الوحدة الثالثة

التشاكلات وزمر العامل
Homomorphisms and Factor Groups

1– الفصل 16 متطلب سابق للفصلين 17 و 36 فقط.

2– الفصل 17 ليس متطلبًا سابقًا لما بقي من الكتاب.

الفصل 13 التشاكلات Homomorphisms

دوال ربط البنية

لتكن G و G' زمرتين، سوف نهتم بالدوال من G إلى G' التي تربط بنية الزمرة G ببنية الزمرة G'، فدالة كهذه تعطينا عادة معلومات عن إحدى الزمرتين من خلال معرفة خصائص بنيوية للأخرى، وتماثل $\phi: G \to G'$ – إن وجد – هو مثال على دالة ربط البنية، فإذا علمنا كل شيء عن الزمرة G، وعلمنا إنّ ϕ تماثل، فإننا نعلم بصورة مباشرة كل شيء عن بنية الزمرة G'؛ لأنها من ناحية بنائية نسخة عن G. سنناقش الآن دوال ربط البنية بصورة أكثر تعميمًا، بإضعاف بعض من شروط التماثل، بعدم اشتراط أن تكون الدوال أحادية وغامرة، فالشروط هي الجزء البحت لمبرهنة المجموعات في تعريفنا للتماثل، ولا تمت بصلة للعمليات الثنائية على G وG'، فالعمليات الثنائية تعطينا الجبر، وهي بؤرة دراستنا في هذا الكتاب، وسنبقي في تعريفنا خاصية واحدة فقط من خصائص التماثل، وهي التشاكل؛ لارتباطها بالعمليات الثنائية.

1.13 تعريف الدالة ϕ من الزمرة G إلى الزمرة G' هي **تشاكل (homomorphism)**، إذا تحققت خاصية التشاكل

$$\phi(a\,b) = \phi(a)\,\phi(b) \qquad (1)$$

لكل $a, b \in G$. ■

لنفحص الفكرة وراء المطلوب (1) للتشاكل $\phi: G \to G'$. في المعادلة (1) يحدث الضرب ab في الطرف الأيسر في G، بينما يحدث الضرب $\phi(a)\,\phi(b)$ في الطرف الأيمن في G'؛ ولهذا تعطي المعادلة (1) علاقة بين هاتين العمليتين الثنائيتين، وعليه، بين بنيتي الزمرتين.

لأي زمرتين G و G' يوجد تشاكل واحد على الأقل $\phi: G \to G'$، يسمّى **التشاكل التافه (trivial homomorphism)**، والمعرف بـ $\phi(g) = e'$ لكل $g \in G$، حيث إنّ e' هو العنصر المحايد في G'، وتؤول المعادلة (1) إلى المعادلة الصحيحة $e' = e'e'$، وباستخدام هذا التشاكل التافه، فلا توجد معلومات عن بنية G أو G' يمكن الحصول عليها من الزمرة الأخرى، والمثال الآتي يبيّن كيف إنّ تشاكل ϕ يرسل G بصورة غامرة إلى G'، يمكن أن يعطي معلومات عن بنية G'.

2.13 مثال ليكن $\phi : G \to G'$ تشاكلًا غامرًا من الزمرة G إلى G'، سنبرهن أنه إذا كانت G إبدالية، فإن G' إبدالية. ليكن $a', b' \in G'$ يجب أن نثبت إنّ $a'b' = b'a'$؛ لإنّ ϕ غامر لـ G'، يوجد $a,b \in G$، حيث إنّ: $\phi(a) = a'$ و $\phi(b) = b'$؛ ولإنّ G إبدالية، نحصل على $ab = ba$، وباستخدام الخاصية (1) نحصل على

$a'b' = \phi(a)\,\phi(b) = \phi(ab) = \phi(ba) = \phi(b)\phi(a) = b'a'$، وعليه، فإنّ G' إبدالية. ▲

سوف يبين المثال 16.13 كيف إنّ معلومات عن G' يمكن أن تعطي معلومات عن G وذلك من خلال تشاكل $\phi: G \to G'$. وفيما يأتي أمثلة على تشاكلات لبعض الزمر:

مثال 3.13 لتكن S_n زمرة التناظر على n حرف، وليكن $\phi: S_n \to \mathbb{Z}_2$ معرّف بـ:

$$\phi(\sigma)=\begin{cases}0 & \text{إذا كان } \sigma \text{ تبديلًا زوجيًا} \\ 1 & \text{إذا كان } \sigma \text{ تبديلًا فرديًا}\end{cases}$$

أثبت إنّ ϕ تشاكل.

الحلّ يجب أن نثبت أنّ $\phi(\sigma\mu) = \phi(\sigma) + \phi(\mu)$ لكل $\sigma,\mu \in S_n$، لاحظ إنّ العملية في الجهة اليمنى من هذه المعادلة كتبت بالجمع؛ لأنها تحدث في الزمرة $\mathbb{Z}_2$. يمكن إثبات صحة هذه المعادلة بفحص أربع حالاتٍ فقط، هي:

σ فردي و μ فردي .

σ فردي و μ زوجي .

σ زوجي و μ فردي .

σ زوجي و μ زوجي .

بفحص الحالة الأولى، إذا كان بالإمكان كتابة كل من σ و μ بصورة ضرب عدد فردي من المناقلات، فيمكن كتابة $\sigma\mu$ بصورة ضرب عدد زوجي من المناقلات، وعليه، $\phi(\sigma\mu) = 0$ و $\phi(\sigma) + \phi(\mu) = 1+1 = 0$ في $\mathbb{Z}_2$.

باقي الحالات يمكن فحصها بصورة مشابهة. ▲

مثال 4.13 (**تشاكل التعويض**): لتكن F زمرة الجمع لكل الدوال من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن c أي عدد حقيقي، ليكن $\phi_c: F \to \mathbb{R}$ تشاكل التعويض **(evaluation homomorphism)** المعرّف بـ $\phi_c(f) = f(c)$ لـ $f \in F$، تذكر– من التعريف – إنّ جمع دالتين f و g هو الدالة $f + g$، التي قيمتها عند x هي $f(x) + g(x)$ وعليه، لدينا

$$\phi_c(f+g) = (f+g)(c) = f(c) + g(c) = \phi_c(f) + \phi_c(g),$$

وتحققت المعادلة (1)، وهكذا، فإنّ لدينا تشاكلًا. ▲

مثال 5.13 لتكن $\mathbb{R}^n$ زمرة الجمع لمتجهات عمود من الرتبة n بإحداثيات حقيقية، (هذه الزمرة تماثل بالتأكيد الضرب المباشر لـ $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع مع نفسها لـ n عامل). لتكن A مصفوفة من الدرجة $m \times n$ لأعداد حقيقية، ولتكن $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ معرّفة بـ $\phi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ لكل متجه عمود $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$، عندئذ تكون ϕ تشاكلًا؛ لأن لـ $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$، يبين جبر المصفوفات إنّ $\phi(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = \phi(v) + \phi(w)$ في الجبر الخطي – دالة كهذه حُسبت بوصفها ضرب متجه عمود من اليسار بمصفوفة A – تعرف بوصفها **تحويلًا خطيًّا (linear transformation)**. ▲

مثال 6.13 لتكن $GL(n,\mathbb{R})$ زمرة الضرب لكل المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$، تذكر إنّ المصفوفة A ذات معكوس إذا وفقط إذا كانت محددتها – $det(A)$ – ليست صفرًا، وتذكر أيضًا إنّ لمصفوفتين $A,B \in GL(n,\mathbb{R})$ لدينا

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

وهذه تعني إنّ المحددة هي تشاكل يرسل $GL(n,\mathbb{R})$ إلى زمرة الضرب $\mathbb{R}^*$ للأعداد الحقيقية غير الصفرية. ▲

التشاكلات من الزمرة G إلى نفسها عادة تكون مفيدة في دراسة بنية G، ومثالنا الآتي يعطي مثالاً غير تافهٍ لتشاكل من زمرة إلى نفسها.

مثال 7.13 ليكن $r \in \mathbb{Z}$، وليكن $\phi_r: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ معرّف بـِ $\phi_r(n) = rn$ لكل $n \in \mathbb{Z}$. لكل $m,n \in \mathbb{Z}$ لدينا $\phi_r(m+n) = r(m+n) = rm + rn = \phi_r(m) + \phi_r(n)$ وعليه فإن ϕ_r تشاكل. لاحظ إنّ ϕ_0 هو التشاكل التافه، و ϕ_1 هو الدالة المحايدة، و ϕ_{-1} يرسل $\mathbb{Z}$ بصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}$، ولكل r أخرى من $\mathbb{Z}$، الدالة ϕ_r ليست غامرة لـِ $\mathbb{Z}$. ▲

مثال 8.13 لتكن $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_i \times \cdots \times G_n$ ضربًا مباشرًا لزمرٍ، **دالة الإسقاط (projection map)** $\pi_i: G \to G_i$ بحيث إنّ $\pi_i(g_1, g_2, ..., g_i, ..., g_n) = g_i$ هي تشاكل لكل $i = 1, 2, ..., n$. وهي تَنْتُج مباشرة من حقيقة إنّ العملية الثنائية على G تتطابق في المركبة ذات الترتيب i مع العملية الثنائية على G_i. ▲

مثال 9.13 لتكن F زمرة الجمع للدوال المتصلة على المجال $[0,1]$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية. الدالة $\sigma: F \to \mathbb{R}$ المعرفة بـ $\sigma(f) = \int_0^1 f(x)dx$ لكل $f \in F$ هي تشاكل؛ لإنّ:

$$\sigma(f+g) = \int_0^1 (f+g)(x)dx = \int_0^1 [f(x) + g(x)]dx$$
$$= \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = \sigma(f) + \sigma(g)$$

لكل $f,g \in F$. ▲

مثال 10.13 (**الاختصار مقياس** n): لتكن γ الدالة الطبيعية من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_n$ المعطاة بـ $\gamma(m) = r$، حيث r هو الباقي المعطى من خلال خوارزمية القسمة عند قسمة m على n. أثبت إنَّ γ تشاكل.

الحل نحتاج إلى أن نثبت إنّ:

$$\gamma(s+t) = \gamma(s) + \gamma(t)$$

لكل $s,t \in \mathbb{Z}$. باستخدام خوارزمية القسمة، ليكن:

$$s = q_1 n + r_1 \tag{2}$$

و

$$t = q_2 n + r_2 \tag{3}$$

حيث $0 \le r_i < n$ لـِ $i = 1,2$. إذا كان

$$r_1 + r_2 = q_3 n + r_3 \tag{4}$$

لـِ $0 \le r_3 < n$، فبجمع المعادلتين (2) و (3) نرى إنّ:

$$s + t = (q_1 + q_2 + q_3)n + r_3,$$

وهكذا $\gamma(s+t) = r_3$

ونرى من المعادلتين (2) و (3) أن $\gamma(s) = r_1$ و $\gamma(t) = r_2$، أمّا المعادلة (4) فتبيّن إنّ المجموع $r_1 + r_2$ في $\mathbb{Z}_n$ يساوي r_3 أيضًا.

بناءً على ذلك، فإنّ $\gamma(s+t) = \gamma(s) + \gamma(t)$ وهكذا فإنّ لدينا تشاكلًا. ▲

كلٌّ من التشاكلات في الأمثلة الثلاثة السابقة هي دوال متعدد – لواحد، أي إنّ نقاطًا مختلفة في مجال الدالة يمكن أن ترسل إلى النقطة نفسها، وللتوضيح، ليكن التشاكل $\pi_1: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ المعرّف في المثال 8.13، فلدينا:

$$\pi_1(0,0) = \pi_1(0,1) = \pi_1(0,2) = \pi_1(0,3) = 0$$

وعليه، فإن أربعة عناصر في $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ أرسلت إلى 0 في $\mathbb{Z}_2$ من خلال π_1.

تركيب تشاكلات الزمر هو أيضًا تشاكل زمر، أي إنه إذا كان $\phi: G \to G'$ و $\gamma: G' \to G''$ كلاهما تشاكل زمر، فإنّ تركيبهما- $(\gamma \circ \phi): G \to G''$ حيث $(\gamma \circ \phi)(g) = \gamma(\phi(g))$ لـِ $g \in G$، هو تشاكل أيضًا. (انظر التمرين 49).

خصائص التشاكلات

ننتقل إلى بعض المزايا البنائية لـِ G و G' المحفوظة من خلال التشاكل $\phi: G \to G'$، ونراجع أولاً تعريفات مبرهنة المجموعات، لاحظ استخدام الأقواس المربعة عند تطبيق دالة على مجموعة جزئية من مجالها.

11.13 تعريف لتكن ϕ دالة من المجموعة X إلى المجموعة Y، ولتكن $A \subseteq X$ و $B \subseteq Y$، **الصورة** $\phi[A]$ **لـِ** A **في** Y **بالنسبة إلى** ϕ **(image $\phi[A]$ of A in Y under ϕ)** هي $\{\phi(a) \mid a \in A\}$، والمجموعة $\phi[X]$ هي **المدى (range)** لـِ ϕ، **ومعكوس الصورة** $\phi^{-1}[B]$ لـِ B **في** X **(inverse image)** هو $\{x \in X \mid \phi(x) \in B\}$ ■

الخصائص الثلاثة الأولى للتشاكل التي ستذكر في المبرهنة الآتية قابلت مصادفة الحالات الخاصة للتماثل المذكورة في: المبرهنة 14.3، والتمرين 28 للفصل 4 والتمرين 41 للفصل 5، كانت الخصائص في هذه الحالات الخاصة حقيقة واضحة؛ لإنّ بنيتي G و G' متطابقتان، سوف نرى إنّ هذه الشروط تتحقق لدوال ربط البنية للزمر، حتى إن كانت الدوال ليست أحادية وغامرة، لم نناقش هذه الشروط على نحوٍ واضح في هذا السياق الجديد.

12.13 مبرهنة ليكن ϕ تشاكلاً من الزمرة G إلى الزمرة G':

1. إذا كان e هو العنصر المحايد في G، فإنّ $\phi(e)$ هو العنصر المحايد e' في G'.

2. إذا كان $a \in G$، فإنّ $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$.

3. إذا كانت H زمرة جزئية من G، فإنّ $\phi[H]$ زمرة جزئية من G'.

4. إذا كانت K' زمرة جزئية من G'، فإنّ $\phi^{-1}[K']$ زمرة جزئية من G.

بعبارة مختصرة، ϕ تحفظ العنصر المحايد، المعكوسات والزمر الجزئية.

البرهان ليكن ϕ تشاكلاً من G إلى G'، عندئذٍ:

$$\phi(a) = \phi(ae) = \phi(a)\phi(e)$$

بضرب الطرف الأيسر بـ $\phi(a)^{-1}$ نرى أن $e' = \phi(e)$، وعليه، $\phi(e)$ يجب أن يكون العنصر المحايد e' في G'. تبين المعادلة:

$$e' = \phi(e) = \phi(aa^{-1}) = \phi(a)\,\phi(a^{-1})$$

إنّ $\phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}$

بالانتقال إلى العبارة (3)، لتكن H زمرة جزئية من G، وليكن $\phi(a)$ و $\phi(b)$ أي عنصرين في $\phi[H]$، فإنّ $\phi(a)\phi(b) = \phi(ab)$، وهكذا نرى أن $\phi(a)\phi(b) \in \phi[H]$؛ إذن، $\phi[H]$ مغلقة بالنسبة إلى العملية على G'، والحقيقة $e' = \phi(e)$ و $\phi(a^{-1}) = \phi(a^{-1})$ تكمل برهان إنّ $\phi[H]$ زمرة جزئية من G'.

وأما الاتجاه الآخر –أي العبارة (4) – فلتكن K' زمرة جزئية من G'، افترض إنّ a وb في $\phi^{-1}[K']$، عندئذ $\phi(a)\phi(b) \in K'$؛ لأن K' زمرة جزئية، تبين المعادلة: $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ إنّ $ab \in \phi^{-1}[K']$، وعليه، $\phi^{-1}[K']$ مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائية على G، يجب أن تحوي K' أيضًا العنصر المحايد، $e' = \phi(e)$ وعليه، $e \in \phi^{-1}[K']$، وإذا كان $a \in \phi^{-1}[K']$. فإنّ $\phi(a) \in K'$، وعليه، $\phi(a)^{-1} \in K'$ ، لكن $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$؛ لذا، يجب أن نحصل على $a^{-1} \in \phi^{-1}[K']$ ومن ثم $\phi^{-1}[K']$ زمرة جزئية من G. ♦

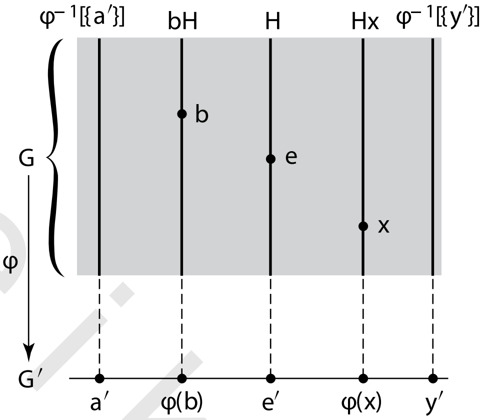
ليكن $\phi\colon G \to G'$ تشاكل زمر، وليكن e' هو العنصر المحايد في G'، الآن $\{e'\}$ زمرة جزئية من G'، إذن $\phi^{-1}[\{e'\}]$ زمرة جزئية H من G من خلال العبارة (4) في المبرهنة (12.13)، الزمرة الجزئية هذه حاسمة في دراسة التشاكلات.

13.13 تعريف ليكن $\phi\colon G \to G'$ تشاكل زمر، الزمرة الجزئية $\phi^{-1}[\{e'\}] = \{x \in G \mid \phi(x) = e'\}$ هي **النواة** لِـ **(Kernel of)** f، ويرمز لها بِـ $Ker(\phi)$. ■

ناقش المثال 5.13 التشاكل $\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ المعطى بِـ $\phi(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$، حيث إنّ A مصفوفة من الدرجة $m \times n$، يسمى $Ker(\phi)$ في هذا السياق الفضاء الصفري لـ A؛ لأنه يتألف من كل $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$، حيث إنّ $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$، المتجه الصفري.

لتكن $H = Ker(\phi)$ لتشاكل $\phi\colon G \to G'$، ونفكر في ϕ "بوصفه طَيًّا (Collapsing) لـــ H بصورة غامرة إلى e'، تبين المبرهنة 15.13 الآتية إنّ مجموعتي المشاركة gH و Hg لـــ $g \in G$، هما الشيء نفسه، وقد طويتا بصورة غامرة إلى العنصر الوحيد $\phi(g)$ من خلال ϕ، أي إنّ $\phi^{-1}[\{\phi(g)\}] = gH = Hg$، (تأكد من أنك تفهم سبب استخدام ()، [ ] و{ } في $(\phi^{-1}[\{\phi(g)\}])$، وقد حاولنا أن نرمز لهذا الطي في الشكل 14.13، حيث إنّ المستطيل المظلل يمثل G، وتمثل القطع المستقيمة العمودية غير المقطعة مجموعات المشاركة لـــ $H = Ker(\phi)$، أمّا الخط الأفقي في الأسفل فيمثل G'، ننظر إلى ϕ بوصفه إسقاطًا لعناصر G–التي هي في

المستطيل المظلل – مباشرة إلى الأسفل وبصورة غامرة لعناصر G'، والتي هي على القطعة المستقيمة الأفقية في الأسفل، لاحظ السهم المتجه إلى الأسفل المُرَمَّز بـ ϕ من اليسار، والمبتدئ بـ G والمنتهي بـ G'؛ إذن، تقع عناصر $H = Ker\,(\phi)$ على القطعة المستقيمة العمودية غير المقطعة في الصندوق المظلل الواقعة إلى الأعلى من e'، مثلما رمز لها في أعلى الشكل.



الشكل 14.13 مجموعات المشاركة لـ H طويت بـ ϕ

15.13 مبرهنة ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر، ولتكن $H = Ker\,(\phi)$، وليكن $a \in G$، عندئذٍ المجموعة

$$\phi^{-1}[\{\phi(a)\}] = \{x \in G|\ \phi(x) = \phi(a)\}$$

هي مجموعة المشاركة اليسرى aH لـ H، وهي أيضًا مجموعة المشاركة اليمنى Ha لـ H، بناءً على ذلك، تكون التجزئتان لـ G إلى مجموعات مشاركة يسرى ومجموعات مشاركة يمنى لـ H، هما الشيء نفسه.

البرهان نريد إثبات إنّ:

$$\{x \in G|\ \phi(x) = \phi(a)\} = aH$$

توجد طريقة قياسية لإثبات إنّ مجموعتين متساويتان؛ أثبت إنّ كلًّا منهما مجموعة جزئية من الأخرى.

افترض إنّ $\phi(x) = \phi(a)$، عندئذٍ:

$$\phi(a)^{-1}\,\phi(x) = e'$$

حيث إنّ e' هو العنصر المحايد في G'، نعرف من خلال المبرهنة 12.13 إنّ $\phi(a)^{-1} = \phi(a^{-1})$، وهكذا لدينا

$$\phi(a^{-1})\phi(x) = e'.$$

لإنّ ϕ تشاكلاً، ولدينا:

$\phi(a^{-1})\phi(x) = \phi(a^{-1}x)$. فإن $\phi(a^{-1}x) = e'$.

