حالة الأساس المنتهي لـ G، على الرغم من أنها صحيحة إذا كان كل أساس لـ G غير منتهٍ. إنّ البرهان جميل حقًّا؛ فهو يعطي تشخيصًا سهلًا لعدد العناصر في الأساس بدلالة حجم زمرة العامل.

6.38 مبرهنة لتكن $G \neq \{0\}$ زمرة إبدالية حرة ذات أساس منتهٍ، فإنّ كل أساس لـ G منتهٍ، وكل أسس G لها العدد نفسه من العناصر.

البرهان ليكن لـ G الأساس $\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$؛ إذن، G تماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ r من العوامل. لتكن $2G = \{2g \mid g \in G\}$، ومن السهل التحقق أنّ $2G$ زمرة جزئية من G، ولأنّ

$G \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ r من العوامل، فنحصل على

$$\begin{aligned} G/2G &\simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times \cdots \times 2\mathbb{Z}) \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

لـ r من العوامل. إذا $|G/2G| = 2^r$، وهكذا عدد عناصر أيّ أساس منتهٍ X يساوي $\log_2 |G/2G|$؛ إذن، أيّ أساسين منتهيين لهما العدد نفسه من العناصر.

بقي أن نثبت أنه لا يمكن أن يكون هناك أساس غير منتهٍ لـ G. ليكن Y أساسًا لـ G، ولتكن $\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$ عناصر مختلفة في Y. لتكن H زمرة جزئية في G مولدة بـ $\{y_1, y_2, \cdots, y_s\}$، ولتكن K زمرة جزئية في G مولدة ببقية عناصر Y، فمن السهل التحقق أنّ $G \simeq H \times K$، وهكذا فإنّ:

$$G / 2G \simeq (H \times K) / (2H \times 2K) \simeq (H / 2H) \times (K / 2K).$$

ولأنّ $|H/2H| = 2^s$، فنرى أنّ $|G/2G| \geq 2^s$، ولأنّ لدينا $|G/2G| = 2^r$ ، فنرى أنّ $s \leq r$؛ إذن، لا يمكن لـ Y أن تكون مجموعة غير منتهية؛ لأنه يمكننا حينها أن نأخذ $s > r$. ♦

7.38 تعريف إذا كانت G زمرة إبدالية حرة، فإنّ مرتبة G **(rank)** هي عدد العناصر في أساسٍ لـ G. (كل الأسس لها عدد العناصر نفسه). ■

إثبات المبرهنة الأساسية

سنثبت المبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11) بإثبات أنّ أيّ زمرة إبدالية منتهية التولد تماثل زمرة عامل على الصورة:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times d_s\mathbb{Z} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}),$$

حيث "البسط" و"المقام" كلاهما يحويان n عاملاً، وd_1 تقسم d_2، التي تقسم d_3، ...، والتي تقسم d_s. وهكذا سينتج التحليل بقوى الأعداد الأولية في المبرهنة 12.11.

لإثبات أنّ G تماثل زمرة العامل هذه، سنثبت وجود تشاكل من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}$ غامر لـ G ، ونواته على صورة $d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times d_s\mathbb{Z} \times \{0\} \times \{0\}$ ، وسنحصل على النتيجة من المبرهنة 11.14. ستعطي المبرهنات الآتية تفاصيل هذه المناقشة، حيث إنّ هدفنا من هذه الفقرة التقديمية، هو رؤية إلى أين نحن ذاهبون عندما نقرأ ما يأتي:

8.38 مبرهنة لتكن G زمرة إبدالية منتهية التوليد، مولدة بالمجموعة $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$، ليكن:

$$\phi: \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{\text{عامل } n} \to G$$

معرّفًا بـ $\phi: (h_1, h_2, \ldots, h_n) = h_1a_1 + h_2a_2 + \ldots + h_na_n$، فإنّ ϕ تشاكل غامر لـ G.

البرهان من معنى h_ia_i ، حيث $h_i \in \mathbb{Z}$ و$a_i \in G$، نرى مباشرة أنّ:

$$\begin{aligned}
\phi[(h_1, \cdots, h_n) + (k_1, \cdots, k_n)] &= \phi(h_1 + k_1, \cdots, h_n + k_n) \\
&= (h_1 + k_1)a_1 + \cdots + (h_n + k_n)a_n \\
&= (h_1a_1 + k_1a_1) + \cdots + (h_na_n + k_na_n) \\
&= (h_1a_1 + \cdots + h_na_n) + (k_1a_1 + \cdots + k_na_n) \\
&= \phi(k_1, \cdots, k_n) + \phi(h_1, \cdots, h_n).
\end{aligned}$$

لأنّ $\{a_1, \cdots, a_n\}$ تولد G، فمن الواضح أنّ التشاكل ϕ غامر لـ G. ♦

سنبرهن الآن "خاصية الاستبدال"، التي تجعل من الممكن ضبط الأساس.

9.38 مبرهنة إذا كان $X = \{x_1, \cdots, x_r\}$ أساسًا للزمرة الإبدالية الحرة G و $t \in \mathbb{Z}$، فإنّ لكل $i \neq j$، تكون المجموعة

$$Y = \{x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j + tx_i, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_r\}$$

أساسًا كذلك لـ G.

البرهان لأنّ $x_j = (-t)x_i + (1)(x_j + tx_i)$. فنرى أنه يمكن استعادة x_j من Y. التي هي من ثم تولد G. افترض أنّ

$$n_1x_1 + n_{j-1}x_{j-1} + n_j(x_j + tx_i) + n_{j+1}x_{j+1} + \cdots + n_rx_r = 0.$$

إذن

$$n_1x_1 + (n_i + n_jt)x_i + \cdots + n_jx_j + \cdots + n_rx_r = 0.$$

ولأنّ X أساس، فإنّ $n_1 = n_i + n_jt = \cdots = n_j = \cdots = n_r = 0$. لأن $n_j = 0$ و$n_i + n_jt = 0$، فينتج أنّ $n_i = 0$ كذلك، وهكذا فإنّ $n_1 = \cdots = n_i = \cdots = n_j = \cdots = n_r = 0$، وبهذا يتحقق الشرط 2 في المبرهنة 1.38؛ إذن، Y أساس. ♦

10.38 مثال المجموعة $\{(1, 0), (0, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، والمجموعة $\{(1, 0), (4, 1)\}$ أساس آخر؛ لأن $(4, 1) = 4(1, 0) + (0, 1)$ ؛ ولكن $\{(3, 0), (0, 1)\}$ ليست أساسًا. فعلى سبيل المثال: لا يمكننا التعبير عن $(2,0)$ على الصورة $n_1(3, 0) + n_2(0, 1)$، حيث $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. هنا $(3, 0) = (1, 0) + 2(1, 0)$، ومضاعف أحد عناصر الأساس أضيف إلى نفسه، بدلاً من إضافته لعنصر مختلف في الأساس. ▲

يمكن أن يكون للزمرة الإبدالية الحرة ذات مرتبة منتهية كثير من الأسس، وسنثبت أنه إذا كانت $K \leq G$، فإنّ K كذلك زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة لا تزيد على مرتبة G، وبصورة مساوية في الأهمية، توجد أسس لـ G وK مرتبطات ببعض بصورة لطيفة.

11.38 مبرهنة لتكن G زمرة إبدالية حرة غير صفرية وذات مرتبة منتهية n، ولتكن K زمرة جزئية غير صفرية في G، فإنّ K إبدالية حرّة ومرتبتها $s \leq n$.

وإضافة إلى ذلك، يوجد أساس $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ لـ G وأعداد صحيحة موجبة $d_1, d_2, \ldots, d_s$، حيث إنّ d_i تقسم d_{i+1} لـ $i = 1, \ldots, s-1$، و $\{d_1x_1, d_2x_2, \cdots, d_s x_s\}$ أساس لـ K.

البرهان سنثبت أنّ لـ K أساسًا بالصورة الموصوفة، وهذا سيثبت أنّ K إبدالية حرة ذات مرتبة على الأكثر n. افترض أنّ $Y = \{y_1, \cdots, y_n\}$ أساس لـ G. يمكن التعبير عن كل عنصر غير صفري في K على الصورة:

$$k_1 y_1 + \cdots + k_n y_n,$$

حيث إنّ بعض ألـ $|k_i|$ لا تساوي صفرًا من بين الأسس Y كلها لـG، اختر واحدة Y_1 بحيث تعطي أقل قيم غير الصفرية $|k_i|$، وبحيث تكتب عناصر K غير الصفرية كلها بدلالة عناصر الأساس Y_1، وبإعادة ترقيم عناصر Y_1 عند الحاجة، فيمكننا افتراض وجود $w_1 \in K$، حيث إنّ:

$$w_1 = d_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_n y_n$$

وحيث $d_1 > 0$ وd_1 أصغر معامل سهل المنال كما وصف توًّا، ونكتب باستخدام خوارزمية القسمة $k_j = d_1 q_j + r_j$، حيث $0 \leq r_j < d_1$ لـ $j = 2, \ldots, n$؛ إذن:

$$w_1 = d_1(y_1 + q_2 y_2 + \ldots + q_n y_n) + r_2 y_2 + \ldots + r_n y_n. \quad (1)$$

الآن دع $x_1 = y_1 + q_2 y_2 + q_n y_n$. بحسب المبرهنة 9.38. $\{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$ أساس كذلك لـ G، ومن المعادلة (1) واختيارنا لـ Y_1، بحيث d_1 أصغر معامل، فنرى أنّ $r_2 = \ldots = r_n = 0$؛ إذن، $d_1x_1 \in K$.

