الوحدة الثانية

التباديل، ومجموعات المشاركة، والضرب المباشر
Permutations, Cosets, and Direct Products

[1] الفصل 21 لن يستخدم فيما تبقى من الكتاب

الفصل 8 زمر التباديل Groups Of Permutations

رأينا أمثلة على زمر أعداد، مثل الزمر $\mathbb{Z}$، و$\mathbb{Q}$، و$\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع. وقدّمنا كذلك زمر مصفوفات، مثل الزمرة $GL\ (2, \mathbb{R})$، فكل عنصر A من $GL\ (2\ , \mathbb{R})$ ينتج تحويلًا للمستوى $\mathbb{R}^2$ إلى نفسه؛ وبالتحديد، إذا اعتبرنا $\mathbf{x}$ بوصفه متجه عمود ذي مركبتين، فإنّ $A\mathbf{x}$ أيضًا متجه عمود ذي مركبتين، والزمرة $GL\ (2,\mathbb{R})$ نمط لكثير من الزمر المهمة، حيث إنّ عناصرها تؤثر في أشياء لتحويلها، وفي الغالب يمكن أن يُعدّ التأثير الناتج عن عنصر الزمرة دالّة، والعملية الثنائية للزمرة تركيب دوالّ. سنبني في هذا الفصل بعض الزمر المنتهية التي تؤثر عناصرها – تسمّى تباديل – في مجموعات منتهية، وستزوّدنا هذه الزمر بأمثلة على زمر منتهية غير إبداليّة، ثم سنثبت أنّ أيّ زمرة منتهية هي – تركيبيًّا – مثل زمرة تباديل ما، وللأسف، لن تصبح هذه النتيجة – التي تبدو قوية جدًّا – مفيدة لنا على وجه الخصوص.

ربما تكون معتادًا على مفهوم تبديل المجموعة على أنه إعادة ترتيب لعناصر المجموعة؛ لذلك فإعادة ترتيب لعناصر المجموعة $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ يمكن أن تُعطى تخطيطيًّا كما في الشكل 1.8، وينتج عنها الترتيب الجديد $\{4, 2, 5, 3, 1\}$، لنفكر الآن في هذا الرسم التخطيطيّ في الشكل 1.8، على أنه دالّة ترسل كل عنصر موجود في العمود الأيسر إلى عنصر وحيد (ليس بالضرورة مختلفًا) من المجموعة نفسها موجود على اليمين؛ لذلك 1 أُرسلت إلى 4، و 2 أُرسلت إلى 2 وهكذا، إضافة إلى ذلك، لكي تكون تبديلًا للمجموعة، على هذه الدالّة أن تكون على حالة تجعل كل عنصر يظهر في العمود الأيمن مرةً واحدة فقط، مثلًا: المخطّط في الشكل 2.8 لا يعطي تبديلًا؛ لأن 3 ظهرت مرتين، بينما 1 لم تظهر أبدًا في العمود الأيمن، لنُعرِّف التبديل ليكون مثل هذه الدالّة.

$1 \to 4$	$1 \to 3$
$2 \to 2$	$2 \to 2$
$3 \to 5$	$3 \to 4$
$4 \to 3$	$4 \to 5$
$5 \to 1$	$5 \to 3$
الشكل 1.8	الشكل 2.8

3.8 تعريف **تبديل مجموعةٍ A (*permutation of a set*)** هو دالّة $\phi : A \longrightarrow A$ أحاديّة وغامرة. ■

زمر التبديلات

نبين الآن أنّ تركيب الدوالّ $\circ$ عملية ثنائيّة على مجموعة تبديلات المجموعة A كلها، ونسمّي هذه العملية ضرب التبديلات، لتكن A مجموعة، وليكن σ و τ تبديلين لـ A بحيث إنّ كلًّا من σ و τ دالّتان أحاديّتان ترسلان A بصورة غامرة إلى A، في حين أنّ الدالّة المركبة $\sigma \circ \tau$ المعرّفة تخطيطيًّا بِـ

$$A \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\sigma} A،$$

تعطي دالّة من A إلى A ، سنرمز لـ $\sigma \circ \tau$ بالكتابة المتتالية على الصورة $\sigma\tau$، وذلك بدلًا من الاحتفاظ بالرمز $\circ$ لضرب التبديلات، وكما فعلنا مع الزمر العامة، حيث ستكون $\sigma\tau$ الآن تبديلًا إذا كانت أحاديّة وغامرة إلى A، تذكّر أنّ تأثير $\sigma\tau$ في A يجب أن يُقرأ بالترتيب من اليمين إلى اليسار: أولًا طبّق τ ثم σ. دعنا نثبت أنّ $\sigma\tau$ أحاديّة.

فإذا كان:

$$(\sigma\tau)(a_1) = (\sigma\tau)(a_2),$$

فإنّ

$$\sigma(\tau(a_1)) = \sigma(\tau(a_2)),$$

ولأنّ σ معطاة على أنها أُحاديّة، فنعلم أنّ $\tau(a_1) = \tau(a_2)$، لكن لأنّ τ أحاديّة، فعندئذٍ يعطي هذا $a_1 = a_2$؛ لذلك $\sigma\tau$ أحاديّة، ولإثبات أنّ $\sigma\tau$ غامرة إلى A، لتكن $a \in A$، ولأنّ σ غامرة إلى A، فيوجد $a' \in A$ ، بحيث إنّ $\sigma(a') = a$، ولأنّ τ غامرة إلى A، فيوجد $a'' \in A$، بحيث إنّ $\tau(a'') = a'$؛ لذلك:

$$a = \sigma(a') = \sigma(\tau(a'')) = (\sigma\tau)(a''),$$

وتكون، $\sigma\tau$ غامرة إلى A.

4.8 مثال افترض أنّ

$$A = \{1,2,3,4,5\}$$

وأنّ σ هو التبديل المعطى بالشكل 1.8. نكتب σ بطريقة قياسية أكثر، بتغيير الأعمدة إلى صفوف داخل أقواس وحذف الأسهم، على الصورة:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

حيث $\sigma(1) = 4$ ، $\sigma(2) = 2$ ، وهكذا.

نبذة تاريخية

ظهرت واحدة من أوائل الدراسات المسجلة للتبديلات في (*Sefer Yetsirah*)، أو كتاب الخلق لمؤلف يهودي مجهول في وقت ما قبل القرن الثامن، اهتمّ المؤلف بِعَدِّ الطرق المختلفة التي يمكن أن تُرتَّب فيها الحروف العبرية، وكان السؤال إلى حدّ ما روحيًّا، فقد كان المعتَقَد أنّ الحروف لها طاقة سحريّة؛ لذلك يمكن أن تُخْضِع ترتيباتٌ مناسبة قوى الطبيعة، والنصّ الفعليّ في (*Sefer Yetsirah*) ضئيل جدًّا، وهو على هذا النحو: "حرفان يبنيان كلمتين، ثلاثة تبني ست كلمات، أربعة تبني 24 كلمة، خمسة تبني 120، ستة تبني 720، سبعة تبني 5040". ومن المدهش فعلًا أنّ عدّ ترتيبات الحروف الهجائية وقع أيضًا في الرياضيات الإسلاميّة في القرنين الثامن والتاسع، ففي القرن الثالث عشر، أخذت فكرة التبديل المجردة مكانها في كلتا الثقافتين الإسلامية والعبرية، بحيث إنّ كلًّا من أبي العباس بن البنّا

(*Abu –l–'Abbas ibn al- Banna* 1256 – 1321)

– عالم رياضيات من مرّاكش فيما يسمّى الآن المغرب – وليفي بن جرسون –(*Levi ben Gerson*) الحاخام الفرنسي، فيلسوف وعالم رياضيات – كانا قادرين على إعطاء براهين دقيقة جدًّا على أنّ عدد التبديلات لأيّ مجموعة فيها n عنصرًا هو $n!$، إضافة إلى برهان نتائج مختلفة حول عدّ التراكيب.

على أيّ حال، كان ليفي وأسلافه مهتمّين بالتبديلات ببساطة؛ بوصفها ترتيبات لمجموعة منتهية معطاة، والبحث عن حلول لمعادلات كثيرة الحدود هو الذي قاد لاجرانج وآخرين في آخر القرن الثامن عشر إلى التفكير في التبديلات بوصفها دوالّ من مجموعة منتهية إلى نفسها، وكانت المجموعة جذور معادلة معطاة، وقد كان أوجستين – لويس كوشي (*Augustin – Louis Cauchy* 1789 – 1857) هو الذي طوّر بالتفصيل المبرهنات الأساسية نظرية التبديلات، وهو من قدَّم الرمز القياسي المستخدم في هذا الكتاب.

لتكن

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

عندئذٍ يكون:

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

مثلًا: بإجراء الضرب بالترتيب من اليمين إلى اليسار،

$$(\sigma\tau)(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(3) = 5, \qquad \blacktriangle$$

نثبت الآن أنّ مجموعة التبديلات كلها لمجموعة غير خالية A تشكّل زمرة بالنسبة إلى ضرب التبديلات هذا.

5.8 مبرهنة لتكن A مجموعة غير خالية، ولتكن S_A مجموعة جميع تبديلات A، عندئذٍ تكون S_A زمرة بالنسبة إلى ضرب التبديلات.

البرهان: أثبتنا أنّ تركيب تبديلين لـِ A ينتج تبديلًا لـِ A؛ ولذلك S_A مغلقة بالنسبة إلى ضرب التبديلات.

ونرى أنّ ضرب التبديلات معرّف بوصفه تركيب دوالّ، وقد برهنّا في الفصل 2 على أنّ تركيب الدوالّ تجميعيٌّ؛ لهذا، يكون $\mathscr{G}_1$ متحقّقًا.

التبديل ι بحيث إنّ $\iota(a) = a$ لكل $a \in A$ يعمل بوصفه محايدًا؛ لذلك يكون $\mathscr{G}_2$ متحقّقًا.

للتبديل σ، الدالّة المعكوسة σ^{-1} تبديل يعكس اتجاه الإرسال في σ، أي إنّ $\sigma^{-1}(a)$ هو العنصر a' من A، بحيث إنّ $a = \sigma(a')$، ووجود عنصر واحد بالضبط a' من مثل هذا، هو نتيجة لحقيقة أنّ σ بوصفها دالّة هي أحاديّة وغامرة، ولكل $a \in A$ لدينا:

$$\iota(a) = a = \sigma(a') = \sigma(\sigma^{-1}(a)) = (\sigma\sigma^{-1})(a)$$

وكذلك:

$$\iota(a') = a' = \sigma^{-1}(a) = \sigma^{-1}(\sigma(a')) = (\sigma^{-1}\sigma)(a'),$$

ما يعني أنّ كلًّا من $\sigma^{-1}\sigma$ و $\sigma\sigma^{-1}$ هما التبديل ι ؛ لذلك، يكون $\mathscr{G}_3$ متحقّقًا. ♦

تحذير: بعض الكتب تحسب ضرب التباديل $\sigma\mu$ بالترتيب من اليسار إلى اليمين، بحيث إنّ $(\sigma\mu)(a) = \mu(\sigma(a))$؛ لذلك فالتبديل الذي يُحصل عليه من $\sigma\mu$ هو ذاك الذي نحصل عليه بحساب $\mu\sigma$، حيث يطلب التمرين 51 التأكّد بطريقتين من أننا لا نزال نحصل على زمرة، وإذا رجعت إلى كتاب آخر بخصوص هذه المادة، فتأكد من فحص ترتيبه لضرب التبديلات.

لم يكن في تعريفنا للتبديل شرط يطلب أن تكون A منتهية، لكن معظم أمثلتنا على زمر التبديلات ستتعلق بتبديلات مجموعات منتهية، لاحظ أنّ تركيب الزمرة S_A يتعلق فقط بعدد عناصر المجموعة A وليس بماهيّة عناصرها، وإذا كان للمجموعتين A و B عدد العناصر نفسه، فإنّ $S_A \simeq S_B$، ولتعريف تماثل $\phi : S_A \longrightarrow S_B$، نأخذ $f : A \longrightarrow B$ دالّة أحاديّة غامرة من A إلى B، ما يفضي إلى أنّ A و B لهما عدد العناصر نفسه، ولـِ $\sigma \in S_A$، نأخذ $\phi(\sigma)$ لتكون هي التبديل $\bar{\sigma} \in S_B$، بحيث إن $\bar{\sigma}(f(a)) = f(\sigma(a))$ لكل $a \in A$، لتوضيح ذلك لـِ $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{\#, \$, \%\}$ وللدالّة $f : A \longrightarrow B$ المعرّفة بـِ

$$f(1) = \#,\quad f(2) = \$,\quad f(3) = \%,$$

ϕ ترسل

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ إلى } \begin{pmatrix} \# & \$ & \% \\ \% & \$ & \# \end{pmatrix}$$

نعيد ببساطة تسمية عناصر A في رمزنا ذي الصفين بعناصر B بحسب الدالّة f التي تعيد التسمية، وبهذا نعيد تسمية عناصر S_A لتكون عناصر S_B، ويمكننا أخذ $\{1,2,3,\ldots,n\}$ لتكون نموذجًا للمجموعة المنتهية A التي فيها n عنصرًا.

6.8 تعريف لتكن A المجموعة المنتهية $\{1,2,\ldots,n\}$. زمرة التبديلات كلها لـِ A هي **زمرة التناظر على n حرف (symmetric group on n letters)**، ويرمز لها S_n. ■

لاحظ أنّ عدد عناصر S_n هو $n!$ حيث:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1)$$

مثالان مهمّان

7.8 مثال الزمرة S_3 من $3! = 6$ عنصرًا هي مثال مشوّق لنا، ولتكن المجموعة A هي $\{1,2,3\}$. نسرد هنا تبديلات A، ونسمّي كل واحد منها بحرف إغريقي مُذَيَّل.

ستتضح أسباب اختيار الأسماء لاحقًا، ليكن

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

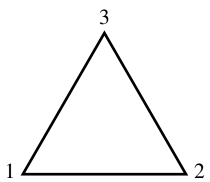
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

الجدول 8.8

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

جدول الضرب لـ S_3 مبيّن في الجدول 8.8، لاحظ أنّ هذه الزمرة ليست إبداليّة! وقد رأينا أنّ أيّ زمرة من أربعة عناصر على الأكثر تكون إبداليّة، وسنرى لاحقًا أنّ أيّ زمرة من خمسة عناصر تكون أيضًا إبداليّة؛ لذلك، S_3 لها أقل رتبة لأيّ زمرة غير إبداليّة. ▲

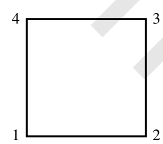


الشكل 9.8

هناك تقابل طبيعي بين عناصر S_3 في المثال 7.8، والطرق التي يمكن بها وضع نسختين من مثلث متساوي الأضلاع برؤوس 1، و2، و3 (انظر الشكل9.8) على أن يغطّي أحدهما الآخر، حيث تكون الرؤوس فوق الرؤوس؛ ولهذا السبب، S_3 هي أيضًا **زمرة تناظرات المثلث المتساوي الأضلاع** D_3 (**group of symmetries of an equilateral triangle**). ببساطة، استخدمنا ρ_i في الدورانات و μ_i في انعكاسات المرآة في منصّفات الزوايا. يمثّل الرمز D_3 الزمرة الزوجيّة الثالثة، و**الزمرة الزوجيّة من الدرجة** n (***n*th dihedral group**) D_n هي زمرة تناظرات المضلّع المنتظم ذي n ضلعًا، انظر التمرين 44[2].

لاحظ أنه يمكن أن تُعدّ عناصر S_3 مؤثرة في المثلث الذي في الشكل 9.8، انظر النقاش في بداية هذا الفصل.

10.8 مثال



الشكل 11.8

لنكوّن الزمرة الزوجيّة D_4 للتبديلات المقابلة للطرق التي يمكن بها وضع نسختين من مربع برؤوس 1 ، و2 ، و3 ، و4، على أن يغطّي أحدهما الآخر، وتكون الرؤوس فوق الرؤوس (انظر الشكل 11.8)، عندئذ تكون D_4 **زمرة تناظرات المربع** (**group of symmetries of the square**)، وتسمّى أيضًا **الزمرة الثمانية** (***octic group***)، نختار مرّةً أخرى ما يبدو أنه رموز عشوائيّة التي سنوضحها لاحقًا، ببساطة، نستخدم ρ_i في الدورانات، و μ_i في انعكاسات المرآة في المنصفات المعامدة للأضلاع، و δ_i في عمليات قلب الأقطار، هناك ثمانية تبديلات متضمّنة هنا، وليكن:

2. يرمز الكثير من المؤلفين للزمرة الزوجية ذات الترتيب n بالرمز D_{2n} وليس D_n لأن رتبة الزمرة هي $2n$.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

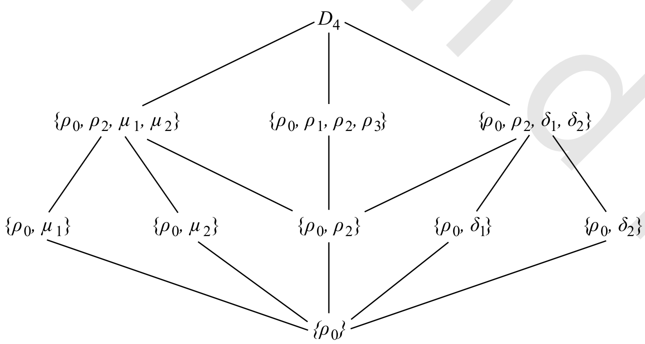
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

الجدول **12.8**

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
μ_1	μ_1	δ_2	μ_2	δ_1	ρ_0	ρ_2	ρ_3	ρ_1
μ_2	μ_2	δ_1	μ_1	δ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	ρ_3
δ_1	δ_1	μ_1	δ_2	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_0	ρ_2
δ_2	δ_2	μ_2	δ_1	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_0



الشكل **13.8** : مخطّط الزمر الجزئيّة لـِ D_4.

جدول D_4 معطًى في الجدول 12.8، لاحظ أنّ D_4 أيضًا ليست إبداليّة، هذه الزمرة ببساطة جيدة، وستزوّدنا بأمثلة متقنة لكثير من المفاهيم التي سنقدّمها في نظرية الزمر، انظر إلى التناظرات الرائعة في الجدول! أخيرًا، نعطي في الشكل 13.8 مخطّط الزمر الجزئيّة للزمر الجزئيّة لـِ D_4، انظر إلى التناظرات الرائعة في المخطّط! ▲

مبرهنة كايلي

انظر إلى أيّ جدول زمرة في الكتاب، ولاحظ كيف يعطي كل صف من الجدول تبديلًا لمجموعة عناصر الزمرة المسرودة في أعلى الجدول، وبالمثل يعطي كل عمود من الجدول تبديلًا لمجموعة الزمرة المسرودة في يسار الجدول، وليس مفاجئًا من خلال هذه الملحوظات، أنه على الأقل أيّ زمرة منتهية G تماثل زمرة جزئيّة من الزمرة S_G لتبديلات G كلها، والشيء نفسه صحيح للزمر اللانهائية؛ حيث تنصّ مبرهنة كايلي على أنّ كل زمرة تماثل زمرة ما مكوّنة من تبديلات بالنسبة إلى ضرب التبديلات، وهذه نتيجة حسنة ومثيرة للاهتمام، وهي نتيجة تقليدية في نظرية الزمر، فللوهلة الأولى، ربما تبدو هذه المبرهنة كأنها أداة للإجابة عن الأسئلة كلها المتعلقة بالزمر، وما تبينه في الحقيقة هو عموم زمر التبديلات، وسيكون فحص الزمر الجزئيّة لزمر التبديلات S_A كلها لمجموعات A من الحجوم كلها مهمَّة ثقيلة، فقد بينت مبرهنة كايلي إنه إذا وجد مثال مناقض لمقولةٍ ما حول الزمر، فإنّ زمرة تبديلات ما ستعطي المثال المناقض.

نواصل الآن العرض في اتجاه إثبات مبرهنة كايلي، مستهلّين بتعريف، ثم نضيف تمهيدية مهمّة بذاتها.