لكنها تبين إنّ $a^{-1}x$ في $H = Ker\,(\phi)$، وهكذا $a^{-1}x = h$ لعنصر ما $h \in H$ و $x = ah \in aH$

وهذه تبين إنّ:

$$\{x \in G |\ \phi(x)= \phi(a)\} \subseteq aH.$$

لإثبات الاحتواء في الاتجاه الآخر، لتكن $y \in aH$ وعليه $y = ah$ لعنصرٍ ما $h \in H$، عندئذٍ:

$$\phi(y) = \phi(ah) = \phi(a)\,\phi(h) = \phi(a)e' = \phi(a),$$

إذن ، $y \in \{x \in G | \phi(x) = \phi(a)\}$.

تركنا البرهان المشابه لـِ $\{x \in G |\ \phi(x) = \phi(a)\} = Ha$ للتمرين (52). ♦

مثال 16.13 تبين المعادلة الخامسة من الفصل الأول إنّ: $|z_1\ z_2| = |z_1||z_2|$ للعددين المركبين z_1 و z_2، وهذا يعني إنّ دالة القيمة المطلقة $|\ |$ تشاكل من الزمرة $\mathbb{C}^*$ – للأعداد المركبة غير الصفرية بالنسبة إلى الضرب – وبصورة غامرة إلى الزمرة $\mathbb{R}^+$ – للأعداد الحقيقية الموجبة بالنسبة إلى الضرب؛ لإنّ $\{1\}$ زمرة جزئية من $\mathbb{R}^+$، تبين المبرهنة 12.13 – مرة أخرى – إنّ الأعداد المركبة بالمقدار 1 تمثل زمرة جزئية U من $\mathbb{C}^*$، تذكر إنّ الأعداد المركبة يمكن أن ينظر إليها بوصفها مائلة للمستوى الديكارتي، وإنّ مقدار العدد المركب هو المسافة بينه وبين نقطة الأصل، بناءً على ذلك، فإن مجموعات المشاركة لـِ U هي دوائر مركزها نقطة الأصل، ومن خلال هذا التشاكل، فإنّ كل دائرة طويت وبصورة غامرة لنقطة تقاطعها مع محور السينات الموجب. ▲

فيما يأتي توضيح للمبرهنة 15.13 من التفاضل:

مثال 17.13 لتكن D زمرة الجمع للدوال القابلة للاشتقاق التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن F زمرة الجمع للدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$. عندئذ، يعطينا الاشتقاق دالة $\phi: D \to F$ حيث $\phi(f) = f'$ لـِ $f \in F$. نرى بسهولة إنّ ϕ تشاكلٌ؛ لإنّ $\phi(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \phi(f) + \phi(g)$ مشتقة الجمع هي جمع المشتقات.

الآن $Ker\ (\phi)$ يتألف من الدوال f جميعها، حيث إنّ $f' = 0$ –الدالة الثابتة الصفرية–، وعليه فإن $Ker\ (\phi)$ يتألف من الدوال الثابتة جميعها، التي تشكل زمرة جزئية C من F، لنجد الدوال جميعها في D، التي يرسلها ϕ إلى x^2، أي الدوال جميعها التي مشتقتها هي x^2، نعرف الآن إنّ $x^3/3$ هي إحدى هذه الدوال، ومن خلال المبرهنة 15.13 الدوال جميعها في هذه الحالة تشكل مجموعة المشاركة $x^3/3 + C$. هل تبدو هذه مألوفة؟ ▲

سنستخدم عادة النتيجة الآتية من المبرهنة 15.13:

18.13 نتيجة تشاكل الزمر $\phi: G \to G'$ هو دالة أحادية إذا وفقط إذا كان $Ker\ (\phi) = \{e\}$.

البرهان إذا كان $Ker\ (\phi) = \{e\}$، فإنّ العناصر المرسلة إلى $\phi(a)$ لأي $a \in G$، هي بالضبط عناصر مجموعة المشاركة اليسرى $a\{e\} = \{a\}$، التي تُبَيِّن إنّ ϕ أُحادي.

في المقابل، افترض إنّ ϕ أحادي، نعلم من خلال المبرهنة 12.13 إنّ $\phi(e) = e'$ العنصر المحايد في G'. لإنّ ϕ أحادي، نرى إنّ e هو العنصر الوحيد المرسل إلى e' من خلال ϕ، وعليه $Ker(\phi) = \{e\}$. ♦

بالنظر إلى النتيجة 18.13 عُدّل المخطط التمهيدي المعطى قبل المثال 8.3 لإثبات إنّ دالة ϕ تماثل بنَى ثنائية، وذلك عندما تكون البنَى زمرتين G و G'.

لإثبات إنّ $\phi: G \to G'$ تماثل
الخطوة 1. أثبت إنّ ϕ تشاكل.
الخطوة 2. أثبت إنّ $Ker\ (\phi) = \{e\}$.
الخطوة 3. أثبت إنّ ϕترسل G بصورة غامرة إلى G'.

بيّنت المبرهنة 15.13 إنّ نواة تشاكل الزمر$\phi: G \to G'$ هي زمرة جزئية H من G، التي مجموعات مشاركتها اليسرى واليمنى متطابقة، وعليه، $gH = Hg$ لكل $g \in G$. سنرى في الفصل 14 أنه عندما تتطابق مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى، فيمكننا تشكيل زمرة مجموعات مشاركة، كما نوقشت بصورة بدهية في الفصل 10، إضافة إلى ذلك، سنرى إنّ H ستظهر وبطريقة طبيعية بوصفها نواة تشاكل لـ G وبصورة غامرة لهذه الزمرة من مجموعات المشاركة، وتعدّ مثل تلك الزمرة الجزئية H، التي تتطابق مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لها، مفيدة جدًا في دراسة الزمر، وَسَتُعْطى اسمًا خاصًا، وسوف نتعامل معها كثيرًا في الفصل 14.

■ نبذة تاريخية

قُدِّمت الزمر الجزئية الناظمية من قبل إيفرست جالوا **(Evariste Galois)** عام 1831م بوصفها وسيلة للحكم فيما إذا كانت معادلة كثيرة حدود قابلة للحل عن طريق الجذور، فقد لاحظ جالوا إنّ الزمرة الجزئية H لزمرة تباديل G، أحدثت تحليلين لـ G، وهما ما نسميهما مجموعات المشاركة اليسرى ومجموعات المشاركة اليمنى، فإذا تطابق التحليلان – أي إنّ مجموعات المشاركة اليسرى هي مجموعات المشاركة اليمنى نفسها – فيسمي جالوا التحليل فعليًا، وعليه، فإنّ الزمرة الجزئية التي تعطي تحليلاً فعليًا هي التي نطلق عليها الزمرة الجزئية الناظمية، وقد ذكر جالوا، أنه إذا كانت زمرة تباديل الجذور لمعادلة لها تحليل فعلي، فيمكننا حلّ المعادلة المعطاة إذا استطعنا أولاً حل معادلةٍ تقابل الزمرة الجزئية H، ثمَّ معادلة تقابل مجموعات المشاركة.

توسع كامايل جوردن **(Camille Jordan)** في هذه الأفكار إلى حدٍّ بعيد في تعليقاته على عمل جالوا عامي 1865م و 1869م، فقد عَرَّف هو أيضًا الزمر الجزئية الناظمية، على الرغم من عدم استخدامه للمصطلح بصورة أساسية مثلما هو في هذه الصفحة، وأعطى بطريقة مماثلة أول تعريف للزمرة البسيطة (صفحة 149).

19.13 تعريف الزمرة الجزئية H من زمرة G **ناظمية (normal)**، إذا كانت مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى متطابقة، أي إنّ $gH = Hg$ لكل $g \in G$. ■

لاحظ إنّ الزمر الجزئية للزمر الإبدالية جميعها ناظمية.

20.13 نتيجة إذا كان $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر، فإنّ $Ker\,(\phi)$ زمرة جزئية ناظمية من G.

البرهان هذه تنتج مباشرة من الجملة الأخيرة في نصّ المبرهنة 15.13 ومن التعريف 19.13. ♦

لأي تشاكل زمر $\phi: G \to G'$، شيئان لهما أهمية أولية، هما: نواة ϕ، والصورة $\phi[G]$ لـِ G في G'، وقد أظهرنا أهمية $Ker\,(\phi)$، وسوف يشير الفصل 14 إلى أهمية الصورة $\phi[G]$، حيث يطلب التمرين 44 إثبات أنه إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ $|\phi[G]|$ منتهٍ وقاسم لـِ $|G|$.

■ تمارين 13

حسابات

في التمارين من 1 إلى 15، حدد فيما إذا كانت الدالة المعطاة ϕ تشاكلًا، (مساعدة: الطريق المباشر للاستمرار هو بفحص فيما إذا كان $\phi(ab) = \phi(a)\,\phi(b)$ لكل a و b في مجال ϕ، على أي حال، إن حصل ولاحظنا إنّ الزمرة الجزئية $\phi^{-1}[\{e'\}]$ لا تتطابق فيها مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى، أو إنّ ϕ لا تحقق الخصائص المعطاة في التمرين (44 أو 45) للزمر المنتهية، فإنه يمكننا أن نقول مباشرة إنّ ϕ ليست تشاكلًا) .

1. ليكن $\phi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع معطًى بـِ $\phi(n) = n$.

2. ليكن $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع معطًى بـِ $\phi(x) =$ أكبر عدد صحيح $\leq x$.

3. ليكن $\phi: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب معطًى بـِ $\phi(x) = |x|$.

4. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ معطًى بـِ $\phi(x) =$ باقي قسمة x على 2، مثلما في خوارزمية القسمة.

5. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_9 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ معطًى بـِ $\phi(x) =$ باقي قسمة x على 2، مثلما في خوارزمية القسمة.

6. ليكن $\phi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ حيث إنّ $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع و $\mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب معطًى بـِ $\phi(x) = 2^x$.

7. ليكن $\phi_i: G_i \longrightarrow G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_i \times \ldots \times G_r$ معطًى بـِ $\phi_i(g_i) = (e_1, e_2, \ldots, g_i, \ldots, e_r)$. حيث إنّ $g_i \in G_i$ و e_j هو العنصر المحايد في G_j، هذه هي دالة أحادية **(injection map)**، قارن بمثال (8.13).

8. لتكن G أي زمرة، وليكن $\phi: G \to G$ معطًى بـِ $\phi(g) = g^{-1}$، لـِ $g \in G$.

9. لتكن F زمرة الجمع للدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، والتي لها مشتقات من الرتب كلها، وليكن $\phi: F \to F$ معطًى بـِ $\phi(f) = f''$ – المشتقة الثانية لـِ f.

10. لتكن F زمرة الجمع لجميع الدوال المتصلة التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن $\phi: F \to \mathbb{R}$ معطًى بـِ

$$\phi(f) = \int_0^4 f(x)\,dx.$$

11. لتكن F زمرة الجمع لجميع الدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، وليكن $\phi: F \to F$ معطًى بـِ $\phi(f) = 3f$.

12. لتكن M_n زمرة الجمع للمصفوفات من الدرجة $n \times n$ بمدخلات حقيقية، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن $\phi(A) = det\,(A)$، محددة A لـ $A \in M_n$.

13. لتكن M_n و $\mathbb{R}$ مثلما في التمرين 12، وليكن $\phi(A) = \mathrm{tr}\,(A)$ لـ $A \in M_n$، حيث إنّ **الأثر (trace)** $\mathrm{tr}(A)$، هو مجموع العناصر على القطر الرئيس لـ A، من أعلى اليسار إلى زاوية أسفل اليمين.

14. لتكن $GL\,(n, \mathbb{R})$ زمرة الضرب للمصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$، ولتكن $\mathbb{R}$ زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، وليكن $\phi: GL\,(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ معطًى بـ $\phi(A) = \mathrm{tr}\,(A)$، حيث عُرِّفَ $\mathrm{tr}\,(A)$ في التمرين 13.

15. لتكن F زمرة الضرب للدوال المتصلة كلها التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، والتي لا تكون صفرًا عند أي $x \in \mathbb{R}$، ولتكن $\mathbb{R}^*$ زمرة الضرب للأعداد الحقيقية غير الصفرية، وليكن $\phi: F \longrightarrow \mathbb{R}^*$ معطًى بـ $\phi(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

في التمارين من 16 إلى 24، احسب الكميات المحددة للتشاكل المعطى ϕ. (انظر التمرين 46).

16. $Ker\,(\phi)$ لـ $\phi: S_3 \to \mathbb{Z}_2$ في المثال 3.13.

17. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(25)$ لـ $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_7$ حيث إنّ $\phi(1) = 4$.

18. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(18)$ لـ $\phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{10}$ حيث إنّ $\phi(1) = 6$.

19. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(20)$ لـ $\phi: \mathbb{Z} \to S_8$ حيث إنّ $\phi(1) = (1,4,2,6)(2,5,7)$.

20. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(3)$ لـ $\phi: \mathbb{Z}_{10} \to \mathbb{Z}_{20}$ حيث إنّ $\phi(1) = 8$.

21. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(14)$ لـ $\phi: \mathbb{Z}_{24} \to S_8$ حيث إنّ $\phi(1) = (2,5)(1,4,6,7)$.

22. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(-3,2)$ لـ $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ حيث إنّ $\phi(1,0) = 3$ و $\phi(0,1) = -5$.

23. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(4,6)$ لـ $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ حيث إنّ $\phi(1,0) = (2,-3)$ و $\phi(0,1) = (-1,5)$.

24. $Ker\,(\phi)$ و $\phi(3,10)$ لـ $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to S_{10}$، حيث إنّ $\phi(1,0) = (3,5)(2,4)$ و $\phi(0,1) = (1,7)(6, 10, 8, 9)$.

25. كم تشاكلًا يوجد من $\mathbb{Z}$ وبصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}$؟

26. كم تشاكلًا يوجد من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}$؟

27. كم تشاكلًا يوجد من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}_2$؟

28. لتكن G زمرة، وليكن $g \in G$، وليكن $\phi_g: G \to G$ معرفًا بـ $\phi_g(x) = gx$ لـ $x \in G$. لأي $g \in G$، ϕ_g تشاكل؟

29. لتكن G زمرة، وليكن $g \in G$، وليكن $\phi_g: G \to G$ معرفًا بـ $\phi_g(x) = gxg^{-1}$ لـ $x \in G$. لأي $g \in G$، ϕ_g تشاكل؟

مفاهيم

في التمرينين 30 و31 صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب- هذا إن كانت هناك حاجة إلى التصحيح - بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

30. *التشاكل* هو دالة، حيث إنّ $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

31. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكلاً لزمر. *النواة* لـ ϕ هي $\{x \in G \mid \phi(x) = e'\}$، حيث إنّ e' هو المحايد

في G'.

32. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. A_n زمرة جزئية ناظمية من S_n.

________ ب. لأي زمرتين G و G' يوجد تشاكل من G إلى G'.

________ جـ. كل تشاكل هو أحادي.

________ د. التشاكل هو أحادي إذا وفقط إذا كانت نواته تتألف فقط من العنصر المحايد.

________ هـ. الصورة لزمرة من 6 عناصر بالنسبة إلى تشاكل ما يمكن أن تتألف من 4 عناصر. (انظر التمرين 44).

________ و. الصورة لزمرة من 6 عناصر بالنسبة إلى تشاكل ما يمكن أن تتألف من 12 عنصرًا.

________ ز. يوجد تشاكل لزمرة ما من 6 عناصر إلى زمرة ما من 12 عنصرًا.

________ ح. يوجد تشاكل لزمرة ما من 6 عناصر إلى زمرة ما من 10 عناصر.

________ ط. يمكن أن تكون نواة التشاكل فارغة.

________ ي. من غير الممكن أن يكون لدينا تشاكل غير تافه لزمرة ما منتهية إلى زمرة ما غير منتهية.

في التمارين من 33 إلى 43، أعطِ مثالًا لتشاكلٍ غير تافه ϕ للزمر المعطاة، إذا توافر مثالٌ. إذا لم يتوافر تشاكل كهذا، ففسّر سبب ذلك، يمكنك استخدام التمرينين 44 و 45.

33. $\phi: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$

34. $\phi: \mathbb{Z}_{12} \longrightarrow \mathbb{Z}_4$

35. $\phi: \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$

36. $\phi: \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}$

37. $\phi: \mathbb{Z}_3 \longrightarrow S_3$

38. $\phi: \mathbb{Z} \longrightarrow S_3$

39. $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 2\mathbb{Z}$

40. $\phi: 2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

41. $\phi: D_4 \longrightarrow S_3$

42. $\phi: S_3 \longrightarrow S_4$

.43 $\phi: S_4 \longrightarrow S_3$

براهين

.44 ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمرٍ. أثبت أنه إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ $|\phi[G]|$ منتهٍ وقاسم لـِ $|G|$.

.45 ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر. أثبت أنه إذا كان $|G'|$ منتهيًا، فإن $|\phi[G]|$ منتهٍ وقاسم لـِ $|G'|$.

.46 لتكن الزمرة G متولدة من $\{a_i \mid i \in I\}$، حيث I هي مجموعة دليل ما و $a_i \in G$ لكل $i \in I$ وليكن $\phi: G \to G'$ و $\mu: G \longrightarrow G'$ تشاكلين من G إلى زمرة G'، حيث إنّ $\phi(a_i) = \mu(a_i)$ لكل $i \in I$. أثبت إنّ $\phi = \mu$. [مثلاً: التشاكل لزمرة دورية يحدد بصورة كاملة من خلال قيمه على مولد للزمرة.]، [مساعدة: استخدم المبرهنة 6.7، وبالطبع التعريف 1.13].

.47 أثبت إنّ أي تشاكل زمر $\phi: G \to G'$، بحيث إنّ $|G|$ أولي، إما أن يكون تشاكلًا تافهًا أو دالة أحادية.

.48 الإشارة لتبديل زوجي (sign of an even permutation) هي $+1$، **والإشارة لتبديل فردي (sign of an odd permutation)** هي -1، لاحظ إنّ الدالة $sgn_n: S_n \longrightarrow \{1, -1\}$ المعرفة بـِ

$$sgn_n(\sigma) = \text{إشارة } \sigma$$

هي تشاكل من S_n وبصورة غامرة إلى زمرة الضرب $\{1, -1\}$. ما النواة؟ قارن بالمثال (3.13).

.49 أثبت أنه إذا كانت G، وG' و G'' زمرًا، وإذا كان $\phi: G \to G'$ و $\gamma: G' \longrightarrow G''$ تشاكلين، فإنّ دالة التركيب $\gamma\phi: G \to G''$ هي تشاكل.

.50 ليكن $\phi: G \to H$ تشاكل زمرٍ. أثبت إنّ $\phi[G]$ إبدالية إذا وفقط إذا كان لكل $x, y \in G$ لدينا $xyx^{-1}y^{-1} \in Ker(\phi)$.

.51 لتكن G أي زمرة، وليكن a أي عنصر من G، وليكن $\phi: \mathbb{Z} \longrightarrow G$ معرفًا بـِ $\phi(n) = a^n$. فأثبت إنّ ϕ تشاكل، وصِف الصورة والاحتمالات الممكنة لنواة ϕ.

.52 ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكلاً نواته H، وليكن $a \in G$. أثبت تساوي المجموعتين $\{x \in G \mid \phi(x) = \phi(a)\} = Ha$.

.53 لتكن G زمرة، وليكن $h, k \in G$ وليكن $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to G$ معرفًا بـ $\phi(m,n) = h^m k^n$. أعطِ شرطًا ضروريًّا وكافيًا – يتضمن h و k – ليكون ϕ تشاكلًا، ثمّ أثبت الشرط الذي أعطيته.

.54 أوجد شرطًا ضروريًّا وكافيًا على G، حيث إنّ الدالة ϕ المذكورة في التمرين السابق تشاكل لكل الاختيارات لـِ $h, k \in G$.

.55 لتكن G زمرة، وh عنصرًا من G و n عددًا صحيحًا موجبًا، وليكن $\phi: \mathbb{Z}_n \to G$ معرفًا بـِ

$\phi(i) = h^i$ لِـ $0 \le i \le n$. أعْطِ شرطًا ضروريًّا وكافيًا (بدلالة h و n) لِـ ϕ ليكون تشاكلاً. أثبت ما أعطيته.

الفصل 14 زمر العامل Factor Groups

لتكن H زمرة جزئية من زمرة منتهية G، افترض أننا كتبنا جدولًا لعملية الزمرة على G، بسرد عناصر رؤوس في الأعلى وعلى اليسار مثلما تظهر في مجموعات المشاركة اليسرى لـ H، وقد وضحنا ذلك في الفصل 10، فيمكن أن يُقَسَّم جسم الجدول إلى وحدات **(blocks)** تقابل مجموعات المشاركة (الجدول 5.10)، ومعطيًا عملية زمرة على مجموعات المشاركة، أو عدم تقسيمه بتلك الطريقة (الجدول 9.10). يبدأ هذا الفصل بإثبات أنه إذا كانت H نواة تشاكل زمر $\phi:G \to G'$، فإن مجموعات المشاركة لـ H، هي في الواقع عناصر زمرة عمليتها الثنائية اشتقت من عملية الزمرة G (تذكر إنّ مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى من ثم متطابقة).