نعتمد الآن الأسس على الصورة $\{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$ لـG. كل عنصر في K يمكن كتابته على الصورة:

$$h_1x_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_n y_n$$

ولأنّ $d_1x_1 \in K$، فبإمكاننا طرح مضاعف مناسب لـd_1x_1 ، ثم استخدام أنّ d_1 صغرى لنرى أنّ h_1 مضاعف لـd_1 ، حيث نرى في الحقيقة أنّ $k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n$ في K، ومن بين الأسس كلها على الشكل$\{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$، نختار y_2 واحدة التي تؤدي إلى بعض ألـ $k_i \neq 0$ وذات أقل قيمة. (من الممكن أن تكون ألـ k_i كلها أصفارًا دائمًا، وتتولد في هذه الحالة K من d_1x_1، ونكون قد انتهينا). وبإعادة ترقيم عناصر Y_2، يمكننا افتراض وجود $w_2 \in K$، حيث إنّ

$$w_2 = d_2 y_2 + \ldots + k_n y_n$$

حيث $d_2 < 0$ وd_2 صغرى كما وصفنا توًّا، ويمكننا تمامًا كما في الفقرة السابقة، تعديل الأساس $Y_2 = \{x_1, y_2, \cdots, y_n\}$ إلى الأساس $\{x_1, x_2, y_3, \cdots, y_n\}$ لـ G، بحيث $d_1x_1 \in K$ و$d_2x_2 \in K$، وبكتابة $d_2 = d_1q + r$ حيث $0 \le r < d_1$، نرى أنّ $\{x_1 + qx_2, x_2, y_3, \cdots, y_n\}$ أساس لـ G و $d_1x_1 + d_2x_2 = d_1(x_1 + qx_2) + rx_2$ عنصر في K، وباختيارنا لـ d_1 لتكون صغرى، نرى أنّ $r = 0$، وبهذا فإنّ d_1 تقسم d_2.

نعتمد الآن الأسس كلها على الصورة $\{x_1, x_2, y_3, \cdots, y_n\}$ لـ G، ونختبر عناصر في K على الصورة $k_3 y_3 + \cdots + k_n y_n$، فالنمط واضح، وتستمر العملية، حتى نحصل على الأساس $\{x_1, x_2, \cdots, x_s, y_{s+1}, \cdots, y_n\}$، حيث العنصر الوحيد في K على الصورة $k_{s+1} y_{s+1} + \cdots + k_n y_n$ هو الصفر، أي إنّ الـ k_i كلها أصفار، عندها، ندع $x_{s+1} = y_{s+1}, \cdots, x_n = y_n$. ونحصل على أساس لـ$G$ على الصورة الموصوفة في نصّ المبرهنة 11.38. ♦

12.38 مبرهنة كل زمرة إبدالية منتهية التولد تماثل زمرة على الصورة:

$$\mathbb{Z}_{m1} \times \mathbb{Z}_{m2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{mr} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$$

حيث m_i تقسم m_{i+1} لـ $i = 1, \ldots, r-1$.

البرهان ولغايات هذا البرهان، سيكون من المقنع استخدام الترميز $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_1 = \{0\}$. ، لتكن G زمرة منتهية التوليد بـ n عنصر، ولتكن $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ لـ n من العوامل، افترض التشاكل $\phi: F \to G$ من المبرهنة 8.38، ولتكن K نواة هذا التشاكل؛ إذن، يوجد أساس لـ F على الصورة $\{x_1, \ldots, x_n\}$، حيث إنّ $\{d_1 x_1, \ldots, d_s x_s\}$ أساس لـ K و d_i تقسم d_{i+1} لـ$i = 1, \ldots, s-1$، وبحسب المبرهنة 11.14، G تماثل F/K؛ ولكن:

$$\begin{aligned} F/K &\simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z})/(d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \cdots \times d_s\mathbb{Z} \times \{0\} \times \cdots \times \{0\}) \\ &\simeq \mathbb{Z}d_1 \times \mathbb{Z}d_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}d_s \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

من الممكن أن تكون $d_1 = 1$، وفي هذه الحالة $\mathbb{Z}_{d1} = \{0\}$، حيث يمكننا حذفها (تبعًا للتماثل) من هذا الضرب، وبالمثل، يمكن لـ d_2 أن تكون 1، وهكذا. سندع m_1 لتكون أول $d_i > 1$، m_2 تساوي الـ d_i اللاحق، وهكذا، وتنتج مبرهنتنا مباشرة. ♦

أثبتنا أصعب جزء من المبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11)، وبالطبع، يتحقق التحليل إلى قوى أعداد أولية؛ لأننا نستطيع كسر الزمر $\mathbb{Z}_{m_i}$ إلى عوامل ذات قوّى أولية، ويخصّ الجزء المتبقي الوحيد من المبرهنة 12.11 وحدانية رقم بيتي للمعاملات الملتوية، وقوى الأعداد الأولية، حيث يظهر عدد بيتي بوصفه مرتبة للزمرة الإبدالية الحرة G/T، حيث T الزمرة الجزئية الملتوية في G، ولا تتغير هذه المرتبة بحسب المبرهنة 6.38، ما يثبت وحدانية عدد بيتي، إلّا أنّ وحدانية المعاملات الملتوية وقوى الأعداد الأولية أكثر صعوبة بعض الشيء في الإثبات. سنعطي بعض التمارين التي تظهر وحدانيتها (انظر التمارين 14 إلى 22).

تمارين 38

حسابات

.1 أوجد أساسًا $\{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)\}$ لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. بحيث إنّ كل $a_i \neq 0$، كل $b_i \neq 0$ وكل $c_i \neq 0$. (الكثير من الإجابات محتملة).

.2 هل $\{(2, 1), (3, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ؟ برهن اختيارك.

.3 هل $\{(2, 1), (4, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$؟ برهن اختيارك.

.4 أوجد شروطًا على $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ؛ لتصبح $\{(a, b), (c, d)\}$ أساسًا لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. [مساعدة: حلّ $x(a, b) + y(c, d) = (e, f)$ في $\mathbb{R}$، وقرّر متى تقع x وy في $\mathbb{Z}$].

مفاهيم

في التمرينين 5 و6، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

.5 مرتبة الزمرة الإبدالية الحرة G ، هي عدد العناصر في مجموعة مولدة لـ G.

.6 الأساس لزمرة إبدالية غير صفرية G، هو مجموعة مولدة $X \subseteq G$، بحيث إنّ $n_1x_1 + n_2x_2 + \cdots + n_mx_m = 0$ لعناصر مختلفة $x_i \in X$ و$n_i \in \mathbb{Z}$ فقط إذا كانت $n_1 = n_2 = \ldots = n_m = 0$.

.7 أثبت بمثال أنه من الممكن لزمرة جزئية فعلية من زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة منتهية r أن يكون لها كذلك مرتبة r.

.8 ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. تكون كل زمرة إبدالية حرة عديمة الالتواء.

________ ب. تكون كل زمرة إبدالية عديمة الالتواء ومنتهية التولد زمرة إبدالية حرة.

________ جـ. توجد زمرة إبدالية حرة بمرتبة تساوي أيّ عدد صحيح موجب.

________ د. تكون الزمرة الإبدالية منتهية التولد زمرة إبدالية حرّة، إذا كان عدد بيتي لها يساوي عدد العناصر في إحدى مجموعاتها المولدة.

________ هـ. إذا كانت X تولد الزمرة الإبدالية الحرة G، وكانت $X \leq Y \leq G$، فإنّ Y تولد G.

________ و. إذا كانت X أساسًا للزمرة الإبدالية الحرة G، وكانت $X \leq Y \leq G$، فإنّ Y أساس لـ G.

________ ز. لكل زمرة إبدالية حرة غير صفرية عدد غير منتهٍ من الأسس.

________ ح. لكل زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة على الأقل 2، عدد غير منتهٍ من الأسس.

________ ط. إذا كانت K زمرة جزئية غير صفرية من زمرة إبدالية حرّة منتهية التولد، فإنّ K إبدالية حرة.

________ ي. إذا كانت K زمرة جزئية غير صفرية من زمرة إبدالية حرّة منتهية التولد، فإنّ G/K إبدالية حرّة.

براهين

9. أكمل إثبات المبرهنة 5.38 (ارجع للعبارتين السابقتين للمبرهنة).

10. أثبت أنّ الزمرة الإبدالية الحرة لا تحوي عناصر غير صفرية ذات رتبة منتهية.

11. أثبت أنه إذا كانت G وG' زمرتين إبداليتين حرّتين، فإنّ $G \times G'$ إبدالية حرّة.

12. أثبت أنّ الزمر الإبدالية الحرّة ذات المراتب المنتهية هي بالضبط الزمر الإبدالية المنتهية التولد، التي لا تحوي عناصر غير صفرية منتهية الرتبة.

13. أثبت أنّ $\mathbb{Q}$ مع الجمع ليست زمرة إبدالية حرة. [مساعدة: أثبت أنه لا يوجد عددان نسبيان مختلفان n/m وr/s، يمكن أن يقعا في مجموعة تحقق الشرط 2 في المبرهنة 1.38].