■ **نبذة تاريخية**

وضع آرثر كايلي (*Arthur Cayley* 1821 – 1895) تعريفًا ذا صبغة تجريدية للزمرة في بحث عام 1854م، هو: "مجموعة الرموز ... , $1, \alpha, \beta$ وجميعها مختلفة وعلى أن يكون حاصل ضرب أيّ اثنين منها (بغض النظر بأيّ ترتيب) أو حاصل ضرب أيّ واحد منها في نفسه، ينتمي إلى المجموعة، تسمى زمرة"، ثم واصل بحثه لتعريف جدول الزمرة، ولاحظ أنّ كل سطر وعمود في الجدول "سيحوي الرموز ... , $1, \alpha, \beta$ جميعها"، لكن رموز كايلي مثّلت دائمًا عمليات على مجموعات، ولا يبدو أنه كان مدركًا لأيّ نوع آخر من الزمر، وقد لاحظ على سبيل المثال: أنّ عمليات المصفوفات الأربع: 1 أخذ المعكوس= α، أخذ المنقول= β، و$\gamma = \alpha\beta$ تُكوِّن – تجريديًّا – الزمرة غير الدورية من أربعة عناصر، على أيّ حال، بقي تعريفه غير ملاحظ ربع قرن.

هذا البحث عام 1854م كان واحدًا من قرابة (300) بحث كتبت في ألـ (14) عامًا التي كان فيها كايلي يمارس المحاماة، إذ لم يكن قادرًا على توفير وظيفة مدرس مناسبة له، إلّا أنه أصبح أستاذًا في جامعة كامبردج عام 1863م، وعاد إلى مبرهنة الزمر عام 1878م، فنشر أربعة أبحاث، نصّ في أحدها على المبرهنة 16.8 في هذا الكتاب؛ وكان "برهانه" ببساطة قائمًا على الملاحظة من جدول الزمرة بأنّ الضرب بأيّ عنصر من الزمرة بدّل عناصر الزمرة، على أيّ حال، كتب كايلي ما يأتي: "هذا لا يثبت بأيّ صورة أنّ أفضل أو أسهل أسلوب للتعامل مع المسألة العامة [لإيجاد الزمر جميعها من رتبة معطاة] هو عدُّها مسألة [تبديلات]، ويبدو واضحًا أن السبيل الأفضل هو عدُّ المسألة العامة بذاتها".

وجدت الأبحاث عام 1878م – على خلاف البحث السابق –قارئًا متلقّيًا؛ وقد شكّلت تأثيرًا مهمًّا في تعريف الزمرة المجردة باستخدام المسلّمات عام 1882م لواتر فون دايك (*Walter Van Dyck*)، وهو التعريف الذي قاد إلى تطوير نظرية الزمر المجردة.

14.8 تعريف لتكن $f: A \longrightarrow B$ دالّة، ولتكن H مجموعة جزئيّة من A. **صورة H تحت تأثير f** (***image of H under f***)، هي $\{f(h) \mid h \in H\}$، ويرمز لها $f[H]$.

15.8 تمهيدية لتكن G و G' زمرتين، ولتكن $\phi: G \longrightarrow G'$ دالّة أحاديّة تحقق $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$ لكل $x,y \in G$، عندئذٍ، تكون $\phi[G]$ زمرة جزئيّة من G'، وتشكل ϕ تماثلًا من G إلى $\phi[G]$.

البرهان: سنثبت أنّ شروط الزمرة الجزئيّة المعطاة في المبرهنة 14.5 متحقّقة لـ $\phi[G]$. ليكن $x', y' \in \phi[G]$، عندئذ، يوجد $x,y \in G$، بحيث إنّ $\phi(x) = x'$ و $\phi(y) = y'$، وبالفرض: $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) = x'\, y'$، ما يثبت أنّ $x'\, y' \in \phi[G]$. أثبتنا أنّ $\phi[G]$ مغلقة بالنسبة إلى عملية G'.

لتكن e' محايد G'، عندئذٍ يكون:

$$e'\,\phi(e) = \phi(e) = \phi(ee) = \phi(e)\,\phi(e)$$

بالحذف في G'، يظهر أنّ $e' = \phi(e)$؛ ولذلك، $e' \in \phi[G]$.

لـ $x' \in \phi[G]$، حيث $x' = \phi(x)$، لدينا:

$$e' = \phi(e) = \phi(xx^{-1}) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = x'\,\phi(x^{-1})$$

الذي يبين أنّ $x'^{-1} = \phi(x^{-1}) \in \phi[G]$، هذا يكمل البرهان بأنّ $\phi[G]$ زمرة جزئيّة من G'.

ينتج الآن مباشرة أنّ ϕ تشكل تماثلًا من G إلى $\phi[G]$؛ لأن ϕ تشكل دالّة أحاديّة غامرة من G إلى $\phi[G]$، بحيث إنّ $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$ لكل $x,y \in G$. ♦

16.8 مبرهنة (**مبرهنة كايلي**) كل زمرةٍ تُماثلُ زمرةَ تبديلات.

البرهان لتكن G زمرة، ونريد أن نثبت أنّ G تماثل زمرة جزئيّة من S_G. بالاستعانة بالتمهيديّة 15.8، نحتاج فقط إلى تعريف دالّة أحاديّة $\phi: G \longrightarrow S_G$، على أن تكون $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$ لكل $x, y \in G$. لـ $x \in G$، لتكن $\lambda_x: G \longrightarrow G$ معرّفة بـ $\lambda_x(g) = x\,g$ لكل $g \in G$ (نفكّر في λ_x على أنها تجري ضربًا من اليسار بـ x) تبيّن المعادلة $\lambda x\,(x^{-1}c) = x(x^{-1}c) = c$ لكل $c \in G$، أنّ λ_x ترسل G بصورة غامرة إلى G، فإذا كان $\lambda_x(a) = \lambda_x(b)$، فإنّ $xa = xb$؛ ولذلك $a = b$ بالحذف؛ لهذا λ_x أيضًا أحاديّة، وهي تبديل لـ G. نعرّف الآن $\phi: G \longrightarrow S_G$ بتعريف $\phi(x) = \lambda_x$ لكل $x \in G$.

لإثبات أنّ ϕ أحاديّة، افترض أنّ $\phi(x) = \phi(y)$، عندئذ تكون $\lambda_x = \lambda_y$ بوصفها دوالّ من G إلى G، على وجه الخصوص $\lambda_x(e) = \lambda_y(e)$؛ ولهذا يكون $xe = ye$ و $x = y$؛ لذلك ϕ أحاديّة. بقي فقط إثبات أنّ $\phi(xy) = \phi(x)\,\phi(y)$، أي إنّ $\lambda_{xy} = \lambda_x\,\lambda_y$. الآن لأيّ $g \in G$، لدينا $\lambda_{xy}(g) = (xy)g$. ضرب التبديلات هو تركيب دوال؛ لهذا

$(\lambda_x\lambda_y)(g) = \lambda_x(\lambda_y(g)) = \lambda_x(y\,g) = x\,(yg)$؛ لذلك، $\lambda_{xy} = \lambda_x\,\lambda_y$ بالتجميع. ♦

كان بإمكاننا إثبات المبرهنة بصورة مشابهة بأخذ التبديلات ρ_x لِـ G المعرفة بالقاعدة

$$\rho_x(g) = g\,x$$

حيث $g \in G$. (يمكننا أن نفكر في ρ_x على أنها تعني الضرب من اليمين بـ x). يبيّن التمرين 52 أنّ هذه التبديلات تشكل زمرة جزئيّة من S_G، وهي أيضًا تماثل G، لكنها معطاة بدالّة

$$\mu\colon G \longrightarrow S_G$$

معرفة بـِ

$$\mu(x) = \rho_{x^{-1}}$$

17.8 تعريف للدالّة ϕ في إثبات المبرهنة 16.8 هي **التمثيل المنتظم الأيسر** (***left regular representa-tion***) لِـ G، والدالّة μ في التعليق السابق هي **التمثيل المنتظم الأيمن** (***right regular repre-sentation***) لِـ G. ■

18.8 مثال لنحسب الآن التمثيل المنتظم الأيسر للزمرة المعطاة بجدول الزمرة 19.8. ونعني بـِ "نحسب" إعطاء العناصر للتمثيل المنتظم الأيسر وجدول الزمرة، هذه العناصر هي:

$$\lambda_e = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix}, \quad \lambda_a = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}, \quad \lambda_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix}.$$

يشبه الجدول لهذا التمثيل الجدول الأصلي مع إعادة تسمية x بـِ λ_x، كما نرى في الجدول 20.8، فمثلًا:

$$\lambda_a\lambda_b = \begin{pmatrix} e & a & b \\ a & b & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & a & b \\ b & e & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & a & b \\ e & a & b \end{pmatrix} = \lambda_e. \quad ▲$$

الجدول 19.8

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

الجدول 20.8

	λ_e	λ_a	λ_b
λ_e	λ_e	λ_a	λ_b
λ_a	λ_a	λ_b	λ_e
λ_b	λ_b	λ_e	λ_a

وبالنسبة إلى زمرة منتهية معطاة بجدول زمرة، ρ_a هي تبديل العناصر المقابلة لترتيبها في العمود تحت a في الأعلى، و λ_a هي التبديل المقابل لترتيب العناصر في الصف المقابل لـِ a في أقصى اليسار، وقد اختيرت الرموز ρ_a و λ_a للإيحاء بالضرب من اليمين واليسار بـ a، على الترتيب.

تمارين 8

حسابات

في التمارين من 1 إلى 5 احسب الضرب المشار إليه، والمتعلق بالتبديلات الآتية من S_6:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

1. $\tau\sigma$ **2.** $\tau^2\sigma$ **3.** $\mu\sigma^2$ **4.** $\sigma^{-2}\tau$ **5.** $\sigma^{-1}\tau\sigma$

في التمارين من 6 إلى 9 احسب التعبيرات المبيّنة للتبديلات σ ، τ ، μ، التي عرفت قبل التمرين 1.

6. $|\langle\sigma\rangle|$ **7.** $|\langle\tau^2\rangle|$ **8.** σ^{100} **9.** μ^{100}

10. جزّئ مجموعة الزمر المعطاة إلى صفوف من الزمر المتماثلة. والدليل العلوي * هنا يعني العناصر جميعها غير الصفريّة للمجموعة.

$\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع

$\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_2$

S_6

$17\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع

$\mathbb{Q}$ بالنسبة إلى الجمع

$3\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع

$\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع

S_2

$\mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب

$\mathbb{R}^+$ بالنسبة إلى الضرب

$\mathbb{Q}^*$ بالنسبة إلى الضرب

$\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب

الزمرة الجزئيّة $\langle\pi\rangle$ من $\mathbb{R}^*$ بالنسبة إلى الضرب

الزمرة الجزئيّة G من S_5 المولّدة بـِ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

لتكن A مجموعة، ولتكن $\sigma \in S_A$. لعنصر محدد $a \in A$ ، المجموعة

$$\mathcal{O}_{a,\sigma}\{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

هي **مدار a بالنسبة إلى σ** (***orbit of a under σ***). في التمارين من 11 إلى 13، أوجد مدار 1 بالنسبة إلى التبديل المعرّف قبل التمرين 1.

11. σ **12.** τ **13.** μ

14. في الجدول 8.8، استخدمنا ρ_0 ، ρ_1 ، ρ_2 ، μ_1، μ_2 ، μ_3 بوصفها أسماء لعناصر S_3 ألـ 6. يستخدم بعض المؤلفين الرموز $\rho^2\phi$ ، $\rho\phi$، ϕ، ρ^2 ، ρ ، $\in$ لهذه العناصر، حيث $\in$ عندهم هي محايدنا ρ_0، وρ هي ρ_1 عندنا، و ϕ هي μ_1 عندنا. تحقّق هندسيًّا من أنّ تعبيراتهم الستّة تعطى فعلاً S_3 كاملة.

15. بالرجوع إلى التمرين 14، أعطِ تسمية بديلة مشابهة لعناصر D_4 ألـ 8 في الجدول 12.8.

16. أوجد عدد العناصر في المجموعة $\{\sigma \in S_4 \,|\, \sigma(3) = 3\}$.

17. أوجد عدد العناصر في المجموعة $\{\sigma \in S_5 \,|\, \sigma(2) = 5\}$.

18. لتكن الزمرة S_3 في المثال 7.8:

أ. أوجد الزمر الجزئيّة الدوريّة $\langle\rho_1\rangle$ ، $\langle\rho_2\rangle$ ، و $\langle\mu_1\rangle$ لـِ S_3.

ب. أوجد جميع الزمر الجزئيّة، الفعلية وغير الفعليّة، لـِ S_3 ، وأعطِ مخطط الزمر الجزئيّة لها.

19. تحقّق من أنّ مخطط الزمر الجزئيّة لـ D_4 المبيّن في الشكل 13.8 صحيح، من خلال إيجاد جميع الزمر الجزئيّة (الدوريّة) المولّدة بعنصر واحد، ثم جميع الزمر الجزئيّة المولّدة بعنصرين، إلى آخره.

20. أعطِ جدول الضرب للزمرة الجزئيّة الدوريّة من S_5 المولّدة بـ

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

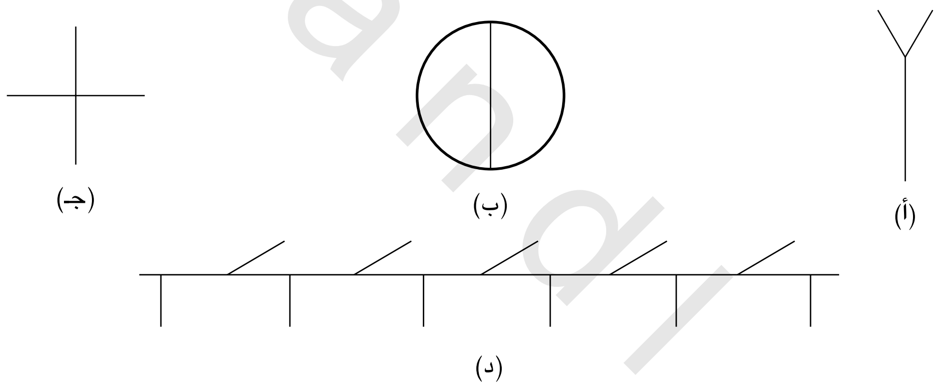
سيكون هناك ستة عناصر، ولتكن : ρ، ρ^2، ρ^3، ρ^4، ρ^5، و $\rho^0 = \rho^6$. هل هذه الزمرة تماثل S_3؟

21. أ. تحقّق من أنّ المصفوفات الستّ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تشكل زمرة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. [مساعدة: لا تحاول حساب حواصل الضرب كلها لهذه المصفوفات، وبدلًا من ذلك، فكّر في كيفيّة تحوّل متجه العمود $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بضربه من اليسار بكل من هذه المصفوفات].

ب. ما الزمرة التي نوقشت في هذا الفصل والتي تماثل هذه الزمرة من ستّ مصفوفات؟



افترض هذا الفرع يستمرّ بصورة لا نهائية إلى اليسار واليمين

الشكل 21.8

22. بعد إنجاز حلّ التمرين 21 ، اكتب ثماني مصفوفات تشكل زمرة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات، وتماثل D_4.

ناقشنا في هذا الفصل زمرة التناظرات لمثلث متساوي الأضلاع ولمربّع. أعطِ زمرة ناقشناها في الكتاب، تماثل زمرة التناظرات للشكل المشار إليه في التمارين من 23 إلى 26. (ربما تحب أن تسمي بعض النقاط على الشكل)، ثم اكتب بعض التبديلات المطابقة للتناظرات، واحسب بعض حواصل الضرب لتبديلات.

23. الشكل في الشكل 21.8 (أ)

24. الشكل في الشكل 21.8 (ب)

25. الشكل في الشكل 21.8 (جـ)

26. الشكل في الشكل 21.8 (د)

27. احسب التمثيل المنتظم الأيسر لـ $\mathbb{Z}_4$ والتمثيل المنتظم الأيمن لـ S_3 مستخدمًا الرموز في المثال 7.8.

مفاهيم

في التمرينين 28 و 29 صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل، دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

28. التبديل لمجموعة S، هو دالّة أحاديّة من S إلى S.

29. التمثيل المنتظم الأيسر لزمرة G، هو الدالّة من G إلى S_G، التي قيمتها عند $g \in G$ تبديل G الذي يحمل كل $x \in G$ إلى gx.

في التمارين من 30 إلى 34، حدّد ما إذا كانت الدالّة المعطاة تبديلًا لـ $\mathbb{R}$.

30. $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_1(x) = x + 1$

31. $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_2(x) = x^2$

32. $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_3(x) = -x^3$

33. $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_4(x) = e^x$

34. $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرّفة بالقاعدة $f_5(x) = x^3 - x^2 - 2x$

35. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

______ أ. كل تبديل هو دالّة أحاديّة.

______ ب. كل دالّة هي تبديل، إذا وفقط إذا كانت أحاديّة.

______ جـ. كل دالّة غامرة من مجموعة منتهية إلى نفسها يجب أن تكون أحاديّة.

______ د. كل زمرة G تماثل زمرة جزئيّة من S_G.

______ هـ. كل زمرة جزئيّة من زمرة إبداليّة هي إبداليّة.

______ و. كل عنصر من زمرة يولّد زمرة جزئيّة دوريّة من الزمرة.

______ ز. زمرة التناظر S_{10} فيها 10 عناصر.

______ ح. زمرة التناظر S_3 دوريّة.

______ ط. S_n ليست دوريّة لأيّ n.

______ ي. كل زمرة تماثل زمرة تبديلات ما.

36. بيّن بمثال أنّ كل زمرة جزئيّة فعليّة من زمرة غير إبداليّة يمكن أن تكون إبداليّة.

37. لتكن A مجموعة غير خالية، ما نوع البنية الجبرية المذكورة سابقًا في الكتاب، والمعطاة بمجموعة الدوالّ كلها من A إلى نفسها بالنسبة إلى تركيب الاقترانات؟

38. عبّر تخطيطيًّا عن رسم كايلي موجه لـ D_n مستخدمًا مجموعة مولّدة مؤلفة من دوران بمقدار $2\pi/n$ بالتقدير الدائري وانعكاس (صورة مرآة)، انظر التمرين 44.

براهين مختصرة

39. أعطِ اختصارًا من جملتين لإثبات مبرهنة كايلي.

براهين

في التمارين من 40 إلى 43، لتكن A مجموعة، B مجموعة جزئيّة من A، وليكن b عنصرًا خاصًّا من B. حدّد ما إذا كان مؤكّدًا أنّ المجموعة المعطاة تكون زمرة جزئيّة من S_A بالنسبة إلى العملية المتولّدة. هنا $\sigma[B] = \{\sigma(x) \mid x \in B\}$.

40. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma(b) = b\}$

41. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma(b) \in B\}$

42. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma[B] \subseteq B\}$

43. $\{\sigma \in S_A \mid \sigma[B] = B\}$

44. على غرار المثالين 7.8 و 10.8، افترض مضلّعًا مستويًا منتظمًا ذا n ضلعًا، حيث $n \geq 3$. كل طريقة يمكن بها وضع نسختين من مثل هذا المضلع ذي n ضلعًا على أن تغطي إحداهما الأخرى تقابل تبديلًا معينًا للرؤوس، ومجموعة هذه التبديلات هي زمرة – **الزمرة الزوجية من الدرجة n** (***nth dihedral group***) – D_n بالنسبة إلى ضرب التبديلات. أوجد رتبة هذه الزمرة D_n، ثم بيّن هندسيًّا أنّ هذه الزمرة لها زمرة جزئيّة فيها نصف عدد عناصر الزمرة الكليّة تمامًا.

45. افترض مكعبًا يملأ صندوقًا مكعبًا تمامًا، كما في المثالين 7.8 و 10.8، في هذه الحالة تقابل الطرق التي يمكن بها وضع المكعب داخل الصندوق زمرة معيّنة من تبديلات لرؤوس المكعب، وهذه الزمرة هي **زمرة الحركات** (**أو الدورانات**) **الصلبة للمكعب** ***(group of rigid motions (or rotations) of the cube)***. (يجب ألا يُخلط بينها وبين زمرة تناظرات الشكل، التي ستناقش في تمارين الفصل 12). أوجد عدد العناصر في هذه الزمرة، ثم بيّن هندسيًّا أنّ هذه الزمرة لها على الأقل ثلاث زمر جزئيّة مختلفة من الرتبة 4، وعلى الأقل أربع زمر جزئيّة مختلفة من الرتبة 3.