زمر العامل من التشاكلات

لتكن G زمرة، ولتكن S مجموعة لها عدد عناصر G نفسه، عندئذ، يوجد تقابل أحادي $\leftrightarrow$ بين S و G، يمكننا استخدام $\leftrightarrow$ لتعريف عملية ثنائية على S، بجعل S زمرة تماثل G، وببساطة، نستخدم التقابل لإعادة تسمية كل عنصر في G باسم العنصر الذي يقابله (بالنسبة إلى $\leftrightarrow$) في S، حيث يمكننا أن نصف، وبصورة واضحة حساب xy لـ $x , y \in S$ كما يأتي:

$$\text{إذا كان } x \leftrightarrow g_1 \text{ و } y \leftrightarrow g_2 \text{ و } z \leftrightarrow g_1g_2 \text{، فإنّ } xy = z. \qquad (1)$$

يعطينا الاتجاه $\longrightarrow$ في التقابل الأحادي $s \leftrightarrow g$ بين $s \in S$ و $g \in G$ دالة أحادية μ، ترسل S بصورة غامرة إلى G، (طبعًا، الاتجاه $\longleftarrow$ من $\leftrightarrow$ يعطينا دالة معاكسة μ^{-1})، وبالتعبير بدلالة μ، الحسابات (1) لـ xy للعنصرين $x,y \in S$ تصبح

$$\text{إذا كان } \mu(x) = g_1 \text{ و } \mu(y) = g_2 \text{ و } \mu(z) = g_1g_2 \text{، فإن } xy = z. \qquad (2)$$

الدالة $\mu: S \to G$ تصبح الآن تماثلًا يرسل الزمرة S بصورة غامرة إلى الزمرة G، لاحظ أنه من (2) نحصل على $\mu(xy) = \mu(z) = g_1g_2 = \mu(x)\mu(y)$، خاصية التشاكل المطلوبة.

لتكن G و G' زمرتين، وليكن $\phi: G \to G'$ تشاكلًا، ولتكن $H= Ker\ (\phi)$، تبين المبرهنة 15.13 أنه لـ $a \in G$ لدينا $\phi^{-1}[\{\phi(a)\}]=aH=Ha$، ولدينا تقابل أحادي

$\phi(a) \leftrightarrow aH$ بين مجموعات المشاركة لـ H من G، وعناصر الزمرة الجزئية $\phi[G]$ من G'، تذكر أنه إذا كان $x \in aH$، حيث إنّ $x = ah$ لعنصر ما $h \in H$ ، فإن:

$$\phi(x) = \phi(ah) = \phi(a)\ \phi(h) = \phi(a)e' = \phi(a)$$

وهكذا حسابات العنصر من $\phi[G]$ الذي يقابل مجموعة المشاركة $aH = xH$ هو نفسه، سواء حسبناه على النحو $\phi(a)$، أو على النحو $\phi(x)$. لنرمز لمجموعة مجموعات المشاركة لـ H بـ G/H (تُقرأ G/H على النحو "G فوق H" أو "G مقياس H"، لكن لا تقرأ على النحو "قسمة G على H").

بدأنا في الفقرة السابقة بتشاكل $\phi: G \to G'$ نواته H وانتهينا بـ G/H مجموعة مجموعات المشاركة كلها في تقابل أحادي مع عناصر الزمرة $\phi[G]$. من خلال عملنا في الأعلى

لدينا مجموعة S عناصرها في تقابل أحادي مع عناصر الزمرة G، فجعلنا S زمرة تماثل الزمرة G من خلال دالة التماثل μ؛ وفي ذلك البناء، يمكننا استبدال S بـ G/H واستبدال G بـ $\phi[G]$، ويمكننا أن نَعُدّ G/H تماثل الزمرة $\phi[G]$، من خلال ذلك التماثل μ، وبدلالة G/H و $\phi[G]$، تصبح الحسابات (2) للضرب $(xH)\,(yH)$ لـ $xH,yH \in G/H$ على النحو الآتي:

إذا كان $\mu(xH) = \phi(x)$ و $\mu(yH) = \phi(y)$ و $\mu(zH) = \phi(x)\,\phi(y)$ فإن:

$$(xH)\,(yH) = zH. \qquad (3)$$

ولأن ϕ تشاكل، فيمكننا بسهولة إيجاد $z \in G$ بحيث إنّ $\mu(zH) = \phi(x)\,\phi(y)$، أي نأخذ $z = xy$ في G ونجد إنّ:

$$\mu(zH) = \mu(xyH) = \phi(xy) = \phi(x)\phi(y).$$

هذه تثبت إنّ الضرب $(xH)\,(yH)$ لمجموعتي المشاركة، هو مجموعة المشاركة $(xy)H$ التي تحوي الضرب xy لـ x و y في G، بينما يمكن أن يبدو الحساب لـ $(xH)\,(yH)$ أنه يعتمد على اختيارنا لـ x من xH و y من yH، حيث إنّ عَمَلنا في الأعلى يُظْهِرُ غير ذلك، ونظهرها بوضوح مرة أخرى؛ لأنها نقطة بالغة الأهمية، فإذا كان $h_1,h_2 \in H$، حيث إنّ xh_1 عنصر من xH و yh_2 هو عنصر من yH، فإنه يوجد $h_3 \in H$، بحيث إنّ $h_1 y = y h_3$؛ لأن $Hy = yH$، من خلال المبرهنة 15.13، وعليه لدينا:

$$(xh_1)(yh_2) = x(h_1y)h_2 = x(yh_3)h_2 = (xy)(h_3h_2) \in (xy)\,H,$$

هكذا حصلنا على مجموعة المشاركة نفسها، ويتمّ حساب ضرب مجموعتي مشاركة باختيار عنصر من كل مجموعة مشاركة، وأخذ – كضرب مجموعات مشاركة – مجموعة المشاركة التي تحتوي على حاصل الضرب في G للاختيارات، أي وقت نُعَرِّفُ فيه شيئًا ما (مثل الضرب) بدلالة الاختيارات، فمن المهم إثبات أنه **حسن التعريف (well defined)** الذي يعني أنه مستقل عن الاختيارات التي حصلت، وهذا بالضبط ما فعلناه قبل قليل، وإليك تلخيص هذا العمل في مبرهنة:

1.14 مبرهنة ليكن $\phi\colon G \to G'$ تشاكل زمر نواته H، عندئذٍ، مجموعات المشاركة لـ H تشكِّل **زمرة عامل (factor group)** – G/H – حيث $(aH)\,(bH) = (ab)H$، والدالة $\mu\colon G/H \to \phi[G]$ المعرفة بـ $\mu\,(aH) = \phi(a)$ هي أيضًا تماثل، كل من ضرب مجموعات المشاركة و μ حسنا التعريف، ومستقلان عن الاختيارات a و b من مجموعات المشاركة.

2.14 مثال ناقش المثال 10.13 الدالة $\gamma\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$، حيث $\gamma(m)$ تمثل باقي قسمة m على n وفقًا لخوارزمية القسمة، ونعلم إنّ γ تشاكل، وبالطبع $Ker\,(\gamma) = n\mathbb{Z}$، ومن خلال المبرهنة 1.14 نرى إنّ زمرة العامل $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_n$، ومجموعات المشاركة لـ $n\mathbb{Z}$ **هي صفوف البواقي مقياس n (residue classes modulo n)** فمثلاً: بأخذ $n = 5$ نرى إنّ مجموعات المشاركة لـ $5\mathbb{Z}$، هي

$$5\mathbb{Z} = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\},$$

$$1 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\},$$

$$2 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\},$$

$$3 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\},$$

$$4 + 5\mathbb{Z} = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}.$$

لاحظ إنّ التماثل $\mu\colon \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_5$ للمبرهنة 1.14 يُعَيِّنُ لكل مجموعة مشاركة لـِ $5\mathbb{Z}$ أصغر عناصرها غير السالبة، أي إنّ $\mu(5\mathbb{Z}) = 0$ ، $\mu(1+5\mathbb{Z}) = 1$، ...إلخ. ▲

مـن المهـم جدًّا أن نكون قد تعلمنا كيف نحسب في زمرة العامـل، ويمكننا ضرب (جمع) مجموعتـي مشـاركة بـاختيـار أي عنصريـن ممثلـين، ثـم ضربهما (جمعهمـا)، وإيجـاد مجموعة المشاركة التي يقع ناتج الضرب (الجمع) فيها.

3.14 مثال لتكـن زمـرة العامـل $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ لمجموعـات المشـاركة الظاهـرة في الأعلـى، فيمكننـا جمـع $(2+5\mathbb{Z}) + (4+5\mathbb{Z})$ باختيار 2 و 4، وإيجاد $2 + 4 = 6$، وملاحظة إنّ 6 في مجموعة المشاركة $1+5\mathbb{Z}$، بإمكاننا بصورة مماثلة مقبولة جمع مجموعتي المشاركة هـاتين بـاختيار 27 في $2+5\mathbb{Z}$ و 16- في $4+5\mathbb{Z}$؛ المجموع $27 + (-16) = 11$ أيضًا في مجموعة المشاركة $1+5\mathbb{Z}$. ▲

إنّ زمـرة العامل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ في المثال السابق تقليدية، تَذَكَّر أننا نشير إلى مجموعات المشاركة لـ $n\,\mathbb{Z}$ على أنها صفوف بواقي مقياس n، حيث إنّ عددين صحيحين في مجموعة المشاركة نفسها، هما متطابقان مقياس n، وقد رُحِّلَت هـذه الاصطلاحات لزمر العامل الأخرى، وتسمى زمرة العامل G/H عادة **زمرة العامل لـ (factor group of)** G **مقياس (modulo)** H، أمّا العناصر في مجموعة المشاركة نفسها لـH، فيقال عادة: إنها **متطابقة مقياس (congruent modulo)** H، وبالتساهل في استعمال الرمز، يمكننا كتابة $\mathbb{Z}/n\,\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$، ونفكر في $\mathbb{Z}_n$ بوصفها زمرة جمع لصفوف البواقي لـِ $\mathbb{Z}$ مقياس $\langle n \rangle$، أو بالتساهل أكثر مقياس n.

زمر العامل من زمر جزئية ناظمية

حصلنا حتى الآن على زمر عامل فقط من تشاكلات، لتكن G زمرة، ولتكن H زمرة جزئية من G، الآن H لها مجموعات مشاركة يسرى ومجموعات مشاركة يمنى – وبوجه عام – مجموعة المشاركة اليسرى aH ليس بالضرورة أن تكون مجموعة المشاركة اليمنى Ha نفسها، افترض أننا نحاول تعريف عملية ثنائية على مجموعات المشاركة اليسرى، وذلك بتعريف

$$(aH)\,(bH) = (ab)\,H \tag{4}$$

مثلما هو في نص المبرهنة 1.14، المعادلة (4) تحاول تعريف ضرب مجموعات مشاركة يسرى باختيار مُمَثِّلَيْنِ a و b من مجموعات المشاركة، فهذه المعادلة لا معنى لها إلا إذا أعطت عملية حسنة التعريف، بالاستقلالية عن العناصر الممثلة المختارة a و b من مجموعات المشاركة، تبين المبرهنة الآتية إنّ المعادلة (4) تعطي عملية ثنائية حسنة التعريف إذا وفقط إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G.

4.14 مبرهنة لتكن H زمرة جزئية من زمرة G، عندئذٍ، ضرب مجموعات المشاركة اليسرى حسن التعريف من خلال المعادلة:

$$(aH)\,(bH) = (ab)\,H$$

إذا وفقط إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G.

البرهان أولاً افترض إنّ $(aH)(bH) = (ab)H$ تعطي عملية ثنائية حسنة التعريف على مجموعات المشاركة اليسرى، ليكن $a \in G$، نريد إثبات إنّ aH و Ha هما المجموعة نفسها، سنستخدم الأسلوب التقليدي في إثبات إنّ كلّ مجموعة هي مجموعة جزئية من الأخرى.

ليكن $x \in aH$، وباختيار مُمَثِّلين $x \in aH$ و $a^{-1} \in a^{-1}H$ نحصل على $(xH)(a^{-1}H) = (xa^{-1})H$، ومن الجهة الأخرى، نرى باختيار مُمَثِّلَين $a \in aH$ و $a^{-1} \in a^{-1}H$ إنّ $(aH)(a^{-1}H) = eH = H$، وباستخدام الفرضية إنّ ضرب مجموعات المشاركة اليسرى من خلال الممثلين حسن التعريف، نحصل على $x a^{-1} = h \in H$، وعليه، $x = ha$، وهكذا $x \in Ha$ و $aH \subseteq Ha$، نترك البرهان المماثل لـِ $Ha \subseteq aH$ للتمرين 25.

ومن الناحية الأخرى، إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية، فإنّ ضرب مجموعات المشاركة اليسرى من خلال الممثلين حسن التعريف، وبناءً على فرضيتنا، يمكننا ببساطة قول مجموعة مشاركة بحذف عبارتي يسرى و يمنى، افترض أننا نرغب في حساب $(aH)(bH)$، فباختيار $a \in aH$ و $b \in bH$ نحصل على مجموعة المشاركة $(ab)\,H$، وباختيار مُمَثِّلَين مختلفين $ah_1 \in aH$ و $bh_2 \in bH$ نحصل على مجموعة المشاركة $ah_1bh_2\,H$، يجب أن نثبت أنها مجموعة المشاركة نفسها، الآن $h_1b \in Hb = bH$ وهكذا $h_1b = bh_3$ لعنصر ما $h_3 \in H$، وعليه:

$$(ah_1)(bh_2) = a(h_1b)h_2 = a(bh_3)h_2 = (ah)(h_3h_2)$$

و $(ab)\,(h_3h_2) \in (ab)H$ ؛ لذلك ah_1bh_2 في $(ab)H$ ♦

تبين المبرهنة 4.14، أنه إذا تطابقت مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لـِ H، فإن المعادلة (4) تعطي عملية ثنائية حسنة التعريف على مجموعات المشاركة، نتساءل فيما إذا كانت مجموعات المشاركة تُشكِّلُ زمرة مع مثل هذا الضرب لمجموعات المشاركة. والجواب أن ذلك صحيح بالفعل.

5.14 نتيجة لتكن H زمرة جزئية ناظمية من G، عندئذ، مجموعات المشاركة لـِ H تشكل زمرة G/H بالنسبة إلى العملية الثنائية $(aH)(bH) = (ab)H$. ▲

البرهان بحساب، $(aH)[(bH)(cH)] = (aH)[(bc)H] = [a(bc)]H$، وبالمثل لدينا $[(aH)(bH)](cH) = [(ab)c]H$ وعليه، التجميعية في G/H تنتج من التجميعية في G. لإنّ $(aH)(eH) = (ae)H = aH = (ea)H = (eH)(aH)$، نرى إنّ $eH = H$ هو العنصر المحايد في G/H، وأخيرًا $(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = (aa^{-1})H=(aH)(a^{-1}H)$ تُبَيِّن إنّ $a^{-1}H = (aH)^{-1}$.
♦

6.14 تعريف الزمرة G/H في النتيجة السابقة هي **زمرة العامل (factor group)** (أو **زمرة خارج القسمة (quotient group)**) لـِ G من خلال H. ■

7.14 مثال لإنّ $\mathbb{Z}$ زمرة إبدالية و $n\mathbb{Z}$ زمرة جزئية ناظمية، فالنتيجة 5.14 تمكننا من بناء زمرة العامل $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ دون الرجوع إلى التشاكل، مثلما لاحظنا في المثال 2.14، $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ تماثل $\mathbb{Z}_n$.

8.14 مثال لتكن $\mathbb{R}$ الزمرة الإبدالية بالنسبة إلى الجمع، ولتكن $c \in \mathbb{R}^+$. الزمرة الجزئية الدورية $\langle c \rangle$ من $\mathbb{R}$، تحوي عناصر مثل:

$$\cdots -3c, -2c, -c, 0, c, 2c, 3c, \cdots.$$

كلّ مجموعة مشاركة لـ $\langle c \rangle$ تحتوي فقط على عنصر واحد x، بحيث إنّ $0 \le x < c$، وإذا اخترنا عند الحساب في $\mathbb{R}/\langle c \rangle$ هذه العناصر بوصفها ممثلة لمجموعات المشاركة، سنجد أننا نحسب نواتج جمعها مقياس c، كما نوقشت للحسابات في $\mathbb{R}_c$ في الفصل 1، على سبيل المثال: إذا كانت $c = 5.37$، فإن جمع مجموعتي المشاركة $\langle 5.37 \rangle + 4.65$ و $\langle 5.37 \rangle + 3.42$ هو مجموعة المشاركة $8.07+\langle 5.37 \rangle$، التي تحتوي $8.07 - 5.37 = 2.7$، التي هي $3.42 +_{5.37} 4.65$ وبالعمل مع هذه العناصر x لمجموعات المشاركة، حيث $0 \le x < c$ نرى إنّ الزمرة $\mathbb{R}_c$ في المثال 4.2 تماثل $\mathbb{R}/\langle c \rangle$ بالنسبة إلى التماثل ψ، حيث $\psi(x) = x + \langle c \rangle$ لكل $x \in \mathbb{R}_c$، وبالتأكيد، $\mathbb{R}/\langle c \rangle$ هي أيضًا تُماثل زمرة الدائرة U للأعداد المركبة بمقدار 1 بالنسبة إلى الضرب. ▲

رأينا إنّ الزمرة $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{Z}_n$ (وكمجموعة $\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,3,4,\ldots,n-1\}$ أي هي مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة الأقل من n)، بيّن المثال 8.14 إنّ الزمرة $\mathbb{R}/\langle c \rangle$ تماثل الزمرة $\mathbb{R}_c$، وقد اخترنا في الفصل 1 الرمز $\mathbb{R}_c$ بدلًا من المعروف $[0,c]$ للفترة نصف المفتوحة للأعداد الحقيقية غير السالبة الأقل من c. فعلنا ذلك لنوضح الآن المقارنة بين زمر العامل من $\mathbb{Z}$ وزمر العامل من $\mathbb{R}$.

مبرهنة التشاكل الأساسية

رأينا إنّ كل تشاكل $\phi: G \to G'$ يكون باعثاً لزمرة عامل طبيعية (المبرهنة 1.14) تسمى $G/Ker(\phi)$ ، وسنثبت الآن إنّ كل زمرة عامل G/H ستكون باعثةً لتشاكل طبيعي نواته H.

9.14 مبرهنة لتكن H زمرة جزئية ناظمية من G، عندئذٍ: $\gamma: G \to G/H$ المعطى بـِ $\gamma(x) = xH$ هو تشاكل نواته H.

البرهان ليكن $x,y \in G$، عندئذٍ:

$$\gamma(xy) = (xy)H = (xH)(yH) = \gamma(x)\gamma(y),$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & \phi[G] \\
& G/H \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

الشكل 10.14

وعليه، فإنّ γ تشاكل؛ لإنّ $xH = H$ إذا وفقط إذا كان $x \in H$، نرى إنّ نواة γ هي في الواقع H .

♦

وجدنا في المبرهنة 1.14 أنه إذا كان $\phi: G \to G'$ تشاكلاً نواته H، فإنّ $\mu: G/H \to \phi[G]$

حيث إنّ $\mu(gH) = \phi(g)$ تشاكل، وتبين المبرهنة 9.14 إنّ التشاكل $\gamma: G \to G / H$ المعرف بـِ $\gamma(g) = gH$ هو تشاكل، حيث يبين الشكل 10.14 هذه الزمر والدوال، نرى إنّ التشاكل ϕ يمكن تحليله **(factored)** $\phi = \mu.\gamma$، حيث إنّ γ تشاكل، و μ تماثل لـِ G/H مع $\phi[G]$. نذكر هذه على شكل مبرهنة.

11.14 مبرهنة (مبرهنة التشاكل الأساسية) **(The Fundamental Homomorphism Theorem)**:

ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر نواته H، عندئذٍ: $\phi[G]$ زمرة، و $\mu: G/H \to \phi[G]$ المعطى بـ $\mu(gH) = \phi(g)$ هو تماثل، فإذا كان $\gamma: G \to G / H$ هو التماثل المعطى بـِ $\gamma(g) = gH$، فإنّ $\phi(g) = \mu\gamma(g)$ لكل $g \in G$.

يُشار إلى التماثل μ في المبرهنة 11.14 بوصفه تماثلًا طبيعيًّا أو قانونيًّا **(natural or canonical)**، والأوصاف نفسها استخدمت لوصف التشاكل γ، ومن الممكن أن يكون هناك تشاكلات وتماثلات أخرى للزمر نفسها، لكن الدوال μ و γ لها وضع خاص مع ϕ، وحُددت بصورة وحيدة من خلال المبرهنة 11.14.

يمكن تلخيص ما سبق بالآتي: يكون كل تشاكل مجاله G باعثًا لزمرة عامل G/H، وتكون كل زمرة عامل G/H باعثة لتشاكل يرسل G إلى G / H، والتشاكلات وزمر العامل مرتبطة ببعضها إلى حدٍّ بعيد، والمثال الآتي يبين إلى أي حدٍّ يمكن أن تكون هذه العلاقة مفيدة.

12.14 مثال صنّف الزمرة $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)/(\{0\} \times \mathbb{Z}_2)$ وفقًا للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (المبرهنة 12.11).

الحل دالة الإسقاط $\pi_1: \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$، والمعطاة بـِ $\pi_1(x,y) = x$ هي تشاكل من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$، وبصورة غامرة إلى $\mathbb{Z}_4$ نواتها $\{0\} \times \mathbb{Z}_2$، نعلم من خلال المبرهنة 11.14 إنّ زمرة العامل المعطاة تماثل $\mathbb{Z}_4$. ▲

الزمر الجزئية الناظمية والتماثلات الذاتية الداخلية

نشتق بعض التصنيفات البديلة للزمر الجزئية الناظمية، التي تزوّدنا عادة بطريقة أسهل لاختبار الناظمية، بدل إيجاد كلا التحليلين لمجموعات المشاركة اليسرى واليمنى.