التمارين من 14 إلى 19 تتعامل مع إثبات وحدانية قوى الأعداد الأولية، التي تظهر في التحليل إلى قوى أعداد أولية للزمرة الجزئية الملتوية T في زمرة إبدالية منتهية التولد.

14. ليكن p عددًا أوليًا محددًا، فأثبت أنّ عناصر T ذات الرتبة من قوى p، مع الصفر تشكل زمرة جزئية T_p من T.

15. أثبت أنه في أيّ تحليل لـ T لقوى – أولية، الزمرة T_p في التمرين السابق تماثل الضرب المباشر للعوامل الدورية من الرتب قوى العدد الأولي p. [يختزل هذا مسألتنا لإثبات أنّه لا يمكن أن يكون للزمرة T_p تحليلات مختلفة جوهريًا كضرب زمر دورية].

16. لتكن G أيّ زمرة إبدالية، وليكن n أيّ عدد صحيح موجب، فأثبت أنّ $G[n] = \{x \in G \mid nx = 0\}$ زمرة جزئية من G. (باستخدام رموز الضرب $G[n] = \{x \in G \mid x^n = e\}$).

17. بالرجوع إلى التمرين 16، أثبت أنّ $\mathbb{Z}_{p^r}[p] \simeq \mathbb{Z}_p$ لأيّ $r \geq 1$ وعدد أولي p.

18. باستخدام التمرين 17، أثبت أنّ:

$$(\mathbb{Z}_{p^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{r_m}})[p] \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{m \text{ مرة}}$$

بشرط أنّ $r_i \geq 1$.

19. لتكن G زمرة إبدالية منتهية التولد و T_p الزمرة الجزئية المعرفة في التمرين 14. افترض أنّ

$T_p \simeq \mathbb{Z}_{p^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{r_m}} \simeq \mathbb{Z}_{p^{s_1}} \mathbb{Z}_{p^{s_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{s_n}}$، حيث

$1 \le r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_m$ و $1 \le s_1 \le s_2 \le \ldots \le s_n$ ، نحتاج إلى إثبات أنّ $m = n$ و $r_i = s_i$ لـ $i = 1, \ldots, n$ لإكمال برهان وحدانية التحليل إلى قوى – أعداد أولية.

أ. استخدم التمرين 18 في إثبات أنّ $n = m$.

ب. أثبت أنّ $r_1 = s_1$، وافترض أنّ $r_i = s_i$ لكل $i < j$، وأثبت أنّ $r_j = s_j$، ما يكمل البرهان [مساعدة: افترض أنّ $r_j < s_j$. افترض الزمرة الجزئية $p^{r_j} T_p = \{p^{r_j} x \mid x \in T_p\}$، وأثبت أنّ هذه الزمرة الجزئية سيكون لها تحليلان لقوى – أعداد أولية تتضمن أعدادًا مختلفة من العوامل غير الصفرية، ثم ناقش بأنّ هذا مستحيل حسب الجزء (أ) من هذا التمرين].

لتكن T الزمرة الجزئية الملتوية لزمرة إبدالية منتهية التولد، وافترض أنّ $T \simeq \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{m_r} \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_s}$، حيث m_i يقسم m_{i+1} لـ $i = 1, \ldots, r-1$ و n_j تقسم n_{j+1} لـ $j = 1, \ldots, s-1$؛ و $m_1 > 1$ و $n_1 > 1$. نود إثبات أنّ $r = s$ و $m_k = n_k$، حيث $k = 1, \ldots, r$، ما يبرهن وحدانية المعاملات الملتوية. يتم هذا للتمارين 20 إلى 22.

20. وضّح كيف يمكن الحصول على التحليل إلى قوى – أعداد أولية من التحليل إلى معاملات – ملتوية. (لاحظ أنّ التمارين السابقة تثبت أنّ التحليل إلى قوى – أعداد أولية وحيد).

21. ناقش مستخدمًا التمرين 20 ، أنّ m_r و n_s يمكن تشخيصهما كليهما، كما يأتي: لتكن $p_1, \ldots, p_t$ أعدادًا أولية مختلفة تقسم $|T|$، ولتكن $p_1^{h_1}, \ldots, p_t^{h_t}$ أعلى قوًى لهذه الأعداد الأولية، التي تظهر في التحليل لقوى – أعداد أولية (الوحيد)؛ إذن، $m_r = n_s = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_t^{h_t}$.

22. شخّص m_{r-1} و n_{s-1} مبرهنًا أنهما متساويان، وأكمل لتبرهن أنّ $m_{r-i} = n_{s-i}$ ، حيث $i = 1, \ldots, r-1$، وهكذا، فإنّ $r = s$.

الفصل 39 الزمر الحرة Free Groups

سنناقش في هذا الفصل وفي الفصل 40 جزءًا من مبرهنة الزمر، وهو ذو أهمية عظيمة ليس في الجبر فقط بل في الطبولوجيا كذلك، وهناك مناقشة رائعة وسهلة القراءة للزمر الحرة وتمثيلات الزمر في (Crowell and Fox) [46، الفصلان 3 و4].

الكلمات والكلمات المختصرة

لتكن A (ليست بالضرورة منتهية) مجموعة عناصر a_i، حيث $i \in I$. نفكر في A بوصفها **أبجدية (alphabet)** وفي ألـ a_i بوصفها **حروفًا (letters)** في الأبجدية، أيّ رمز على الصورة a_i^n حيث $n = \mathbb{Z}$ هو **مقطع (syllable)**، وأيّ سلسلة منتهية w من المقاطع المكتوبة بصورة متراصّة هي **كلمة (word)**، وكذلك نقدّم مفهوم **الكلمة الفارغة** 1 **(empty word)**، التي لا تحوي مقاطع.

1.39 مثال لتكن $A = \{a_1, a_2, a_3\}$؛ إذن:

$$a_1a_3{}^4a_2{}^2a_3,\ a_2{}^3a_2{}^{-1}a_3a_1{}^2a_1{}^{-7} \text{ و } a_2{}^3$$

كلها كلمات، إذا اتبعنا العرف بأن نعُدّ تساوي a_i. ▲

ووُجدت طريقتان طبيعيتان لتعديل كلمات معينة، **الانكماش الأولي (elementary contraction)** . يتكوّن النوع الأول من استبدال ظهور $a_i^m a_i^n$ في كلمة بـ a_i^{m+n}، والنوع الثاني يتكوّن من تبديل ظهور a_i^0 في الكلمة بـ 1، أي حذفها من الكلمة، وعن طريق الانكماش الأولي لعدد منته من المرات، يمكن تحويل كل كلمة إلى **كلمة مختصرة (reduced word)**، وهي التي لا يمكنَ إجراء مزيد من الانكماشات الأولية لها، لاحظ أنّ الانكماشات الأولية هي تقابل – شكليًّا – التعامل مع أسس الأعداد الصحيحة.

2.39 مثال الصورة المختصرة للكلمة $a_2{}^3a_2{}^{-1}a_3a_1{}^2a_1{}^{-7}$ في المثال 1.39 هي $a_2{}^2a_3a_1{}^{-5}$. ▲

يتعيّن أن يقال هنا وبصورة نهائية: إننا سنشرح كثيرًا من النقاط التي تستغرق بعض الكتب صفحات في برهانها– عادة بمناقشة معقدة في الاستقراء الرياضي التي تُجزّأ إلى كثير من الحالات، على سبيل المثال: افترض أننا أعطينا كلمة، ونرغب في إيجاد الصورة المختصرة لها، فقد تكون هناك تشكيلة من الانكماشات الأولية التي يمكن إنجازها أولاً.

كيف يمكن أن نعلم أنّ الكلمة المختصرة التي توصّلنا إليها أخيرًا ستكون نفسها، بغض النظر عن الترتيب الذي اتبعناه في أداء الانكماشات الأولية؟ قد يقول الطالب: هذا واضح. يقضي بعض المؤلفين جهدًا كبيرًا في إثبات هذا، حيث يميل المؤلف هنا إلى موافقة الطالب، فهو يعُدّ هذا النوع من البراهين مملًّا، ولا يجعله مرتاحًا مع هذا الوضع أبدًا، وعلى أيّ حال، فالمؤلف هو أول من يعترف بأنه ليس رياضيًّا عظيمًا، مع احترام أنّ بعض الرياضيين يشعرون بأنّ هذه الأشياء تحتاج إلى مناقشة كبيرة، سنميز الحالات عندما ننصّ فقط على هذه الحقائق بالعبارة «سيبدو واضحًا أنّ» مع إبقاء علامتي التنصيص.

الزمر الحرة

لتكن مجموعة الكلمات المختصرة كلها والمكوّنة من أبجديتنا A هي $F[A]$، سنجعل $F[A]$ الآن زمرة بصورة طبيعية. لـِ w_1 و w_2 في $F[A]$ عرّف w_2. w_1 لتكون الصورة المختصرة للكلمة المكوّنة من وضع الكلمتين w_1w_2 بصورة متراصّة.

3.39 مثال إذا كانت

$$w_1 = a_2^{\,3}a_1^{\,-5}a_3^{\,2}$$

و

$$w_2 = a_3^{\,-2}a_1^{\,2}a_3a_2^{\,-2},$$

فإنّ $w_1 \cdot w_2 = a_2^{\,3}a_1^{\,-3}a_3a_2^{\,-2}$.