46. أثبت أنّ S_n زمرة غير إبداليّة لـ $n \geq 3$.

47. تقويةً للتمرين 46، أثبت أنه إذا كان $n \geq 3$، فإنّ العنصر الوحيد σ من S_n الذي يحقّق $\sigma\gamma = \gamma\sigma$ لكل $\gamma \in S_n$ هو $\sigma = \iota$، التبديل المحايد.

48. عُرِّفت المدارات قبل التمرين 11. ليكن $a,b \in A$ و $\sigma \in S_A$، فأثبت أنه إذا كان $\mathcal{O}_{a,\sigma}$ و $\mathcal{O}_{b,\sigma}$ لهما عنصر مشترك، فإنّ $\mathcal{O}_{a,\sigma} = \mathcal{O}_{b,\sigma}$.

49. إذا كانت A مجموعة، فإنّ الزمرة الجزئيّة H من S_A **متعدية على** ***(transitive on)*** A إذا كان لكل $a,b \in A$ يوجد $\sigma \in H$، بحيث إن $\sigma(a) = b$. أثبت أنه إذا كانت A مجموعة منتهية غير خالية، فإنه توجد زمرة جزئيّة دورية منتهية H من S_A بالصفة $|H| = |A|$ تكون متعدية على A.

50. بالرجوع إلى التعريف الذي سبق التمرين 11 وإلى التمرين 49، أثبت أنه لـ $\sigma \in S_A$، $\langle\sigma\rangle$ متعدية على A إذا وفقط إذا كان $\mathcal{O}_{a,\sigma} = A$ لعنصر ما $a \in A$.

51. (انظر التحذير صفحة 78). لتكن G زمرة مع عملية ثنائيّة $*$، ولتكن G' المجموعة G نفسها، فعَرِّف العملية الثنائيّة $*'$ على G' بـ $x *' y = y * x$ لكل $x,y \in G'$.

أ. (من البدهي أن G' بالنسبة إلى $*'$ زمرة) افترض أنّ الجدار الأمامي لغرفة صفك صنع من زجاج شفاف، وأنّ حواصل

الضرب الممكنة كلها $a * b = c$ والأمثلة الممكنة كلها $a*(b*c) = (a*b)*c$ على خاصية التجميع لـِ G بالنسبة إلى $*$ قد كتبت على الجدار بقلم سبّورة.

ما الذي سيراه الشخص إذا نظر من الغرفة المجاورة أمام غرفتك إلى الجهة الأخرى من الجدار؟

ب. أثبت من التعريف الرياضيّ لـِ $*'$ أنّ G' زمرة بالنسبة إلى $*'$.

52. لتكن G زمرة. برهن على أنّ التبديلات $\rho_a: G \longrightarrow G$، حيث $\rho_a(x) = xa$ لـِ $a \in G$ و $x \in G$، تشكل زمرة تُماثِلُ G.

53. **مصفوفة التبديل** (***permutation matrix***) هي مصفوفة يمكن الحصول عليها من مصفوفة محايدة بإعادة ترتيب صفوفها، فإذا كانت P مصفوفة تبديل من الدرجة $n \times n$ و A أيّ مصفوفة من الدرجة $n{\times}n$ و $C = PA$، فإنّ C يمكن الحصول عليها من A بإعادة ترتيب صفوف A تمامًا بالطريقة نفسها لإعادة ترتيب الصفوف التي أنتجت P من I_n.

أ. أثبت أنّ أيّ زمرة منتهية من الرتبة n تماثل زمرة مكوّنة من مصفوفات تبديل من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

ب. لكل من العناصر الأربعة b و a و e و c في الجدول 11.5 للزمرة V، أعطِ مصفوفة معينة من الدرجة 4×4 تقابله بالنسبة إلى مثل هذا التماثل.

الفصل 9 المدارات، والدورات، والزمر المتناوبة
Orbits, Cycles, and the Alternating Groups

المدارات

يحدّد كل تبديل σ لمجموعة A تجزئةً للمجموعة A إلى خلايا تحقق: $a,b \in A$ تقعان في الخلية نفسها، إذا وفقط إذا كان $b = \sigma^n(a)$ لعدد ما $n \in \mathbb{Z}$. نُكوِّن هذه التجزئة باستخدام علاقة تكافؤ مناسبة:

افترض أن $a,b, \in A$ تعرف العلاقة $a \sim b$ إذا وفقط إذا وجد $n \in \mathbb{Z}$ بحيث $b = \sigma^n(a)$. (1)

نتحقّق الآن من أنّ $\sim$ المعرّفة بالشرط (1) هي بالفعل علاقة تكافؤ.

منعكسة من الواضح أنّ $a \sim a$؛ لأن $a = \iota(a) = \sigma^0(a)$.

متناظرة إذا كان $a \sim b$، فإنّ $b = \sigma^n(a)$ لعدد ما $n \in \mathbb{Z}$، عندئذٍ يكون $a = \sigma^{-n}(b)$ و $-n \in \mathbb{Z}$؛ ولذلك $b \sim a$.

متعدية افترض أنّ $a \sim b$ و $b \sim c$، هذا يضمن أنّ $b = \sigma^n(a)$ و $c = \sigma^m(b)$ لعددين ما $n,m \in \mathbb{Z}$، ونجد بالتعويض أنّ $c = \sigma^m(\sigma^n(a)) = \sigma^{n+m}(a)$؛ ولذلك $a \sim c$.

1.9 تعريف لتكن σ تبديلًا لمجموعة A، صفوف التكافؤ في A المحددة بعلاقة التكافؤ (1) هي **مدارات σ** (***orbits of σ***). ■

2.9 مثال لأنّ التبديل المحايد ι لـِ A يُثبّت كل عنصرٍ من A، فمدارات ι هي المجموعات الجزئيّة أحاديّة العنصر من A. ▲

3.9 مثال أوجد مدارات التبديل:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

في S_8

الحل: لإيجاد المدار الذي يحوي 1، نكرّر تطبيق σ، حاصلين بالرموز على:

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} \cdots .$$

لأنّ σ^{-1} سوف تعكس ببساطة اتجاه الأسهم في هذه السلسلة، نرى أنّ المدار الذي يحوي 1 هو $\{1,3,6\}$، فنختار الآن عددًا صحيحًا من 1 إلى 8 لا ينتمي إلى $\{1,3,6\}$، ولنقل 2، ونجد على صورة مشابهة أنّ المدار الذي يحوي 2 هو $\{2,8\}$. أخيرًا، نجد أنّ المدار الذي يحوي 4 هو $\{4,7,5\}$، ولأنّ هذه المدارات الثلاثة تشمل الأعداد الصحيحة كلها من 1 إلى 8، فإننا نرى أنّ القائمة الكاملة لمدارات σ هي:

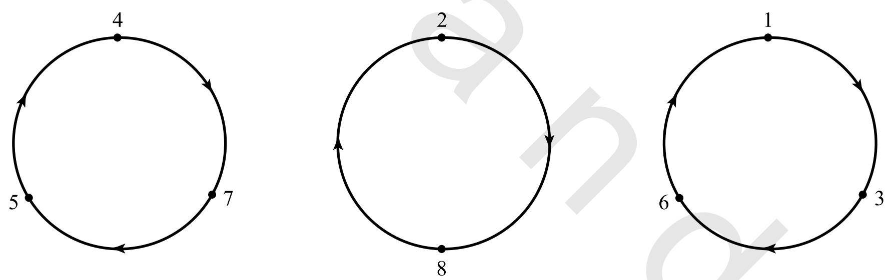
$\{1,3,6\}$ ، $\{2,8\}$ ، $\{4,5,7\}$. ▲

الدورات

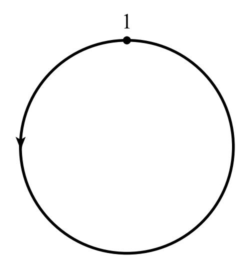
فيما تبقّى من هذا الفصل، نفترض فقط التبديلات لمجموعة منتهية A فيها n عنصرًا، ويمكننا أيضًا افتراض أنّ $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$ ، وأننا نتعامل مع عناصر من زمرة التناظر S_n.

ارجع إلى المثال 3.9. المدارات لـِ: $$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

مشار إليها بالرسم في الشكل 4.9، أي إنّ σ تؤثر في كل عدد صحيح من 1 إلى 8 بواحدة من الدوائر بحمله إلى العدد الصحيح الآتي على الدائرة، متحركين بعكس عقارب الساعة في اتجاه الأسهم، فمثلًا: تشير الدائرة التي في أقصى اليسار إلى أنّ $\sigma(1) = 3$، $\sigma(3) = 6$ ، و $\sigma(6) = 1$. الشكل 4.9 هو طريقة لطيفة لتَصوُّر تركيب التبديل σ.



الشكل 4.9



الشكل5.9

إنّ كل دائرة في الشكل 4.9 بمفردها تعرف بنفسها تبديلًا في S_8، فمثلًا: الدائرة في أقصى اليمين تقابل التبديل:

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

المؤثر في 1 ،و3 ، و6 تمامًا بتأثير σ نفسه، لكنه يثبّت باقي الأعداد الصحيحة 2 ، و4 ، و5، و7، و8. وباختصار، μ لها مدار واحد من ثلاثة عناصر $\{1,3,6\}$ وخمسة مدارات أحاديّة العنصر $\{2\}$، و$\{4\}$ ، و$\{5\}$ ، و$\{7\}$، و$\{8\}$، مثل هذا التبديل – الموصوف بالرسم بدائرة واحدة – يُسمّى دورة (من دائرة)، على أننا نعُدّ التبديل المحايد دورةً؛ لأنه يمكن تمثيله بدائرة فيها العدد الصحيح 1 فقط، كما في الشكل 5.9، نُعرِّف الآن الحدّ دورة بطريقة رياضية دقيقة.

6.9 تعريف التبديل $\sigma \in S_n$ **دورة (cycle)**، إذا كان له على الأكثر مدار واحد يحوي أكثر من عنصر، **وطول الدورة (length)** هو عدد العناصر في مدارها الأكبر. ■

لتجنّب الرمز المتعب – كما في المعادلة (3) – للدورة، نقدّم رمز الدورة المكوّن من صفّ منفرد، فبرمز الدورة، تصبح الدورة في المعادلة (3)

$$\mu = (1،3،6)$$

ونفهم من خلال هذا الرمز أنّ μ تحمل العدد الأول 1 إلى العدد الثاني 3، والعدد الثاني 3 إلى العدد الآتي 6، إلى آخره، إلى أن يُحمَل في النهاية العدد الأخير 6 إلى العدد الأول 1، حيث يُفهم أنّ μ ثبّتت العدد الذي لم يظهر في الرمز لـ μ، ويجب أن تكون المجموعة التي تؤثر فيها μ واضحة من السياق، ويبينها مثالنا $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

7.9 مثال في الزمرة S_5، نرى أنّ:

$$(1,3,5,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

لاحظ أنّ $(1,3,5,4) = (3,5,4,1) = (5,4,1,3) = (4,1,3,5)$. ▲

بالطبع، لأنّ الدورات أنواع خاصة من التبديلات، فيمكن ضربها تمامًا كأيّ تبديلين؛ لكن حاصل ضرب دورتين ليس بالضرورة دورة.

باستخدام رمز الدورة، نرى أنّ التبديل σ في المعادلة (2) يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب دورات:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1,3,6)(2,8)(4,7,5) \tag{4}$$

هذه الدورات **منفصلة (disjoint)**، بمعنى أنّ أيّ عدد صحيح يُحرَّك بواحدة على الأكثر من هذه الدورات؛ لذلك، لا يظهر أيّ عدد في رمزي دورتين مختلفتين، مع العلم أنّ المعادلة (4) تُظهر σ بدلالة مداراتها، وهي وصف بسطرٍ واحدٍ للشكل 4.9، ويمكن التعبير بطريقة مشابهة عن كل تبديلٍ من S_n بوصفه حاصل ضربٍ دوراتٍ منفصلة تقابل مداراته، نصوغ ذلك بمبرهنة، ونكتب إثباتها.

8.9 مبرهنة كل تبديل σ لمجموعة منتهية هو حاصل ضرب دورات منفصلة.

البرهان لتكن B_1 ، B_2 ، ... ، B_r هي مدارات σ، ولتكن μ_i هي الدورة المعرّفة بـِ

$$\mu_i(x) = \begin{cases} \sigma(x) & ،x \in B_i \\ x & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

من الواضح أنّ $\sigma = \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_r$، ولأنّ مدارات صفوف التكافؤ B_1 ، B_2 ، ... ، B_r منفصلة بصفتها صفوف تكافؤ مختلفة، فتكون الدورات μ_1 ، μ_2 ، ... ، μ_r منفصلة أيضًا. ◆

في حين أنّ ضرب التبديلات عمومًا غير إبدالي، إلّا أنه يُرى بسهولة أنّ ضرب الدورات المنفصلة إبداليّ، ولأنّ مدارات التبديل وحيدة، فيكون تمثيل التبديل بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة – ليس أيّ منها التبديل المحايد – وحيدًا وفق ترتيب العوامل.

مثال 9.9 اعتبر التبديل $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

لنكتبه بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة. أولًا ، حُرِّكت 1 إلى 6 ثم 6 إلى 1، ما يعطي الدورة $(1,6)$، ثمّ حُرِّكت 2 إلى 5، ثمّ إلى 3، ثم إلى 2، أو $(2,5,3)$. وبهذا تمّ الاعتناء بالعناصر كلها ما عدا 4، التي ثُبِّتت؛ لذلك:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1,6)(2,5,3)$$

ضرب الدورات المنفصلة إبداليّ، لهذا فإنّ ترتيب العاملين $(1,6)$ و $(2,5,3)$ غير مهم. ▲

عليك التدرّب على ضرب التبديلات برمز الدورات، حيث يمكن أن تكون الدورات منفصلة أو غير منفصلة، نعطي مثالًا، ونضيف مزيدًا من التدريب في التمارين من 7 إلى 9.

مثال 10.9 لتكن الدورتان $(1,4,5,6)$ و $(2,1,5)$ من S_6، فبالضرب نجد أنّ:

$$(1,4,5,6)(2,1,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

و

$$(2,1,5)(1,4,5,6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} =$$

ليس أيّ من هذين التبديلين دورةً. ▲

التبديلات الزوجية والفردية

يبدو مبررًا أنّ كل إعادة ترتيب للمتسلسلة 1 ، 2 ، ... ، n يمكن الوصول إليه من خلال تبديل متكرر لمواقع أزواج من الأعداد. نناقش هذا بصورة أكثر منهجيةً.

11.9 تعريف الدورة التي طولها 2 هي **مُناقلة** (***transposition***). ■

لذلك، فالمناقلة تُثبّت العناصر كلها ما عدا اثنين، وترسل كلًّا من هذين العنصرين إلى الآخر. يبيّن الحساب أنّ:

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (a_1, a_n)(a_1, a_{n-1})...(a_1, a_3)(a_1, a_2)$$

لذلك، أيّ دورة هي حاصل ضرب مناقلات، وبهذا نحصل على ما يأتي نتيجة للمبرهنة 8.9.

12.9 نتيجة أيّ تبديل لمجموعة منتهية فيها عنصران على الأقل هو حاصل ضرب مناقلات.

من البدهي أنّ ما تنصّ عليه هذه النتيجة هو أنّ أيّ إعادة ترتيبٍ لـ n عنصرًا يمكن الوصول إليها بتبديلٍ متتابعٍ لأزواج منها.

13.9 مثال باتباع الملاحظات التي سبقت النتيجة، نرى أنّ $(1,6)\ (2,5,3)$ هي حاصل الضرب $(2,5)\ (2,3)\ (1,6)$ لمناقلات. ▲

14.9 مثال في S_n حيث $n \geq 2$، التبديل المحايد هو حاصل ضرب مناقلتين $(1,2)\ (1,2)$. ▲

رأينا أنّ كل تبديل لمجموعة منتهية فيها عنصران على الأقل هو حاصل ضرب مناقلات، ربّما لا تكون المناقلات منفصلة، وتمثيل التبديل بهذه الطريقة ليس وحيدًا، فمثلًا: يمكننا دائمًا أن ندخل المناقلة $(1,2)$ مرّتين في البداية؛ لأن $(1,2)\ (1,2)$ هو التبديل المحايد، والصحيح أنّ عدد المناقلات المستخدمة لتمثيل تبديلٍ معطًى يجب أن يكون إما زوجيًّا دائمًا أو فرديًّا دائمًا، وهذه حقيقة مهمّة، وسنعطي برهانين: يستخدم الأول خاصيّةً للمحددات من الجبر الخطيّ، ويشمل الثاني عدّ المدارات الذي اقتُرح من قبل ديفيد م. بلوم (*Dovid M. Bloom*).

15.9 مبرهنة ليس هناك أيّ تبديل من S_n يمكن التعبير عنه بوصفه حاصل ضرب عددٍ زوجي من المناقلات، وبوصفه حاصل ضرب عدد فردي من المناقلات في الوقت نفسه.

البرهان 1 (من الجبر الخطي) أشرنا في الفصل 8 إلى أنّ $S_A \simeq S_B$ إذا كان A و B لهما عدد العناصر نفسه. نعمل مع تبديلات ألـ n صفًّا للمصفوفة المحايدة I_n من الدرجة $n \times n$ بدلًا من الأعداد n , ... , 2 , 1، والمصفوفة المحايدة لها المحددة 1، إنّ تبديل أيّ صفّين من مصفوفة مربّعة يغيّر إشارة المحددة، ولتكن C مصفوفةً تمّ الحصول عليها بالتبديل σ لصفوف I_n، فلو كان بالإمكان الحصول على C من I_n بعددٍ زوجيّ وبعددٍ فرديّ من المناقلات كذلك، لكان لها المحددة 1 و 1- كذلك، وهذا مستحيل؛ ولذلك، لا يمكن التعبير عن σ بوصفه حاصل ضرب عددٍ زوجيّ وعددٍ فرديّ من المناقلات.

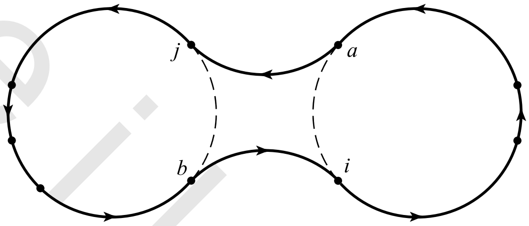
البرهان 2 (عدّ المدارات)

ليكن $\sigma \in S_n$ ولتكن $\tau = (i,j)$ مناقلة من S_n، وندّعي أنّ عدد مدارات σ وعدد مدارات $\tau\sigma$ يختلفان بـِ 1.

حالة I: افترض أنّ i و j في مدارين مختلفين لـ σ، واكتب σ بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة: أُولاها تحوي j والثانية تحوي i، وهما ممثّلتان بالدائرتين في الشكل 16.9، ويمكننا أن نكتب حاصل ضرب هاتين الدورتين بالرموز على الصورة:

$$(b,j,\times,\times,\times)\ (a,i,\times,\times)$$

حيث يشير الرمز $\times$ إلى عناصر أخرى محتملة في هذين المدارين.



الشكل 16.9

بحساب حاصل ضرب أول ثلاث دورات في $\tau\sigma = (i,j)\ \sigma$ نحصل على:

$$(i,j)(b,j,\times,\times,\times)(a,i,\times,\times) = (a,j,\times,\times,\times,b,i,\times,\times)$$

دُمج المداران الأصليّان معًا لتكوين مدار واحد في $\tau\sigma$ كما في الشكل 16.9، ويطلب التمرين 28 إعادة الحسابات لبيان أنّ الشيء نفسه يحدث لو كان أحد i و j أو كلاهما عنصرًا وحيدًا في مداره في σ.