افترض إنّ H هي زمرة جزئية من G، بحيث إنّ $ghg^{-1} \in H$ لكل $g \in G$ ولكل $h \in H$، عندئذ: $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} \mid h \in H\} \subseteq H$ لكل $g \in G$، حيث ندعي حقيقة إنّ $gHg^{-1} := H$؛ لذا، يجب أن نثبت إنّ $H \subseteq gHg^{-1}$ لكل $g \in G$، ليكن $h \in H$، وباستبدال g بـ g^{-1} في العلاقة $ghg^{-1} \in H$ نحصل على $g^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg = h_1$، حيث $h_1 \in H$، بناءً على ذلك، $h = gh_1g^{-1} \in gHg^{-1}$، أنجز المطلوب.

افترض إنّ $gH = Hg$ لكل $g \in G$، عندئذ: $gh = h_1g$، وهكذا $ghg^{-1} \in H$ لكل $g \in G$ ولكل $h \in H$. من خلال الفقرة السابقة، هذا يعني إنّ $gHg^{-1} = H$ لكل $g \in G$، في

المقابل، إذا كان $g\,H\,g^{-1} = H$ لكل $g \in G$، فإنّ $g\,h\,g^{-1} = h_1$، إذن، $gh = h_1 g \in Hg$ و $gH \subseteq Hg$. لكن $g^{-1}\,Hg = H$ تعطي أيضًا $g^{-1}hg = h_2$ وهكذا $hg = gh_2$ و $Hg \subseteq gH$.

نلخص عملنا في المبرهنة الآتية:

13.14 مبرهنة فيما يأتي ثلاثة شروط متكافئة لتكون زمرة جزئية H من زمرة G، زمرة جزئية ناظمية من G.

1. $ghg^{-1} \in H$ لكل $g \in G$ و $h \in H$.

2. $g\,Hg^{-1} = H$ لكل $g \in G$.

3. $g\,H = Hg$ لكل $g \in G$.

يؤخذ الشرط (2) في المبرهنة 13.14 عادة بوصفه تعريفًا للزمرة الناظمية H من زمرة G.

14.14 مثال كل زمرة جزئية H من زمرة إبدالية G ناظمية، ونحتاج فقط إلى ملاحظة إنّ $gh = hg$ لكل $h \in H$ ولكل $g \in G$، وعليه، – حقًا – $gh\,g^{-1} = h \in H$ لكل $g \in G$ ولكل $h \in H$. ▲

يبين التمرين 29 للفصل 13 إنّ $i_g: G \to G$ المعرفة بـ $i_g\,(x) = gxg^{-1}$ دالة تشاكل من G إلى نفسها، ونرى إنّ $gag^{-1} = gbg^{-1}$ إذا وفقط إذا كان $a = b$، إذن، i_g أحادي؛ لأن $g\,(g^{-1}y\,g)g^{-1} = y$، نرى إنّ i_g غامر لـ G، وهكذا هو تماثل لـ G مع نفسها.

15.14 تعريف التماثل $\phi: G \to G$ لزمرة G مع نفسها يسمى **تماثل ذاتي (automorphism)** لـ G. والتماثل $i_g: G \to G$، حيث $i_g\,(x) = gxg^{-1}$ لكل $x \in G$ هو التماثل الذاتي الداخلي لـ G **(inner automorphism of)** من خلال g، ويسمى تنفيذ i_g على x **المرافق لـ (conjugation of)** x من خلال g. ■

يبين التكافؤ للشرطين (1) و (2) في المبرهنة 13.14 إنّ $gH = Hg$ لكل $g \in G$ إذا وفقط إذا كان $i_g[H] = H$ لكل $g \in G$، أي إذا وفقط إذا كانت H **غير متغيرة (invariant)** بالنسبة إلى التماثلات الذاتية الداخلية لـ G جميعها، ومن المهم أن نفهم بوضوح إنّ $i_g\,[H] = H$ هي معادلة مجموعات، وليس بالضرورة أن نحصل على $i_g(h) = h$ لكل $h \in H$، أي إنّ i_g يمكن أن يمثل تبديلاً غير تافه للمجموعة H، ونرى إنّ الزمر الجزئية الناظمية للزمرة G هي بالضبط تلك غير المتغيرة بالنسبة إلى التماثلات الذاتية الداخلية كلها، وزمرة جزئية K من G هي زمرة **جزئية مرافقة (a conjugate subgroup)** لـ H، إذا كان $K = i_g\,[H]$ لعنصر ما $g \in G$.

■ تمارين 14

حسابات

أوجد رتبة زمرة العامل المعطاة في التمارين من 1 إلى 8:

1. $\mathbb{Z}_6/\langle 3\rangle$

2. $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12})/(\langle 2\rangle\times\langle 2\rangle)$

3. $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2)/\langle(2,1)\rangle$

4. $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5)/(\{0\}\times\mathbb{Z}_5)$

5. $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4)/\langle(1,1)\rangle$

6. $(\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{18})/\langle(4,3)\rangle$

7. $(\mathbb{Z}_2\times S_3)/\langle(1,\rho_1)\rangle$

8. $(\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{15})/\langle(1,1)\rangle$

أوجد رتبة العنصر في زمرة العامل في التمارين من 9 إلى 15:

9. $5+\langle 4\rangle$ في $\mathbb{Z}_{12}/\langle 4\rangle$

10. $26+\langle 12\rangle$ في $\mathbb{Z}_{60}/\langle 12\rangle$

11. $(2,1)+\langle(1,1)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_6)/\langle(1,1)\rangle$

12. $(3,1)+\langle(1,1)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4)/\langle(1,1)\rangle$

13. $(3,1)+\langle(0,2)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8)/\langle(0,2)\rangle$

14. $(3,3)+\langle(1,2)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8)/\langle(1,2)\rangle$

15. $(2,0)+\langle(4,4)\rangle$ في $(\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_8)/\langle(4,4)\rangle$

16. احسب $i_{\rho_1}[H]$ للزمرة الجزئية $H=\{\rho_0,\mu_1\}$ من الزمرة S_3 للمثال 7.8 .

مفاهيم

في التمارين من 17 إلى 19 صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة إلى التصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

17. *الزمرة الجزئية الناظمية* H من G، هي التي تحقق $hG=Gh$ لكل $h\in H$.

18. *الزمرة الجزئية الناظمية* H من G، هي التي تحقق $g^{-1}hg\in H$ لكل $h\in H$ ولكل $g\in G$.

19. *التماثل الذاتي* لزمرة G، هو تشاكل يرسل G إلى G.

20. ما أهمية الزمرة الجزئية *الناظمية* من زمرة G؟

يكتب الطلاب عادة بصورة غير منطقية عند بداية إثباتهم لمبرهنات عن زمر العامل، وقد صُمّم التمرينان الآتيان للفت الانتباه إلى نوع واحد أساسي من الأخطاء.

21. سُئل طالب ليبرهن أنه إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من زمرة إبدالية G، فإنّ G/H إبدالية، وقد بدأ برهان الطالب كما يأتي:

يجب أن نثبت إنّ G / H إبدالية، ليكن a و b عنصرين من G/H.

أ. لماذا قراءة المحاضر لهذا البرهان تجعله يتوقع بعدها وجود أشياء غير منطقية في ورقة الطالب؟

ب. ماذا كان يجب على الطالب أن يكتب؟

جـ. أكمل البرهان.

22. زمرة الالتواء (**torsion group**) هي زمرة عناصرها جميعها لها رتب منتهية، والزمرة تكون عديمة الالتواء (**torsion free**) إذا كان العنصر المحايد فيها هو الوحيد ذو الرتبة المنتهية، سُئل طالب أن يبرهن أنه إذا كانت G زمرة ملتوية، فكذلك G / H للزمر الجزئية الناظمية جميعها H من G، فكَتَبَ الطالب: يجب أن نثبت إنّ كل عنصر في G / H رتبته منتهية، وليكن $x \in G / H$. أجب عن أسئلة التمرين 21 نفسها .

23. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ أ. من المنطقي الحديث عن زمرة العامل G / N، إذا وفقط إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G.

______ ب. كل زمرة جزئية من زمرة إبدالية G، هي زمرة جزئية ناظمية من G.

______ جـ. التماثل الذاتي الداخلي لزمرة إبدالية، يجب أن يكون فقط الدالة المحايدة.

______ د. كل زمرة عامل لزمرة منتهية، هي من جديد ذات رتبة منتهية.

______ هـ. كل زمرة عامل لزمرة التواء هي زمرة التواء. (انظر التمرين 22).

______ و. كل زمرة عامل لزمرة عديمة الالتواء، هي زمرة عديمة الالتواء. (انظر التمرين 22).

______ ز. كل زمرة عامل لزمرة إبدالية، هي زمرة إبدالية.

______ ح. كل زمرة عامل لزمرة غير إبدالية، هي زمرة غير إبدالية.

______ ط. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ دورية رتبتها n.

______ ي. $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ دورية رتبتها n، حيث $n\mathbb{R} = \{nr \mid r \in \mathbb{R}\}$ و $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع.

براهين

24. أثبت إنّ A_n زمرة جزئية ناظمية من S_n، واحسب S_n / A_n، أي، أوجد زمرة معروفة، حيث S_n / A_n تماثلها.

25. أكمل برهان المبرهنة 4.14، بإثبات أنه إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة G، وإذا كان ضرب مجموعات المشاركة اليسرى $(aH)(bH) = (ab)H$ حسن التعريف، فإنّ $Ha \subseteq aH$.

26. أثبت إنّ زمرة الالتواء الجزئية T من زمرة إبدالية G، هي زمرة جزئية ناظمية من G و G/T عديمة الالتواء. (انظر التمرين 22).

27. تكون الزمرة الجزئية H **مرافقة لزمرة جزئية (conjugate to a subgroup)** K من زمرة G، إذا وجد تماثل ذاتي داخلي i_g لـ G، حيث إن $i_g[H] = K$، أثبت إنّ الترافق هو علاقة تكافؤ على مجموعة الزمر الجزئية من G.

28. صَنِّف الزمر الجزئية الناظمية من زمرة G، بدلالة الخلايا التي تظهر في التجزئة الناتجة عن علاقة الترافق في التمرين السابق.

29. بالرجوع إلى التمرين 27، أوجد الزمر الجزئية جميعها من S_3 (مثال 7.8) التي ترافق $\{\rho_0, \mu_2\}$.

30. لتكن H زمرة جزئية ناظمية من زمرة G، وليكن $m = (G: H)$. فأثبت إنّ $a^m \in H$ لكل $a \in G$.

31. أثبت إنّ تقاطع زمر جزئية ناظمية من زمرة G، هو من جديد زمرة جزئية ناظمية من G.

32. أُعطينا أي مجموعة جزئية S من زمرة G، أثبت أنه من المنطقي الحديث عن أصغر زمرة جزئية ناظمية تحوي S. [مساعدة: استخدم التمرين 31].

33. لتكن G زمرة، والعنصر في G الذي يمكن أن يعبر عنه بالصورة $a\,b\,a^{-1}b^{-1}$ لعنصرين $a, b \in G$ هو **مُبَدِّل (commutator)** في G، بيّن التمرين السابق وجود زمرة جزئية ناظمية صغرى C من الزمرة G تحتوي على كل المُبَدِّلات في G، والزمرة الجزئية C هي **زمرة المُبَدِّلات الجزئية (commutator subgroup)** من G. أثبت إنّ G/C زمرة إبدالية.

34. أثبت أنه إذا كانت G زمرة منتهية لها بالضبط زمرة جزئية واحدة H ذات رتبة معطاة، فإنّ H زمرة جزئية ناظمية من G.

35. أثبت أنه إذا كانت H و N زمرتين جزئيتين من زمرة G و N ناظمية في G، فإنّ $H \cap N$ ناظمية في H، وأثبت بمثال إنّ $H \cap N$ ليست بالضرورة ناظمية في G.

36. لتكن G زمرة تحتوي على الأقل زمرة جزئية واحدة ذات رتبة منتهية ثابتة s، فأثبت إنّ تقاطع الزمر الجزئية كلها من G ذات الرتبة s، هو زمرة جزئية ناظمية من G. [مساعدة: استخدم الحقيقة أنه إذا كانت H رتبتها s، فكذلك $x^{-1}Hx$ لكل $x \in G$].

37. أ. أثبت إنّ التماثلات الذاتية كلها لزمرة G تُشَكِّل زمرة بالنسبة إلى تركيب الدوال.

ب. أثبت إنّ التماثلات الذاتية الداخلية لزمرة G تشكّل زمرة جزئية ناظمية من زمرة كل التماثلات الذاتية لـ G بالنسبة إلى تركيب الدوال. [*تحذير:* تأكد من إثبات إنّ التماثلات الذاتية الداخلية تشكل زمرة جزئية].

38. أثبت إنّ مجموعة كل $g \in G$، بحيث إنّ $i_g: G \to G$ هو التماثل الذاتي الداخلي المحايد i_e، هي زمرة جزئية ناظمية من الزمرة G.

39. لتكن G و G' زمرتين، ولتكن H و H' زمرتين جزئيتين ناظميتين من G و G' على الترتيب،

وليكن ϕ تشاكلًا من G إلى G'، فأثبت أنه إذا كان $\phi[H] \subseteq H'$، فإنّ ϕ يُحْدِثُ تشاكلًا طبيعيًا $\phi_* : (G/H) \to (G'/H')$. (استخدمت هذه الحقيقة باستمرار في التبولوجيا الجبرية) .

40. استخدم الخصائص $\det(I_n) = 1$ و $\det(AB) = \det(A).\ \det(B)$ للمصفوفات من الدرجة $n \times n$ في إثبات ما يأتي:

أ. المصفوفات من الدرجة $n \times n$ بمحددة 1 تشكل زمرة جزئية ناظمية من $GL(n, \mathbb{R})$.

ب. المصفوفات من الدرجة $n \times n$ بمحددة ± 1 تشكل زمرة جزئية ناظمية من $GL(n, \mathbb{R})$.

41. لتكن G زمرة، ولتكن $\mathscr{P}(G)$ مجموعة كل المجموعات الجزئية من G. فلأي $A, B \in \mathscr{P}(G)$ لنعرف ضرب المجموعات الجزئية $AB = \{a\,b \mid a \in A\,,\, b \in B\}$.

أ. أثبت إنّ الضرب للمجموعات الجزئية تجميعي، وله عنصر محايد، لكن $\mathscr{P}(G)$ ليست زمرة بالنسبة إلى هذه العملية.

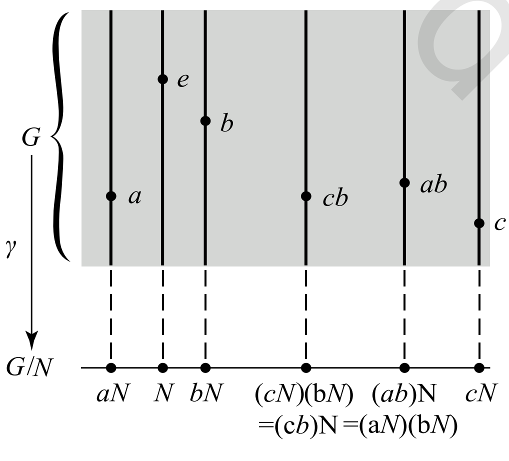
ب. أثبت أنه إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، فإنّ مجموعة مجموعات المشاركة لـ N مغلقة على $\mathscr{P}(G)$ بالنسبة إلى العملية في الأعلى، وإنّ هذه العملية تتفق مع الضرب المعطى من خلال الصيغة في النتيجة 5.14.

جـ. أثبت (دون استخدام النتيجة 5.14) إنّ مجموعات المشاركة لـ N في G تشكل زمرة بالنسبة إلى العملية في الأعلى، هل عنصرها المحايد هو العنصر المحايد نفسه لـ $\mathscr{P}(G)$ ؟

الفصل 15 حسابات زمر العامل والزمر البسيطة
Factor Group Computations and Simple Groups

يمكن أن تكون زمر العامل موضوعًا صعب الفهم عند الطلاب، فلا شيء مثل القليل من الحسابات لتقوية الفهم في الرياضيات؛ لذا، نبدأ بمحاولة تحسين بَدهيتنا فيما يتعلق بزمر العامل؛ لأننا سنتعامل خلال هذا الفصل مع الزمر الجزئية الناظمية، وسنرمز للزمرة الجزئية من G بـ N بدلاً من H.

لتكن N زمرة جزئية ناظمية من G، حيث تعمل الزمرة الجزئية N في زمرة العامل G/N، بوصفها عنصرًا محايدًا، ويمكننا النظر إلى N على أنها طويت إلى عنصر وحيد – إما إلى 0 في تمثيل الجمع، أو إلى e في تمثيل الضرب – هذا الطي لـ N إضافة إلى البنية الجبرية لـ G يتطلب أيضًا أن تطوى المجموعات الجزئية من G – المسماة مجموعات المشاركة لـ N – إلى عنصر وحيد في زمرة العامل، وقد أُعطي تمثيل لهذا الطي في الشكل 1.15، تذكر من المبرهنة 9.14 إنّ $\gamma: G \to G/N$ المعرَّف بـ $\gamma(a) = aN$ لـ $a \in G$ هو تشاكل من G وبصورة غامرة إلى G/N، الشكل 1.15 يشبه كثيرًا الشكل 14.13، إلّا إنّ زمرة الصور بالنسبة إلى التشاكل في الشكل 1.15، هي في الحقيقة مُشَكَّلَةٌ من G، ويمكننا أن ننظر إلى "الخط" G/N في أسفل الشكل على أنه تمَّ الحصول عليه بالطي لنقطة كلّ مجموعة مشاركة لـ N في نسخة أخرى لـ G، هكذا تقابل كلّ نقطة في G/N قطعة مستقيمة عمودية كاملة في الجزء المظلل، وتُمَثِّلُ مجموعةَ مشاركة لـ N في G، والأمر الحاسم أن نتذكر إنّ ضرب مجموعات المشاركة في G / N، يمكن أن يحسب بالضرب في G، باستخدام أي عناصر ممثلة لمجموعات المشاركة، مثلما هو مُبَيَّن في الشكل:



الشكل 1.15

بالنسبة إلى الجمع، فإنّ عنصرين من G يطويان إلى العنصر نفسه من G/N، إذا كان الفرق بينهما عنصرًا من N، وبالنسبة إلى الضرب، فإنّ a و b يطويان معًا، إذا كان ab^{-1} في N، ومن الممكن أن تتفاوت درجة الطي من عدم وجودها إلى وجودها بدرجة هائلة، وإليك توضيح الحالتين المتطرفتين بالأمثلة:

2.15 مثال الزمرة الجزئية التافهة $N = \{0\}$ من $\mathbb{Z}$، هي بالطبع زمرة جزئية ناظمية. احسب $\mathbb{Z}/\{0\}$.

الحل لإنّ $N=\{0\}$ فيها عنصر واحد فقط، فإنّ كل مجموعة مشاركة لـ N فيها أيضًا عنصر واحد فقط، أي إنّ مجموعات المشاركة هي على الصورة $\{m\}$ لـ $m \in \mathbb{Z}$، ولا يوجد طي نهائيًّا؛ ولذلك $\mathbb{Z}/\{0\} \simeq \mathbb{Z}$. كل $m \in \mathbb{Z}$ ببساطة يعاد تسميتها $\{m\}$ في $\mathbb{Z}/\{0\}$ ▲

3.15 مثال ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا، والمجموعة $n\mathbb{R} = \{nr \mid r \in \mathbb{R}\}$ زمرة جزئية من $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع، وهي ناظمية؛ لأن $\mathbb{R}$ إبدالية. احسب $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$.

الحل في الحقيقة، يبين قليل من التفكير إنَّ $n\mathbb{R} = \mathbb{R}$؛ لأن كل $x \in \mathbb{R}$ هي على الصورة $n(x/n)$ و $x/n \in \mathbb{R}$، وهكذا $\mathbb{R}/n\mathbb{R}$ فيها عنصر واحد فقط، والزمرة الجزئية $n\mathbb{R}$، زمرة تافهة متكونة من العنصر المحايد فقط. ▲

قد وضِّح في المثالين 2.15 و 3.15، أنه لأي زمرة G لدينا $G/\{e\} \simeq G$ و $G/G \simeq \{e\}$ حيث $\{e\}$ هي الزمرة التافهة المتكونة فقط من العنصر المحايد e، وهاتان الحالتان المتطرفتان لزمر العامل لهما أهمية قليلة، إذ نريد معلومات عن زمرة العامل G/N لإعطاء بعض المعلومات عن بنية G، فإذا كانت $N = \{e\}$، فإن زمرة العامل لها بنية G نفسها، ومن المفضل أن نحاول دراسة G مباشرة، فإذا كانت $N = G$، فإن زمرة العامل ليس لها بنية ذات معنى لتزودنا بمعلومات عن G، أمّا إذا كانت G زمرة منتهية و $N \neq \{e\}$ هي زمرة جزئية ناظمية من G، فإنّ G/N زمرة أصغر من G؛ ولذلك، فإن بنيتها يمكن أن تكون أكثر بساطة من تلك التي لـ G، وأمّا ضرب مجموعات المشاركة في G/N، فيعكس الضرب في G؛ لأن ضرب مجموعات المشاركة يمكن أن يحسب بالضرب في G للعناصر الممثلة لمجموعات المشاركة.