"سيبدو واضحًا أنّ" عملية الضرب هذه على $F[A]$ حسنة التعريف وتجميعية، تؤدي الكلمة الفارغة 1 دور العنصر المحايد، و"سيبدو واضحًا أنه" إذا أعطينا كلمة مختصرة

$w \in F[A]$، وإذا كوّنا الكلمة التي نحصل عليها، أولًا بكتابة مقاطع w بترتيب معكوس وثانيًا باستبدال a_i^{-n} بـ a_i^{n}، فإنّ الكلمة الناتجة w^{-1} هي كلمة مختصرة أيضًا، و

$$w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1.$$ ▲

4.39 تعريف الزمرة $F[A]$ التي عرفت توًّا هي **الزمرة الحرة المولدة من** A **(free group generated by A)** ■

ارجع إلى المبرهنة 6.7 وإلى التعريف السابق لها؛ لترى أنّ الاستخدام الحالي لمصطلح يولد متوافقة مع الاستخدام السابق.

بدءًا بزمرة G ومجموعة مولدات $\{a_i \mid i \in I\}$ التي سنختصرها بـ $\{a_i\}$، يمكننا أن نسأل ما إذا كانت G حرة على $\{a_i\}$. سنعرّف بالضبط ماذا يعني هذا.

5.39 تعريف إذا كانت G زمرة مع مجموعة المولدات $A = \{a_i\}$، وإذا كانت G تماثل $F[A]$ تحت تأثير الدالة $\phi\colon G \to F[A]$ ، حيث إنّ $\phi(a_i) = a_i$، فإنّ G **حرّة على** A **(free on A)**، و a_i **مولدات حرة (free generators)** لـِ G، وتكون الزمرة **حرة (free)** إذا كانت حرة على مجموعة غير خالية A. ■

6.39 مثال المثال الوحيد السابق لزمرة حرة هو $\mathbb{Z}$، التي تكون حرة على مولّد واحد. لاحظ أنّ كل زمرة حرة تكون غير منتهية. ▲

ارجع إلى المراجع لإثبات المبرهنات الثلاث الآتية. لن نستخدم هذه النتائج، فقد ذكرناها ببساطة؛ لتعلمنا بهذه الحقائق الممتعة.

7.39 مبرهنة إذا كانت الزمرة G حرة على A وعلى B كذلك، فإنّ للمجموعتين A و B عدد العناصر نفسه؛ أي إنّ مجموعتي توليد حرتين لزمرة حرة لهما عدد العناصر نفسه.

8.39 تعريف إذا كانت G حرة على A، فإنّ عدد عناصر A هي **مرتبة الزمرة الحرة G (rank of the free group G)**. ■

في الحقيقة، المبرهنة الآتية هي نتيجة واضحة تمامًا من المبرهنة 7.39.

9.39 مبرهنة تكون الزمرتان الحرتان متماثلتين، إذا وفقط إذا كان لهما المرتبة نفسها.

10.39 مبرهنة الزمرة الجزئية الفعلية غير التافهة من الزمرة الحرة تكون كذلك حرة.

11.39 مثال لتكن $F[\{x, y\}]$ الزمرة الحرة على $\{x, y\}$. لتكن

$$y_k = x^k y x^{-k}$$

حيث $k \geq 0$. ألـ y_k، حيث $k \geq 0$ مولدات حرة للزمرة الجزئية من $F[\{x, y\}]$ التي تولدها، هذا يوضح أنه على الرغم من أنّ الزمرة الجزئية من الزمرة الحرة تكون حرة، ولكن قد تكون مرتبة الزمرة الجزئية أكبر بكثير من مرتبة كامل الزمرة! ▲

تشاكلات الزمر الحرة

سيركز عملنا في الفصل وقبل كل شيء على التشاكلات المعرّفة على الزمر الحرة، والنتائج هنا بسيطة ورائعة.

12.39 مبرهنة لتكن G زمرة مولدة بـ $A = \{a_i \mid i \in I\}$ ، ولتكن G' أيّ زمرة، فإذا كانت a'_i، حيث $i \in I$ أي عناصر في G' – ليست بالضرورة مختلفة – فإنه يوجد على الأكثر تشاكل واحد $\phi: G \to G'$، بحيث إنّ $\phi(a_i) = a_i'$، وإذا كانت G حرة على A، فإنه يوجد بالضبط تشاكل واحد من هذا النوع.

البرهان ليكن ϕ تشاكلاً من G إلى G'، بحيث إنّ $\phi(a_i) = a_i'$. الآن وبحسب المبرهنة 6.7، فلكل $x \in G$، نحصل على:

$$x = \prod_j {a_{i_j}}^{n_j}$$

لضرب منته من المولدات a_i، وحيث إنّ ألـ a_{ij} التي تظهر في الضرب ليست بالضرورة مختلفة؛ إذن، ولأنّ ϕ تشاكل، فيجب أن يكون:

$$\phi(x) = \prod_j \phi\left({a_{i_j}}^{n_j}\right) = \prod_j \left({a_{i_j}}'\right)^{n_j}.$$

إذن، يتحدد التشاكل بالكامل بقيمه على عناصر المجموعة المولدة. هذا يثبت وجود تماثل واحد على الأكثر، بحيث إنّ $\phi(a_i) = a_i'$.

افترض الآن أنّ G حرة على A ، أي إنّ $G = F[A]$. لـ

$$x = \prod_j a_{i_j}{}^{n_j}$$

في G، عرف بـ $\psi: G \to G'$

$$\psi(x) = \prod_j (a_{i_j}{}')^{n_j}.$$

الدالة حسنة التعريف؛ لأن $F[A]$ تتكوّن بالضبط من الكلمات المختصرة؛ ولا يوجد ضربان شكليان مختلفان في $F[A]$ متساويان، ولأنّ قواعد الحسابات المتضمنة للأسس في G' هي شكليًا نفسها تلك المتضمنة للأسس في G، فمن الواضح أنّ $\psi(xy) = \psi(x)\ \psi(y)$ لأيّ عنصرين x وy في G؛ إذن، ψ هي بالتأكيد تشاكل. ♦

ربما كان علينا إثبات الجزء الأول من هذه المبرهنة مبكرًا، بدلاً من تحويلها إلى التمارين. لاحظ أنّ المبرهنة تنصّ على أنّ تشاكل الزمر يتحدد تمامًا بمعرفة قيمه على كل عنصر من مجموعة المولدات. كان هذا التمرين 46 في الفصل 13، وبوجه خاص، تشاكل الزمرة الدورية يتحدد تمامًا بقيمته على أيّ مولد مفرد للزمرة.

13.39 مبرهنة كل زمرة G' هي صورة تشاكل لزمرة حرة G.

البرهان لتكن $G' = \{a_i' \mid i \in I\}$ ، ولتكن $A = \{a_i \mid i \in I\}$ أيّ مجموعة لها عدد عناصر G' نفسه. لتكن $G = F[A]$؛ إذن، وبحسب المبرهنة 12.39، يوجد تشاكل ψ يربط G بـG'، بحيث إنّ $\psi(a_i) = a_i'$. من الواضح أنّ صورة G مع ψ هي كل G'. ♦

نظرة أخرى للزمر الإبدالية الحرة

من المهم ألا نخلط بين مفهوم الزمرة الحرة ومفهوم الزمرة الإبدالية الحرة، فالزمرة الحرة على أكثر من مولد لا تكون إبدالية، وقد عرّفنا في الفصل السابق الزمرة الإبدالية الحرة بوصفها زمرة إبدالية ذات أساس؛ أي، مجموعة مولدة تحقق الخصائص المذكورة في المبرهنة 1.38. هناك نظرة أخرى – من خلال الزمر الحرة – للزمر الإبدالية الحرة، سنصفها الآن.

لتكن $F[A]$ زمرة حرة على مجموعة مولدة A، سنكتب F بدلًا من $F[A]$ لهذه اللحظة، لاحظ أنّ F ليست إبدالية إذا كانت A تحوي أكثر من عنصر. لتكن C الزمرة الجزئية للمبدلات في F؛ إذن، F/C زمرة إبدالية، وليس من الصعب برهان أنّ F/C زمرة إبدالية حرّة بأساس، فإذا سمّينا aC بـ a، فيمكننا النظر إلى F/C بوصفها زمرة إبدالية حرة ذات أساس، وهذا يُظهر كيف تُبنى الزمرة الإبدالية الحرة ذات الأساس، فكل زمرة إبدالية حرة يمكن أن تبنى بهذه الطريقة تبعًا للتماثل، أي إنه إذا كانت G زمرة إبدالية حرة ذات أساس X، فكوّن الزمرة الحرة $F[X]$، وكوّن زمرة عامل من $F[X]$ مقياس الزمرة الجزئية للمبدلات، فنحصل على زمرة تماثل G.

تتحقق المبرهنات 7.39، 9.39، و10.39 للزمر الإبدالية الحرة إضافة إلى الزمر الحرة، وفي الواقع، النسخة الإبدالية من المبرهنة 10.39 قد بُرهنت لحالة المرتبة المنتهية في المبرهنة 11.38، وبالمقارنة بالمثال 11.39 للزمرة الحرة، فالحقيقة في حالة الزمر الإبدالية الحرة، أنّ مرتبة الزمرة الجزئية هي على الأكثر مرتبة كامل الزمرة، وقد أثبتت المبرهنة 11.38 هذا كذلك لحالة المرتبة المنتهية.