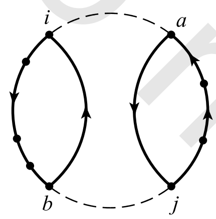
حالة II: افترض أنّ i و j في المدار نفسه لـ σ، يمكننا عندئذٍ كتابة σ بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة، على أن تكون أول دورة على الصورة:

$$(a,i,\times,\times,\times,b,j,\times,\times)$$

المبينة بطريقة رمزية بالدائرة في الشكل 17.9، وبحساب حاصل ضرب أول دورتين في $\tau\sigma = (i,j)\ \sigma$ نحصل على:

$$(i,j)\ (a,i,\times,\times,\times,b,j,\times,\times) = (a,j,\times,\times)\ (b,i,\times,\times,\times)$$

وهنا المدار الأصلي المنفرد انقسم إلى مدارين كما في الشكل 17.9.



الشكل 17.9

لقد أثبتنا أنّ عدد المدارات لـ $\tau\sigma$ يختلف عن عدد المدارات لـ σ بـ 1، والتبديل المحايد ι له n مدار؛ لأن كل عنصر هو العضو الوحيد في مداره. والآن، عدد المدارات لتبديل معطًى $\sigma \in S_n$ يختلف عن n إمّا بعددٍ زوجيّ أو فرديّ، لكن ليس بكليهما؛ لذلك، فمن المستحيل كتابة

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \cdots \tau_m \iota$$

حيث τ_k هي مناقلات بطريقتين، مرّة بـِ m زوجيّة ومرّة بـِ m فرديّة. ◆

18.9 تعريف يكون تبديل مجموعة منتهية **زوجيًا** (***even***) أو **فرديًا** (***odd***)، بناءً على إمكانية التعبير عنه في صورة حاصل ضرب لعددٍ زوجيّ من المناقلات، أو في صورة حاصل ضرب لعددٍ فرديّ من المناقلات على التوالي. ■

19.9 مثال إنّ التبديل المحايد ι من S_n تبديل زوجيّ؛ لأن $(1,2)\,(1,2) = \iota$، وإذا كان $n = 1$، وعليه، فإننا لا نستطيع تكوين حاصل الضرب هذا، نُعرّف ι بأنه زوجيّ، ومن ناحية أخرى، التبديل $(1,4,5,6)\,(2,1,5)$ من S_6 يمكن كتابته على الصورة:

$$(1,4,5,6)\,(2,1,5) = (1,6)\,(1,5)\,(1,4)\,(2,5)\,(2,1)$$

التي فيها خمس مناقلات؛ ولذلك، هذا تبديل فرديّ. ▲

الزمر المتناوبة

ندّعي أنه لـِ $n \geq 2$، عدد التبديلات الزوجيّة في S_n هو عدد التبديلات الفرديّة نفسه؛ أي إنّ S_n تنقسم بالتساوي، وأنّ كل عددٍ هو $(n!)/2$، لإثبات ذلك، لتكن A_n مجموعة التبديلات الزوجيّة كلها في S_n ، ولتكن B_n مجموعة التبديلات الفرديّة كلها، حيث $n \geq 2$، نتابع لتعريف دالّة أحاديّة غامرة من A_n إلى B_n، وهذا بالضبط ما يلزم لإثبات أنّ A_n و B_n لهما عدد العناصر نفسه.

لتكن τ أيّ مناقلة محدّدة من S_n؛ وهي موجودة لأنّ $n \geq 2$، ويمكننا حتى أن نفترض أنّ $\tau = (1,2)$. نعرّف دالّةً

$$\lambda_\tau : A_n \rightarrow B_n$$

بالقاعدة

$$\lambda_\tau(\sigma) = \tau\,\sigma$$

أي إنّ $\sigma \in A_n$ تُرسل إلى $(1,2)\,\sigma$ بـِ λ_τ، لاحظ أنّ σ زوجيّة، ويمكن التعبير عن التبديل $(1,2)\sigma$ بوصفه حاصل ضرب (1 + عدد زوجيّ) – أو عدد فرديّ – لمناقلات؛ ولذلك $(1,2)\sigma$ هي فعلًا في B_n، وإذا صحّ أنّ $\lambda_\tau(\sigma) = \lambda_\tau(\mu)$ لـِ σ و μ من A_n، فإنّ

$$(1,2)\sigma = (1,2)\mu,$$

ولأنّ S_n زمرة، فيكون لدينا $\sigma = \mu$؛ لذلك، λ_τ دالّة أحاديّة، أخيرًا

$$\tau = (1,2) = \tau^{-1},$$

ولهذا إذا كان $\rho \in B_n$ ، فإنّ

$$\tau^{-1}\rho \in A_n\,,$$

و

$$\lambda_\tau(\tau^{-1}\rho) = \tau(\tau^{-1}\rho) = \rho.$$

لذلك، λ_τ غامرةٌ إلى B_n؛ لهذا عدد العناصر في A_n هو عدد العناصر نفسه في B_n؛ لأنه يوجد تقابلٌ بين عناصر المجموعتين.

لاحظ أنّ حاصل ضرب تبديلين زوجيين هو تبديل زوجي كذلك، أيضًا لأنّ $n \geq 2$، فالمناقلة $(1,2)$ في S_n و $(1,2)(1,2) = \iota$ هو تبديل زوجيّ. أخيرًا، لاحظ أنه إذا عُبِّر عن σ بوصفه حاصل ضرب مناقلات، فإنّ حاصل ضرب المناقلات نفسها، لكنها مأخوذة بترتيب مُعاكس هو σ^{-1}، وإذا كان σ تبديلًا زوجيًا، فيجب أن يكون σ^{-1} زوجيًّا كذلك، وبالرجوع إلى المبرهنة 14.5، نرى أننا برهنّا العبارة الآتية:

20.9 مبرهنة إذا كان $n \geq 2$، فإنّ مجموعة التبديلات الزوجيّة كلها لـِ $\{1,2,3,...,n\}$ تشكل زمرة جزئيّة رتبتها $n!/2$ من زمرة التناظرات S_n.

21.9 تعريف الزمرة الجزئية من S_n المؤلفة من التبديلات الزوجيّة لـِ n حرف، هي **الزمرة المتناوبة A_n على n حرف** (***alternating group A_n on n letters***). ■

إنّ كلًّا من S_n و A_n زمرة مهمّة، وقد بيّنت مبرهنة كايلي أنّ كل زمرة منتهية G تطابق تركيبيًّا زمرةً جزئيّة ما من S_n ، حيث $n = |G|$. ويمكن إثبات أنه لا توجد صيغٌ تشمل فقط جذورًا لحل معادلات كثيرات الحدود من الدرجة n لـِ $n \geq 5$ ، وهذه الحقيقة ترجع في الواقع إلى تركيب A_n، أمرٌ مفاجىء كما يبدو!

تمارين 9

حسابات

أوجد جميع المدارات للتبديل المعطى في التمارين من 1 إلى 6.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

4. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ حيث $\sigma(n) = n + 1$

5. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ، حيث $\sigma(n) = n + 2$

6. $\sigma : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ، حيث $\sigma(n) = n - 3$

في التمارين من 7 إلى 9، احسب حاصل الضرب المشار إليه لدوراتٍ هي تبديلاتٌ لـِ $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

7. $(1,4,5)\,(7,8)(2,5,7)$

8. $(1,3,2,7)\,(4,8,6)$

9. $(1,2)(4,7,8)(2,1)(7,2,8,1,5)$

في التمارين من 10 إلى 12، عبّر عن التبديل لـِ $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ بوصفه حاصل ضرب دورات منفصلة، ثم بوصفه حاصل ضرب مناقلات.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

13. تذكّر أنّ العنصر a من زمرة G بمحايد e له الرتبة $r > 0$ ، إذا كان $a^r = e$ وليس هناك قوة موجبة أصغر لـ a هي المحايد. لتكن الزمرة S_8.

أ. ما رتبة الدورة $(1,4,5,7)$؟

ب. صُغ مبرهنة مستوحاة من الفرع (أ).

جـ. ما رتبة $\sigma = (4,5)(2,3,7)$؟ وما رتبة $\tau = (1,4)(3,5,7,8)$؟

د. أوجد رتبة كل من التبديلات المعطاة في التمارين من 10 إلى 12 بالنظر إلى تحليلها بوصفها حاصل ضرب دورات منفصلة.

هـ. صُغ مبرهنة مستوحاة من الفرعين (جـ) و (د). [مساعدة: الكلمات المهمة التي تبحث عنها هي المضاعف المشترك الأصغر].

في التمارين من 14 إلى 18، أوجد أكبر رتبة ممكنة لعنصر من S_n لقيمة n المعطاة.

14. $n = 5$ **15.** $n = 6$ **16.** $n = 7$ **17.** $n = 10$ **18.** $n = 15$

19. يظهر الشكل 22.9 رسم كايلي موجهًا للزمرة المتناوبة A_4 باستخدام المجموعة المولِّدة $S = \{(1,2,3), (1,2)(3,4)\}$. تابع تسمية الرؤوس التسعة الأخرى بعناصر A_4، مُعبّرًا عنها بوصفها حواصل ضرب دورات منفصلة.

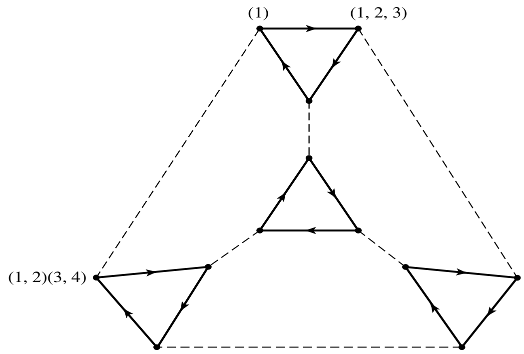
مفاهيم

في التمارين من 20 إلى 22، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل، دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

20. للتبديلِ σ لمجموعةٍ A، *المدار* لـِ σ هو مجموعة جزئيّة أصغريّة غير خالية من A تُرسَل إلى نفسها على نحو غامر بـِ σ.

21. *الدورة* هي تبديل له مدار واحد.

22. *الزمرة المتناوبة* هي زمرة التبديلات الزوجيّة جميعها.



الشكل 22.9

23. ضع إشارة صحّ أو إشارة خطأ.

______ أ. كل تبديل هو دورة.

______ ب. كل دورة هي تبديل.

______ جـ. تعريف التبديلات الزوجيّة والفرديّة بالإمكان إعطاؤه على حدّ سواء قبل المبرهنة 15.9.

______ د. كل زمرة جزئيّة غير تافهة H من S_9 تحوي تبديلًا فرديًّا ما، ستحوي مناقلة.

______ هـ. A_5 فيها 120 عنصرًا.

______ و. S_n ليست دوريةً لأيّ $n \geq 1$.

______ ز. A_3 زمرة إبداليّة.

______ ح. S_7 تماثل الزمرة الجزئيّة المؤلفة من العناصر كلها من S_8 التي تُثَبّت العدد 8.

______ ط. S_7 تماثل الزمرة الجزئيّة المؤلفة من العناصر كلها من S_8 التي تُثبّت العدد 5.

______ ي. التبديلات الفرديّة في S_8 تشكل زمرة جزئيّة من S_8.

24. أيّ من التبديلات من S_3 في المثال 7.8 زوجيّة؟ أعطِ جدول الزمرة المتناوبة A_3.

براهين مختصرة

25. أعطِ اختصارًا من جملة واحدة للإثبات 1 للمبرهنة 15.9.

26. أعطِ اختصارًا من جملتين للإثبات 2 للمبرهنة 15.9.

براهين

27. برهن على ما يأتي حول S_n إذا كان $n \geq 3$.

أ. كل تبديلٍ من S_n يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب $n - 1$ مناقلة على الأكثر.

ب. كل تبديلٍ من S_n ليس دورةً يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب $n - 2$ مناقلة على الأكثر.

جـ. كل تبديلٍ فرديّ من S_n يمكن كتابته بوصفه حاصل ضرب $2n + 3$ مناقلة، وكل تبديلٍ زوجيّ بوصفه حاصل ضرب $2n+8$ مناقلة.

28. أ. ارسم شكلًا مشابهًا للشكل 16.9 ؛ لتوضيح أنه إذا كان i و j في مدارين مختلفين لـِ σ و $\sigma(i)=i$، فإنّ عدد مدارات $(i,j)\sigma$ أقل بواحدٍ من عدد مدارات σ.

ب. أعد الفرع (أ) إذا كان $\sigma(j) = j$ أيضًا.

29. أثبت أنه لأيّ زمرة جزئيّة H من S_n ، حيث $n \geq 2$، إمّا أن تكون التبديلات كلها في H زوجيّة أو نصفها بالضبط زوجية.

30. ليكن σ تبديلًا لمجموعة A. سوف نقول: إنّ " σ **تُحرِّك** (***moves***) $a \in A$" إذا كان $\sigma(a) \neq a$. إذا كانت A مجموعة منتهية، فكم عنصرًا حُرِّك بدورةٍ $\sigma \in S_A$ طولها n؟

31. لتكن A مجموعة غير منتهية، ولتكن H مجموعة كل $\sigma \in S_A$، بحيث إنّ عدد العناصر التي حُرِّكت بـِ σ (انظر التمرين 30) منتهٍ. أثبت أنّ H زمرة جزئيّة من S_A.

32. لتكن A مجموعة غير منتهية، ولتكن K مجموعة كل $\sigma \in S_A$ التي تُحرِّك (انظر التمرين 30) على الأكثر 50 عنصرًا من A. فهل K زمرة جزئيّة من S_A؟ لماذا؟

33. لتكن S_n حيث $n \geq 2$ محددةً، وليكن σ تبديلًا فرديًّا محدّدًا. أثبت أنّ أيّ تبديل فرديّ من S_n هو حاصل ضرب σ مع تبديل ما من A_n.

34. أثبت أنه إذا كانت σ دورةً طولها فردي، فإنّ σ^2 دورة.

35. مواصلةً لاتجاه التفكير الذي بُدئ بالتمرين 34، أكمل ما يأتي بشرطٍ يشمل n و r، على أن تكون العبارةُ الناتجةُ مبرهنةً:

إذا كانت σ دورةً طولها n، فإنّ σ^r أيضًا دورةٌ إذا وفقط إذا كان ...

36. لتكن G زمرة، وليكن a عنصرًا محددًا من G. أثبت أنّ الدالّة $\lambda_a: G \longrightarrow G$ المعطاة بـِ $\lambda_a(g) = ag$ لـِ $g \in G$ هي تبديلٌ للمجموعة G.

37. بالرجوع إلى التمرين 36، أثبت أنّ $H = \{\lambda_a | a \in G\}$ زمرة جزئيّة من S_G، زمرة تبديلات G كلها.

38. بالرجوع إلى التمرين 49 من الفصل 8، أثبت أنّ H في التمرين 37 متعدّية على المجموعة G. [مساعدة: هذه نتيجة مباشرة لإحدى المبرهنات في الفصل 4].

39. أثبت أنّ S_n مُولَّدةٌ بـ $\{(1,2),(1,2,3,\ldots,n)\}$. [مساعدة: أثبت أنه بتغيُّر r تعطي $(1,2,3,\ldots,n)^r(1,2)(1,2,3,\ldots,n)^{n-r}$ المناقلات كلها $(1,2)$، $(2,3)$، $(3,4)$، ... ، $(n-1,n)$، $(n,1)$. ثمّ أثبت أنّ أيّ مناقلة هي حاصل ضربٍ لبعض هذه المناقلات، واستخدم النتيجة 12.9].

الفصل 10 مجموعات المشاركة ومبرهنة لاجرانج Cosets and the Theorem of Lagrange

ربما لاحظت أنّ رتبة الزمرة الجزئيّة H من زمرة منتهية G تبدو دائمًا قاسمًا لرتبة G. هذه مبرهنة لاجرانج، وسوف نبرهنها من خلال تقديم تجزئة لـ G إلى خلايا، جميعها لها حجم H نفسه؛ لذلك، إذا وُجِد r من مثل هذه الخلايا، فسوف يكون لدينا:

$$(\text{رتبة } G) = r(\text{رتبة } H)$$

الذي تنتج منه المبرهنة مباشرة، ثم سوف تُسمّى الخلايا في التجزئة مجموعات المشاركة لـ H، وهي مهمّة بذاتها، وفي الفصل 14، سنرى أنه إذا كانت H تحقّق خاصية معيّنة، فإن كل مجموعة مشاركة يمكن النظر إليها بوصفها عنصرًا من زمرة بطريقة طبيعية جدًّا. سنعطي في هذا الفصل بعض الإيضاحات حول زمر مجموعات المشاركة، لمساعدتك على تكوين انطباع عن الموضوع.

مجموعات المشاركة

لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، التي يمكن أن تكون من رتبة منتهية أو غير منتهية. سنُقدّم تجزئتين لـ G من خلال تعريف علاقتي تكافؤ، $\sim_L$ و $\sim_R$ على G.

1.10 مبرهنة لتكن H زمرة جزئيّة من G، ولتكن العلاقة $\sim_L$ معرّفةً على G بـ

$a \sim_L b$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}b \in H$.

لتكن $\sim_R$ مُعرّفةً بـ

$a \sim_R b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$.

عندئذٍ تكون كلتا $\sim_L$ و $\sim_R$ علاقة تكافؤ على G.

البرهان سنثبت أنّ $\sim_L$ علاقة تكافؤ، ونترك برهان ذلك لـ $\sim_R$ إلى التمرين 26. ولاحظ عند قراءتك للبرهان، كيف يتعيّن علينا باستمرار استخدام حقيقة أنّ H زمرة جزئيّة من G.

منعكسة ليكن $a \in G$، عندئذٍ يكون $a^{-1}a = e$ و $e \in H$؛ لأن H زمرة جزئيّة؛ لذلك، $a \sim_L a$.

متناظرة افترض أنّ $a \sim_L b$، عندئذ يكون $a^{-1}b \in H$، ولأنّ H زمرة جزئيّة، $(a^{-1}b)^{-1}$ في H و $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a$؛ ولذلك $b^{-1}a$ في H و $b \sim_L a$.

متعدية ليكن $a \sim_L b$ و $b \sim_L c$، عندئذ يكون $a^{-1}b \in H$ و $b^{-1}c \in H$، ولأنّ H زمرة جزئيّة، $(a^{-1}b)(b^{-1}c) = a^{-1}c$ في H؛ ولذلك $a \sim_L c$. ♦

تُعرِّف علاقةُ التكافؤ $\sim_L$ في المبرهنة 1.10 تجزئة لـ G، كما وصفت في المبرهنة 22.0. لنلاحظ كيف تبدو الخلايا في هذه التجزئة. افترض أنّ $a \in G$، تتألف الخلية التي تحوي a من كل $x \in G$، بحيث إنّ $a \sim_L x$، وهذا يعني كل $x \in G$، بحيث إنّ $a^{-1}x \in H$. الآن، $a^{-1}x \in H$ إذا وفقط إذا كان $a^{-1}x = h$ لعنصر ما $h \in H$، أو بصيغة مكافئة، إذا وفقط إذا كان $x = ah$ لعنصر ما $h \in H$؛ ولذلك، فالخلية التي تحوي a هي $\{ah \mid h \in H\}$، التي نرمز لها بـ aH، وإذا ما اتبعنا التبرير نفسه لعلاقة التكافؤ $\sim_R$ المعرّفة بـ H، فنجد أنّ الخلية من هذه التجزئة التي تحوي $a \in G$ هي $Ha = \{ha \mid h \in H\}$، ولأنّ G ليست بالضرورة إبداليّة، فليس لدينا ما يدعو إلى توقُّع أن تكون aH و Ha هما المجموعة الجزئيّة نفسها من G. نعطي الآن تعريفًا منهجيًّا:

2.10 تعريف لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، المجموعة الجزئيّة $aH = \{ah \mid h \in H\}$ من G، هي **مجموعة المشارَكة اليسرى** (***left coset***) لـِ H التي تحوي a، بينما المجموعة الجزئيّة $Ha = \{ha \mid h \in H\}$، هي **مجموعة المشاركة اليمنى** (***right coset***) لـِ H التي تحوي a. ■

3.10 مثال اعرض مجموعات المشاركة اليسرى ومجموعات المشاركة اليمنى للزمرة الجزئيّة $3\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$.