والمثالان الآتيان يبينان أنه حتى إن كانت G/N رتبتها 2، فمن الممكن استنتاج بعض النتائج المفيدة. إذا كانت G زمرة منتهية، و G/N لها عنصران فقط، فيجب أن نحصل على $|G|=2|N|$، لاحظ إنّ كل زمرة جزئية H تتضمن نصف عناصر زمرة منتهية G، يجب أن تكون زمرة جزئية ناظمية؛ لأن لكل عنصر a في G وليس في H، كلتا مجموعتي المشاركة اليسرى aH واليمنى Ha يجب أن تتكونا من جميع العناصر في G التي ليست في H، وهكذا تتطابق مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لـ H، و H هي زمرة جزئية ناظمية من G.

4.15 مثال لإنّ $|S_n| = 2|A_n|$، نرى إنّ A_n زمرة جزئية ناظمية من S_n و S_n/A_n رتبتها 2. لتكن σ تبديلًا فرديًّا في S_n، وعليه، $S_n/A_n = \{A_n, \sigma A_n\}$، وبإعادة تسمية العنصر A_n "زوجي" والعنصر σA_n "فردي"، الضرب في S_n/A_n المُبَيَّن في الجدول 5.15 يصبح:

	A_n	σA_n
A_n	A_n	σA_n
σA_n	σA_n	A_n

(زوجي) (زوجي) = (زوجي)   (فردي) (زوجي) = فردي

(زوجي) (فردي) = فردي   (فردي) (فردي) = زوجي

الجدول 5.15

وهكذا تعكس زمرة العامل هذه الخصائص الضربية للتباديل كلها في S_n. ▲

يوضح المثال 4.15 أنه على الرغم من إنّ ضرب مجموعتي مشاركة في G / N لا يخبرنا عن ماهية الضرب لعنصرين في G، فمن الممكن أن يخبرنا إنّ الضرب في G لنوعين من العناصر هو نفسه ذو نوع محدد.

6.15 مثال (**خطأ عكس مبرهنة لاجرانج**): تنص مبرهنة لاجرانج (**Lagrange Theorem**) على أنه إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة منتهية G، فإنّ رتبة H تقسم رتبة G، ونبرهن إنّ من الخطأ القول: إنه إذا كانت d تقسم رتبة G، فيجب أن توجد زمرة جزئية H من G رتبتها d، أي إننا سنبرهن إنّ A_4 – التي رتبتها 12 – لا تحتوي زمرة جزئية رتبتها 6 .

افترض إنّ H زمرة جزئية من A_4 رتبتها 6، كما لوحظ سابقًا في المثال 4.15 فيجب أن ينتج أن H زمرة جزئية ناظمية من A_4، عندئذ، يجب أن يكون في A_4 / H عنصران فقط، H و σH لعنصر ما $\sigma \in A_4$ ليس في H؛ لإنّ في زمرةً رتبتها 2، مربع كل عنصر هو العنصر المحايد، فيجب أن يكون لدينا $HH = H$ و $(\sigma H)(\sigma H) = H$، الحساب في زمر العامل الآن، يمكن أن يُنْجَزَ بالحساب للمُمَثِّلين في الزمرة الأصلية، وهكذا بالحساب في A_4، وجدنا أنه يجب أن يكون لدينا $\alpha^2 \in H$ لكل $\alpha \in H$، ويجب أن يكون لدينا $\beta^2 \in H$ لكل $\beta \in \sigma H$، أي إنّ مربع كل عنصر في A_4 يجب أن يكون في H، لكن في A_4 لدينا:

$$(1,3,2) = (1,2,3)^2 \text{ و } (1,2,3) = (1,3,2)^2$$

لذا، $(1,2,3)$ و $(1,3,2)$ في H. حساب مشابه يُبَيِّنُ إنّ $(1,2,4)$، $(1,4,2)$، $(1,3,4)$، $(1,4,3)$، $(2,3,4)$ و $(2,4,3)$ جميعها في H، وهذه تبين أنه يجب أن يكون لدينا على الأقل 8 عناصر في H، مناقضة للحقيقة بإنّ H افترضت رتبتها 6 . ▲

نتجه الآن إلى أمثلة عدة تَحْسبُ زمر العامل، فإذا كانت الزمرة التي نبدأ بها منتهية التَوَلُّد وإبدالية، فإنّ زمرة عاملها ستكون كذلك، إذ إنّ حساب مثل زمرة العامل هذه يعني تصنيفها وفقًا للمبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11).

7.15 مثال لنحسب زمرة العمل $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/\langle(0,1)\rangle$. هنا $\langle(0,1)\rangle$ هي الزمرة الجزئية الدورية H من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ المتولدة من $(0,1)$. وهكذا:

$$H = \{(0,0) , (0,1) , (0,2) , (0,3) , (0,4) , (0,5)\}.$$

لإنّ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ فيها (24) عنصرًا و H فيها (6) عناصر، فإنّ مجموعات المشاركة لـِ H جميعها يجب أن يكون فيها (6) عناصر، و $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/H$ يجب أن تكون رتبتها (4)؛ ولأن $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ إبدالية، فكذلك $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/H$ (تذكر، نحسب في زمرة العامل من خلال الممثلين في الزمرة الأصلية)، مجموعات المشاركة في تمثيل الجمع، هي:

$$H = (0,0) + H، (1,0) + H، (2,0) + H، (3,0) + H.$$

ولأنه يمكننا أن نحسب باختيار الممثلين (0,0)، (1,0)، (2,0) و (3,0)، فمن الواضح إنّ $\left(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_6\right)/H$ تماثل $\mathbb{Z}_4$، لاحظ إنّ هذا ما كنا نتوقعه؛ لأن في زمرة العامل مقياس H، كل شيء في H يصبح العنصر المحايد؛ أي إننا نضع وبصورة أساسية كل شيء في H مساويًا للصفر، وعليه العامل الثاني $\mathbb{Z}_6$ في الضرب المباشر $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ بأكمله قد طُوِيَ تاركًا فقط العامل الأول $\mathbb{Z}_4$. ▲

المثال 7.15 حالة خاصة من مبرهنة عامة سنذكرها ونبرهنها، ويجب أن نكون قد اكتسبنا شعورًا حدسيًا لهذه المبرهنة من ناحية طي أحد *العوامل إلى العنصر المحايد*.

8.15 مبرهنة لتكن $G = H \times K$ الضرب المباشر للزمر H و K، عندئذٍ، $\overline{H}=\{(h,e)\mid h\in H\}$ زمرة جزئية ناظمية من G، أيضًا $G/\overline{H}$ تماثل K بطريقة طبيعية، بصورة مشابهة $G/\overline{K}\simeq H$ بطريقة طبيعية.

البرهان ليكن التشاكل $\pi_2:H \times K \to K$، حيث $\pi_2(h,k) = k$. (انظر المثال 8.13)؛ ولأن $\mathrm{Ker}(\pi_2)=\overline{H}$ نرى إنّ $\overline{H}$ زمرة جزئية ناظمية من $H \times K$؛ ولأن π_2 غامر لـِ K، تخبرنا المبرهنة 11.14 إنّ $(H\times K)/\overline{H}\simeq K$. ♦

نستمر بحسابات إضافية لزمر العامل الإبدالية، ولِنُبَيِّنَ كم هو سهل الحساب في زمر العامل، إذا استطعنا الحساب في الزمرة الكاملة، نبرهن المبرهنة الآتية:

9.15 مبرهنة زمرة العامل لزمرة دورية هي دورية.

البرهان لتكن G زمرة دورية مُوَلِّدُها a، ولتكن N زمرة جزئية ناظمية من G، نَدَّعي إنّ مجموعة المشاركة aN تُوَلِّد G/N، يجب أن نحسب قوى aN جميعها، لكن هذا يعادل – في G – حساب قوى الممثل a جميعها، إذ إنّ هذه القوى جميعها تعطي العناصر جميعها في G؛ إذن، قوى aN جميعها تعطي بالتأكيد مجموعات المشاركة لـِ N جميعها، وهكذا G/N دورية. ♦

مثال 10.15 لنحسب زمرة العامل $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle(0,2)\rangle$، حيث يُوَلِّد $(0,2)$ الزمرة الجزئية:

$$H = \{(0,0) , (0,2) , (0,4)\}$$

من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ ورتبتها 3، وهنا يترك العامل الأول $\mathbb{Z}_4$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ وحده، ومن جهة أخرى، العامل $\mathbb{Z}_6$ يطوي بصورة أساسية من خلال زمرة جزئية رتبتها 3، معطيًا زمرة عامل في العامل الثاني رتبتها 2، التي يجب أن تماثل $\mathbb{Z}_2$، وعليه، $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle(0,2)\rangle$ تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ▲

مثال 11.15 لنحسب زمرة العامل $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle(2,3)\rangle$ كن حذرًا! إذ يوجد إغراء كبير بالقول: إننا وضعنا العنصرين 2 من $\mathbb{Z}_4$ و 3 من $\mathbb{Z}_6$ كليهما يساوي صفرًا، وعليه، $\mathbb{Z}_4$ تطوى لزمرة عامل تماثلُ $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_6$ لواحدة تماثل $\mathbb{Z}_3$، وتعطيان زمرة عامل كاملة تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$، فهذا خطأ، لاحظ إنّ:

$$H = \langle(2,3)\rangle = \{(0,0),(2,3)\}$$

رتبتها 2، وهكذا فإنّ $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle(2,3)\rangle$ رتبتها 12 وليس 6، وبوضع $(2,3)$ يساوي صفرًا فلا يجعل $(2,0)$ و $(0,3)$ يساويان صفرًا بصورة منفصلة، وهكذا، فإنّ العوامل لا تطوى بصورة منفصلة.

الزمر الإبدالية المحتملة من الرتبة 12، هي: $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$، ويجب أن نقرر لأي منهما زمرة العامل خاصتنا تماثل، وقد تمّ تمييز هاتين الزمرتين بسهولة؛ لإنّ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ فيها عنصر رتبته 4، و $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ لا تحتوي على عنصر له مثل هذه الرتبة، حيث ندعي إنّ مجموعة المشاركة $(1,0) + H$ رتبتها 4 في زمرة العامل $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/H$، ولإيجاد أصغر قوة لمجموعة مشاركة لتعطي العنصر المحايد في زمرة عامل مقياس H، يجب علينا – باختيار ممثلين – إيجاد القوة الأصغر لممثل في الزمرة الجزئية H، الآن:

$$4(1,0) = (1,0) + (1,0) + (1,0) + (1,0) = (0,0)$$

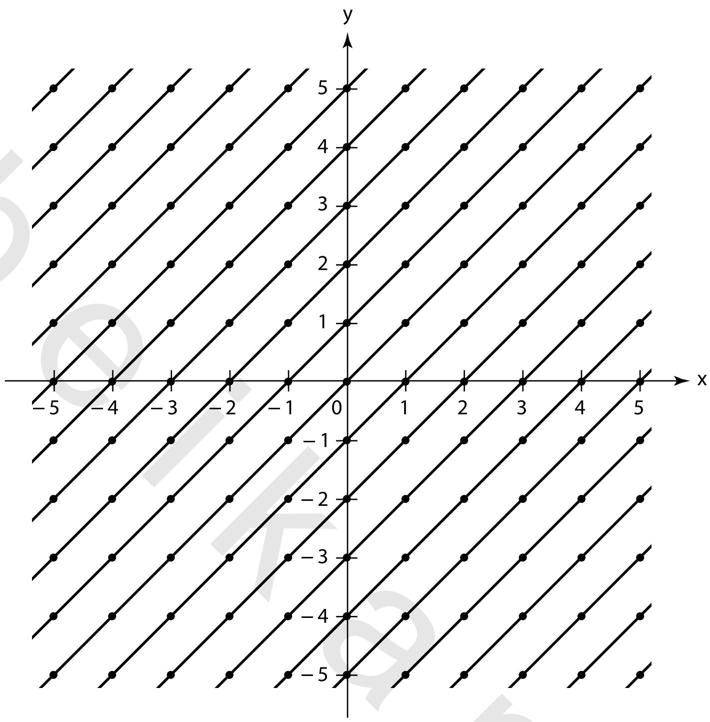
المرة الأولى التي أضيف فيها $(1,0)$ لنفسه ليعطي عنصرًا في H، وهكذا، فإنّ $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)/\langle(2,3)\rangle$ فيها عنصر رتبته (4)، وهي تماثل $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ أو $\mathbb{Z}_{12}$. ▲

مثال 12.15 لنحسب (نصنف كما في المبرهنة 12.11) الزمرة $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle$، يمكننا أن نتخيل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ كالنقاط في المستوى التي كلا إحداثييها أعداد صحيحة، كما أشير بالنقاط في الشكل 13.15، وتتألف الزمرة الجزئية $\langle(1,1)\rangle$ من تلك النقاط التي تقع على الخط $45°$ المار بنقطة الأصل، وقد تمّت الإشارة لها في الشكل، أمّا مجموعة المشاركة $(1,0) +\langle(1,1)\rangle$، فتتألف من تلك النقاط على الخط $45°$ عبر النقطة $(1,0)$، التي تظهر أيضًا في الشكل، وبالاستمرار، نرى إنّ كل مجموعة مشاركة تتألف من تلك النقاط الواقعة على أحد الخطوط $45°$ في الشكل، لنحسب في زمرة العامل إذ يمكننا اختيار الممثلين:

$$\ldots, (-3,0), (-2,0), (-1,0), (0,0), (1,0), (2,0), (3,0), \ldots$$

لمجموعات المشاركة هذه؛ لأن هؤلاء الممثلين يقابلون بالضبط النقاط لـ $\mathbb{Z}$ على محور السينات،

نرى إنّ زمرة العامل $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,1)\rangle$ تماثل $\mathbb{Z}$. ▲



الشكل 13.15

الزمر البسيطة

كما ذكرنا في الفصل السابق، إحدى ميزات زمرة العامل أنها تعطي معلومات صريحة عن بنية الزمرة الكلية، وبالتأكيد، فمن الممكن – أحيانًا – ألا توجد زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة، فمثلاً: تبين المبرهنة 10.10 أن زمرة رتبتها أولية، لا يمكن أن يكون لها أي زمرة جزئية فعلية غير تافهة من أي نوع.

14.15 تعريف تكون الزمرة بسيطة **(Simple)** إذا كانت غير تافهة، وليس لها زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة.

15.15 مبرهنة A_n الزمرة الزوجية من الرتبة n هي زمرة بسيطة لـِ $n \geq 5$.

البرهان انظر التمرين 39. ♦

يوجد كثير من الزمر البسيطة المختلفة عن تلك المعطاة في الأعلى، فعلى سبيل المثال: A_5 رتبتها 60، و A_6 رتبتها 360، وتوجد زمرة بسيطة رتبتها غير أولية – أي 168 – بين هاتين الرتبتين.

التحديد الكامل وتصنيف الزمر البسيطة المنتهية جميعها اكتمل حديثًا، فقد عمل

المئات من الرياضيين على هذه المهمة منذ عام 1950م إلى عام 1980م، يمكن أن يُثْبَت إنّ الزمرة المنتهية لها نوع من التحليل عوامله زمر بسيطة، حيث إنّ هذه العوامل وحيدة وفقًا للترتيب، والوضع مشابه لتحليل الأعداد الصحيحة الموجبة إلى أعداد أولية، ويمكن الآن أن تُستخدم المعرفة الجديدة للزمر البسيطة المنتهية جميعها في حل بعض مسائل مبرهنة الزمر المنتهية.

رأينا في هذا الكتاب إنّ الزمرة الإبدالية البسيطة المنتهية تماثل $\mathbb{Z}_p$ لعدد أولي ما p، وقد نشر **ثومبسون وفِيتْ (Thompson and Fiet)** [21] عام 1963م برهانهما لحدسية قديمة العهد **بِيرنسايد (Burnside)**، بإثبات إنّ كل زمرة بسيطة منتهية غير إبدالية رتبها زوجية، وأُنجز مزيد من الإسهام العظيم في اتجاه التصنيف الكامل من قبل **أشباخر (Aschbacher)** في عقد السبعينيات، وقد أعلن **جريس (Griess)** عام 1980م، أنه بنى زمرة بسيطة "ضخمة" متوقعة رتبتها:

$$808,017,424,794,512,875,886,459,904,961,710{,}757,005{,}754,368,000,000,000$$

وأضاف أشباخر التفاصيل النهائية للتصنيف في آب عام 1980م، إذ ملأت الأوراق البحثية التي أسهمت في التصنيف الكامل 5000 صفحة تقريبًا من صفحات المجلات العلمية.

وبالعودة إلى وصفٍ لتلك الزمر الجزئية الناظمية N من G، بحيث إنّ G/N زمرة بسيطة، بداية نذكر خصائص لتشاكل الزمر إضافة لتلك الواردة في المبرهنة 12.13، حيث ترك برهان هذه الخصائص للتمرينين 35 و 36.

16.15 مبرهنة ليكن $\phi\colon G \to G'$ تشاكل زمر، إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، فإن $\phi[N]$ زمرة جزئية ناظمية من $\phi[G]$، أيضًا إذا كانت N' زمرة جزئية ناظمية من $\phi[G]$، فإن $\phi^{-1}[N']$ زمرة جزئية ناظمية من G.

يمكن أن يُنظر إلى المبرهنة 16.15 بالقول: إنّ تشاكل $\phi\colon G \to G'$ يحفظ الزمر الجزئية الناظمية بين G و$\phi[G]$ ومن المهم ملاحظة إنّ $\phi[N]$ يمكن ألّا تكون ناظمية في G'، حتى إن كانت N ناظمية في G، فمثلاً، في التشاكل $\phi\colon \mathbb{Z}_2 \to S_3$، حيث $\phi(0) = \rho_0$ و $\phi(1) = \mu_1$ لدينا $\mathbb{Z}_2$ زمرة جزئية ناظمية من نفسها، لكن $\{\rho_0, \mu_1\}$ ليست زمرة جزئية ناظمية من S_3، يمكننا الآن أن نَصِفَ متى تكون G/N زمرة بسيطة.

17.15 تعريف **الزمرة الجزئية الناظمية الأعظمية من زمرة (maximal normal subgroup of a group)** G، هي زمرة جزئية ناظمية M لا تساوي G، حيث إنه لا يوجد زمرة جزئية ناظمية فعلية N من G تحوي M فعليًا. ■

18.15 مبرهنة M زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G، إذا وفقط إذا كانت G/M بسيطة.

البرهان لتكن M زمرة جزئية ناظمية أعظمية من G، وليكن التشاكل القانوني $\gamma : G \to G/M$ المعطى في المبرهنة 9.14. الآن، γ^{-1} لأي زمرة جزئية ناظمية فعلية غير تافهة من G/M هي زمرة جزئية ناظمية فعلية من G تحتوي فعليًا على M؛ لكن M أعظمية، وعليه، هذا لا يمكن أن يحدث، إذن G/M بسيطة.

في المقابل، تبين المبرهنة 16.15 أنه إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G تحتوي فعليًا على M، فإنّ $\gamma[N]$ ناظمية في G/M، أيضًا، إذا كان $N \neq G$، فإنّ:

$$\gamma[N] \neq \{M\} \text{ و } \gamma[N] \neq G/M$$

وعليه، إذا كانت G/M بسيطة، بحيث لا يمكن أن توجد $\gamma[N]$ كهذه، فلا يمكن أن توجد N كهذه، وهكذا M أعظمية. ♦

مركز الزمر الجزئية وزمر المُبَدِّلات الجزئية

كل زمرة G غير إبدالية لها زمرتان جزئيتان ناظميتان مهمتان، المركز $Z(G)$ لـ G وزمرة المُبَدِّلات الجزئية C من G. (الحرف Z من الكلمة الألمانية (zentrum) ويعني المركز). عُرِّفَ المركز $Z(G)$ بـ:

$$Z(G) = \{ z \in G \mid zg = gz \text{ لكل } g \in G\}$$

بَيَّن التمرين 52 من الفصل 5 إنّ $Z(G)$ زمرة جزئية إبدالية من G؛ ولإنّ لكل $g \in G$ و $z \in Z(G)$ لدينا $gzg^{-1} = zgg^{-1} = ze = z$، فنرى في الحال إنّ $Z(G)$ زمرة جزئية ناظمة من G، وإذا كانت G إبدالية، فإنّ $Z(G) = G$؛ في هذه الحالة المركز غير مفيد.