تمارين 39

حسابات

1. أوجد الصورة المختصرة ومعكوسها لكل من الكلمات الآتية:

أ. $a^2b^{-1}b^3a^3c^{-1}c^4b^{-2}$ ب. $a^2a^{-3}b^3a^4c^4c^2a^{-1}$

2. احسب حواصل الضرب المعطاة في الفرعين (أ) و(ب) في التمرين 1 في حالة كانت $\{a, b, c\}$ مجموعة مولدات تكون زمرة إبدالية حرة. أوجد معكوس حواصل الضرب هذه.

3. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة حرّة مرتبتها 2 إلى:

أ. $\mathbb{Z}_2$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

4. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة حرّة مرتبتها 3 وغامرة لـ:

أ. $\mathbb{Z}_4$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

5. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة إبدالية حرّة مرتبتها 2 إلى:

أ. $\mathbb{Z}_4$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

6. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة إبدالية حرّة مرتبتها 2 وغامرة لـ:

أ. $\mathbb{Z}_4$ ب. $\mathbb{Z}_6$ ج. S_3؟

مفاهيم

في التمرينين 7 و 8، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

7. الكلمة المختصرة هي تلك التي لا يظهر فيها مقطعان متجاوران فيهما الحرف نفسه، وكذلك لا يظهر فيها مقطع ذو أس يساوي 0.

8. مرتبة الزمرة الحرة هي عدد العناصر في مجموعة مولدات للزمرة.

9. خذ إحدى الحالات في هذا الفصل، التي استعملت فيها عبارة "سيبدو واضحًا أن" وناقش تفاعلك مع هذه الحالة.

10. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل زمرة جزئية فعلية حرّة من زمرة حرّة تكون زمرة حرّة.

________ ب. كل زمرة جزئية فعلية من كل زمرة إبدالية حرّة تكون زمرة حرّة.

________ ج. صورة التشاكل من زمرة حرّة يكون زمرة حرّة.

________ د. كل زمرة إبدالية حرّة لها أساس.

________ هـ. الزمر الإبدالية الحرّة ذات المرتبة المنتهية هي بالضبط الزمر الإبدالية منتهية التولد.

________ و. لا تكون الزمرة الحرّة حرّة.

________ ز. لا تكون الزمرة الإبدالية الحرّة حرّة.

________ ح. لا تكون الزمرة الإبدالية الحرّة ذات المرتبة >1 حرّة.

________ ط. أيّ زمرتين حرّتين متماثلتان.

________ ي. أيّ زمرتين إبداليتين حرّتين لهما المرتبة نفسها متماثلتان.

براهين

11. لتكن G زمرة إبدالية منتهية التولد مع عنصر محايد 0. المجموعة المنتهية $\{b_1, \cdots, b_n\}$، حيث $b_i \in G$ **أساس** لـ G **(basis)** إذا كانت $\{b_1, \cdots, b_n\}$ تولد G و $\sum_{i=1}^{n} m_i b_i = 0$، إذا وفقط إذا كانت كل $m_i b_i = 0$، حيث $m_i \in \mathbb{Z}$.

أ. أثبت أنّ $\{2, 3\}$ ليست أساسًا لـ $\mathbb{Z}_4$. أوجد أساسًا لـ $\mathbb{Z}_4$.

ب. أثبت أنّ $\{1\}$ و$\{2,3\}$ أسس لـ $\mathbb{Z}_6$. (يثبت هذا أنه لزمرة إبدالية منتهية التولد مع التواء، قد يختلف عدد العناصر في الأساس، أي إنه ليس بالضرورة ثابتًا للزمرة G).

جـ. هل الأساس للزمرة الإبدالية الحرّة كما عرّفناه في الفصل 38 أساس بالمعنى الذي استخدمناه في هذا التمرين؟

د. أثبت أنه لكل زمرة إبدالية منتهية لها أساس $\{b_1, \cdots, b_n\}$، حيث إنّ رتبة b_i تقسم رتبة b_{i+1}.

في شرح الجبر هذه الأيام، تُستخدم غالبًا هذه التقنية (وخاصة من أتباع N. Bourbaki) لتقديم كيان جبري جديد، وذلك كما يأتي:

- صف الخصائص الجبرية التي يمتلكها هذا الكيان الجبري.
- برهن على أنّ أيّ كيانين جبريين يتمتعان بهذه الخصائص يكونان متماثلين، أي إنّ هذه الخصائص تشخّص هذا الكيان.
- برهن وجود كيان واحد على الأقل من هذا النوع.

توضّح التمارين الثلاثة الآتية هذه التقنية لثلاثة كيانات جبرية، واجهنا كلًّا منها سابقًا؛ ولذلك لن نضيع هويتها، ولكن سنستخدم أسماءً وهمية لها في أول تمرينين. سيسألنا الجزء الأخير من هذين التمرينين إعطاء أسماء هذه الكيانات.

12. لتكن G زمرة. تسمى الزمرة الإبدالية G^* **زمرة بليب من G (blip group of G)**، إذا وجد تشاكل محدد ϕ على G غامر لـ G^*، بحيث إنّ أيّ تشاكل ψ من G إلى أيّ زمرة إبدالية G' يمكن تحليله إلى $\psi = \theta\phi$، حيث θ تشاكل من G^* إلى G' (انظر الشكل 14.39).

أ. أثبت أنّ أيّ زمرتي بليب لـ G متماثلتان. [مساعدة: لتكن G_1^* وG_2^* زمرتي بليب لـ G. إنّ التشاكلين المحددين $\phi_1 : G \to G_1^*$ و $\phi_2 : G \to G_2^*$ يمكن تحليلهما كلٌّ عن طريق زمرة البليب الأخرى بحسب تعريف زمرة البليب، أي إنّ $\phi_1 = \theta_1\phi_2$ و $\phi_2 = \theta_2\phi_1$ أثبت أنّ θ_1 تماثل من G_2^* غامر لـ G_1^*، من خلال إثبات أنّ $\theta_1\theta_2$ و$\theta_2\theta_1$ هما الدالتان المحايدتان].

ب. أثبت وجود زمرة بليب G^* لأيّ زمرة G.

جـ. أيّ المفاهيم التي درسناها سابقًا تقابل فكرة زمرة البليب لـ G هذه؟

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & G' \\ & G \arrow[ur, "\phi f"'] & \end{tikzcd}$$

الشكل 15.39

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\phi"'] & & G' \\ & G^* \arrow[ur, "\theta"'] & \end{tikzcd}$$

الشكل 14.39

13. لتكن S أي مجموعة. تشكل الزمرة G مع الدالة المحددة $g: S \to G$ **زمرة بلوب على S (blob group on S)**، فإذا كان لكل زمرة G' ودالة $f: S \to G'$ فيوجد تشاكل وحيد ϕ_f من G إلى G'، حيث إنّ $f = \phi_f\, g$ (انظر الشكل 15.39).

أ. لتكن S مجموعة محددة. أثبت أنه إذا كان كل من G_1 مع $g_1: S \to G_1$، و G_2 مع $g_2: S \to G_2$ زمرتي بلوب على S،

فإنّ G_1 و G_2 متماثلتان. [مساعدة: أثبت أنّ g_1 و g_2 دالتان أحاديتان، وأنّ g_1S و g_2S تولدان G_1 و G_2، على الترتيب، ثم تابع بطريقة مماثلة لتلك المعطاة في مساعدة التمرين 12].

ب. لتكن S مجموعة. أثبت وجود زمرة بلوب لـ S. يمكنك استعمال أيّ من مبرهنات الكتاب.

ج. أيّ المفاهيم التي درسناها سابقًا تقابل فكرة زمرة البلوب على S هذه؟

14. شخّص الزمرة الإبدالية الحرّة باستخدام خصائص بطريقة مشابهة لتلك المستخدمة في التمرين 13.

الفصل 40 تمثيلات الزمر Group Presentations

تعريف

باتباع معظم ما كتب في تمثيلات الزمر، سندع في هذا الفصل 1 ليكون العنصر المحايد في الزمرة، ففكرة تمثيل الزمرة هي تكوين الزمرة بإعطاء مجموعة من المولدات للزمرة ومعادلات أو علاقات محددة، التي نريد أن تحققها الموالدات، حيث نريد أن تكون الزمرة حرّة قدر الإمكان على المولدات، تبعًا لهذه العلاقات.