الحل رَمْزُنا هنا هو الجمع؛ ولذلك، فمجموعة المشاركة اليسرى لـِ $3\mathbb{Z}$ التي تحوي m هي $m + 3\mathbb{Z}$، وبأخذ $m = 0$، نرى أنّ

$$3\mathbb{Z} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$$

وهي نفسها واحدة من مجموعات مشاركتها اليسرى، مجموعة المشاركة التي تحوي 0، ولإيجاد مجموعة مشاركة يسرى أخرى، نختار عنصرًا من $\mathbb{Z}$ ليس في $3\mathbb{Z}$، لنَقُل: 1، ونجد مجموعة المشاركة اليسرى التي تحويه:

$$1+3\mathbb{Z} = \{\dots,-8,-5,-2,1,4,7,10,\dots\}.$$

مجموعتا المشاركة اليسريان هاتان، $3\mathbb{Z}$ و $1 + 3\mathbb{Z}$، لم تستنفدا $\mathbb{Z}$ كلها بعد، فمثلًا: 2 ليس في أيّ منهما، مجموعة المشاركة اليسرى التي تحوي 2 ، هي:

$$2 + 3\mathbb{Z} = \{\dots,-7,-4,-1,2,5,8,11,\dots\}$$

من الواضح أنّ مجموعات المشاركة اليسرى الثلاث التي أوجدناها تستنفد $\mathbb{Z}$؛ ولذلك، فهي تُشكّل تجزئة $\mathbb{Z}$ إلى مجموعات مشاركة يسرى لـِ $3\mathbb{Z}$.

لأنّ $\mathbb{Z}$ إبداليّة، فمجموعة المشاركة اليسرى $m + 3\mathbb{Z}$ هي مجموعة المشاركة اليمنى نفسها $3\mathbb{Z} + m$؛ ولهذا فتجزئة $\mathbb{Z}$ إلى مجموعات مشاركة يمنى هي نفسها. ▲

نلاحظ من المثال 3.10 أمرين.

لزمرة جزئيّة H من زمرة إبداليّة G، تكون تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـِ H هي تجزئة G نفسها إلى مجموعات مشاركة يمنى.

كذلك، بالنظر ثانيةً إلى المثالين 17.0 و 20.0، نرى أنّ علاقة التكافؤ $\sim_R$ للزمرة الجزئية $n\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$ هي علاقة التطابق نفسها مقياس n. تذكّر أنّ $h \equiv k \ (mod\ n)$ في $\mathbb{Z}$ ، إذا كان $h - k$ يقبل القسمة على n، وهذا تمامًا مثل قولنا: إنّ $h + (-k)$ هو في $n\mathbb{Z}$، التي هي العلاقة $\sim_R$ في المبرهنة 1.10 برمز الجمع؛ ولذلك، فتجزئة $\mathbb{Z}$ إلى مجموعات مشاركة لـِ $n\mathbb{Z}$ هي تجزئة $\mathbb{Z}$ إلى صفوف بواقٍ مقياس n؛ لهذا ، نشير غالبًا للخلايا في هذه التجزئة بمجموعات المشاركة مقياس $n\mathbb{Z}$، لاحظ أننا لا نحتاج إلى أن نحدّد مجموعات مشاركة يسرى أو يمنى؛ لأنها نفسها لهذه الزمرة الإبداليّة $\mathbb{Z}$.

4.10 مثال الزمرة $\mathbb{Z}_6$ إبداليّة. أوجد تجزئة $\mathbb{Z}_6$ إلى مجموعات مشاركة للزمرة الجزئيّة $H = \{0,3\}$.

الحل إحدى مجموعات المشاركة هي $\{0,3\}$ نفسها، ومجموعة المشاركة التي تحوي 1، هي $\{1,4\} = \{0,3\} + 1$، وكذلك مجموعة المشاركة التي تحوي 2 ، هي $\{2,5\} = \{0,3\} + 2$، ولأنّ $\{0,3\}$ ، و$\{1,4\}$ ، و$\{2,5\}$ تستنفد $\mathbb{Z}_6$ جميعها، فهذه هي مجموعات المشاركة كلها. ▲

نلفت النظر إلى شيء مدهش سنوضحه بالتفصيل في الفصل 14، فبالرجوع ثانيةً إلى المثال 4.10، يعطي الجدول 5.10 العملية الثنائيّة لـ $\mathbb{Z}_6$ لكن مع كون العناصر مسرودةً بالترتيب الذي ظهرت به في مجموعات المشاركة $\{0,3\}$، $\{1,4\}$، $\{2,5\}$، وقد ظلّلنا الجدول بحسب مجموعات المشاركة هذه.

افترض أننا رمزنا لمجموعات المشاركة هذه بحسب تظليلها بـ فا (فاتح)، مت (متوسط)، وغا (غامق)، عندئذ يُعرِّف الجدول 5.10 عملية ثنائية على هذه التظليلات، وفي الجدول 6.10، لاحظ أنه إذا استبدلنا 0 بـ فا، و1 بـ مت، و 2 بـ غا في الجدول 6.10، فإننا نحصل على جدول $\mathbb{Z}_3$؛ لذلك فجدول التظليلات يشكل زمرة! وسوف نرى في الفصل 14 أنه لتجزئة زمرة إبداليّة إلى مجموعات مشاركة لزمرة جزئيّة، فإنّ إعادة ترتيب جدول الزمرة بحسب العناصر في مجموعات المشاركة يُنشئ مثل زمرة مجموعات المشاركة هذه.

الجدول 5.10

$+_6$	0	3	1	4	2	5
0	0	3	1	4	2	5
3	3	0	4	1	5	2
1	1	4	2	5	3	0
4	4	1	5	2	0	3
2	2	5	3	0	4	1
5	5	2	0	3	1	4

الجدول 6.10

	فا	مت	غا
فا	فا	مت	غا
مت	مت	غا	فا
غا	غا	فا	مت

7.10 مثال يبين الجدولُ 8.10 مرةً أخرى الجدولَ 8.8 لزمرة التناظر S_3 على ثلاثة حروف، ولتكن H الزمرة الجزئيّة $\langle \mu_1 \rangle = \{\rho_0, \mu_1\}$ من S_3، فأوجد تجزئة S_3 إلى مجموعات مشاركة يسرى لـِ H، والتجزئة إلى مجموعات مشاركة يمنى لـِ H.

الحل للتجزئة إلى مجموعات مشاركة يسرى، لدينا:

$$H = \{\rho_0 , \mu_1\},$$
$$\rho_1 H = \{\rho_1\rho_0 , \rho_1 \mu_1\} = \{\rho_1 , \mu_3\},$$
$$\rho_2 H = \{\rho_2\rho_0 , \rho_2 \mu_1\} = \{\rho_2 , \mu_2\}.$$

التجزئة إلى مجموعات مشاركة يمنى هي:

$$H = \{\rho_0 , \mu_1\},$$
$$H\rho_1 = \{\rho_0\rho_1 , \mu_1\rho_1\} = \{\rho_1 , \mu_2\},$$
$$H\rho_2 = \{\rho_0\rho_2 , \mu_1\rho_2\} = \{\rho_2 , \mu_3\}.$$

والتجزئة إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H مختلفة عن التجزئة إلى مجموعات مشاركة يمنى، فمثلاً: مجموعة المشاركة اليسرى التي تحوي ρ_1 هي $\{\rho_1 , \mu_3\}$، في حين أنّ مجموعة المشاركة اليمنى التي تحوي ρ_1 هي $\{\rho_1 , \mu_2\}$، هذا لا يفاجئنا؛ لأن الزمرة S_3 غير إبداليّة. ▲

بالرجوع إلى المثال 7.10، يعطي الجدول 9.10 ضرب التبديلات في S_3، فقد سُردت العناصر بالترتيب الذي ظهرت به في مجموعات المشاركة اليسرى $\{\rho_0, \mu_1\}$، $\{\rho_1, \mu_3\}$، $\{\rho_2, \mu_2\}$ التي وجدت في ذاك المثال، ثم مرةً أخرى، ظلّلنا الجدول على صورة: فاتح، ومتوسط، وغامق بحسب مجموعات المشاركة التي تنتمي إليها العناصر، والآن، لاحظ الفرق بين هذا الجدول والجدول 5.10، فلم ينقسم جسم الجدول هذه المرة إلى كُتل 2×2 مقابل وتحت مجموعات المشاركة المظللة في اليسار والأعلى كالجدول 5.10، ولم نحصل على زمرة مجموعاتٍ مشاركة، فحاصل ضرب عنصر فاتح وآخر غامق يمكن أن يكون غامقًا أو متوسطًا.

ظُلِّل الجدول 8.10 بحسب مجموعتي المشاركة اليسريين للزمرة الجزئية $\langle\rho_1\rangle = \{\rho_0, \rho_1, \rho_2\}$ من S_3، هاتان هما أيضًا مجموعتا المشاركة اليمنيين، على الرغم من أنّ S_3 ليست إبداليّة، فمن الواضح من خلال الجدول 8.10 أنّ لدينا زمرة مجموعات مشاركة

الجدول 8.10

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

الجدول 9.10

	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2
ρ_0	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2
μ_1	μ_1	ρ_0	μ_2	ρ_2	μ_3	ρ_1
ρ_1	ρ_1	μ_3	ρ_2	μ_2	ρ_0	μ_1
μ_3	μ_3	ρ_1	μ_1	ρ_0	μ_2	ρ_2
ρ_2	ρ_2	μ_2	ρ_0	μ_1	ρ_1	μ_3
μ_2	μ_2	ρ_2	μ_3	ρ_1	μ_1	ρ_0

تماثل $\mathbb{Z}_2$ في هذه الحالة، سوف نرى في الفصل 14 أنّ مجموعات المشاركة اليسرى لزمرة جزئيّة H من زمرة G تُنشئ زمرة مجموعات مشاركة بالضبط، عندما تكون تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H ، هي التجزئة نفسها إلى مجموعات مشاركة يمنى لـ H. وفي مثل هذه الحالة، يمكننا ببساطة أن نتكلم عن **مجموعات مشاركة** لـ H، حاذفين صفة يسرى أو يمنى، ثم سنناقش زمر مجموعات المشاركة بالتفصيل في الفصل 14، إلّا أننا نظن أنه سيكون من الأسهل لك أن تفهمها لاحقًا، إذا تعاملت معها قليلًا الآن. وقد صُمِّمت بعض التمارين في هذا الفصل لهذه الغاية.

مبرهنة لاجرانج

لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، وهنا ندّعي أنّ أيّ مجموعة مشاركة يسرى وأيّ مجموعة مشاركة يمنى لـ H فيها عدد العناصر نفسه الذي في H، ونثبت ذلك من خلال تقديم دالّة أحاديّة غامرة من H إلى مجموعة مشاركة يسرى gH لـ H لعنصر محدّد g من G، فإذا كانت H ذات رتبة منتهية، فسيثبت هذا أنّ gH فيها عدد العناصر نفسه الذي في H، وإذا كانت H غير منتهية، فيؤخذ وجود مثل هذه الدالّة على أنه تعريف تساوي حجم H وحجم gH. (انظر التعريف 13.0).

اختيارنا لدالّة أحاديّة $\phi: H \to gH$ هو الاختيار الطبيعي، وليكن $\phi(h) = gh$ لكل $h \in H$، هذه الدالّة غامرة إلى gH بحسب تعريف gH على الصورة $\{gh |\ h \in H\}$، ثم لإثبات أنها أحاديّة، افترض أنّ $\phi(h_1) = \phi(h_2)$ لـ h_1 و h_2 من H، عندئذٍ يكون $gh_1 = gh_2$، وبقانون الحذف في الزمرة G نحصل على $h_1 = h_2$؛ لذلك ϕ أحاديّة.

بالطبع، يمكن تكوين دالّة أحاديّة غامرة مشابهة من H إلى مجموعة المشاركة اليمنى Hg. (انظر التمرين 27). نلخص بالآتي:

كل مجموعة مشاركة (يمنى أو يسرى) لزمرة جزئية H من زمرة G فيها عدد العناصر نفسه الذي في H.

يمكننا الآن إثبات مبرهنة لاجرانج.

10.10 مبرهنة (**مبرهنة لاجرانج**): لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة منتهية G، عندئذٍ تكون رتبة H قاسمًا لرتبة G.

البرهان لتكن n رتبة G، ولتكن H من الرتبة m. تثبت العبارة المؤطّرة السابقة أنّ أيّ مجموعة مشاركة لـ H فيها كذلك m عنصرًا، فليكن r عدد الخلايا في تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـ H، عندئذٍ، يكون $n = rm$؛ ولذلك، m هي فعلًا قاسمٌ لـ n. ◆

البرهان لاحظ أنّ هذه المبرهنة الرائعة والمهمة جاءت من العدّ البسيط لمجموعات المشاركة ولعددِ العناصر في كل منها. (لا تستخفَّ أبدًا بنتائج تَعُدُّ شيئًا ما!).

سنواصل اشتقاق نتائج للمبرهنة 10.10، التي يجب أن تُعدَّ مبرهنة عدّ.

11.10 نتيجة كل زمرة من رتبة أوليّة هي دورية.

البرهان لتكن G من رتبة أوليّة p، وليكن a عنصرًا من G مختلفًا عن المحايد، عندئذ يكون في الزمرة الجزئيّة الدوريّة $\langle a\rangle$ من G المولّدة بـ a على الأقل عنصران، a و e، لكن من المبرهنة 10.10، الرتبة $m \geq 2$ لـ $\langle a\rangle$ يجب أن تقسم العدد الأوليّ p؛ لذلك، يجب أن يكون لدينا $m = p$ و $\langle a\rangle = G$؛ ولذلك G دورية. ◆

ولأنّ كل زمرة دوريّة من الرتبة p تماثل $\mathbb{Z}_p$، نرى أنّ هناك تركيب زمرة واحدًا فقط – وفق التماثل – من رتبة أوليّة معطاة p. الآن، ألم تنبثق هذه النتيجة بسهولة عن مبرهنة لاجرانج، التي هي مبرهنة عدّ؟ لا تستخفَّ أبدًا بمبرهنةٍ تعدّ شيئًا ما. (برهنة النتيجة السابقة هي سؤال امتحان مفضّل).

12.10 مبرهنة رتبة العنصر من زمرة منتهية تقسم رتبة الزمرة.

البرهان بتذكُّرنا أنّ رتبة العنصر هي الرتبة نفسها للزمرة الجزئيّة الدوريّة المولَّدة به، نرى أنّ هذه المبرهنة تنتج مباشرة من المبرهنة 10.10. ◆

13.10 تعريف لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، عدد مجموعات المشارَكة اليسرى لـِ H في G هو **الدليل (*index*)** $(G : H)$ **لـِ H في G**. ■

الدليل $(G : H)$ الذي عُرِّف توًّا يمكن أن يكون منتهيًا أو غير منتهٍ، فإذا كانت G منتهية، فمن الواضح أنّ $(G : H)$ منتهٍ و $(G : H) = |G|/|H|$؛ لأن كل مجموعة مشاركة لـ H تحوي $|H|$ عنصرًا، ويبيّن التمرين 35 أنّ الدليل $(G: H)$ يمكن أن يُعرَّف على حدٍّ سواء بأنّه عدد مجموعات المشاركة اليمنى لـِ H في G، وهنا نصوغ مبرهنةً أساسية متعلقةً بأدلّة الزمر الجزئيّة، ونترك البرهان للتمارين (انظر التمرين 38).

14.10 مبرهنة افترض أنّ H و K زمرتان جزئيتان من زمرة G، بحيث إنّ $K \leq H \leq G$، وافترض أنّ $(H : K)$ و $(G: H)$ كلاهما منتهٍ، عندئذٍ يكون $(G: H)$ منتهيًا، و $(G: K) = (G : H)(H: K)$.

تبيّن المبرهنة 10.10 أنه إذا كان هناك زمرة جزئيّة H من زمرة منتهية G، فإنّ رتبة H تقسم رتبة G، هل ترى أنّ العكس صحيح؟ أي إنه، إذا كانت G زمرة من رتبة n، و m تقسم n، فهل هناك دائمًا زمرة جزئيّة من الرتبة m؟ سوف نرى في الفصل الآتي أنّ هذا صحيح للزمر الإبداليّة، ومن ناحية أخرى، يمكن أن يُثْبَتَ أنّ A_4 ليس لها زمرة جزئيّة من الرتبة 6، ما يعطي مثالًا مناقضًا للزمر غير الإبداليّة.

تمارين 10

حسابات

1. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $4\mathbb{Z}$ من $\mathbb{Z}$.

2. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $4\mathbb{Z}$ من $2\mathbb{Z}$.

3. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $\langle 2\rangle$ من $\mathbb{Z}_{12}$.

4. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $\langle 4\rangle$ من $\mathbb{Z}_{12}$.

5. أوجد مجموعات المشاركة كلها للزمرة الجزئيّة $\langle 18\rangle$ من $\mathbb{Z}_{36}$.

6. أوجد مجموعات المشاركة اليسرى كلها للزمرة الجزئيّة $\{\rho_0, \mu_2\}$ من الزمرة D_4 المعطاة بالجدول 12.8.

7. أعد التمرين السابق، لكن أوجد هذه المرة مجموعات المشاركة اليمنى. هل ترى أنها هي مجموعات المشاركة اليسرى نفسها؟

8. أعد كتابة الجدول 12.8 بالترتيب الظاهر من خلال مجموعات المشاركة اليسرى في التمرين 6. هل يبدو أنك حصلت على زمرة مجموعات مشاركة من الرتبة 4؟ فإذا كان كذلك، فهل هي تماثل $\mathbb{Z}_4$ أم زمرة كلاين الرباعيّة V؟

9 . أعد التمرين 6 للزمرة الجزئيّة $\{\rho_0, \mu_2\}$ من D_4.

10. أعد التمرين السابق، لكن أوجد هذه المرة مجموعات المشاركة اليمنى. هل هي مجموعات المشاركة اليسرى نفسها؟

11 . أعد كتابة الجدول 12.8 بالترتيب الظاهر من خلال مجموعات المشاركة اليسرى في التمرين 9. هل يبدو أنك حصلت على زمرة مجموعات مشاركة من الرتبة 4؟ إذا كان كذلك، فهل هي تماثل $\mathbb{Z}_4$ أم زمرة كلاين الرباعية V؟

12. أوجد دليل $\langle 3\rangle$ في الزمرة $\mathbb{Z}_{24}$.

13. أوجد دليل $\langle \mu_1\rangle$ في الزمرة S_3، باستخدام الرمز في المثال 7.10.

14. أوجد دليل $\langle \mu_2\rangle$ في الزمرة D_4 المعطاة في الجدول 12.8.

15. ليكن $\sigma = (1, 2, 5, 4)(2, 3)$ من S_5. أوجد دليل $\langle\sigma\rangle$ في S_5.

16. ليكن $\mu = (1, 2, 4, 5)(3, 6)$ من S_6. أوجد دليل $\langle\mu\rangle$ في S_6.

مفاهيم

في التمرينين 17 و 18، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

17. لتكن G زمرة، ولتكن $H \subseteq G$. *مجموعة المشاركة اليسرى لـِ H التي تحوي a* ، هي $aH = \{ah | h \in H\}$.

18. لتكن G زمرة، ولتكن $H \leq G$. *إنّ دليل H في G* هو عدد مجموعات المشاركة اليمنى لـِ H في G.

19. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

______ **أ**. كل زمرة جزئيّة من أيّ زمرة لها مجموعات مشاركة يسرى.

______ **ب**. عدد مجموعات المشاركة اليسرى لزمرة جزئيّة من زمرة منتهية يقسم رتبة الزمرة.

______ **جـ**. كل زمرة من رتبة أوّليّة هي إبداليّة.

______ **د**. لا يمكن أن تكون هناك مجموعات مشاركة يسرى لزمرة جزئيّة منتهية من زمرة غير منتهية.

______ **هـ**. الزمرة الجزئيّة من زمرة، هي مجموعة مشاركة يسرى لذاتها.

______ **و**. فقط الزمر الجزئيّة من زمرٍ منتهية يمكن أن يكون لها مجموعات مشاركة يسرى.

______ ز. A_n لها الدليل 2 في S_n لـِ $n > 1$.

______ **ح**. مبرهنة لاجرانج نتيجة لطيفة.

______ **ط**. كل زمرة منتهية تحوي عنصرًا من أيّ رتبة تقسم رتبة الزمرة.

______ **ي**. كل زمرةٍ منتهيةٍ دوريّةٍ تحوي عنصرًا من أيّ رتبة تقسم رتبة الزمرة.

في التمارين من 20 إلى 24، أعطِ مثالًا على الزمرة الجزئيّة والزمرة المطلوبتين إن أمكن، وإذا كان ذلك غير ممكن، فبيّن السبب.