19.15 مثال المركز لزمرة G دائمًا يتضمن العنصر المحايد e، ومن الممكن أن يكون $Z(G) = \{e\}$، في هذه الحالة نقول: إنّ **المركز لـ G (the center of) تافهٌ (trivial)**، فمثلاً تَفَحُّصُ الجدول 8.8 للزمرة S_3 يُبَيِّنُ لنا إنّ $Z(S_3) = \{\rho_0\}$، وهكذا المركز لـ S_3 تافه، (هذه حالة خاصة للتمرين 38، تُبَيِّنُ إنّ المركز للزمر غير الإبدالية جميعها ذوات الرتبة pq لأعداد أولية p و q هو تافه)، وبناءً على ذلك، فالمركز لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_5$ يجب أن يكون $\{\rho_0\} \times \mathbb{Z}_5$، والذي يماثل $\mathbb{Z}_5$. ▲

بالعودة إلى زمرة المُبَدِّلات الجزئية، تذكر أنه بتكوين زمرة العامل لـ G مقياس زمرة جزئية ناظمية N، إذ نضع بصورة أساسية العناصر جميعها في G، التي في N على أنها تساوي e؛ لإنّ N تمثل محايدنا الجديد في زمرة العامل، حيث تشير هذه إلى استخدام آخر لزمر العامل، لنفترض – على سبيل المثال – أننا ندرس البنية لزمرة غير إبدالية G، ولأن المبرهنة 12.11 تعطي معلومات كاملة عن البنية لكل الزمر الإبدالية الصغيرة صغرًا كافيًا، فمن الممكن أن يكون مشوقًا أن نحاول تكوين زمرة إبدالية تشبه G قدر الإمكان – نسخة إبدالية لـ G – بالبدء بـ G، ثَمَّ اشتراط إنّ $ab = ba$ لكل a و b في بنية زمرتنا الجديدة، ولاشتراط إنّ $ab = ba$ نقول إنّ: $ab\,a^{-1}\,b^{-1} = e$ في زمرتنا الجديدة، فالعنصر $aba^{-1}b^{-1}$ في زمرة هو **مُبَدِّل في الزمرة (commutator of the group)**. وعليه، نرغب في المحاولة بتكوين نسخة إبدالية لـ G باستبدال كل مُبَدِّل في الزمرة بـ e، ومن الملاحظة الأولى لهذه الفقرة، علينا محاولة تكوين زمرة العامل لـ G مقياس الزمرة الجزئية الناظمية الصغرى، حيث يمكننا أن نجد أنها

تحوي المُبَدِّلات كلها التي في G.

20.15 مبرهنة لتكن G زمرة، ومجموعة المُبَدِّلات $aba^{-1}b^{-1}$ لـ $a,b \in G$ كلها تُوَلِّدُ زمرة جزئية C **(زمرة المُبَدِّلات الجزئية) (the commutator subgroup)** من G. فالزمرة الجزئية C زمرة جزئية ناظمية من G، علاوة على ذلك، إذا كانت N زمرة ناظمية من G، فإنّ G/N إبدالية، إذا وفقط إذا كان $C \leq N$.

البرهان بالتأكيد المُبَدِّلات تولِّد زمرة جزيئة C، ويجب أن نثبت أنها ناظمية في G، لاحظ إنّ المعكوس $(aba^{-1}b^{-1})^{-1}$ لمُبدِّل هو من جديد مُبَدِّل – أي $bab^{-1}a^{-1}$ – و $e = eee^{-1}e^{-1}$ أيضًا مُبَدِّل، وعليه، تُبَيِّن المبرهنة 6.7 إنّ C تتألف بالضبط من حواصل الضرب المنتهية من مُبَدِّلات. يجب أن نثبت لـ $x \in C$، إنّ $g^{-1}xg \in C$ لكل $g \in G$، أو أنه إذا كانت x ضرب مُبَدِّلات، فكذلك $g^{-1}xg$ لكل $g \in G$، وبإدخال $e = gg^{-1}$ بين كل ضرب للمُبَدِّلات يظهر في x، نرى أنه يكفي أن نثبت لكل مُبَدِّل $cdc^{-1}d^{-1}$ أن $g^{-1}(cdc^{-1}d^{-1})g$ في C؛ لكن:

$$\begin{aligned}
g^{-1}(cdc^{-1}d^{-1})g &= (g^{-1}cdc^{-1})(e)(d^{-1}g)\\
&= (g^{-1}cdc^{-1})(gd^{-1}dg^{-1})(d^{-1}g)\\
&= [(g^{-1}c)d(g^{-1}c)^{-1}d^{-1}][dg^{-1}d^{-1}g],
\end{aligned}$$

الذي هو في C، إذن، C ناظمية في G.

ما بقي من المبرهنة واضح، إذا ما كنا قد اكتسبنا الإحساس المناسب بزمر العامل، فلا يمكن أن نتخيل بهذه الطريقة، لكن استنتاج إنّ G/C إبدالية يأتي من:

$$\begin{aligned}
(aC)(bC) &= abC = ab(b^{-1}a^{-1}ba)C\\
&= (abb^{-1}a^{-1})baC = baC = (bC)(aC).
\end{aligned}$$

علاوة على ذلك، إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G، و G/N إبدالية، فإنّ $(a^{-1}N)(b^{-1}N) = (b^{-1}N)(a^{-1}N)$، أي إنّ: $aba^{-1}b^{-1}N = N$،
وهكذا $aba^{-1}b^{-1} \in N$ و $C \leq N$، أخيرًا، إذا كانت $C \leq N$، فإنّ:

$$\begin{aligned}
(aN)(bN) &= abN = ab(b^{-1}a^{-1}ba)N\\
&= (abb^{-1}a^{-1})baN = baN = (bN)(aN).
\end{aligned}$$

♦

21.15 مثال وجدنا إنّ أحد المُبَدِّلات للزمرة S_3 في الجدول 8.8 هو $\rho_1\mu_1\rho_1^{-1}\mu_1^{-1} = \rho_1\mu_1\rho_2\mu_1 = \mu_3\mu_2 = \rho_2$ وبصورة مشابهة نجد إنّ $\rho_2\mu_1\rho_2^{-1}\mu_1^{-1} = \rho_2\mu_1\rho_1\mu_1 = \mu_2\mu_3 = \rho_1$. وعليه، زمرة المُبَدِّلات الجزئية C من S_3 تحوي A_3؛ لإنّ A_3 زمرة جزئية ناظمية من S_3 و S_3/A_3 إبدالية، فإنّ المبرهنة 20.15 تبين إنّ $C = A_3$. ▲

■ تمارين 15

حسابات

صَنِّف الزمرة المعطاة في التمارين من 1 إلى 12 وفقًا للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولُّد:

1. $(\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_4)/\langle(0,1)\rangle$

2. $(\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_4)/\langle(0,2)\rangle$

3. $(\mathbb{Z}_2\times \mathbb{Z}_4)/\langle(1,2)\rangle$

4. $(\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_8)/\langle(1,2)\rangle$

5. $(\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}_8)/\langle(1,2,4)\rangle$

6. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z})/\langle(0,1)\rangle$

7. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(1,2)\rangle$

8. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z})/\langle(1,1,1)\rangle$

9. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z}_4)/\langle(3,0,0)\rangle$

10. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z}_8)/\langle(0,4,0)\rangle$

11. $(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})/\langle(2,2)\rangle$

12. $(\mathbb{Z}\times \mathbb{Z}\times \mathbb{Z})/\langle(3,3,3)\rangle$

13 . أوجد كلاً من المركز $Z(D_4)$ وزمرة المُبَدِّلات الجزئية C من الزمرة D_4 لتناظرات المربع في الجدول 12.8.

14. أوجد كلاً من المركز وزمرة المُبَدِّلات الجزئية لـِ $\mathbb{Z}_3 \times S_3$.

15. أوجد كلاً من المركز وزمرة المُبَدِّلات الجزئية لـِ $S_3 \times D_4$.

16. صِف الزمر الجزئية كلها ذوات الرتب ≤ 4 من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$، وصَنِّفْ في كل حالة زمرة العامل لـِ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ مقياس الزمرة الجزئية للمبرهنة 12.11، أي أن تَصِفَ الزمرة الجزئية، وتقول إنّ: زمرة العامل لـِ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ مقياس الزمرة الجزئية تماثل $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$، أو أيًّا كانت الحالة. [مساعدة: $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ لها ست زمر جزئية دورية مختلفة من الرتبة 4. صفها بإعطاء مُولِّد، مثل الزمرة الجزئية $\langle(1,0)\rangle$، توجد زمرة جزئية واحدة رتبتها 4 تماثل زمرة كلاين الرباعة، توجد ثلاث زمر جزئية من الرتبة 2].

مفاهيم

في التمرينين 17 و 18 صحِّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إن كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

17. المركز لزمرة G يحتوي العناصر من G كلها، التي تَتَبَدَّل مع عناصر G كلها.

18. زمرة المُبَدِّلات الجزئية من زمرة G، هي $\{a^{-1}b^{-1}ab|\ a, b \in G\}$.

19. **ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:**

________ أ. كل زمرة عامل لزمرة دورية هي دورية.

________ ب. زمرة عامل لزمرة غير دورية، هي مرة أخرى غير دورية.

________ جـ. $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع ليس لها عنصر رتبته 2.

________ د. $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع فيها عناصر رتبها n لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

________ هـ. $\mathbb{R} / \mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع فيها عدد لا نهائي من عناصر رتبها 4.

________ و. إذا كانت زمرة المُبَدِّلات الجزئية C من زمرة G هي $\{e\}$، فإنّ G إبدالية.

________ ز. إذا كانت G/H إبدالية، فإنّ زمرة المُبَدِّلات الجزئية C من G تحوي H.

________ ح. زمرة المُبَدِّلات الجزئية من زمرة بسيطة G يجب أن تكون G نفسها.

________ ط. زمرة المُبَدِّلات الجزئية من زمرة بسيطة غير إبدالية G يجب أن تكون G نفسها.

________ ي. الزمر البسيطة المنتهية غير التافهة كلها لها رتب أولية.

في التمارين من 20 إلى 23، لتكن F زمرة الجمع للدوال التي ترسل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، ولتكن F^* زمرة الضرب لعناصر F كلها، التي لا تأخذ القيمة 0 عند أي نقطة في $\mathbb{R}$.

20. لتكن K الزمرة الجزئية من F المتكونة من الدوال الثابتة. أوجد زمرة جزئية من F تماثل F/K.

21. لتكن K^* الزمرة الجزئية من F المتكونة من الدوال الثابتة غير الصفرية. أوجد زمرة جزئية من F^* تماثل F^*/K^*.

22. لتكن K الزمرة الجزئية للدوال المتصلة في F، فهل يمكنك إيجاد عنصر في F/K له الرتبة 2؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

23. لتكن K^* الزمرة الجزئية من F المتكونة من الدوال المتصلة في F^*، فهل يمكنك إيجاد عنصر في F^*/K^* له الرتبة 2؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

في التمارين من 24 إلى 26، لتكن U زمرة الضرب $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$:

24. ليكن $z_0 \in U$. أثبت إنّ $z_0U = \{z_0 z \mid z \in U\}$ زمرة جزئية من U، واحسب U/z_0U.

25. أي زمرة ذكرناها في الكتاب تماثل $U/\langle -1 \rangle$؟

26. ليكن $\zeta_n = \cos(2\pi/n) + i \sin(2\pi/n)$، حيث $n \in \mathbb{Z}^+$. فلأي زمرة ذكرناها تماثل $U/\langle \zeta_n \rangle$؟

27. أي زمرة ذكرت في الكتاب تماثل زمرة الجمع $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$؟

28. أعط مثالًا لزمرة G ليس لها أي عنصر رتبته منتهية أكبر من 1، لكن لها زمرة عامل G/H رتب عناَصرها جميعها منتهية.

29. لتكن H و K زمرتين جزئيتين ناظمتين من زمرة G. أعطِ مثالاً يُبَيِّنُ أنه يمكن أن يكون لدينا $H \simeq K$، بينما G/H لا تماثل G/K.

30. صِف المركز لكل من:

أ. زمرة إبدالية بسيطة.

ب. زمر غير إبدالية بسيطة.

31. صِفْ زمرة المُبَدِّلات الجزئية لكل من:

أ. زمرة إبدالية بسيطة.

ب. زمرة غير إبدالية بسيطة.

براهين مختصرة

32. أعطِ اختصارًا بجملة واحدة لإثبات المبرهنة 9.15.

33. أعطِ اختصارًا بجملتين على الأكثر لإثبات المبرهنة 18.15.

براهين

34. أثبت أنه إذا كانت G زمرة منتهية تحوي زمرة جزئية غير تافهة دليلها 2 في G، فإن G ليست بسيطة.

35. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر، ولتكن N زمرة جزئية ناظمية من G، فأثبت إنّ $\phi[N]$ زمرة جزئية ناظمية من $\phi[G]$.

36. ليكن $\phi: G \to G'$ تشاكل زمر، ولتكن N' زمرة جزئية ناظمية من G'، فأثبت إنّ $\phi^{-1}[N']$ زمرة جزئية ناظمية من G.

37. أثبت أنه إذا كانت G غير إبدالية، فإنّ زمرة العامل $G/Z(G)$ ليست دورية. [*مساعدة*: أثبت الإيجاب المعاكس المكافئ – أي إنه إذا كانت $G/Z(G)$ دورية، فإنّ G إبدالية. (ولهذا السبب $Z(G)$ $(= G$).]

38. باستخدام التمرين 37، أثبت إنّ زمرة غير إبدالية G رتبتها pq، حيث p و q عددان أوليّان، لها مركز تافه.

39. أثبت إنّ A_n بسيطة لِـ $n \geq 5$ باتباع الخطوات والمساعدات المعطاة.

أ. أثبت إنّ A_n تحتوي الدورات الثلاثية كلها، إذا كان $n \geq 3$.

ب. أثبت إنّ A_n تَتَوَلَّدُ من الدورات الثلاثية لِـ $n \geq 3$.

[*مساعدة*: لاحظ إنّ $(a, b)(c, d) = (a, c, b)(a, c, d)$ و $(a,c)(a,b) = (a, b, c)$].

جـ. ليكن r و s عنصرين محددين من $\{1, 2, \ldots, n\}$ لـ $n \geq 3$. أثبت إنّ A_n مُوَلَّدَةٌ من خلال n من الدورات الثلاثية "الخاصة" على الصورة (r, s, i) لِـ $1 \leq i \leq n$.

[مساعدة: أثبت إنّ الدورات الثلاثية جميعها حاصل ضرب لدورات ثلاثية «خاصة» بحساب:

$$(r,s,i)^2،\ (r,s,j)(r,s,i)^2.\ (r, s, j)^2\ (r,s,i)$$

و

$$(r,s,i)^2\ (r,s,k)(r,s,j)^2\ (r,s,i)$$

لاحظ إنّ حواصل الضرب هذه تعطي الأنواع الممكنة جميعها للدورات الثلاثية].

د. لتكن N زمرة جزئية ناظمية من A_n لـ $n \geq 3$، فأثبت أنه إذا كانت N تحتوي على دورة ثلاثية، فإنّ $N = A_n$. [*مساعدة*: أثبت إنّ $(r, s, i) \in N$ يؤدي إلى $(r, s, j) \in N$ لـ $j = 1, 2, \ldots, n$ بحساب $((r, s)(i, j))\,(r, s, i)^2\,((r, s)(i, j))^{-1}$].

هـ. لتكن N زمرة جزئية ناظمية غير تافهة من A_n لـ $n \geq 5$، فأثبت إنّ واحدة من الحالات الآتية يجب أن تتحقق، واستنتج في كل حالة إنّ $N = A_n$.

حالة *I* N تحتوي على دورة ثلاثية.

حالة *II* N تحتوي على حاصل ضرب لدورات منفصلة، واحدة منها على الأقل طولها أكبر من 3. [مساعدة: افترض إنّ N تحتوي على حاصل ضرب منفصل على الصورة

$\sigma = \mu(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. أثبت إنّ $\sigma^{-1}(a_1, a_2, a_3)\sigma(a_1, a_2, a_3)^{-1}$ في N، واحسبه].

حالة *III* N تحتوي على حاصل ضرب منفصل على الصورة $\sigma = \mu(a_4, a_5, a_6)(a_1, a_2, a_3)$.

[مساعدة: أثبت إنّ $\sigma^{-1}(a_1, a_2, a_4)\sigma(a_1, a_2, a_4)^{-1}$ في N، واحسبه].

حالة *IV* N تحتوي على حاصل ضرب منفصل على الصورة $\sigma = \mu(a_1, a_2, a_3)$، حيث μ حاصل ضرب مناقلات منفصلة. [مساعدة: أثبت إنّ $\sigma^2 \in N$، واحسبه].

حالة *V* N تحتوي على حاصل ضرب منفصل σ على الصورة $\sigma = \mu(a_3, a_4)(a_1, a_2)$، حيث μ حاصل ضرب عدد زوجي من مناقلات منفصلة. [مساعدة: أثبت إنّ $\sigma^{-1}(a_1, a_2, a_3)\,\sigma\,(a_1, a_2, a_3)^{-1}$ في N، واحسبه لتستنتج إنّ $\alpha = (a_2, a_4)(a_1, a_3)$ في N، وباستخدام $n \geq 5$ للمرة الأولى، أوجد $i \neq a_1, a_2, a_3, a_4$ في $\{1, 2, \ldots, n\}$ ثم لتكن $\beta = (a_1\, a_3, i)$. أثبت إنّ $\beta^{-1}\alpha\beta\alpha \in N$، واحسبه].

40. لتكن N زمرة جزئية ناظمية من زمرة G، ولتكن H زمرة جزئية من G، وليكن

$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$. فأثبت إنّ HN زمرة جزئية من G، وهي الزمر الجزئية الأصغر التي تحتوي على كل من N و H.

41. بالرجوع إلى التمرين السابق، لتكن M أيضًا زمرة جزئية ناظمية من G، فأثبت مرة أخرى إنّ NM زمرة جزئية ناظمية من G.

42. أثبت أنه إذا كانت H و K زمرتين جزيئيتين ناظميتين من زمرة G، بحيث إنّ $H \cap K = \{e\}$، فإن $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$. [*مساعدة*: اعتبرالمُبَدِّل

$$hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})\ ]$$

الفصل 16 تأثير الزمرة على مجموعة [1] Group Action On a Set

رأينا أمثلة تبين كيف إنّ الزمر يمكن أن توثّر في الأشياء، مثل زمرة التناظرات لمثلث أو لمربع، وزمرة دورانات مكعب، والزمرة الخطية العامة المؤثرة في $\mathbb{R}^n$، وهكذا، وسنقدم في هذا الفصل الفكرة العامة لتأثير الزمرة على مجموعة، حيث يقدم الفصل الآتي تطبيقًا على العدّ.

الفكرة من تأثير الزمرة

التعريف 1.2 يعرف عملية ثنائية * على مجموعة S لتكون دالة ترسل $S \times S$ إلى S، حيث تعطينا الدالة * قاعدة "لضرب" عنصر s_1 في S، وعنصرٍ s_2 في S؛ لتنتج عنصرًا $s_1 * s_2$ في S.

بوجه عام، لأي مجموعات A و B و C يمكننا أن ننظر إلى الدالة $*: A \times B \to C$ على أنها تعرف "ضربًا"، حيث إنّ أي عنصر a في A ضرب أي عنصر b في B له كقيمة عنصر ما c في C، وبالتأكيد، نكتب $a * b = c$، أو بصورة أكثر بساطة $ab = c$، وسوف نهتم في هذا الفصل بالحالة، حيث X مجموعة، و G زمرة، ولدينا دالة $*: G \times X \to X$. يجب أن نكتب $*(g, x)$ على النحو $g * x$ أو gx.

1.16 تعريف لتكن X مجموعة، و G زمرة. **يعرف التأثير لـ G (an action of)** على X على أنه الدالة $*: G \times X \to X$ التي تحقق:

1. $e*x = x$ لكل $x \in X$.

2. لكل $g_1, g_2 \in G$ ولكل $x \in X$، $(g_1g_2)(x) = g_1(g_2x)$

تحت هذين الشرطين، X هي **مجموعة** **(G–set) G–** . ■

2.16 مثال لتكن X أي مجموعة، ولتكن H زمرة جزئية من الزمرة S_X المؤلفة من كل التباديل لـ X، عندئذ، X هي مجموعة–H، حيث إنّ التأثير لـ $\sigma \in H$ على X هو تأثيره بوصفه عنصرًا في S_X، بحيث إنّ $\sigma x = \sigma(x)$ لكل $x \in X$، وينتج الشرط 2 من تعريف ضرب التباديل بوصفها دالة تركيب، والشرط 1 مباشر من تعريف التبديل المحايد على أنه الدالة المحايدة، لاحظ إنّ – على وجه التخصيص – $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ هي مجموعة – S_n. ▲

ستبين المبرهنة الآتية أنه اذا كانت X مجموعة –G، وكان $g \in G$، فإنّ الدالة $\sigma_g: X \to X$ المعرفة بـ $\sigma_g(x) = gx$ هي تبديل لـ X، وأنه يوجد تشاكل $\phi: G \to S_X$، بحيث إنّ تأثير G على X هو أساسًا – المثال 2.16 – التأثير لزمرة الصور الجزئية $H = \phi[G]$ من S_X على X. تأثيرات كهذه للزمر الجزئية من S_X على X تَصِفُ تأثيرات الزمر المحتملة كلها على X، وعند دراسة المجموعة X، فإنّ التأثيرات باستخدام الزمر الجزئية من S_X تكفي، على أي حال، تستخدم أحيانًا مجموعة X لدارسة G عن طريق تأثير الزمرة G على X، إذن نحتاج إلى المفهوم الأكثر عمومًا والمعطى بالتعريف 1.16.

3.16 مبرهنة لتكن X مجموعة–G، ولكل $g \in G$ الدالة $\sigma_g: X \to X$، المعرفة بـ $\sigma_g(x) = gx$ لـ $x \in X$ هي تبديل لـ X، أيضًا، الدالة $\phi: G \to S_X$ المعرفة بـ $\phi(g) = \sigma_g$ هي تشاكل، ولها الخاصية $\phi(g)(x) = gx$.

البرهان لإثبات أن σ_g تبديل لـ X، يجب أن نثبت أنه دالة أحادية لـ X وبصورة غامرة لنفسها. افترض أنّ

1. هذا الفصل متطلب سابق فقط للفصلين 17 و 36.