1.40 مثال افترض أنّ لـ G مولدين x و y، وهي حرّة ما عدا العلاقة $xy = yx$، التي يمكننا التعبير عنها بـ $xy\,x^{-1}\,y^{-1} = 1$. لاحظ أنّ الشرط $xy = yx$ هو بالضبط ما نحتاج إليه لجعل G إبدالية، على الرغم من أنّ $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$ هو مجرد واحد من كثير من المبدلات الممكنة في $F[\{x, y\}]$. إذن، G إبدالية حرة بمولدين، وتماثل $F[\{x, y\}]$ مقياس زمرتها الجزئية للمبدلات، والزمرة الجزئية لمبدلات $F[\{x, y\}]$ هذه هي أصغر زمرة جزئية ناظمية تحوي $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$؛ لأن أيّ زمرة جزئية ناظمية تحوي $xy\,x^{-1}\,y^{-1}$ تعطي زمرة عامل إبدالية، وهكذا فهي تحوي الزمرة الجزئية للمبدلات بحسب المبرهنة 20.15. ▲

يوضح المثال السابق الحالة العامة. لتكن $F[A]$ زمرة حرّة، وافترض أننا نريد تكوين زمرة جديدة تشبه $F[A]$ قدر الإمكان، تبعًا لمعادلات محددة نريد تحقيقها، يمكن كتابة أيّ معادلة على أن يكون الطرف الأيمن منها يساوي 1؛ إذن، يمكننا كتابة المعادلات لتكون $r_i = 1$، حيث $i \in I$، و $r_i \in F[A]$، فإذا اشترطنا أنّ $r_i = 1$، فسيكون علينا أن نجد:

$$x(r_i^n)\,x^{-1} = 1$$

لأيّ $x \in F[A]$ و $n \in \mathbb{Z}$، وكذلك، فإنّ حاصل ضرب عناصر تساوي 1 هو كذلك يجب أن يساوي 1؛ إذن، أيّ ضرب منتهٍ على الصورة:

$$\prod_j x_j\left(r_{i_j}{}^{n_j}\right)x_j^{-1},$$

حيث ألـ r_{ij} ليست بالضرورة مختلفة، سيكون عليه أن يساوي 1 في الزمرة الجديدة، ومن السهل التحقق من أنّ مجموعة حواصل الضرب المنتهية هذه تكوّن زمرة جزئية ناظمية R في $F[A]$؛ إذن، أيّ زمرة تشبه $F[A]$ قدر الإمكان، تبعًا للشروط $r_i = 1$، تحقق كذلك $r = 1$ لكل $r \in R$؛ ولكن $F[A]/R$ تشبه $F[A]$ (تذكر أننا نضرب مجموعات مشاركة باختيار الممثلين)، ما عدا أنّ R قد اضمحلت لتشكل العنصر المحايد 1. إذن، الزمرة التي نسعى وراءها (على الأقل مماثلة لـ) $F[A]/R$. يمكننا عرض هذه الزمرة، وكأنها مولدة بالمجموعة A والمجموعة $\{r_i \mid i \in I\}$، التي سنختصرها بـ $\{r_i\}$.

نبذة تاريخية

ظهرت فكرة تمثيل الزمرة في بحث آرثر كيلي عام 1859م، "حول مبرهنة الزمر المعتمدة على المعادلة الزمرية $\theta^n = 1$. الجزء الثالث".

في هذا المقال، أعطى كيلي حسابًا كاملًا للزمر الخمس من الرتبة 8، بذكر عناصر كل منها، وبإعطاء تمثيل كل منها، على سبيل المثال: كان مثاله الثالث ما أسميناه هنا الزمرة الثامنة؛ لاحظ كيلي أنّ هذه الزمرة مولدة بعنصرين α و β مع العلاقات $\alpha^4 = 1$ ، $\beta^2 = 1$، $\alpha\beta = \beta\alpha^3$، وقد برهن كذلك بصورة أكثر عمومًا بأنّ الزمرة من الرتبة mn مولدة بعنصرين α, β مع العلاقات $\alpha^m = 1$ ، $\beta^n = 1$ ، $\alpha\beta = \beta\alpha^s$ ، إذا وفقط إذا كان $s^n \equiv 1$ (مقياس m) (انظر التمرين 13).

عام 1878م، عاد كيلي إلى مبرهنة الزمر، ولاحظ أنّ المسألة المركزية في تلك المبرهنة، هي تحديد الزمر جميعها من رتبة n معطاة، وفي بدايات عام 1890م، نشر أوتو هولدر (Otto Holder) كثيرًا من الأبحاث في محاولة لحلّ مسألة كيلي، مستخدمًا تقنيات مماثلة لتلك التي نوقشت في الفصول 36، و 37، و 40، وقد حدّد هولدر الزمر البسيطة كلها من الرتب الأقل من 200 ، وشخّص الزمر كلها من الرتب p^3، pq^2، pqr، و p^4 حيث p ، q ، r أعداد أولية مختلفة، إضافة إلى ذلك، طوّر تقنيات لتحديد البنية الممكنة لزمرة G ، إذا عُلمت بنية زمرة جزئية ناظمية H وبنية زمرة العامل G / H، وبصورة مثيرة للانتباه، لأنّ فكرة الزمر المجرّدة كانت لا تزال إلى حدّ لا بأس به جديدة في ذلك الوقت، فإنّ هولدر بدأ أبحاثه بصورة نموذجية بتعريف الزمرة، وأكد أنّ الزمر المتماثلة هي في الجوهر واحدة والشيء نفسه.

2.40 تعريف لتكن A مجموعة، ولتكن $\{r_i\} \subseteq F[A]$. لتكن R أصغر زمرة جزئية ناظمية في $F[A]$، وتحوي الـ r_i، فيسمى التماثل ϕ من $F[A]/R$ غامرًا للزمرة G **تمثيلاً** لـ G **(presentation)**. المجموعات A و $\{r_i\}$ تعطي **تمثيل الزمرة (group presentation)**. المجموعة A هي مجموعة **المولدات للتمثيل (generators for the presentation)**، وكل r_i **علائقي (relator)**، كل $r \in R$ هو **نتيجة لـ** $\{r_i\}$ **(consequence)**. المعادلة

$r_i = 1$ هي **علاقة (Relation)**، **والتمثيل المنتهي (finite presentation)** هو ذلك الذي يكون فيه كل من A و $\{r_i\}$ مجموعة منتهية. ■

قد يبدو هذا التعريف معقدًا، ولكنه في الحقيقة ليس كذلك، ففي المثال 1.40، $\{x, y\}$ هي مجموعتنا للمولدات و $xyx^{-1}y^{-1}$ هو العلائقي الوحيد، والمعادلة $xyx^{-1}y^{-1} = 1$، أو $xy = yx$ هي علاقة. كان هذا مثالاً لتمثيل منتهٍ.

إذا كان تمثيل الزمرة له مولدات x_j وعلائق r_i، فنستخدم الترمين:

$$(x_j : r_i) \text{ أو } (x_j : r_i = 1)$$

للتعبير عن تمثيل الزمرة، يمكننا أن نشير إلى $F[\{x_j\}]/R$ بوصفها زمرة ذات تمثيل $(x_j : r_i)$.

التمثيلات المتماثلة

3.40 مثال ليكن تمثيل الزمرة بـ

$$A = \{a\} \text{ و } \{r_i\} = \{a^6\}$$

أي التمثيل

$$(a : a^6 = 1).$$

هذه الزمرة معرفة بمولد واحد a وعلاقة $a^6 = 1$ ، تماثل $\mathbb{Z}_6$.

الآن، افترض الزمرة المعرفة بمولدين a و b، مع $a^2 = 1$، $b^3 = 1$ و $ab = ba$، أي الزمرة ذات التمثيل:

$$(a, b : a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1}).$$

الشرط $a^2 = 1$ يعطي $a^{-1} = a$. كذلك $b^3 = 1$ تعطي $b^{-1} = b^2$؛ إذن، كل عنصر في هذه الزمرة يمكن كتابته بوصفه ضربًا لقوًى غير سالبة لـ a و b، وتمكننا العلاقة $aba^{-1}b^{-1} = 1$، أي $ab = ba$، من كتابة العوامل كلها التي تتضمن a أولاً، ثم العوامل التي تتضمن b؛ إذن، كل عنصر في الزمرة يساوي أحد $a^m b^n$ ، ولكن $a^2 = 1$ و $b^3 = 1$ تثبت وجود ستة عناصر مختلفة فقط،

$$1, b, b^2, a, ab, ab^2.$$

لذلك، فإنّ هذا التمثيل يعطي كذلك زمرة رتبتها 6 ، وهي كذلك إبدالية، وبحسب المبرهنة الأساسية 12.11، يجب أن تكون كذلك دورية وتماثل $\mathbb{Z}_6$. ▲

يوضح المثال السابق أنّ التمثيلات المختلفة يمكن أن تعطي زمرًا متماثلة، وعندما يحدث هذا، فإنّ لدينا **تمثيلات متماثلة (isomorphic presentations)**، لتحديد ما إذا كان تمثيلان متماثلان أمرًا قد يكون صعبًا جدًّا. لقد أُثبت (انظر Rabin [22]) أنّ عددًا من مثل هذه المسائل المرتبطة بهذه المبرهنة ليست بوجه عام قابلة للحل؛ أي لا توجد طريقة رتيبة وحسنة التعريف لاكتشاف حل للحالات جميعها، حيث تتضمن هذه المسائل غير المحلولة مسألة تحديد ما إذا كان تمثيلان متماثلين، ما إذا كانت الزمرة المعطاة بالتمثيل منتهية، أو حرة، إبدالية، أو تافهة، ومسألة الكلمة المشهورة لتحديد ما إذا كانت كلمة معطاة w ، هي نتيجة مجموعة علاقات $\{r_i\}$ معطاة.
ظهرت أهمية هذه المادة في مبرهنتنا 13.39، التي تضمن أنّ كل زمرة لها تمثيل.

4.40 مثال لنثبت أنّ:

$$(x, y : y^2x = y, yx^2y = x)$$

تمثيل للزمرة التافهة بعنصر واحد. نحتاج فقط إلى إثبات أنّ x و y نتائج للعلائق y^2xy^{-1} وyx^2yx^{-1}، أو أنّ $x = 1$ و $y = 1$ يمكن أن تستنتج من $y^2x = y$ و $yx^2y = x$. سنوضح كلتا التقنيتين.