20. زمرة جزئيّة من زمرة إبداليّة G، مجموعاتها المشاركة اليسرى ومجموعاتها المشاركة اليمنى تعطيان تجزئتين مختلفتين لـِ G.

21. زمرة جزئيّة من زمرة G، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة لـِ G إلى خلية واحدة فقط.

22. زمرة جزئيّة من زمرة من الرتبة 6، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة للزمرة إلى 6 خلايا.

23. زمرة جزئيّة من زمرة من الرتبة 6، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة للزمرة إلى 12 خلية.

24. زمرة جزئيّة من زمرة من الرتبة 6، تعطي مجموعاتها المشاركة اليسرى تجزئة للزمرة إلى 4 خلايا.

براهين مختصرة

25. أعطِ اختصارًا من جملة واحدة لإثبات المبرهنة 10.10.

براهين

26. برهن على أنّ العلاقة $\sim_R$ في المبرهنة 1.10 هي علاقة تكافؤ.

27. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، وليكن $g \in G$. عرِّف دالةً أحاديّة غامرة من H إلى Hg، وبرهن على أنّ دالّتك أحاديّة وغامرة إلى Hg.

28. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، بحيث إنّ $g^{-1}hg \in H$ لكل $g \in G$، وكل $h \in H$. أثبت أنّ كل مجموعة مشاركة يسرى gH هي مجموعة المشاركة اليمنى Hg نفسها.

29. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G. برهن على أنه إذا كانت تجزئة G إلى مجموعات مشاركة يسرى لـِ H هي التجزئة نفسها إلى مجموعات مشاركة يمنى لـِ H، فإنّ $g^{-1}hg \in H$ لكل $g \in G$ ، وكل $h \in H$. (لاحظ أنّ هذا هو عكس التمرين 28).

لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G، وليكن $a, b \in G$. فبرهن في التمارين من 30 إلى 33 على صحّة العبارة أو أعطِ مثالًا مناقضًا.

30. إذا كان $aH = bH$، فإنّ $Ha = Hb$.

31. إذا كان $Ha = Hb$، فإنّ $b \in Ha$.

32. إذا كان $aH = bH$، فإنّ $Ha^{-1} = Hb^{-1}$.

33. إذا كان $aH = bH$، فإنّ $a^2H = b^2H$.

34. لتكن G زمرة من الرتبة pq، بحيث إنّ p و q عددان أوّليان. أثبت أنّ أيّ زمرة جزئيّة فعلية من G هي دوريّة.

35. أثبت أنّ هناك العدد نفسه من مجموعات المشاركة اليسرى واليمنى لزمرة جزئيّة H من زمرة G؛ أي، قدّم دالّة أحاديّة غامرة من جماعة مجموعات المشاركة اليسرى إلى جماعة مجموعات المشاركة اليمنى. (لاحظ أنّ هذه النتيجة واضحة من خلال العدّ للزمر المنتهية، وأنّ برهانك يجب أن يصلح لأيّ زمرة).

36. بيّن التمرين 29 في الفصل 4 أنّ أيّ زمرة منتهية من رتبة زوجيّة $2n$ تحوي عنصرًا من الرتبة 2. باستخدام مبرهنة لاجرانج، أثبت أنه إذا كانت n فرديّة، فإنّ الزمرة الإبداليّة من الرتبة $2n$ تحوي عنصرًا واحدًا بالضبط من الرتبة 2.

37. أثبت أنّ الزمرة التي فيها عنصران على الأقل، لكن ليس لها زمرة جزئيّة فعلية غير تافهة، يجب أن تكون منتهية ومن رتبة أوّليّة.

38. أثبت المبرهنة 14.10 [مساعدة: لتكن $\{a_i H \mid i = 1, \cdots, r\}$ جماعة مجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـِ H في G ، و$\{b_j K \mid j = 1, \cdots, s\}$ جماعة مجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـِ K في H. برهن على أنّ:

$$\left\{(a_i b_j)K \mid i = 1, \ldots, r;\ j = 1, \ldots, s\right\}$$

هي جماعة مجموعات المشاركة اليسرى المختلفة لـِ K في G].

39. أثبت أنه إذا كانت H زمرة جزئيّة دليلها 2 في زمرة منتهية G، فإنّ أيّ مجموعة مشاركة يسرى لـِ H هي كذلك مجموعة مشاركة يمنى لـِ H.

40. أثبت أنه إذا كان للزمرة G مع محايدٍ e الرتبةَ المنتهية n، فإنّ $a^n = e$ لكل $a \in G$.

41. أثبت أنّ أيّ مجموعة مشاركة يسرى للزمرة الجزئيّة $\mathbb{Z}$ من زمرة الجمع للأعداد الحقيقية، تحوي عنصرًا واحدًا بالضبط x ، بحيث إنّ $0 \le x < 1$.

42. أثبت أنّ الدالّة جيب (**sine**) تقرن القيمة نفسها مع كل عنصر من أيّ مجموعة مشاركة يسرى محدّدة للزمرة الجزئيّة $\langle 2\pi \rangle$ من زمرة الجمع للأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. (لذلك تولِّدُ جيب (**sine**) دالةً حسنة التعريف على مجموعة مجموعات

المشاركة؛ ونحصل على قيمة الدالّة عند مجموعة مشاركة، باختيارنا لعنصر x من مجموعة المشاركة وحساب $sinx$).

43. لتكن H و K زمرتين جزئيّتين من زمرة G. عرّف ~ على G بـِ $a \sim b$، إذا وفقط إذا كان $a = hbk$ لعنصر ما $h \in H$ وعنصر ما $k \in K$.

أ. برهن على أنّ ~ هي علاقة تكافؤ على G.

ب. صف العناصر في صفّ التكافؤ الذي يحوي $a \in G$. (تسمّى صفوف التكافؤ هذه **مجموعات المشاركة المزدوجة** (***double cosets***).

44. لتكن S_A زمرة التبديلات جميعها للمجموعة A، وليكن c عنصرًا خاصًّا من A.

أ. أثبت أنّ $\{\sigma \in S_A \mid \sigma(c) = c\}$ $S_{c,c}$ زمرة جزئيّة من S_A.

ب. ليكن $d \neq c$ عنصرًا خاصًّا آخر من A. هل $S_{c,d} = \{\sigma \in S_A \mid \sigma(c) = d\}$ زمرة جزئيّة من S_A؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

جـ. شخِّص المجموعات $S_{c,d}$ في الفرع (ب) بدلالة الزمرة الجزئيّة $S_{c,c}$ في الفرع (أ).

45. أثبت أنّ للزمرة الدوريّة المنتهية من الرتبة n زمرة جزئيّة واحدة بالضبط من كل رتبةٍ d تقسم n، وأنّ هذه هي الزمر الجزئيّة كلها لها.

46. تُعرَّف دالة–**فاي لأويلر** (***Euler phi-function***) للأعداد الصحيحة الموجبة n بـِ $\varphi(n)= s$، حيث s هي عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أقل من أو تساوي n الأوّلية نسبيًّا مع n. استخدم التمرين 45 في إثبات أنّ:

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

يؤخذ المجموع على الأعداد الصحيحة الموجبة d كلها التي تقسم n. [مساعدة: لاحظ أنّ عدد مولّدات $\mathbb{Z}_d$ هو $\varphi(d)$ بحسب النتيجة 16.6].

47. لتكن G زمرة منتهية. أثبت أنه إذا كان لأيّ عدد صحيح موجب m، عدد الحلول x للمعادلة $x^m= e$ في G هو على الأكثر m، فإنّ G دوريّة. [مساعدة: استخدم المبرهنة 12.10 والتمرين 46 في إثبات أنّ G يجب أن تحوي عنصرًا من الرتبة $n= |G|$].

الفصل 11 الضرب المباشر والزمر الإبدالية منتهية التولُّد

Direct Products and Finitely Generated Abelian Groups

الضرب المباشر

لنُمضِ لحظةً في مراجعة مخزوننا الحالي من الزمر، ولنبدأ بالزمر المنتهية، لدينا الزمرة الدورية $\mathbb{Z}_n$، وزمرة التناظر S_n، والزمرة المتناوبة A_n لكل عدد صحيح موجب n، ولدينا أيضًا الزمرة الزوجيّة D_n من الفصل 8، وزمرة كلاين الرباعية V، وبالطبع نعرف أنّ لهذه الزمر زمرًا جزئيّة، ولننتقل الآن إلى الزمر غير المنتهية، فلدينا زمرٌ مؤلفة من مجموعات أعداد بالنسبة إلى الجمع أو الضرب المعتادين، على سبيل المثال: $\mathbb{Z}$، و $\mathbb{R}$، و $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الجمع، وعناصرها غير الصفرية بالنسبة إلى الضرب، ولدينا الزمرة U للأعداد المركبة ذات المقدار 1 بالنسبة إلى الضرب، التي تماثل كُلًّا من الزمر $\mathbb{R}_c$ بالنسبة إلى الجمع مقياس c، حيث $c \in \mathbb{R}^+$، ولدينا أيضًا الزمرة S_A للتبديلات جميعها للمجموعة غير المنتهية A، إضافة إلى زمر مختلفة مكوّنة من مصفوفات.

يتمثل أحد أهداف هذا الفصل في بيان طريقة لاستخدام زمر معروفة بوصفها وحدات بناء لتشكيل مزيد من الزمر، وسوف يعاد إنشاء زمرة كلاين الرباعية بهذه الطريقة من زمر دوريّة، حيث سيعطينا توظيف هذا الإجراء مع الزمر الدوريّة طائفةً كبيرة من الزمر الإبداليّة، ويمكن إثبات أنها تشمل أنواع التراكيب جميعها الممكنة للزمرة الإبداليّة المنتهية. سنبدأ بتعميم التعريف 4.0.

1.11 تعريف **الضرب الديكارتي للمجموعات (*Cartesian product of sets*)** $S_1, S_2, \ldots, S_n$ هو مجموعة المتعددات كلها $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ من الرتبة n، حيث $a_i \in S_i$ لِـ $i = 1, 2, \ldots, n$. يرمز للضرب الديكارتي إمّا بِـ

$$S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$$

أو بِـ

$$\prod_{i=1}^{n} S_i$$

يمكننا أيضًا تعريف الضرب الديكارتي لعدد غير منتهٍ من المجموعات، لكن التعريف أكثر تعقيدًا إلى حدّ بعيد، ولن نحتاج إليه.

الآن، لتكن $G_1, G_2, \ldots, G_n$ زمرًا، ولنستخدم رمز الضرب في عمليات الزمر كلها، فبالنظر إلى G_i بوصفها مجموعات، يمكننا تكوين $\prod_{i=1}^{n} G_i$، لنثبت أنّ بإمكاننا جعل $\prod_{i=1}^{n} G_i$ زمرةً من خلال العملية الثنائيّة للضرب عبر المركبات، لاحظ ثانيةً أننا نتجاوز عندما نستخدم رمز الزمرة نفسه لمجموعة عناصر الزمرة.

2.11 مبرهنة لتكن $G_1, G_2, \ldots, G_n$ زمرًا، لِـ $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ من $\prod_{i=1}^{n} G_i$، عرّف $(a_1, a_2, \ldots, a_n)(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ على أنه العنصر $(a_1 b_1, a_2 b_2, \ldots, a_n b_n)$، عندئذٍ، تكون $\prod_{i=1}^{n} G_i$ زمرة – **الضرب المباشر للزمر (direct product of the groups)** G_i– بالنسبة إلى هذه العملية الثنائيّة.

البرهان لاحظ أنه لأنّ $a_i \in G_i$، $b_i \in G_i$، و G_i زمرة، فيكون لدينا $a_ib_i \in G_i$؛ لذلك، فتعريف العملية الثنائيّة على $\prod_{i=1}^{n} G_i$ المعطى في نصّ المبرهنة منطقي؛ أي إنّ $\prod_{i=1}^{n} G_i$ مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائيّة.

قانون التجميع في $\prod_{i=1}^{n} G_i$ يُرَدُّ إلى قانون التجميع في كل مركبة على النحو الآتي :

$$(a_1,a_2,....,a_n)\left[(b_1,b_2,...,b_n)(c_1,c_2,...,c_n)\right]$$

$$=(a_1,a_2,....,a_n)(b_1c_1,b_2c_2,...,b_nc_n)$$

$$=(a_1(b_1c_1),a_2(b_2c_2),....,a_n(b_nc_n))$$

$$=((a_1b_1)c_1,(a_2b_2)c_2,....,(a_nb_n)c_n)$$

$$=(a_1b_1,a_2b_2...,a_nb_n)(c_1,c_2,....,c_n)$$

$$=\left[(a_1,a_2,...,a_n)(b_1,b_2,...,b_n)\right](c_1,c_2,...,c_n)$$

إذا كان e_i هو العنصر المحايد في G_i، فمن الواضح مع الضرب عبر المركبات أنّ $(e_1, e_2, ..., e_n)$ محايدٌ في $\prod_{i=1}^{n} G_i$. أخيرًا، إنّ معكوس $(a_1, a_2, ..., a_n)$ هو $(a_1^{-1}, a_2^{-1}, ..., a_n^{-1})$؛ احسب حاصل الضرب عبر المركبات؛ لذلك $\prod_{i=1}^{n} G_i$ زمرة. ♦

في حالة أنّ العملية لكل G_i إبداليّة، نستخدم أحيانًا رمز الجمع في $\prod_{i=1}^{n} G_i$ ونشير إلى $\prod_{i=1}^{n} G_i$ **بالجمع المباشر للزمر** (***direct sum of the groups***) G_i. ويستخدم – أحيانًا – الرمز $\oplus_{i=1}^{n} G_i$ في هذه الحالة بدلًا من $\prod_{i=1}^{n} G_i$، خاصة مع الزمر الإبداليّة مع العملية +. الجمع المباشر للزمر الإبداليّة $G_1,G_2,...,G_n$ يمكن أن يكتب $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$، سنترك للتمرين 46 البرهان على أنّ الضرب المباشر لزمر إبداليّة هو كذلك إبداليّ.

يُرى مباشرة أنه إذا كانت S_i فيها r_i عنصرًا لـ $i= 1, 2, ..., n$، فإنّ $\prod_{i=1}^{n} S_i$ فيه $r_1r_2...r_n$ عنصرًا؛ لأنه في المتعدّد من الرتبة n هناك r_1 خيارًا للمركبة الأولى من S_1، ولكل من هذه الخيارات هناك r_2 خيارًا للمركبة الآتية من S_2، وهكذا.

3.11 مثال لتكن الزمرة $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ التي فيها $2.3 = 6$ عنصرًا، تحديدًا $(0,0)$، $(0,1)$، $(0,2)$، $(1,0)$، $(1,1)$، $(1,2)$، ندّعي أنّ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ دورية، ومن الضروري فقط إيجاد مولّد. لنجرّب $(1,1)$، هنا تُكتب العمليتان في $\mathbb{Z}_2$ و $\mathbb{Z}_3$ بالجمع، ولهذا فسنتبع الطريقة نفسها في الضرب المباشر $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned}
(1,1) &= (1,1)\\
2(1,1) &= (1,1)+(1,1) = (0,2)\\
3(1,1) &= (1,1)+(1,1)+(1,1) = (1,0)\\
4(1,1) &= 3(1,1)+(1,1) = (1,0)+(1,1) = (0,1)\\
5(1,1) &= 4(1,1)+(1,1) = (0,1)+(1,1) = (1,2)\\
6(1,1) &= 5(1,1)+(1,1) = (1,2)+(1,1) = (0,0)
\end{aligned}$$

لذلك، $(1,1)$ مولدٌ لـ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$، ولأنه يوجد – وفق التماثل– تركيب زمرة دورية واحد فقط من رتبة معطاة، فإننا نرى أنّ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ تماثل $\mathbb{Z}_6$. ▲

4.11 مثال لنفترض $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$، هذه زمرة من تسعة عناصر، ندّعي أنّ $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ ليست دوريّة، ولأنّ الجمع عبر المركّبات، وأنّ جمع كل عنصر من $\mathbb{Z}_3$ لنفسه ثلاث مرّات يعطي المحايد، فهذا ما سيحدث في $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$؛ لذلك ليس هناك عنصر يمكن أن يولّد الزمرة؛ لأن المولّد إذا جمع لنفسه مرات متتالية، فيمكن أن يعطي المحايد فقط بعد تسع مرات، وقد وجدنا تركيبًا آخر لزمرة من الرتبة 9، وتبين حجة مشابهة أنّ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ليست دوريّة؛ لذلك يجب أن تكون $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ مماثلةً لزمرة كلاين الرباعية. ▲

وضّح المثالان السابقان المبرهنة الآتية:

5.11 مبرهنة الزمرة $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ دوريّة، وتماثل $\mathbb{Z}_{mn}$ إذا وفقط إذا كان m وn أوّليّين نسبيًّا، أي إنّ gcd لـ m وn هو 1.

البرهان لنفترض الزمرة الجزئيّة الدوريّة من $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ المولّدة بـ $(1,1)$ كما وُصفَت في المبرهنة 17.5، وقد بيّن عملنا السابق، أنّ رتبة هذه الزمرة الجزئيّة الدوريّة هي أصغر قوة لـ $(1,1)$ تعطي المحايد $(0,0)$. ورفع قوة لـ $(1,1)$ في رمز الجمع هنا سوف يقتضي تكرار جمع $(1,1)$ لنفسها، وبالنسبة إلى الجمع عبر المركبات، فتؤدي المركبة الأولى $1 \in \mathbb{Z}_m$ إلى 0 فقط بعد m مُجْمَعًا، $2m$ مُجْمَعًا، وهكذا، وتؤدي المركبة الثانية $1 \in \mathbb{Z}_n$ إلى 0 فقط بعد n مُجْمَعًا، $2n$ مُجْمَعًا، وهكذا، وحتى تؤديا إلى 0 معًا، فيجب أن يكون عدد المُجمعَات مضاعفًا لكلا m و n، ثمّ سيكون العدد الأصغر الذي يشكل مضاعفًا لكل من m وn هو mn ، إذا وفقط إذا كان gcd لـ m وn هو 1؛ وفي هذه الحالة، يولّد $(1,1)$ زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة mn، التي هي رتبة الزمرة كاملةً، وهذا يثبت أنّ $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ دوريّة من الرتبة mn، – وعليه، فهي تماثل $\mathbb{Z}_{mn}$ – إذا كان m وn أوّليّين نسبيًّا.

في المقابل، افترض أنّ gcd لـ m وn هو $d > 1$، عندئذ يكون mn/d قابلًا للقسمة على كل من m وn؛ ونتيجة لذلك، لأيّ (r,s) من $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ يكون لدينا:

$$\underbrace{(r,s)+(r,s)+\ldots+(r,s)}_{\text{مُجمعًا } mn/d} = (0,0)$$

لهذا، فليس هناك عنصر (r,s) من $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ يمكن أن يولّد الزمرة كاملةً؛ لذلك نقول: $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ليست دورية؛ ولذلك لا تماثل $\mathbb{Z}_{mn}$. ♦

ويمكن توسيع هذه المبرهنة بمناقشة مشابهة إلى حاصل ضرب أكثر من عاملين. نصوغ ذلك بوصفه نتيجة دون الذهاب عبر تفاصيل البرهان.

6.11 نتيجة الزمرة $\prod_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_{m_i}$ دورية وتماثل $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \ldots m_n}$، إذا وفقط إذا كانت الأعداد m_i لكل $i= 1,\ldots, n$ أولية نسبيًّا مثنى مثنى.