$\sigma_g(x_1) = \sigma_g(x_2)$ لـ $x_1, x_2 \in X$، عندئذٍ $gx_1 = gx_2$، بناءً على ذلك، $g^{-1}(gx_1) = g^{-1}(gx_2)$، وباستخدام الشرط 2 من التعريف 1.16، نرى إنّ $(g^{-1}g)x_1 = (g^{-1}g)x_2$ وهكذا $ex_1 = ex_2$. وعليه، فالشرط 1 من التعريف يُنْتج $x_1 = x_2$، وهكذا σ_g أحادي. الشرطان من التعريف يبينان إنّ لـ $x \in X$ لدينا $\sigma_g(g^{-1}x) = g(g^{-1})x = (g\,g^{-1})x = ex = x$، وهكذا σ_g ترسل X بصورة غامرة إلى X. وعليه، σ_g في الواقع تبديل.

لإثبات إنّ الدالة $\phi: G \to S_X$ المعرفة بـ $\phi(g) = \sigma_g$ تشاكل، يجب أن نثبت إنّ $\phi(g_1g_2) = \phi(g_1)\,\phi(g_2)$ لكل $g_1, g_2 \in G$، حيث نثبت المساواة لهذين التبديلين في S_X وذلك بإثبات إنّ كليهما يأخذ $x \in X$ إلى العنصر نفسه، ونحصل باستخدام الشرطين في التعريف 1.16 وقاعدة تركيب الدوال على:

$$\begin{aligned}\phi(g_1g_2)(x) &= \sigma_{g_1g_2}(x) = (g_1g_2)x = g_1(g_2x) = g_1\sigma_{g_2}(x) = \sigma_{g_1}(\sigma_{g_2}(x))\\ &= (\sigma_{g_1}\circ\sigma_{g_2})(x) = (\sigma_{g_1}\sigma_{g_2})(x) = (\phi(g_1)\phi(g_2))(x).\end{aligned}$$

وعليه، فإنّ ϕ تشاكل، وتنتج الخاصية المذكورة لِـ ϕ مباشرة؛ لإنّ لدينا من تعاريفنا

$$\phi(g)(x) = \sigma_g(x) = gx$$ ♦

ينتج من المبرهنة السابقة والمبرهنة 15.13 أنه إذا كانت X مجموعة–G، فإنّ المجموعة الجزئية من G التي تترك كل عنصر في X ثابتًا، هي زمرة جزئية ناظمية من G، ويمكننا أن نَعدّ X مثل مجموعة–G/N، حيث يعرَّف التأثير لمجموعة المشاركة gN على X بِـ $(gN)x = gx$ لكل $x \in X$، وإذا كانت $N = \{e\}$، فإنّ العنصر المحايد لِـ G هو العنصر الوحيد الذي يترك كل $x \in X$ ثابتاً؛ عندها نقول: إنّ لـ G **تأثير أمين (acts faithfully)** على X. زمرة G **متعدية (transitive)** على مجموعة–G، إذا كان لكل $x_1, x_2 \in X$ يوجد $g \in G$، بحيث إنّ $gx_1 = x_2$، لاحظ إنّ G متعدية على X، إذا وفقط إذا كانت الزمرة الجزئية $\phi[G]$ من S_X متعدية على X، كما عُرِّف في التمرين 49 للفصل 8.

فيما سيأتي سوف نقدم أمثلة إضافية لمجموعات–G.

مثال 4.16 كل زمرة G هي نفسها مجموعة–G، حيث إنّ التأثير في $g_2 \in G$ من خلال $g_1 \in G$ أعطي بضرب من اليسار، أي إنّ $*(g_1, g_2) = g_1g_2$. إذا كانت H زمرة جزئية من G، يمكننا أيضًا أن نعدّ G بوصفها مجموعة–H، حيث $*(h,g) = hg$. ▲

مثال 5.16 لتكن H زمرة جزئية من G، عندئذ G هي مجموعة–H بالنسبة إلى الترافق، حيث $*(h, g) = hgh^{-1}$ لِـ $g \in G$ و $h \in H$، فالشرط الأول واضح، ولاحظ بالنسبة إلى الشرط 2 إنّ:

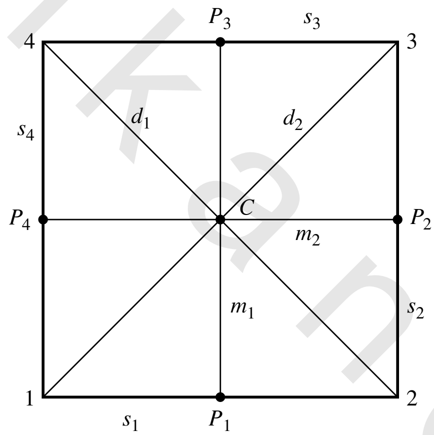
$$*(h_1h_2, g) = (h_1h_2)g(h_1h_2)^{-1} = h_1(h_2gh_2^{-1})h_1^{-1} = *(h_1,*(h_2, g)).$$

دائمًا نكتب هذا التأثير لِـ H في G بالنسبة إلى الترافق على النحو: hgh^{-1}، وسوف يسبب الاختصار hg الموصوف قبل التعريف إرباكًا فظيعًا مع عملية الزمرة لِـ G. ▲

مثال 6.16 للطلاب الذين درسوا فضاء المتجهات مع قياسات حقيقية (أو مركبة)، نَذْكُرُ إنّ المسلمات $(rs)\mathbf{v} = r(s\mathbf{v})$ و $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ للقياسين r و s وللمتجه $\mathbf{v}$، تُبَيِّنُ إنّ مجموعة المتجهات هي مجموعة–$\mathbb{R}^*$ (أو مجموعة–$\mathbb{C}^*$) لزمرة الضرب للقياسات غير الصفرية. ▲

مثال 7.16 لتكن H زمرة جزئية من G، ولتكن L_H مجموعة كل مجموعات المشاركة اليسرى لـ H، عندئذ: L_H مجموعة$-G$، حيث التأثير لـ $g \in G$ في مجموعة المشاركة اليسرى xH معطًى بـ $g(xH) = (gx)H$. لاحظ أن هذا التأثير حسن التعريف: إذا كانت $yH = xH$، فإن $y = xh$ لعنصر ما $h \in H$، و $g(yH) = (gy)H = (gxh)H = (gx)(hH) = (gx)H = g(xH)$ وتبين سلسلة من التمارين إنّ كل مجموعة$-G$ تماثل واحدة يمكن أن تُشكَّل باستخدام مجموعات المشاركة اليسرى هذه بوصفها لبنات بناء. (انظر التمارين من 14 إلى 17). ▲

مثال 8.16 لتكن G الزمرة $D_4 = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \mu_1, \mu_2, \delta_1, \delta_2\}$ زمرة تناظرات المربع الموصوفة في المثال 10.8، وعرضنا في الشكل 9.16 المربع بروؤس 1، 2، 3، 4 كما في الشكل 11.8، ورمزنا أيضًا للجوانب بـ s_1، s_2، s_3، s_4 للقطرين بـ d_1 و d_2، للمحورين الأفقي والعمودي بـ m_1 و m_2، لنقطة المركز بـ C، ولنقاط منتصف الأضلاع s_i بـ P_i. تذكر إنّ P_i تناظر دوران المربع عكس عقارب الساعة بمقدار $\pi i/2$ بالتقدير الدائري، μ_i تناظر انقلابًا على المحور m_i، و δ_i تناظر انقلابًا على القطر d_i.



الشكل 9.16

الجدول 10.16

	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ρ_0	1	2	3	4	s_1	s_2	s_3	s_4	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_1	P_2	P_3	P_4
ρ_1	2	3	4	1	s_2	s_3	s_4	s_1	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_2	P_3	P_4	P_1
ρ_2	3	4	1	2	s_3	s_4	s_1	s_2	m_1	m_2	d_1	d_2	C	P_3	P_4	P_1	P_2
ρ_3	4	1	2	3	s_4	s_1	s_2	s_3	m_2	m_1	d_2	d_1	C	P_4	P_1	P_2	P_3
μ_1	2	1	4	3	s_1	s_4	s_3	s_2	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_1	P_4	P_3	P_2
μ_2	4	3	2	1	s_3	s_2	s_1	s_4	m_1	m_2	d_2	d_1	C	P_3	P_2	P_1	P_4
δ_1	3	2	1	4	s_2	s_1	s_4	s_3	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_2	P_1	P_4	P_3
δ_2	1	4	3	2	s_4	s_3	s_2	s_1	m_2	m_1	d_1	d_2	C	P_4	P_3	P_2	P_1

لتكن $X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, C, P_1, P_2, P_3, P_4\}$

عندئذٍ يمكن أن تُعدّ X بوصفها مجموعة$-D_4$ على نحوٍ طبيعي، والجدول 10.16 يَصفُ بالكامل التأثيرَ لـ D_4 على X، وقد أعطي ليزود بإيضاحاتٍ هندسيةٍ حول الأفكار التي سَتُقَدَم، ويجب أن نتأكد قبل الاستمرار من فهم كيفية تنظيم هذا الجدولِ. ▲

زمرة توحد الخصائص الجزئية

لتكن X مجموعة$-G$، وليكن $x \in X$ و $g \in G$؛ لذا، من المهم معرفة متى $gx = x$.

لتكن $X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$ و $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$

11.16 مثال لتكن X المجموعة $-D_4$ المعطاة في المثال 8.16. لدينا:

$$X_{\rho_0} = X\,,\ X_{\rho_1} = \{C\},\ X_{\mu_1} = \{s_1, s_3, m_1, m_2, C, P_1, P_3\}$$

أيضًا، مع $G = D_4$

$$G_{d_1} = \{\rho_0, \rho_2, \delta_1, \delta_2\} \qquad G_{s_3} = \{\rho_0, \mu_1\}, \qquad G_1 = \{\rho_0, \delta_2\},$$

سنترك حسابات الأخريات X_σ و G_x للتمرينين 1 و 2. ▲

لاحظ إنّ المجموعات الجزئية G_x المعطاة في المثال السابق هي – في كل حالة – زمر جزئية من G، وهذا صحيح بوجه عام.

12.16 مبرهنة لتكن X مجموعة$-G$، فإنّ G_x زمرة جزئية من G لكل $x \in X$.

البرهان ليكن $x \in X$، وليكن $g_1, g_2 \in G_x$، عندئذٍ $g_1 x = x$ و $g_2 x = x$، وبناءً على ذلك، $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x) = g_1 x = x$ وهكذا $g_1 g_2 \in G_x$ و G_x مغلقة بالنسبة إلى العملية المتولدة لِـ G، وطبعًا $ex = x$، وهكذا $e \in G_x$. إذا كان $g \in G_x$ فإنّ $gx = x$ وهكذا

$$x = e\,x = (g^{-1}g)\,x = g^{-1}(gx) = g^{-1}x$$

وبناءً على ذلك، $g^{-1} \in G_x$، وعليه، G_x زمرة جزئية من G. ♦

13.16 تعريف لتكن X مجموعة$-G$، وليكن $x \in X$. الزمرة الجزئية G_x **هي زمرة توحد الخصائص الجزئية لِـ x (isotropy subgroup of)**. ■

مدارات

للمجموعة$-D_4$، X في المثال 8.16 مع جدول التأثير في الجدول 10.16، نُقلت العناصر في المجموعة الجزئية $\{1, 2, 3, 4\}$ إلى عناصر لهذه المجموعة الجزئية نفسها بالنسبة إلى التأثير من خلال D_4، إضافة إلى ذلك، كلّ من العناصر 1، و2، و3 و4 يحمل إلى العناصر الأخرى كلها للمجموعة الجزئية، من خلال العناصر المختلفة لِـ D_4، سنتابع إثبات إنّ كل مجموعة$-G$، X يمكن تجزئتها إلى مجموعات جزئية من هذا النوع.

14.16 مبرهنة لتكن X مجموعة$-G$، ولِـ $x_1, x_2 \in X$ ليكن $x_1 \backsim x_2$، إذا وفقط إذا كان يوجد $g \in G$، بحيث إنّ $gx_1 = x_2$، عندئذٍ $\sim$ علاقة تكافؤ على X.

البرهان لكل $x \in X$، لدينا $ex = x$، وهكذا $x \backsim x$ و $\sim$ منعكسة.

افترض $x_1 \backsim x_2$، وهكذا $gx_1 = x_2$ لعنصر ما $g \in G$، عندئذ
$g^{-1}x_2 = g^{-1}(gx_1) = (g^{-1}g)x_1 = ex_1 = x_1$، وعليه، $x_2 \backsim x_1$ و $\sim$ متناظرة.

أخيرًا، إذا كان $x_1 \backsim x_2$ و $x_2 \backsim x_3$، فإنّ $g_1x_1 = x_2$ و $g_2x_2 = x_3$ لعناصر ما $g_1, g_2 \in G$. عندئذٍ $(g_2\, g_1)\, x_1 = g_2(g_1x_2) = g_2x_2 = x_3$ إذن، $x_1 \backsim x_3$ و $\sim$ متعدية. ♦

15.16 تعريف لتكن X مجموعة$-G$، وكل خلية في التجزئة لعلاقة التكافؤ الموصوفة في المبرهنة 14.16، هي **مدار في X (orbit in) بالنسبة إلى G (under)**. إذا كان $x \in X$، فإنّ الخلية التي تحتوي على x هي **المدار لـِ x (orbit of)**، وقد رمزنا لهذه الخلية بـ Gx. ■

تقع العلاقة بين المدارات في X وبنية الزمرة لـ G في صميم التطبيقات التي تظهر في الفصل 17، وتقدم المبرهنة الآتية هذه العلاقة، تذكر أننا لمجموعة X استخدمنا $|X|$ ليرمز الى العدد الرئيس (عدد العناصر في) لـ X، و $(G{:}H)$ ليرمز الى دليل الزمرة الجزئية H من G.

16.16 مبرهنة لتكن X مجموعة$-G$، ولتكن $x \in X$، عندئذٍ $|Gx| = (G{:}\ G_x)$. إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ $|Gx|$ قاسم $|G|$.

البرهان نعرِّف دالة أحادية ψ من Gx وبصورة غامرة إلى عائلة مجموعات المشاركة اليسرى لـِ G_x في G. ليكن $x_1 \in Gx$، عندئذٍ يوجد $g_1 \in G$، بحيث إنّ $g_1\ x = x_1$، ونُعَرِّفُ $\psi(x_1)$ لتكون المجموعة المشاركة اليسرى g_1G_x لـِ G_x، ويجب أن نثبت إنّ هذه الدالة حسنة التعريف، مستقلة عن اختيار $g_1 \in G$، بحيث إنّ $g_1x = x_1$، افترض أيضًا إنّ $g_1'\ x = x_1$، عندئذ، $g_1x = g_1'\ x$، وهكذا $g_1^{-1}(g_1x) = g_1^{-1}(g_1'x)$، ومنها نستنتج إنّ $x = (g_1^{-1}g_1')x$، إذن $g_1^{-1}\ g_1 \in G_x$ ومن ثم $g'_1 \in g_1G_x$ و $g_1G_x = g'_1G_x$ وعليه، فإنّ الدالة ψ حسنة التعريف.

لإثبات إنّ الدالة ψ أحادية، افترض أنّ $x_1, x_2 \in Gx$ و $\psi(x_1) = \psi(x_2)$، عندئذٍ يوجد

$g_1, g_2 \in G$، بحيث إنّ $x_1 = g_1x$، $x_2 = g_2x$ و $g_2 \in g_1G_x$، وعندئذٍ $g_2 = g_1g$ لعنصر ما $g \in G_x$، وهكذا $x_2 = g_2\, x = g_1\,(gx) = g_1x = x_1$. إذن ψ أحادية.

أخيرًا، سنثبت إنّ كل مجموعة مشاركة يسرى لـِ G_x في G هي على الصورة $\psi\,(x_1)$ لعنصر ما $x_1 \in Gx$، لتكن g_1G_x مجموعة مشاركة يسرى، عندئذ، إذا كان $g_1\ x = x_1$، فلدينا $g_1\ G_x = \psi(x_1)$، وعليه، ψ ترسل Gx بصورة أحادية وغامرة إلى مجموعة المجموعات المشاركة اليمنى، وهكذا $|Gx| = (G{:}\ G_x)$.

إذا كان $|G|$ منتهيًا، فإنّ المعادلة $|G| = |G_x|\ (G{:}\ G_x)$ تبين إنّ $|Gx| = (G{:}\ G_x)$ قاسم لـِ $|G|$. ♦

17.16 مثال لتكن X المجموعة $-D_4$ مع جدول تأثير معطًى في الجدول 10.16، مع $G = D_4$، لدينا $G1 = \{1, 2, 3, 4\}$ و $G_1 = \{\rho_0, \delta_2\}$؛ ولأن $|G| = 8$، فلدينا $|G1| = (G{:}\ G_1) = 4$. ▲

يجب ألّا نتذكر فقط معادلة عدد العناصر في المبرهنة 16.16، بل أن نتذكر أيضًا العناصر لـ G التي تنقل x إلى g_1x، فهي بالضبط عناصر مجموعة المشاركة اليسرى g_1G_x، أي إنه إذا كان $g \in G_x$، فإنّ $(g_1g)x = g_1(gx) = g_1x$، ومن ناحية أخرى، إذا كان $g_2x = g_1x$، فإن

$g_1^{-1}\ (g_1x) = x$، وهكذا $(g_1^{-1}g_2)x = x$. إذن $g_1^{-1}g_2 \in G_x$ و $g_2 \in g_1\ G_x$.

■ تمارين 16

حسابات

في التمارين من 1 إلى 3، لتكن:

$$X = \{1, 2, 3, 4, s_1, s_2, s_3, s_4, m_1, m_2, d_1, d_2, C, P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

المجموعة$-D_4$ للمثال 8.16 مع جدول تأثير معطى في الجدول 10.16. أوجد ما يأتي، حيث $G = D_4$:

1. المجموعات المحددة X_σ لكل $\sigma \in D_4$، أي $X_{\rho_0}, X_{\rho_1}, \ldots, X_{\delta_2}$.

2. زمر توحيد الخصائص G_x لكل $x \in X$، أي $G_1, G_2, \ldots, G_{p_3}, G_{p_4}$.

3. المدارات في X بالنسبة إلى D_4.

مفاهيم

في التمرينين 4 و 5 صحِّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

4. الزمرة G ذات تأثير أمين على X، إذا وفقط إذا كان $gx = x$ يؤدي إلى $g = e$.

5. لتكن X مجموعة $-G$. الزمرة G متعدية على X، إذا وفقط إذا كان لعنصر ما $g \in G$، gx يمكن أن يكون أي x أخرى.

6. لتكن X مجموعة$-G$، ولتكن $S \subseteq X$، إذا كانت $Gs \subseteq S$ لكل $s \in S$، فإنّ S **مجموعة** $-G-$ **جزئية** $-$ **(sub-G-set)**. صِفْ مجموعة$-G-$ جزئية من X بدلالة مدارات في X و G.

7. صِفْ مجموعة$-G$ متعدية بدلالة مداراتها.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل مجموعة$-G$ هي زمرة أيضًا.

________ ب. كل عنصرٍ في مجموعة$-G$ يترك ثابتًا محددًا عن طريق العنصر المحايد في G.

________ جـ. إذا كان كل عنصرٍ في مجموعة$-G$ يترك ثابتًا من خلال العنصر نفسه g في G، فإنّ g يجب أن يكون العنصر المحايد e.

________ د. لتكن X مجموعة$-G$ مع $x_1, x_2 \in X$ و $g \in G$، إذا كان $gx_1 = gx_2$، فإن $x_1 = x_2$.

________ هـ. لتكن X مجموعة$-G$ مع $x \in X$ و $g_1, g_2 \in G$، اذا كان $g_1 x = g_2 x$، فإن $g_1 = g_2$.

________ و. لتكن X مجموعة $-G$ كل مدار في X هو مجموعة$-G-$جزئية متعدية.

________ ز. لتكن X مجموعة$-G$ و $H \leq G$، عندئذٍ X يمكن أن تُعدّ وبطريقة طبيعية بوصفها مجموعة$-H$.

________ ح. بالرجوع إلى (ز)، المدارات في X بالنسبة إلى H هي نفسها كالمدارات في X بالنسبة إلى G.

_______ ط. إذا كانت X مجموعة $G-$، فإن كل عنصر في G يؤثر بوصفه تبديلًا لـ X.

_______ ي. لتكن X مجموعة $G-$ ولتكن $x \in X$. إذا كانت G منتهية، فإن

$|G| = |Gx| \cdot |G_x|$.

9. لتكن X و Y مجموعتي $G-$ مع الزمرة G نفسها، **التماثل (isomorphism)** بين X و Y هو دالة $\phi: X \to Y$ أحادية وغامرة لـ Y، ويحقق $g\phi(x) = \phi(gx)$ لكل $x \in X$ و $g \in G$. مجموعتا $G-$ **متماثلتان (isomorphic)**، إذا كان مثل هذا التماثل بينهما موجودًا، لتكن X مجموعة D_4- المعطاة في المثال 8.16، أجب عما يأتي:

أ. أوجد مدارين مختلفين لـ X يكونان مجموعتي D_4- جزيئتين متماثلتين.

ب. أثبت إنّ المدارين $\{1, 2, 3, 4\}$ و $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ هما مجموعتا D_4- جزيئتان غير متماثلتين. [*مساعدة*: أوجد عنصرًا في G يؤثر بنمط جوهري مختلف في كلا المدارين].

ج. هل المداران اللذان أعطيتهما في إجابتك للفرع (أ) هما مجموعتا D_4- الجزئيتان المتماثلتان الوحيدتان من X.