بوصفها نتيجة لـ y^2xy^{-1}، نحصل على yx بناءً على المرافقة بـ y^{-1}. ومن yx نستنتج $x^{-1}\,y^{-1}$، وهكذا، فإنّ $(yx^2yx^{-1})\,(x^{-1}\,y^{-1})$ تعطي xyx^{-1}، وبمرافقة xyx^{-1} بـ x^{-1}، نحصل على y. ونحصل من y على y^{-1}، و $y^{-1}(yx)$ هي x.

وبالعمل بالعلاقات بدلاً من العلائق، من $y^2x = y$، نستنتج أنّ $yx = 1$ عند الضرب بـ y^{-1} من اليسار، ثمّ بتعويض $yx = 1$ في $yx^2\,y = x$، أي إنّ $(yx)(xy) = x$ ، ونحصل على $xy = x$، ثمّ بالضرب بـ x^{-1} من اليسار، نحصل على $y = 1$، وبتعويض هذا في $yx = 1$، نحصل على $x = 1$.

تحتاج كلتا التقنيتين إلى العمل نفسه، ولكن بطريقة ما يبدو العمل بالعلاقات طبيعيًّا أكثر لمعظمنا. ▲

تطبيقات

ننهي هذا الفصل بتطبيقين.

5.40 مثال لنحدد الزمر من الرتبة 10 تبعًا للتماثل، حيث نعلم من المبرهنة الأساسية 12.11 أنّ كل زمرة إبدالة من الرتبة 10 تماثل $\mathbb{Z}_{10}$. افترض أنّ G غير إبدالية من الرتبة 10 – بحسب مبرهنة سيلو، تحوي G زمرة جزئية ناظمية H من الرتبة 5، ويجب أن تكون H دورية. ليكن a مولدًا لـ H، إذا G/H من الرتبة 2 ، وبذلك تكون مماثلة لـ $\mathbb{Z}_2$، فإذا كانت $b \in G$ و $b \notin H$، فيجب أن يكون $b^2 \in H$، ولأنّ كل عنصر في H ما عدا 1 له رتبة 5، وإذا كانت b^2 لا تساوي 1، فإنّ b^2 ستكون من الرتبة 5، وبذا تكون رتبة b تساوي 10، سيعني هذا أنّ G دورية، ما يناقض الفرض بأنّ G ليست إبدالية؛ إذن، $b^2 = 1$.

أخيرًا، لأنّ H زمرة جزئية ناظمية في G، فإنّ $b\,H\,b^{-1} = H$، ولأنّ المرافقة بـ b تعطي تمثلًا ذاتيًّا على H، فإنّ $ba\,b^{-1}$ يجب أن يكون عنصرًا آخر في H من الرتبة 5، وهكذا، فإنّ $ba\,b^{-1}$ تساوي a، a^2، a^3، أو a^4 ، ولكن $ba\,b^{-1} = a$ ستعطي $ba = ab$، وعندها ستكون G إبدالية؛ لأن a و b تولد G؛ إذن، احتمالات التمثيلات لـ G هي:

1. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$
2. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$
3. $(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4b)$

لاحظ أنّ التمثيلات الثلاثة هذه يمكن أن تعطي زمرًا رتبها على الأكثر **10**؛ لأن العلاقة الأخيرة $ba = a^ib$ تمكننا من التعبير عن كل ضرب لـ a و b في G على الشكل $a^s\,b^t$؛ إذن، $a^5 = 1$ و $b^2 = 1$ تثبت أنّ المجموعة

$$S = \{a^0b^0, a^1b^0, a^2b^0, a^3b^0, a^4b^0, a^0b^1, a^1b^1, a^2b^1, a^3b^1, a^4b^1\}$$

تتضمن عناصر G كلها.

إنه ليس واضحًا بعد أن هذه العناصر في S كلها مختلفة، ما يعني أن لدينا في الحالات الثلاث كلها زمرة رتبتها 10، على سبيل المثال: تمثيل الزمرة

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

يعطي زمرة فيها – وباستخدام قانون التجميع –

$$a = b^2a = (bb)a = b(ba) = b(a^2b) = (ba)(ab)$$
$$= (a^2b)(ab) = a^2(ba)b = a^2(a^2b)b = a^4b^2 = a^4$$

إذن، في هذه الزمرة $a = a^4$، وهكذا $a^3 = 1$، ما يؤدي بالترافق مع $a^5 = 1$، أنّ $a^2 = 1$. ولكن $a^2 = 1$، وبالترافق مع $a^3 = 1$، يعني أنّ $a = 1$؛ إذن، كل عنصر في الزمرة ذات التمثيل

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

يساوي إما 1 أو b؛ أي إنّ الزمرة تماثل $\mathbb{Z}_2$. دراسة مماثلة لـ

$$(bb)a = b(ba)$$

في

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

تثبت أنّ $a = a^4$ مرة أخرى، وهذا يؤدي كذلك إلى زمرة تماثل $\mathbb{Z}_2$.

يترك هذا فقط

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4b)$$

بوصفه مرشحًا لزمرة غير إبدالية من الرتبة 10. في هذه الحالة يمكن إثبات أن عناصر S جميعها مختلفة، وبهذا فإنّ هذا التمثيل يعطي زمرة غير إبدالية G من الرتبة 10. كيف يمكن إثبات أن العناصر في S كلها تمثل عناصر مختلفة في G؟ الطريقة السهلة، وهي ملاحظة أننا نعلم أنه توجد على الأقل زمرة غير إبدالية واحدة من الرتبة 10، الزمرة الزوجية D_5، ولأنّ G هي المرشحة الوحيدة المتبقية، فيجب أن نحصل على $G \simeq D_5$.

وطريقة أخرى للمعادلة كما يأتي: لنحاول جعل S زمرة بتعريف $(a^s\ b^t)\ (a^u\ b^v)$ لتكون $a^x\ b^y$، حيث x هو الباقي من قسمة $s + u\ (4^t)$ على 5، و y هي باقي قسمة $t + v$ على 2، بمفهوم خوارزمية القسمة (المبرهنة 3.6)، وبكلمات أخرى، نستخدم العلاقة $ba = a^4b$ بوصفها دليلًا في تعريف حاصل ضرب $(a^s\ b^t)\ (a^u\ b^v)$ لعنصرين في S، حيث نرى أنّ a^0b^0 تؤدي دور العنصر المحايد، وإذا أعطينا $a^u\ b^v$، فيمكننا تحديد t و s بالتوالي بجعل:

$$t \equiv -v \quad (\text{مقياس } 2)$$

ثمّ

$$s \equiv -u(4^t) \quad (\text{مقياس } 5)$$

ما يعطي $a^s\ b^t$، المعكوس من اليسار لـ $a^u\ b^v$، وهكذا سنحصل على بنية للزمرة على S ، إذا وفقط إذا تحقق قانون التجميع. يسألنا التمرين 13 تنفيذ الحسابات المباشرة لقانون التجميع واكتشاف شرط على S لتكون زمرة مع مثل هذا التعريف للضرب.

المعيار في التمرين في هذه الحالة يوصل إلى صحّة التكافؤ.

$$4^2 \equiv 1 \quad (\text{مقياس } 5).$$

وهكذا، فإننا نحصل فعلًا على زمرة من الرتبة 10. لاحظ أنّ

$2^2 \not\equiv 1$ (مقياس 5).

و

$3^2 \not\equiv 1$ (مقياس 5).

وبهذا، فإنّ التمرين 13 يثبت كذلك أنّ:

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

و

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

لا تعطي زمرًا من الرتبة 10. ▲

6.40 مثال لنحدد الزمر كلها من الرتبة 8 تبعًا للتماثل. نعرف الزمر الإبدالية الثلاث:

$$\mathbb{Z}_8,\ \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4,\ \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

باستخدام المولدات والعلاقات، وسنعطي تمثيلات للزمر غير الإبدالية. لتكن G زمرة غير إبدالية من الرتبة 8، ولأنّ G ليست إبدالية، فإنها لا تحوي عناصر من الرتبة 8؛ إذن، فإنّ العناصر كلها ما عدا العنصر المحايد لها رتبة إما 2 أو 4، فإذا كان كل عنصر له رتبة 2، فإنّ لـ G $a, b, \in$، سنحصل على $(ab)^2=1$، أي إنّ $ab\, ab=1$؛ إذن، ولأنّ $a^2=1$ و $b^2=1$ كذلك، فسنحصل على:

$$ba = a^2bab^2 = a(ab)^2b = ab,$$

ما يناقض فرضيتنا أنّ G غير إبدالية؛ إذن، يجب أن تحوي G عنصرًا من الرتبة 4. لتكن $<a>$ زمرة جزئية من G من الرتبة 4، فإذا كانت $b \notin <a>$، فإنّ المجموعتين المشاركتين $<a>$ و $b<a>$ تستهلك كل G؛ إذن، a و b مولدات لـ G و $a^4 = 1$، ولأنّ $<a>$ ناظمية في G (بحسب مبرهنة سيلو، أو لأن دليلها 2)، $G/<a>$ تماثل $\mathbb{Z}_2$ ولدينا $b^2 \in <a>$، وإذا كانت $b^2 = a$ أو $b^2 = a^3$، فإنّ رتبة b ستكون 8؛ إذن، $b^2=1$ أو $b^2 = a^2$.