7.11 مثال تبيّن النتيجة السابقة أنه إذا كتبت n بوصفها حاصل ضرب قوّى لأعدادٍ أوّليّة مختلفة، كما في

$$n = (p_1)^{n_1}(p_2)^{n_2}\ldots(p_r)^{n_r},$$

فإنّ $\mathbb{Z}_n$ تماثل

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{n_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_r)^{n_r}}$$

على وجه الخصوص، $\mathbb{Z}_{72}$ تماثل $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_9$. ▲

نوّهنا سابقًا بأنّ تغيير ترتيب العوامل في الضرب المباشر يؤدي إلى زمرة تماثل الأصلية، وتغيّرت – ببساطة– أسماء العناصر عن طريق تبديلٍ للمركبات في المتعدد ذي الرتبة n.

طلب إليك التمرين 47 في الفصل 6 أنّ تعرِّف المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين موجبين r وs بوصفه مولّدًا لزمرة دوريّة معينة، وإنه لأمر مباشر أن نثبت أنّ المجموعة الجزئيّة من $\mathbb{Z}$ المؤلفة من الأعداد الصحيحة جميعها التي هي مضاعفات لكلا r وs ، هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$؛ ولذلك فهي زمرة دوريّة، وبالمثل، مجموعة المضاعفات المشتركة كلها لـِ n عدد صحيح موجب $r_1,r_2,\ldots,r_n$ هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$؛ ولذلك هي دوريّة.

8.11 تعريف لتكن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ أعدادًا صحيحة، **المضاعف المشترك الأصغر** (***least common multiple***) لها (ويختصر *lcm*) هو المولّد الموجب للزمرة الدوريّة للمضاعفات المشتركة جميعها لـِ r_i، أي، الزمرة الدوريّة للأعداد الصحيحة جميعها القابلة للقسمة على r_i لكل $i= 1, 2, \ldots, n$. ■

من التعريف 8.11 وعملنا على الزمر الدورية، نرى أنّ lcm لـ $r_1, r_2, ..., r_n$ هو أصغر عدد صحيح موجب يشكل مضاعفًا لكل r_i لـ $i = 1, 2, ..., n$، ومن هنا جاء الاسم: مضاعف مشترك أصغر.

9.11 مبرهنة ليكن $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \prod_{i=1}^{n} G_i$، فإذا كانت رتبة a_i في G_i منتهية r_i، فإنّ رتبة $(a_1, a_2, ..., a_n)$ في $\prod_{i=1}^{n} G_i$ تساوي المضاعف المشترك الأصغر لكل ألـ r_i.

البرهان ينتج هذا بإعادة المناقشة المستخدمة في إثبات المبرهنة 5.11، ولكي تعطي قوة لـ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ العنصر $(e_1, e_2, ..., e_n)$، فيجب أن تكون القوة في الوقت نفسه مضاعفًا لـ r_1 لكي تؤدي هذه القوة للمركّبة الأولى a_1 إلى e_1، ومضاعفًا لـ r_2 لكي تؤدي هذه القوة للمركبة الثانية a_2 إلى e_2، وهكذا. ♦

10.11 مثال أوجد رتبة $(8, 4, 10)$ في الزمرة $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$.

الحل لأنّ gcd لـ 8 و 12 هو 4، فنرى أنّ رتبة 8 هي $\frac{12}{4} = 3$ في $\mathbb{Z}_{12}$.(انظر المبرهنة 14.6). وبصورة مشابهة، نجد أنّ رتبة 4 هي 15 في $\mathbb{Z}_{60}$ ورتبة 10 هي 12 في $\mathbb{Z}_{24}$. lcm لـ 3، 15، و12 هو $60 = 3.5.4$؛ ولهذا، (8، 4، 10) هي من الرتبة 60 في الزمرة $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{60} \times \mathbb{Z}_{24}$. ▲

11.11 مثال الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ مولّدة بالعناصر (0،1) و(0 ،1)، وبوجه أعمّ، الضرب المباشر لـ n زمرة دوريّة، كل منها $\mathbb{Z}$ أو $\mathbb{Z}_m$ لعدد صحيح موجب m، مولّدٌ بألـ n متعدد من الرتبة n

$$(1, 0, 0, \cdots, 0), \quad (0, 1, 0, \cdots, 0), \quad (0, 0, 1, \cdots, 0), \quad \cdots, \quad (0, 0, 0, \cdots, 1).$$

مثل هذا الضرب المباشر يمكن أن يولّد بعناصر أقل، فمثلًا: $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{35}$ مولّد بالعنصر المنفرد $(1, 1, 1)$. ▲

لاحظ أنه إذا كان $\prod_{i=1}^{n} G_i$ هو الضرب المباشر للزمر G_i، فإنّ المجموعة الجزئيّة

$$\overline{G_i} = \{(e_1, e_2, ..., e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, ..., e_n) \mid a_i \in G_i\}$$

– أي، مجموعة المتعددات كلها من الرتبة n مع العناصر المحايدة في المواقع جميعها ما عدا الموقع ذي الترتيب i – هي زمرة جزئيّة من $\prod_{i=1}^{n} G_i$، ومن الواضح كذلك أنّ هذه الزمرة الجزئيّة $\overline{G}_i$ تماثل بصورة طبيعية G_i؛ فقط أعِدْ تسمية

$(e_1, e_2, ..., e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, ..., e_n)$ بـ a_i.

فانعكست الزمرة G_i من المركّبة ذات الترتيب i في عناصر $\overline{G}_i$، وأخذت e_j مجراها في المركّبات الأخرى، سنفترض أنّ $\prod_{i=1}^{n} G_i$ هو الضرب الداخلي لهذه الزمر الجزئيّة $\overline{G}_i$، ويسمّى الضرب المباشر المعطى بالمبرهنة 2.11 الضرب المباشر الخارجي للزمر G_i، فعند استخدام التعبيرين داخلي وخارجي مع الضرب المباشر للزمر، فإنهما يعكسان فقط ما إذا كنّا نعُدّ الزمر المركّبات بوصفها زمرًا جزئيّة من زمرة الضرب أم لا (على الترتيب)، وسوف نحذف الكلمتين خارجي وداخلي عادةً، وسنكتفي بالقول ضرب مباشر، وسيكون التعبير الذي نعنيه واضحًا من السياق.

■ **نبذة تاريخية**

أظهر كارل جاوس (*Carl Gauss*) في مُؤلَّفه (*Disquisitions Arithmetica*)، بوضوح نتائج متنوعة فيما يعرف اليوم نظرية الزمر الإبداليّة في سياق نظرية الأعداد، ولم يقتصر على التعامل بصورة موسّعة مع صفوف التكافؤ لصيغ تربيعية، بل عدّ أيضًا صفوف البواقي قياس عدد صحيح معطًى، فعلى الرغم من أنه لاحظ أنّ النتائج في هذين الموضوعين كانت متشابهة، إلّا أنه لم يحاول تطوير نظرية مجرّدة للزمر الإبداليّة.

وفي العقد 1840–1849، لاحظ إرنست كُمر (*Ernst Kummer*) في تعامله مع الأعداد المركبة المثالية أنّ نتائجه كانت مشابهة من نواحٍ عدّة لنتائج جاوس. (انظر النبذة التاريخية في الفصل 26.)، لكن تلميذ كُمر، ليوبولد كرونكر (*Leopold Kronecker*) (انظر النبذة التاريخية في الفصل 29)، هو الذي أدرك أخيرًا أنه يمكن تطوير نظرية مجرّدة من خلال التشابهات، إضافة إلى أنه كتب عام 1870م: "هذه المبادئ [من عمل جاوس وكُمر] تشكّل جزءًا من حقل من الأفكار الأكثر عمومًا وتجريدًا؛ لذلك، فمن المناسب تحرير تطويرهما من القيود غير المهمة جميعها، حتى يُجنِّب المرء نفسه الحاجة إلى إعادة المناقشة نفسها في حالات مختلفة، وتظهر هذه الفائدة في التطوير نفسه، ويكتسب التقديم بساطة إذا ما أُعطي بالنمط المقبول الأكثر عمومًا؛ لأن المعالم الأكثر أهمية تبرز بوضوح". ثمّ تابع كرونكر لتطوير المبادئ الأساسية لنظرية الزمر الإبداليّة المنتهية، وكان قادرًا على صياغة وبرهنة صيغة من المبرهنة 12.11 اقتصرت على الزمر المنتهية.

تركيب الزمر الإبدالية منتهية التولُّد

بعض مبرهنات الجبر المجرد سهلة للفهم والاستخدام، على الرغم من أنّ برهانها قد يكون تقنيًّا ومُستغرقًا وقتًا في تقديمه، وهذا فصلٌ في الكتاب نشرح فيه معنى وأهمية مبرهنة مع حذف الإثبات، إنّ مغزى أيّ مبرهنة نحذف إثباتها مُستحسن من وجهة نظرنا، ونشعر أنه يتعيّن أن نتقبّله؛ لأنه سوف يكون من المستحيل علينا أن نستقبل بعض هذه الحقائق المُبْهِرة في مقرر دراسي لفصل واحد، إذا ما كنا مصرّين على الخوض في إثباتات كاملة للمبرهنات جميعها، حيث تعطينا المبرهنة التي نصوغها الآن معلومات تركيبية كاملة عن جميع الزمر الإبداليّة الصغيرة صِغرًا كافيًا، وعلى وجه الخصوص عن الزمر الإبداليّة المنتهية كلها.

12.11 مبرهنة **المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (*Fundamental Theorem of Finitely Generated Abelian Groups*)** كل زمرة إبداليّة منتهية التولّد G تماثل ضربًا مباشرًا لزمرٍ دوريّةٍ بالصيغة:

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \cdots \times \ \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}} \times \ \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \ \times\cdots\times \ \mathbb{Z},$$

حيث إنّ ألـ p_i أعداد أوّليّة، ليست بالضرورة مختلفة، وألـ r_i أعداد صحيحة موجبة، والضرب المباشر وحيد ما عدا لإعادة ترتيب ممكنة للعوامل؛ أي إنّ العدد (**عدد بيتي (Betti number)** لـِ G) للعوامل $\mathbb{Z}$ وحيد، وقوى الأعداد الأوّليّة $\left(p_i\right)^{r_i}$ وحيدة.

البرهان الإثبات محذوف هنا. ♦

13.11 مثال أوجد الزمر الإبداليّة جميعها – وفق التماثل– من الرتبة 360. تَدلّ العبارة وفق التماثل على أنّ أيّ زمرة إبداليّة رتبتها 360، يجب أن تكون متطابقة تركيبيًّا (تماثل) مع واحدة من الزمر المعروضة ذات الرتبة 360.

الحل سنستخدم المبرهنة 12.11. لأنّه على زمرنا أن تكون من الرتبة 360، فلن تظهر العوامل $\mathbb{Z}$ في الضرب المباشر المبيّن في نصّ المبرهنة.

نعبّر أولًا عن 360 بوصفه حاصل ضرب قوى أعداد أوّليّة $2^3 3^2 5$، ثمّ نستخدم المبرهنة 12.11، فنحصل – بوصفها حالات ممكنة – على:

1. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$
2. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$
3. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$
4. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$
5. $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_5$
6. $\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_9\times\mathbb{Z}_5$

لذلك، فهناك ست زمر إبداليّة مختلفة (وفق التماثل) من الرتبة 360. ▲

تطبيقات

نختم هذا الفصل بعيّنة من مبرهنات كثيرة، يمكننا إثباتها الآن بالنظر إلى الزمر الإبداليّة.

14.11 تعريف الزمرة G **قابلة للتفريق** (***decomposable***) إذا كانت تماثل ضربًا مباشرًا لزمرتين جزئيّتين فعليتين غير تافهتين، وبخلاف ذلك، تكون G **غير قابلة للتفريق** (***indecomposable***). ■

15.11 مبرهنة الزمر الإبداليّة المنتهية غير القابلة للتفريق هي بالضبط الزمر الدوريّة التي رتبتها قوة لعدد أوّليّ.

البرهان لتكن G زمرًا إبداليّة منتهية غير قابلة للتفريق، عندئذ بحسب المبرهنة 12.11، G تماثل ضربًا مباشرًا لزمر دورية رتبها قوى لأعداد أوّليّة، ولأنّ G غير قابلة للتفريق، فيجب أن يتكوّن هذا الضرب المباشر من زمرة دوريّة واحدة فقط رتبتها قوة لعدد أوّليّ.

في المقابل، ليكن p عددًا أوليًّا، عندئذٍ تكون $\mathbb{Z}_{p^r}$ غير قابلة للتفريق؛ لأنه لو كانت $\mathbb{Z}_{p^r}$ تماثل $\mathbb{Z}_{p^i} \times \mathbb{Z}_{p^j}$، حيث $i + j = r$، فإنّ كل عنصر سيكون له رتبة على الأكثر $p^{max(i,j)} < p^r$. ♦

16.11 مبرهنة إذا كانت m تقسم رتبة الزمرة الإبداليّة المنتهية G، فإنّ G لها زمرة جزئيّة رتبتها m.

البرهان باستخدام المبرهنة 12.11، يمكننا أن نفكّر في G على أنها:

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}}$$

في حين أنه ليس بالضرورة أن تكون الأعداد الأوّليّة p_i جميعها مختلفة، ولأنّ $(p_1)^{r_1}(p_2)^{r_2} \cdots (p_n)^{r_n}$ هي رتبة G، فإنّ m يجب أن تكون على الصورة $(p_1)^{s_1} (p_2)^{s_2} \cdots (p_n)^{s_n}$، حيث $0 \le s_i \le r_i$. بحسب المبرهنة 14.6، يولِّد $\left(p_i\right)^{r_i - s_i}$ زمرة جزئيّة دورية من $\mathbb{Z}_{(p_i)^{r_i}}$ رتبتها تساوي ناتج قسمة $(p_i)^{r_i}$ على الـ gcd لـ $(p_i)^{r_i}$ و $\left(p_i\right)^{r_i - s_i}$، لكن الـ gcd لـ $(p_i)^{r_i}$ و $\left(p_i\right)^{r_i - s_i}$ هو $\left(p_i\right)^{r_i - s_i}$؛ لذلك، يولِّد $\left(p_i\right)^{r_i - s_i}$ زمرة جزئيّة دوريّة من $\mathbb{Z}_{(p_i)^{r_i}}$ رتبتها $\left[\left(p_i\right)^{r_i}\right] / \left[\left(p_i\right)^{r_i - s_i}\right] = (p_i)^{s_i}$.

بتذكُّر أنّ $\langle a \rangle$ ترمز إلى الزمرة الجزئية الدوريّة المولّدة بـ a، نرى أنّ:

$$\left\langle (p_1)^{r_1 - s_1} \right\rangle \times \left\langle (p_2)^{r_2 - s_2} \right\rangle \times \ldots \times \left\langle (p_n)^{r_n - s_n} \right\rangle$$

هي الزمرة الجزئيّة المطلوبة ذات الرتبة m. ♦

17.11 مبرهنة إذا كان m عددًا صحيحًا خاليًا من المربعات، أي إنّ m لا يقبل القسمة على مربع أيّ عدد أوّليّ، فإنّ أيّ زمرة إبداليّة رتبتها m هي دوريّة.

البرهان لتكن G زمرة إبداليّة من رتبة m خالية من المربعات، عندئذٍ وبحسب المبرهنة 12.11، G تماثل

$$\mathbb{Z}_{(p_1)^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{(p_2)^{r_2}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{(p_n)^{r_n}}$$

حيث $m = (p_1)^{r_1} (p_2)^{r_2} \cdots (p_n)^{r_n}$، ولأنّ m خالية من المربعات، فيجب أن يكون لدينا كل $r_i = 1$ وكل p_i أعداد أوّليّة مختلفة، ثم تبين النتيجة 6.11 أنّ G تماثل $\mathbb{Z}p_1 p_2 \cdots p_n$؛ ولذلك، G دوريّة. ◆

تمارين 11

حسابات

1. اسرد عناصر $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$، ثمّ أوجد رتبة كل من هذه العناصر. هل هذه الزمرة دوريّة؟

2. أعد التمرين 1 للزمرة $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$.

في التمارين من 3 إلى 7 أوجد رتبة العنصر المعطى من الضرب المباشر.

3. $(2,6)$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$ **4.** $(2,3)$ من $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15}$ **5.** $(8, 10)$ من $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$

6. $(3, 10, 9)$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$ **7.** $(3, 6, 12, 16)$ من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{24}$

8. ما أكبر رتبة ضمن رتب الزمر الجزئيّة الدوريّة جميعها من $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8$؟ من $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$؟

9. أوجد الزمر الجزئيّة الفعلية غير التافهة جميعها من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

10. أوجد الزمر الجزئيّة الفعلية غير التافهة جميعها من $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

11. أوجد الزمر الجزئيّة جميعها من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ ذات الرتبة 4.

12. أوجد الزمر الجزئيّة جميعها من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$، التي تماثل زمرة كلاين الرباعية.

13. بغض النظر عن رتب العوامل، اكتب ضروبًا مباشرة لزمرتين أو أكثر بالصورة $\mathbb{Z}_n$، بحيث يماثل الضرب الناتج $\mathbb{Z}_{60}$ بأكبر عدد ممكن من الطرق.

14. أكمل الفراغ.

أ. الزمرة الجزئيّة الدوريّة من $\mathbb{Z}_{24}$ المولَّدة بـِ 18 لها الرتبة ______.

ب. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$ هي من الرتبة _______.

جـ. العنصر $(4, 2)$ من $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_8$ له الرتبة___.

د. زمرة كلاين الرباعية تماثل $\mathbb{Z}$ _____ $\times \mathbb{Z}$ _____.

هـ. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_4$ فيها _______ عنصرًا من رتبة منتهية.

15. أوجد الرتبة الممكنة العظمى لعنصر ما من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

16. هل الزمرتان $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{12}$ و $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ متماثلتان؟ لماذا أو لماذا لا؟

17. أوجد الرتبة الممكنة العظمى لعنصر ما من $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{24}$.

18. هل الزمرتان $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{24}$ و $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{40}$ متماثلتان؟ لماذا أو لماذا لا؟

19. أوجد الرتبة الممكنة العظمى لعنصر ما من $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{15}$.

20. هل الزمرتان $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{18} \times \mathbb{Z}_{15}$ و $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{10}$ متماثلتان؟ لماذا أو لماذا لا؟

في التمارين من 21 إلى 25، واصل إيجاد الزمر الإبداليّة – وفق التماثل – من الرتبة المعطاة، كما في المثال 13.11.

21. الرتبة 8 **22.** الرتبة 16 **23.** الرتبة 32

24. الرتبة 720 **25.** الرتبة 1089

26. كم زمرة إبداليّة (وفق التماثل) من الرتبة 24؟ ومن الرتبة 25؟ ومن الرتبة (24)(25)؟

27. باتباع الفكرة المقترحة في التمرين 26، ليكن m و n عددين صحيحين موجبين أوّليّين نسبيًّا. أثبت أنه إذا وجد (وفق التماثل) r زمرة إبداليّة من الرتبة m وs من الرتبة n، فإنه يوجد (وفق التماثل) rs زمرة إبداليّة من الرتبة mn.

28. استخدم التمرين 27 لتحديد عدد الزمر الإبداليّة (وفق التماثل) من الرتبة $(10)^5$.

29. أ. لتكن p عددًا أوّليًّا. أكمل الصف الثاني من الجدول لإعطاء عدد الزمر الإبداليّة من الرتبة p^n، وفق التماثل.

n	2	3	4	5	6	7	8
عدد الزمر							

ب. لتكن p، q، وr أعدادًا أوّليّة مختلفة، استخدم الجدول الذي أنشأته في إيجاد عدد الزمر الإبداليّة – وفق التماثل – من الرتبة المعطاة.

i. $p^3q^4r^7$ **ii.** $(qr)^7$ **iii.** $q^5r^4q^3$

30. عبّر تخطيطيًّا عن رسم كايلي موجه لـ $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ للمجموعة المولِّدة $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

31. افترض رسم كايلي موجه بنوعين من الحوافّ المتجهة: واحد متصل مع سهم وواحد مقطع من غير سهم، ومؤلفة من مضلعين منتظمين لهما n ضلعًا، لـ $n \geq 3$، مع أضلاع متجهة متصلة، أحدهما داخل الآخر، مع حوافّ متجهة مقطعة تصل رؤوس المضلع الخارجي ذي ألـ n ضلعًا مع الداخلي. يظهر الشكل 9.7 (ب) مثل رسم كايلي هذا مع $n=3$، ويظهر الشكل 7.11 (ب) واحدًا مع $n = 4$، ويمكن أن يكون للأسهم على المضلع الخارجي ذي ألـ n ضلعًا الاتجاه نفسه (مع عقارب الساعة أو عكسها) لتلك التي على المضلع الداخلي ذي ألـ n ضلعًا، أو أن يكون لها عكس الاتجاه، ولتكن G زمرة مع مثل رسم كايلي المتجه هذا.