10. لتكن X مجموعة D_4- المعطاة في المثال 8.16.

أ. هل تأثير D_4 أمين على X.

ب. أوجد المدارات في X كلها التي تأثير D_4 عليها أمين بوصفها مجموعة D_4- جزئية.

براهين

11. لتكن X مجموعة $G-$، فأثبت إنّ تأثير G أمين على X، إذا وفقط إذا كان أي عنصرين مختلفين في G ليس لهما التأثير نفسه في عناصر X جميعها.

12. لتكن X مجموعة $G-$، ولتكن $Y \subseteq X$، ولتكن $G_Y = \{g \in G \mid gy = y$ لكل $y \in Y\}$، فأثبت إنّ G_Y زمرة جزئية من G، تعمم المبرهنة 12.16.

13. لتكن G زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، ليكن التأثير لـ $\theta \in G$ في المستوى الحقيقي $\mathbb{R}^2$ معطًى بتدوير المستوى عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل بمقدار θ بالتقدير الدائري، ولتكن P نقطة غير نقطة الأصل في المستوى.

أ. أثبت أن $\mathbb{R}^2$ مجموعة $G-$.

ب. صِفْ هندسيًّا المدار الذي يحوي P.

جـ. أوجد الزمرة G_P.

التمارين من 14 إلى 17 تبين كيف أن مجموعات $G-$ المحتملة جميعها، تبعاً للتماثل (انظر التمرين 9)، يمكن أن تُشَكَّلُ من الزمرة G.

14. لتكن $\{X_i \mid i \in I\}$ مجموعة مجموعات منفصلة، وهكذا $X_i \cap X_j = \emptyset$ لـ $i \neq j$، ولتكن كل X_i مجموعة $G-$ للزمرة G نفسها.

أ. أثبت إنّ $\cup_{i \in I} X_i$ يمكن أن ينظر إليه بطريقة طبيعية بوصفه مجموعة $G-$، **الاتحاد (union)** لمجموعات $G-$، X_i.

ب. أثبت إنّ كل مجموعة$-G$ هي الاتحاد لمداراتها.

15. لتكن X مجموعة$-G$ متعدية، ولتكن $x_0 \in X$، فأثبت إنّ X تماثل L (المجموعة$-G$، انظر التمرين 9)، لكل مجموعات المشاركة اليسرى لـ G_{x_0} الموصوفة في المثال 7.16. [مساعدة: لـ $x \in X$، افترض إنّ $x = gx_0$، وعرِّف $\phi: X \to L$ بِـ $\phi(x) = g\,G_{x_0}$. تأكد من إثبات إنّ ϕ حسن التعريف!].

16. لتكن X_i لـ $i \in I$ مجموعات$-G$ للزمرة G نفسها، وافترض إنّ المجموعات X_i ليس بالضرورة منفصلة. لتكن $X'_i = \{(x, i) \mid x \in X_i\}$ لكل $i \in I$، عندئذ المجموعات X'_i منفصلة، وكل منها يمكن أن يُعدّ بوصفه مجموعة$-G$ بطريقة سهلة. (العناصر في X_i ببساطة عُلِّمت بـ i لتمييزها عن عناصر X_j لِـ $i \neq j$). المجموعة$-G$ $\cup_{i \in I} X'_i$ هي الاتحاد المنفصل **(disjoint union)** لمجموعات$-G$، X_i. باستخدام التمرينين 14 و 15 أثبت إنّ كل مجموعة$-G$ تماثل اتحادًا منفصلاً لمجموعات$-G$ مشاركة يسرى كالموصوفة في المثال 7.16.

17. التمارين السابقة بَيَّنَت إنّ كل مجموعة$-G$، X تماثل اتحادًا منفصلاً لمجموعات$-G$ مجموعات مشاركة يسرى. السؤال الذي يطرح نفسه، إذا كانت مجموعتا $-G$ مجموعتي مشاركة يسرى لزمرتين جزئيتين مختلفتين H و K من G فهل هما متماثلتان. لاحظ إنّ الدالة المعرفة في المساعدة للتمرين 15 تعتمد على الاختيار لِـ x_0 «بوصفها نقطة أساس». إذا بدلت x_0 بـ $g_0 x_0$ وإذا كان $G_{x_0} \neq G_{g_0x_0}$، فإنّ المجموعتين L_H لمجموعات المشاركة اليسرى لِـ $H = G_{x_0}$ و L_K لمجموعات المشاركة اليسرى لِـ $K = G_{g_0x_0}$ تشكلان مجموعتي$-G$ مختلفتين، اللتين يجبُ أن تكونا متماثلتين؛ لأن كليهما L_H و L_K تماثلان X.

أ. لتكن X مجموعة$-G$ متعدية، ولتكن $x_0 \in X$ و $g_0 \in G$، وإذا كانت $H = G_{x_0}$،

فصِف $K = G_{g_0x_0}$ بدلالة H و g_0.

ب. بالاعتماد على فرع (أ)، خَمِّن شروطًا على الزمرتين الجزئيتين H و K من G، بحيث إنّ مجموعات$-G$ مجموعات المشاركة اليسرى لِـ H و K متماثلة.

جـ. أثبت مخمنتك في الفرع (ب).

18. وفقًا للتماثل – ما العدد المتوافر لمجموعات$-\mathbb{Z}_4$، X المتعدية؟ (استخدم التمارين السابقة). أعطِ مثالاً لكل نوع من التماثلات، بعمل جدول تأثير لكل منها كما في الجدول 10.16. خذ أحرفًا صغيرة a, b, c، وهكذا إلى آخره بوصفها رموزًا لعناصر المجموعة X.

19. أعد التمرين 18 للزمرة $\mathbb{Z}_6$.

20. أعد التمرين 18 للزمرة S_3، واسرد العناصر لِـ S_3 في الترتيب

$$\iota, (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 3), (1, 3), (1, 2)$$

الفصل 17 تطبيقات لمجموعات $-G$ على العد[1] Applications of G-Sets to Counting

يمثل هذا الفصل تطبيقًا لعملنا مع مجموعات $-G$ على العد. مثلاً: افترض أننا نرغب في عَدِّ عدد الطرق المتمايزة لتَعْليم أوجه المكعب الستة من واحدة إلى ست نقاط لتُشَكِّل حجر نرد، إذ إنّ حجر النرد القياسي يُعَلَّمَ بحيث عندما يوضع على الطاولة، حيث 1 في الأسفل و 2 في اتجاه الأمام، 6 في الأعلى، 3 على اليسار، 4 على اليمين و 5 من الخلف، بالطبع هناك طرق أخرى مختلفة ممكنة لتَعْليم المكعب لتعطي حجر نرد متمايزًا.

لنميز بين أوجه المكعب من هذه اللحظة، ونسميها الأسفل، والأعلى، واليسار، واليمين، والأمام، والخلف، عندئذ، يمكن أن يأخذ الأسفل واحدة من ست علامات من نقطة إلى ست نقاط، والأعلى أي واحدة من العلامات الخمس الباقية، وهكذا، حيث توجد $6! = 720$ طريقة ممكنة لتَعْليم أوجه المكعب بصورة كاملة. بعض التعليمات تعطي حجر النرد نفسه الذي تعطيه أخريات، ونعني بذلك إنّ إحدى التعليمات يمكن أن تحمل إلى أخرى بتدوير المكعب المعلّم، فمثلاً: إذا دُوِّرَ حجر النرد القياسي الموصوف في الأعلى $90°$ عكس عقارب الساعة، كأننا ننظر إليه من الأعلى، فإنّ 3 ستكون على الوجه الأمامي بدل 2 لكنه حجر النرد نفسه.

هناك 24 طريقة محتملة لوضع مكعب على طاولة؛ لأن أي وجه من الأوجه الستة يمكن أن يوضع للأسفل، ومن ثَمَّ أي واحدٍ من الأربعة للأمام، يعطي $6.4 = 24$ وضعًا محتملاً، فأيُّ وضع يمكن أن ينجز من أي وضع آخر بتدوير حجر النرد، حيث تشكل هذه التدويرات زمرة G، التي تماثل زمرة جزئية من S_8 (انظر التمرين 45 للفصل 8). اجعل X الطرق الـ 720 المحتملة لتَعليم المكعب، واجعل G تؤثر في X بتدوير المكعب، سنأخذ في الحسبان تعليمين ليعطيا حجر النرد نفسه، إذا أمكن حمل أحدهما إلى الآخر بالنسبة إلى تأثير عنصرٍ في G، أي بتدوير المكعب، بكلمات أخرى سنعدّ كل مدار في X بالنسبة إلى G يقابل حجر نرد وحيد، ومدارات مختلفة لتعطي أحجار نرد مختلفة، حيث إنّ تحديد عدد أحجار النرد المتمايزة سيؤدي إلى السؤال عن تحديد عدد المدارات بالنسبة إلى G في مجموعة$-G$، X.

المبرهنة الآتية تعطي أداة لتحديد عدد المدارات في مجموعة$-G$، X بالنسبة إلى G، تذكر أنه لكل $g \in G$ جعلنا X_g مجموعة العناصر X المتروكة ثابتة من خلال g؛ ولذلك،

$X_g = \{x \in X | gx = x\}$، وتذكر أيضًا أنه لكل $x \in X$ جعلنا $G_x = \{g \in G | gx = x\}$ و Gx هو المدار لـ x بالنسبة إلى G.

مبرهنة 1.17 (صيغة بيرنسايد **(Burnside's Formula)**) لتكن G زمرة منتهية، وX مجموعة$-G$ منتهية، فإذا كان r عدد المدارات في X بالنسبة إلى G، فإنّ:

$$r \cdot |G| = \sum_{g \in G} |Xg|. \qquad (1)$$

البرهان نعُدّ الأزواج كلها (g, x)، حيث $gx = x$، وليكن N عدد هذه الأزواج. لكل $g \in G$ يوجد $|X_g|$ أزواج لها g بوصفه عضوًا أوليًا. وعليه:

---

1 – هذا الفصل لن يستخدم في بقية الكتاب.

$$N = \sum_{g \in G} |X_g| \qquad (2)$$

من ناحية أخرى، لكل $x \in X$ يوجد $|G_x|$ من أزواج لها x بوصفه عضوًا ثانيًا، وعليه، لدينا أيضًا:

$$N = \sum_{x \in X} |G_x|$$

من المبرهنة 16.16 لدينا $|Gx| = (G : G_x)$، لكننا نعلم إنّ $(G : G_x) = |G| / |G_x|$ وهكذا نحصل على $|G_x| = |G| / |Gx|$، عندئذٍ:

$$N = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \left(\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} \right). \qquad (3)$$

الآن $1/|Gx|$ لها القيمة نفسها لكل x في المدار نفسه، وإذا جعلنا $\mathcal{O}$ أي مدار، فإنّ:

$$\sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{x \in \mathcal{O}} \frac{1}{|\mathcal{O}|} = 1. \qquad (4)$$

بتعويض (4) في (3) نحصل على $N = |G|$ (عدد المدارات في X بالنسبة إلى G) $= |G| . r$ (5)

مقارنة المعادلة (2) والمعادلة (5) تعطي المعادلة (1). ♦

2.17 نتيجة إذا كانت G زمرة منتهية و X مجموعة$-G$ منتهية، فإنّ:

$$\text{(عدد المدارات في } X \text{ بالنسبة إلى } G) = \frac{1}{|G|} . \sum_{g \in G} |X_g|$$

البرهان البرهان لهذه النتيجة ينتج مباشرة من المبرهنة السابقة. ♦

لنكمل حسابنا لعدد أحجار النرد المتمايزة، كمثالنا الأول.

3.17 مثال لنجعل X مجموعة الـ 720 تَعْلِيم المختلف لأوجه المكعب باستخدام من واحدة إلى ست نقاط، لتكن G زمرة التدويرات الـ 24 للمكعب، كما نوقشت في الأعلى، رأينا إنّ عدد الأحجار المتمايزة لنرد، هو عدد المدارات في X بالنسبة إلى G، الآن، $|G| = 24$. لـ $g \in G$ حيث $g \neq e$، لدينا $|X_g| = 0$ لأن أي تدوير غير العنصر المحايد سَيُغَيِّرُ أي واحدة من التعليمات الـ 720 إلى واحدة مختلفة. على أي حال، $|X_e| = 720$ لأن العنصر المحايد يترك التعليمات الـ 720 ثابتة، عندئذٍ باستخدام النتيجة 2.17:

$$\text{(عدد المدارات)} = \frac{1}{24} . 720 = 30$$

وهكذا يوجد 30 حجر نرد متمايزًا. ▲

بالطبع عدد أحجار النرد المتمايزة يمكن عَدُّها دون استخدام آلية النتيجة السابقة، وإنما باستخدام

تراكيب بسيطة كما تُدَرَّسُ في العادة في مقرر دراسي رياضيات منتهية للمبتدئين، وبتعليم مكعب لعمل حجر نرد يمكننا – بالتدوير إذا لزم – أن نفترض إنّ الوجه المُعَلَّم 1 في الأسفل. توجد خمسة اختيارات للوجه الأعلى (المعاكس)، بتدوير حجر النرد، كما ننظر إليه للأسفل، أي واحد من الأوجه الأربعة المتبقية يمكن أن يُحْضَرَ للأمام، وهكذا لا توجد اختيارات مختلفة معقدة للوجه الأمامي، لكن بالنسبة إلى العدد على الوجه الأمامي، فتوجد 3.2.1 احتمالات للأوجه الجانبية الثلاثة المتبقية، وعليه، يوجد $5{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1 = 30$ احتمالاً للجميع.

المثالان الآتيان يَظْهران في بعض كتب الرياضيات المنتهية، ومن السهل أن يُحلا بمفاهيم بسيطة، إذ نستخدم النتيجة 2.17 حتى يكون لدينا تدريب أكثر على التفكير بدلالة المدارات.

مثال 4.17 ما عدد الطرق المتمايزة التي يمكن من خلالها لسبعة أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة، حيث لا يتوافر رأس مميز للطاولة؟ بالتأكيد توجد !7 طرق لتحديد أشخاص للمقاعد المختلفة، حيث نأخذ X لتكون !7 للتحديدات الممكنة، إذ إنّ التدوير للأشخاص يتم إنجازه بالطلب من كل شخص أن يتحرك مكانًا واحدًا إلى اليمين وبالترتيب نفسه، فتدوير كهذا يُوَلِّد زمرة G دورية رتبتها 7، التي نعدّها مؤثرة في X بطريقة واضحة. مرة أخرى، فقط العنصر المحايد e يترك أي ترتيب محددًا، ويترك الترتيبات !7 جميعها ثابتة. من خلال النتيجة 2.17

$$\text{(عدد المدارات)} = \frac{1}{7}.7! = 6! = 720$$ ▲

مثال 5.17 ما عدد القلائد (دون مشبك) المتمايزة التي يمكن عملها باستخدام سبع خرزات من الحجم نفسه وبألوان مختلفة؟ على خلاف الجدول في المثال 4.17، القلادة يمكن ان تقلب كما لو أنها دُوِّرَتْ. وعليه، نعُدّ الزمرة الزوجية D_7 الكاملة ورتبتها $2{\cdot}7 = 14$ بوصفها مؤثرة في المجموعة X ذات !7 احتمال، وعندئذٍ عدد القلائد المتمايزة، هو:

$$\text{(عدد المدارات)} = \frac{1}{14}.7! = 360.$$ ▲

باستخدام النتيجة 2.17 علينا حساب $|G|$ و $|X_g|$ لكل $g \in G$، في الأمثلة والتمارين، $|G|$ لن يكون مشكلة حقيقية، لنعطي مثالاً، حيث $|X_g|$ ليس من السهل حسابه، كما هو في الأمثلة السابقة، سوف نستمر بافتراض المعرفة بالتراكيب البسيطة جدًا.

مثال 6.17 لنجد عدد الطرق المتمايزة الممكنة لطلاء أضلاع مثلث متساوي الأضلاع، إذا توافرت أربعة ألوان طلاء مختلفة، بافتراض استخدام لون واحد فقط لكل ضلع، واللون نفسه يمكن استخدامه على أضلاع مختلفة.

بالطبع توجد $4^3 = 64$ طريقة لطلاء الأضلاع كلها؛ لأن كلاً من الأضلاع الثلاثة يمكن أن يطلى بأي لون من الألوان الأربعة، نعُدّ X مجموعة المثلثات المطلية الممكنة وعددها 64، الزمرة G المؤثرة على X، هي زمرة التناظرات للمثلث، التي تماثل S_3 والتي سنعُدّها S_3 نستخدم الرموز للعناصر في S_3 المعطاة في الفصل 8، نحتاج إلى أن نحسب $|X_g|$ لكلٍّ من العناصر الستة g في S_3.

$|X_{\rho_0}| = 64$ كل مثلث مطلي ترك مثبتًا من خلال ρ_0

$|X_{\rho_1}| = 4$ ليكن غير متغير بالنسبة إلى ρ_1، الأضلاع جميعها يجب أن يكون لها اللون نفسه، وتوجد 4 ألوان محتملة.

$|X_{\rho_2}| = 4$ السبب نفسه كما لِـ ρ_1

$|X_{\mu_1}| = 16$ الضلعان اللذان تبدلا يجب أن يكون لهما اللون نفسه (4 احتمالات) والضلع الثالث يمكن أن يكون أيًّا من الألوان (ضرب 4 احتمالات).

$|X_{\mu_3}| = |X_{\mu_2}| = 16$ السبب نفسه كما لِـ μ_1.

وعندئذٍ:

$$\sum_{g \in S_3} |X_g| = 64 + 4 + 4 + 16 + 16 + 16 = 120$$

وعليه،

$$\text{(عدد المدارات)} = \frac{1}{6}.120 = 20$$

ويوجد 20 مثلثًا مطليًّا متمايزًا. ▲

7.17 مثال نعيد المثال 6.17 مع الافتراض أنَّ لونًا مختلفًا استخدم لكل ضلع، عدد الطرق المحتملة لطلاء الأضلاع هو في النهاية $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$، وجعلنا X مجموعة المثلثات المطلية المحتملة وعددها 24. مرة أخرى، الزمرة المؤثرة على X يمكن أن تُعدّ S_3 ولأن الأضلاع كلها ألوانها مختلفة، نرى إنّ: $|X_{\rho_0}| = 24$ بينما $|X_g| = 0$ لِـ $g \neq \rho_0$. إذن

$$\text{(عدد المدارات)} = \frac{1}{6}.24 = 4$$

وهكذا توجد أربعة مثلثات متمايزة. ▲

■ تمارين 17

حسابات

في كلٍّ من التمارين الآتية استخدم النتيجة 2.17 في حلها، حتى إن أمكن الحصول على الإجابة بطرق أكثر بساطة.

1. أوجد عدد المدارات في $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بالنسبة إلى الزمرة الجزئية الدورية $\langle(1,3,5,6)\rangle$ من S_8.

2. أوجد عدد المدارات في $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بالنسبة إلى الزمرة الجزئية من S_8 المتولدة من خلال $(1,3)$ و $(2,4,7)$.

3. أوجد عدد أحجار النرد رباعية السطوح المثلثية المتمايزة، التي يمكن عملها باستخدام نقطة، ونقطتين، وثلاث نقاط، وأربع نقاط على أوجه صورة منتظمة لرباعي السطوح المثلثية، بدل المكعب.

4. مكعبات خشبية من الحجم نفسه ستطلى بلونٍ مختلف على كل وجه لعمل مكعبات أطفال، ما عدد المكعبات المتمايزة التي يمكن عملها إذا توافرت ثمانية ألوان طلاء؟

5. أجب عن التمرين 4 إذا أمكن تكرار الألوان على أوجه مختلفة. [مساعدة: الدورانات الـ 24 لمكعب تتألف من العنصر المحايد، 9 منها تترك زوجًا من الأوجه المتقابلة غير متغير، و 8 منها تترك زوجًا من الرؤوس المتعاكسة غير متغير، و 6 تترك زوجًا من الأضلاع المتقابلة غير متغير].

6. كلٌّ من الزوايا الثمانية لمكعب ستكسى بأحد أربعة ألوان، وكلٌّ لون منها يمكن أن يستخدم مرة على زاوية إلى ثماني مرات على الزوايا الثمانية جميعها، أوجد عدد التعليمات الممكنة المتمايزة. (انظر المساعدة في التمرين 5).

7. أوجد عدد الطرق المتمايزة التي يمكن بها طلاء الأضلاع لمربع من الورق المقوى إذا توافرت ستة ألوان، شريطة أن:

أ. لا يستخدم اللون أكثر من مرة.

ب. اللون نفسه يمكن أن يستخدم على أي عدد من الأضلاع.

8. افترض إنّ ستة أسلاك مستقيمة أطوالها متساوية، حيث لحمت أطرافها ببعضها لتشكل صورة مجسم منتظم رباعي السطوح المثلثية، وستدرج مقاومة 50 أومًا أو 100 أوم في منتصف كل سلك، افترض أنه توجد ست مقاومات على الأقل من كل نوع. فكم يبلغ العدد المحتمل لشبكات الأسلاك المختلفة؟

9. منشور مستطيلي الشكل، ارتفاعه قدمان، وقاعدته مربعة طول ضلعها قدم واحد، وكل وجهٍ من الأوجه الستة سيطلى بلونٍ من ستة ألوان محتملة. فكم يبلغ العدد المحتمل للمناشير المطلية المتمايزة:

أ. إذا لم يتكرر اللون على أوجه مختلفة؟

ب. إذا أمكن استخدام كل لونٍ على أكثر من وجه؟