أخيرًا، لأنّ $<a>$ ناظمية، فسيكون لدينا $bab^{-1} \in <a>$، ولأن $b<a>b^{-1}$ زمرة جزئية ترافق $<a>$ وبذلك تكون تماثل $<a>$، نرى أنّ bab^{-1} يجب أن يكون عنصرًا من الرتبة 4؛ إذن، bab^{-1} $= a$ أو $bab^{-1} = a^3$. وإذا كان bab^{-1} يساوي a، فإنّ ba ستساوي ab، وهذا سيجعل G إبدالية؛ إذن، $bab^{-1} = a^3$.

وبهذا، فإنّ $ba = a^3b$. وهكذا يصبح لدينا احتمالان لـ G، وهما:

$$G_1 : (a,\ b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

و

$$G_2 : (a,\ b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b).$$

لاحظ أنّ $a^{-1} = a^3$، وأنّ b^{-1} هي b في G_1 وهي b^3 في G_2. هذه الحقائق، مع العلاقة $ba = a^3b$، تمكننا من التعبير عن كل عنصر في G_i على الصورة a^mb^n، كما في المثالين 3.40 و 5.40، ولأنّ $a^4=1$ وإما $b^2=1$ أو $b^2 = a^2$، فاحتمالات العناصر في كل زمرة، هي:

$$1,\quad a,\quad a^2,\quad a^3,\quad b,\quad ab,\quad a^2b,\quad a^3b.$$

إذن، G_1 و G_2 له رتبة على الأكثر 8. لأن G_1 زمرة من الرتبة 8 ، فيمكن رؤيته من التمرين 13، وبمناقشة شبيهة لتلك المستعملة في التمرين 13 تثبت أنّ G_2 لها رتبة 8 كذلك.

لأنّ $ba = a^3b \neq ab$ ، نرى أنّ G_1 و G_2 كليهما غير إبدالية؛ لأن الزمرتين غير متماثلتين، فينتج عن حقيقة أنّ الحسابات تثبت أنّ G_1 تحوي عنصرين فقط من الرتبة 4، وهما a و a^3. وعلى الجانب الآخر، في G_2 العناصر كلها عدا 1 و a^2 لها رتبة 4، حيث ندع حسابات الجداول لهاتين الزمرتين للتمرين 3. وللتوضيح، افترض أننا نودّ حساب $(a^2b)(a^3b)$، فباستخدام $ba = a^3b$ بصورة متكررة، نحصل على:

$$(a^2b)(a^3b) = a^2(ba)a^2b = a^5(ba)ab = a^8(ba)b = a^{11}b^2$$

إذن، نحصل في G_1 على:

$$a^{11}b^2 = a^{11} = a^3,$$

ولكن إذا كنا في G_2، فإننا نحصل على

$$a^{11}b^2 = a^{13} = a.$$

الزمرة G_1 هي **الزمرة الثمانية، (octic group)** وتماثل صديقتنا القديمة، الزمرة D_4 لتماثلات المربع، والزمرة G_2 هي **الزمرة المرباعية (quaternion group)**؛ إنها تماثل زمرة الضرب $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ للمرباعيات. نوقشت المرباعيات في الفصل 24. ▲

تمارين 40

حسابات

1. أعطِ تمثيلًا لـ $\mathbb{Z}_4$ يتضمّن مولدًا واحدًا؛ مولدين؛ ثلاثة مولدات.

2. أعطِ تمثيلاً لـ S_3 يتضمّن ثلاثة مولدات.

3. أعطِ الجداول للزمرة الثامنة.

$$(a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

والزمرة المرباعية

$$(a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b).$$

في كلتا الحالتين، اكتب العناصر على الترتيب $1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b$. لاحظ أننا لن نحتاج إلى حساب كل حاصل ضرب، نعلم أن هذين التمثيلين يعطيان زمرتين من الرتبة 8، وبمجرد أن نحسب عددًا كافيًا من حواصل الضرب، فإن البقية ستكون حتمًا أنَّ كل صف وكل عمود في الجدول يحوي العنصر مرة واحدة فقط).

4. عيّن الزمر جميعها من الرتبة 14 تبعًا للتماثل. [مساعدة: تتبع خطوات حل المثال 5.40، واستخدم التمرين 13، الفرع (ب)].

5. عيّن الزمر جميعها من الرتبة 21 تبعًا للتماثل. [مساعدة: تتبع خطوات حل المثال 5.40، واستخدم التمرين 13، الفرع (ب). قد يظهر أن هناك تمثيلين يعطيان زمرتين غير إبداليتين. أثبت أنهما متماثلتان].

مفاهيم

في التمرينين 6 و 7، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إن كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

6. النتيجة لمجموعة من العلائق، هي حاصل ضرب منتهٍ من العلائق مرفوعة لقوًى.

7. يكون تمثيلا زمرتين متماثلاً، إذا وفقط إذا وجد تقابل بين مولدات التمثيل الأول ومولدات الثاني، الذي ينتج – بعد إعادة تسمية المولدات – تقابلاً بين علائق التمثيل الأول مع تلك التي تخصّ الثاني.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. لكل زمرة تمثيل.

______ ب. لكل زمرة كثير من التمثيلات المختلفة.

______ ج. لكل زمرة تمثيلان غير متماثلين.

______ د. لكل زمرة تمثيل منتهٍ.

______ هـ. كل زمرة ذات تمثيل منتهٍ تكون ذات رتبة منتهية.

______ و. لكل زمرة دورية تمثيل بمولد واحد فقط.

______ ز. كل مرافق لعلائقي يكون نتيجة لعلائقي.

______ ح. أيّ تمثيلين بالعدد نفسه من المولدات يكونان دائمًا متماثلين.

______ ط. في تمثيل لزمرة إبدالية، مجموعة النتائج للعلائق تحوي الزمرة الجزئية لمبدلات زمرة حرة على المولات.

______ ي. في كل تمثيل لزمرة حرّة يكون الـ 1 العلائقي الوحيد.

براهين

استخدم طرق هذا الفصل والتمرين 13، الفرع (ب) في إثبات عدم وجود زمر غير إبدالية من الرتبة 15. (ارجع كذلك للمثال 10.37).

9. أثبت – مستخدمًا التمرين 13 – أنّ

$$(a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

يعطي زمرة من الرتبة 6. أثبت أنها غير إبدالية.

10. أثبت أنّ التمثيل

$$(a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

في التمرين 10 يعطي (تبعًا للتماثل) الزمرة غير الإبدالية الوحيدة من الرتبة 6، وبهذا يعطي زمرة تماثل S_3.

11. أثبتنا في المثال 6.15 أنّ A_4 لا تحوي زمرة جزئية من الرتبة 6، ويثبت التمرين السابق أنّ مثل هذه الزمرة الجزئية من A_4، ستكون مماثلة إما لـ $\mathbb{Z}_6$ أو S_3. أثبت أنّ هذا مستحيل آخذًا رتب العناصر في الحسبان.

12. لتكن:

$$S = \{a^i b^j \mid 0 \le i < m, 0 \le j < n\},$$

أي إنّ S تتألف من الضرب الشكلي $a^i b^j$ بدءًا بـ $a^0 b^0$ وانتهاءً بـ $a^{m-1} b^{n-1}$. ليكن r عددًا صحيحًا موجبًا، وعرّف الضرب على S بـ

$$(a^s b^t)(a^u b^v) = a^x b^y ,$$

حيث x باقي قسمة $s + u\,(r^t)$ على m، و y باقي قسمة $t + v$ على n، باستخدام خوارزمية القسمة (المبرهنة 3.6).

أ. أثبت أنّ الشرط الضروري والكافي لتحقق قانون التجميع و لـ S لتصبح زمرة مع هذا الضرب، أن تكون $r^n \equiv 1$ (مقياس m).

ب. استنتج من الفرع (أ) أنّ تمثيل الزمرة:

$$(a, b : a^m = 1, b^n = 1, ba = a^r b)$$

يعطي زمرة من الرتبة mn ، إذا وفقط إذا كان $r^n \equiv 1$ (مقياس m).

13. (انظر النبذة التاريخية في صفحة 449). أثبت أنه إذا كان $n = pq$، حيث p و q عددان أوليّان و $q > p$ و $q \equiv 1$ (مقياس p) فتوجد بالضبط زمرة غير إبدالية واحدة (تبعًا للتماثل) من الرتبة n. تذكر أنّ $q - 1$ عنصر غير صفري في $\mathbb{Z}_q$ يولد زمرة دورية $\mathbb{Z}^*_q$ مع الضرب مقياس q. [مساعدة: تشكل حلول $x^p \equiv 1$ (مقياس q) زمرة جزئية من $\mathbb{Z}^*_q$ ذات عناصر $1, r, r^2, \ldots, r^{p-1}$. في الزمرة ذات التمثيل $(a, b : a^q = 1, b^p = 1, ba = a^r b)$ ، نحصل على $bab^{-1} = a^r$، وبهذا يكون $b^j a b^{-j} = a^{(r^j)}$؛ إذن، ولأنّ b^j تولد $\langle b \rangle$ لـ $j = 1, \cdots, p-1$، وهذا التمثيل يماثل

$$(a, b^j : a^q = 1, (b^j)^p = 1, (b^j)a = a^{(r^j)}(b^j)),$$

إذن، التمثيلات $(a, b : a^q = 1, b^p = 1, ba = a^{(r^j)} b)$ كلها متماثلة].