أ. تحت أيّ ظروف ستكون G إبداليّة؟

ب. إذا كانت G إبداليّة، ما الزمرة المألوفة التي تماثلها؟

جـ. إذا كانت G إبداليّة، تحت أيّ ظروف تكون دوريّة؟

د. إذا كانت G غير إبداليّة، ما الزمرة التي تماثلها مما ناقشنا من الزمر؟

مفاهيم

32. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

_________ أ. إذا كانت G_1 و G_2 أيّ زمرتين، فإنّ $G_1 \times G_2$ دائمًا تماثل $G_2 \times G_1$.

_________ ب. الحساب في الضرب المباشر الخارجي للزمر سهل إذا عرفت كيفية الحساب في كل مركّبة.

_________ جـ. الزمر ذات الرتب المنتهية يجب أن تستخدم في تشكيل ضرب مباشر خارجي.

________ د. الزمرة ذات الرتبة الأوّليّة لا يمكن أن تكون ضربًا مباشرًا داخليًّا لزمرتين جزئيّتين فعليتين غير تافهتين.

________ هـ. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ تماثل $\mathbb{Z}_8$.

________ و. $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4$ تماثل S_8.

________ ز. $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_8$ تماثل S_4.

________ ح. كل عنصر من $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_8$ له الرتبة 8.

________ ط. رتبة $\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{15}$ هي 60.

________ ي. $\mathbb{Z}_m\times\mathbb{Z}_n$ فيها mn عنصرًا سواء كان m وn أوّليّين نسبيًّا أم لا.

33. أعط مثالاً يوضّح أنه ليس كل زمرة إبداليّة غير تافهة هي ضرب مباشر داخلي لزمرتين جزئيّتين فعليتين غير تافهَتين.

34. أ. ما عدد الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6$ التي تماثل $\mathbb{Z}_5\times\mathbb{Z}_6$؟

ب. ما عدد الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ التي تماثل $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$؟

35. أعطِ مثالًا على زمرة غير تافهة ليست من رتبة أوّليّة، وليست ضربًا مباشرًا داخليًّا لزمرتين جزئيّتين غير تافهتين.

36. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

________ أ. كل زمرة إبداليّة رتبتها أوّليّة دوريّة.

________ ب. كل زمرة إبداليّة رتبتها قوة لعدد أوّليّ دوريّة.

________ جـ. $\mathbb{Z}_8$ مولّدة بـ $\{4, 6\}$.

________ د. $\mathbb{Z}_8$ مولّدة بـ $\{4, 5, 6\}$.

________ هـ. تصنّف الزمر الإبداليّة المنتهية جميعها وفق التماثل من خلال المبرهنة 12.11.

________ و. أيّ زمرتين إبداليّتين منتهيتي التولّد لهما عدد بيتي نفسه، هما متماثلتان.

________ ز. كل زمرة إبداليّة رتبتها تقبل القسمة على 5 تحوي زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة 5.

________ ح. كل زمرة إبداليّة رتبتها تقبل القسمة على 4 تحوي زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة 4.

________ ط. كل زمرة إبداليّة رتبتها تقبل القسمة على 6 تحوي زمرة جزئيّة دوريّة من الرتبة 6.

________ ي. عدد بيتي لأيّ زمرة إبداليّة منتهية هو 0.

37. ليكن p و q عددين أوّليّين مختلفين. كيف يقارن عدد (وفق التماثل) الزمر الإبداليّة من الرتبة p^r مع عدد (وفق التماثل) الزمر الإبداليّة من الرتبة q^r؟

38. لتكن G زمرة إبداليّة رتبتها 72.

أ. هل يمكنك أن تحدّد عدد الزمر الجزئيّة من G من الرتبة 8؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

ب. هل يمكنك أن تحدّد عدد الزمر الجزئيّة من G من الرتبة 4؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

39. لتكن G زمرة إبداليّة. أثبت أنّ العناصر ذات الرتبة المنتهية من G تشكل زمرة جزئيّة. تُسمَّى هذه الزمرة الجزئيّة **زمرة الالتواء الجزئيّة** (***torsion subgroup***) من G.

تتعامل التمارين من 40 إلى 43 مع مفهوم زمرة الالتواء الجزئيّة المعرّف توًّا.

40. أوجد رتبة زمرة الالتواء الجزئيّة من $\mathbb{Z}_4\times \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_3$ ؛ من $\mathbb{Z}_{12}\times \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$.

41. أوجد زمرة الالتواء الجزئيّة من زمرة الضرب $\mathbb{R}^*$ للأعداد الحقيقية غير الصفريّة.

42. أوجد زمرة الالتواء الجزئيّة T من زمرة الضرب $\mathbb{C}^*$ للأعداد المركبة غير الصفريّة.

43. الزمرة الإبداليّة **عديمة الالتواء (torsion free)** إذا كان e هو العنصر الوحيد من رتبة منتهية. استخدم المبرهنة 12.11 في إثبات أنّ أيّ زمرة إبداليّة منتهية التولّد، هي الضرب المباشر الداخلي لزمرة الالتواء الجزئيّة لها ولزمرةٍ جزئيّة عديمة الالتواء. (لاحظ أنّ $\{e\}$ يمكن أن تكون زمرة الالتواء الجزئيّة، وهي كذلك عديمة الالتواء).

44. الجزء من تفريق G في المبرهنة 12.11 المقابل للزمر الجزئيّة التي رتبها قوًى لأعداد أوّليّة يمكن أن يُكتب كذلك بالصيغة $\mathbb{Z}_{m_1}\times\mathbb{Z}_{m_2}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{m_r}$ ، حيث m_i تقسم m_{i+1} لـ $i = 1, 2, \cdots, r-1$. يمكن إثبات أنّ الأعداد m_i وحيدة، وهي **معاملات الالتواء (torsion coefficients)** لـ G.

أ. أوجد معاملات الالتواء لـ $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9$.

ب. أوجد معاملات الالتواء لـ $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{20}$.

جـ. صِف خوارزميةً لإيجاد معاملات الالتواء للضرب المباشر لزمر دوريّة.

براهين مختصرة

45. أعطِ اختصارًا من جملتين لإثبات المبرهنة 5.11.

براهين

46. برهن على أنّ الضرب المباشر لزمر إبداليّة هو إبداليّ.

47. لتكن G زمرة إبداليّة، ولتكن H المجموعة الجزئية من G المؤلفة من المحايد e إضافةً إلى عناصر G جميعها ذات الرتبة 2. أثبت أنّ H زمرة جزئيّة من G.

48. باتباع فكرة التمرين 47، حدّد ما إذا كانت H دائمًا زمرة جزئيّة لكل زمرة إبداليّة G، إذا تألفت H من المحايد e إضافة إلى عناصر G جميعها ذات الرتبة 3؛ ذات الرتبة 4. لأيّ عدد صحيح موجب n ستكون H دائمًا زمرة جزئيّة لكل زمرة إبداليّة G، إذا تألفت H من المحايد e إضافة إلى عناصر G جميعها ذات الرتبة n؟ قارن بالتمرين 48 من الفصل 5.

49. أوجد مثالًا مناقضًا للتمرين 47 مع حذف الفرض بأنّ G إبداليّة.

لتكن H وK زمرًا جزئيّة من زمرة G. يطلب منك التمرينان 50 و 51 أن تؤسس معيارًا ضروريًّا وكافيًا لـ G؛ كي تظهر على صورة ضرب مباشر داخلي لـ H و K.

50. لتكن H و K زمرتين، ولتكن $G = H\times K$. تذكر أنّ كلا H و K تظهر بوصفها زمرة جزئيّة من G بصورة طبيعية. أثبت

أنّ هاتين الزمرتين H (في الواقع $H \times \{e\}$) و K (في الواقع $\{e\} \times K$) لهما الخصائص الآتية:

أ. كل عنصر من G هو بالصيغة hk لعنصرين ما $h \in H$ و $k \in K$.

ب. $hk = kh$ لكل $h \in H$ و $k \in K$. جـ. $H \cap K = \{e\}$.

51. لتكن H و K زمرتين جزئيّتين من زمرة G تحقّقان الخصائص الثلاث المسرودة في التمرين السابق. أثبت أنه لكل $g \in G$، التعبير $g = hk$ لـ $h \in H$ و $k \in K$ وحيد، ثمّ ليكن كل $g \in G$ قد أُعيدت تسميته بـ (h,k)، فأثبت أنّ G – بهذه التسمية – تصبح مطابقةً تركيبيًّا (مماثلة) لـ $H \times K$.

52 أثبت أنّ الزمرة الإبداليّة المنتهية ليست دورية، إذا وفقط إذا احتوت زمرةً جزئية تماثل $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ لعدد أوّليّ ما p.

53. برهن على أنه إذا كانت رتبة الزمرة الإبداليّة المنتهية قوةً لعددٍ أوّليٍّ p، فإنّ رتبة أيّ عنصر من الزمرة هي قوة لـِ p.
هل يمكن إسقاط فرض الإبدال؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

54. لتكن G، H، K زمرًا إبداليّة منتهية التولّد. أثبت أنه إذا كانت $G \times K$ تماثل $H \times K$، فإنّ $G \simeq H$.

الفصل 12 تقايسات المستوى Plane Isometries [1]

افترض المستوى الإقليدي $\mathbb{R}^2$. **تقايس (isometry of)** $\mathbb{R}^2$ هو تبديل $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ يحفظ المسافة، بحيث إنّ المسافة بين النقطتين P و Q هي المسافة نفسها بين النقطتين $\phi(P)$ و $\phi(Q)$ للنقاط كلها P و Q من $\mathbb{R}^2$، وإذا كانت ψ أيضًا تقايسًا لـ $\mathbb{R}^2$، فإنّ المسافة بين $\psi(\phi(P))$ و $\psi(\phi(Q))$ يجب أن تكون المسافة نفسها بين $\phi(P)$ و $\phi(Q)$، التي هي بدورها المسافة بين P و Q، وهذا يثبت أنّ تركيب تقايسين هو تقايس كذلك، ولأنّ الدالّة المحايدة هي تقايس ومعكوس التقايس تقايس، فنرى أنّ تقايسات $\mathbb{R}^2$ تشكل زمرة جزئية من زمرة التبديلات جميعها لـ $\mathbb{R}^2$.

بأخذ أيّ مجموعة جزئيّة S من $\mathbb{R}^2$، تقايسات $\mathbb{R}^2$ التي تحمل S بصورة غامرة إلى نفسها تشكل زمرة جزئيّة من زمرة التقايسات، وهذه الزمرة الجزئيّة هي **زمرة تناظرات S في $\mathbb{R}^2$** (**group of symmetries of S in $\mathbb{R}^2$**). أعطينا في الفصل 8 جداول لزمرة تناظرات مثلث متساوي الأضلاع ولزمرة تناظرات مربع في $\mathbb{R}^2$.

كل ما عرفناه في الفقرتين السابقتين يمكن على حد سواء أن يعمل للفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$ ذي ألـ n بعدًا، لكننا هنا سوف نشغل أنفسنا في المقام الأول بتقايسات المستوى.

من الممكن البرهنة على أنّ أيّ تقايس للمستوى هو بالضبط واحد من أربعة أنماط (انظر [5] Artin). سوف نسرد الأنماط ونعطي – لكل نمط – شكلًا مُسمًّى يمكن حمله إلى نفسه بتقايس من ذلك النمط، في كلٍّ من الأشكال 1.12، 3.12، و4.12، افترض أنّ الخط المبين ذا النتوءات يمتد بصورة لا نهائية إلى اليسار وإلى اليمين. سنعطي كذلك مثالًا على كل نمط بدلالة الإحداثيّات.

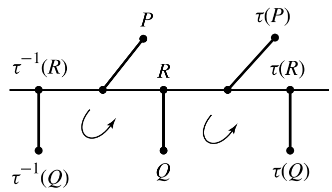
انسحاب τ: اسحب كل نقطة المسافة نفسها في الاتجاه نفسه. انظر الشكل 1.12.
(مثال: $\tau(x, y) = (x, y) + (2,-3) = (x + 2, y - 3)$).
دوران ρ: دوِّر المستوى حول نقطة P بزاوية θ. انظر الشكل 2.12. (مثال: $\rho(x, y) = (-y, x)$ هو دوران بـِ $90°$ عكس عقارب الساعة حول نقطة الأصل $(0, 0)$).

انعكاس μ: أرسل كل نقطة إلى صورتها في المرآة (μ من mirror (مرآة)) الممتدة على طول الخط L، الذي تبقى نقاطه مثبتة بـِ μ. انظر الشكل 3.12. الخط L هو محور الانعكاس. (مثال: $\mu(x, y) = (y, x)$ هو انعكاس في الخط $y=x$).

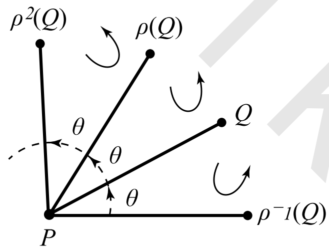
انعكاس انحداريّ γ: حاصل ضرب انسحاب وانعكاس في خطٍّ يرسله الانسحاب إلى نفسه. انظر الشكل 4.12. (مثال: $\gamma(x, y) = (x + 4,-y)$ هو انعكاس انحداري في المحور x).

1- هذا الفصل لن يستخدم فيما تبقى من الكتاب.

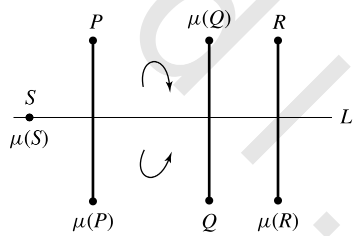
لاحظ السهم المنحني الصغير الذي حُمِلَ إلى سهم منحنٍ آخر في كلٍّ من الشكلين 1.12 و4.12. للانسحاب والدوران، الاتجاهات عكس عقارب السّاعة للأسهم المنحنية تبقى نفسها، لكن للانعكاس والانعكاس الانحداري، يرسل السهم الذي بعكس عقارب الساعة إلى سهم مع عقارب الساعة، سنقول: إنّ الانسحابات والدورانات تحفظ الاتجاه، بينما الانعكاس والانعكاس الانحداري يعكس الاتجاه. لن نصنف التقايس المحايد على أنه واحد بعينه من الأنماط الأربعة المسرودة؛ إذ يمكن أن نعدّه انسحابًا بالمتجه الصفري أو دورانًا حول أيّ نقطة بزاوية 0° على حدّ سواء، سنعدّ الانعكاس الانحداري دائمًا حاصل ضرب انعكاس بانسحابٍ مختلفٍ عن التقايس المحايد.



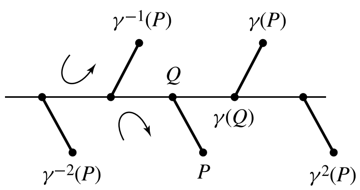
الشكل 1.12 انسحاب τ



الشكل 2.12 دوران ρ



الشكل 3.12 انعكاس μ



الشكل 4.12 انعكاس انحداريّ γ

تصف المبرهنة الآتية التراكيب الممكنة للزمر الجزئيّة المنتهية من زمرة التقايسات الكاملة.

5.12 مبرهنة كل زمرة منتهية G لتقايسات المستوى تماثل إمّا $\mathbb{Z}_n$ أو الزمرة الزوجيّة D_n لعدد صحيح موجب n.

مخطط البرهان سنثبت أولًا أنّ هناك نقطة P في المستوى تترك ثابتة بكل تقايس من G، ويمكن إنجاز ذلك بالطريقة الآتية، باستخدام الإحداثيات في المستوى، افترض أنّ $G = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m\}$، وافترض أنّ

$$(x_i, y_i) = \phi_i(0, 0)$$

عندئذٍ تكون النقطة

$$P = \left(\overline{x}, \overline{y}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_m}{m}, \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_m}{m}\right)$$

هي المركز المتوسط (*centroid*) للمجموعة $S = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \cdots, m\}$. تُبدِّل التقايسات من G النقاط من S فيما بينها؛ لأنه إذا كان $\phi_i\phi_j = \phi_k$، فإنّ $\varphi_i(x_j, y_j) = \varphi_i[\varphi_j(0, 0)] = \varphi_k(0, 0) = (x_k, y_k)$. يمكن إثبات أنّ المركز المتوسط لمجموعةٍ من النقاط يتحدّد بصورة وحيدة بمسافاته عن النقاط، ولأنّ كل تقايس من G يبدل فقط المجموعة S، فيجب أن يَتْرك المركز المتوسط $(\overline{x}, \overline{y})$ مثبتًا؛ لذلك تتكوّن G من المحايد، دورانات حول P، وانعكاسات في خطٍّ يمرّ بـ P.

تشكل التقايسات حافظة الاتجاه في G زمرة جزئيّة H من G، تكون إمّا جميع G أو من الرتبة $m/2$. يمكن إثبات ذلك بالطريقة نفسها التي أثبتنا بها أنّ التبديلات الزوجية زمرة جزئيّة من S_n تحوي تمامًا نصف عناصر S_n. (انظر التمرين 22)، بالطبع تتألف H من المحايد والدورانات في G، وإذا اخترنا دورانًا من G يدوِّر المستوى بأصغر زاوية ممكنة $\theta > 0$، فيمكن إثبات أنها تولِّد الزمرة الجزئيّة H. (انظر التمرين 23)، هذا يثبت أنه إذا كان $H = G$، فإنّ G دورية من الرتبة m، وعليه، فهي تماثل $\mathbb{Z}_m$. افترض أنّ $H \neq G$، بحيث إنّ G تحوي بعض الانعكاسات. لتكن $H = \{\iota, \rho_1, \cdots, \rho_{n-1}\}$، حيث $n = m/2$.
فإذا كان μ انعكاسًا من G، فإنّ المجموعة المشاركة $H\mu$ تتكوّن من الانعاكاسات كلها من G وعددها n.

افترض الآن المضلع المنتظم ذا n ضلعًا في المستوى الذي مركزه P، ويقع أحد رؤوسه على الخط المارّ بـ P المتروك مثبتًا بـ μ. تُدوِّر عناصر H هذا المضلع ذا n ضلعًا عبر المواقع جميعها، وتعكس عناصر $H\mu$ أوّلاً في محور يمرّ برأس قالبةً المضلع ذا n ضلعًا، ثمّ تُدوِّر عبر المواقع جميعها؛ لذلك، فتأثير G على هذا المضلع ذي n ضلعًا هو تأثير D_n؛ ولذلك، G تماثل D_n.

تعطي المبرهنة السابقة قصة زمر تقايسات المستوى المنتهية كاملةً. ننتقل الآن إلى بعض الزمر غير المنتهية لتقايسات المستوى، التي تنشأ بصورة طبيعية في الزخرفة والفنّ، ومن بينها زمر النسيج المتقطّع (*discrete frieze groups*)، حيث يتألف النسيج المتقطع من نقشٍ بعرض وارتفاع منتهيين، ويُكرر بصورة لا نهائية في كلا الاتجاهين على طول خطه الأساسيّ، ليشكل شريطًا بطول غير منته لكن بارتفاع منتهٍ، فكّر فيه على أنه شريط فاصل مزخرف يمتدّ حول الغرفة بجوار السقف علىً ورق جدرانٍ، سنَعُدّ تلك التقايسات التي تحمل كل نقش أساسي بصورة غامرة إلى نفسه أو إلى نسخة أخرى من النقش في النسيج، حيث تُسمّى مجموعة مثل هذه التقايسات كلها "**زمرة النسيج**" (**frieze group**). زمر النسيج المتقطع جميعها غير منتهية ولها زمرة جزئيّة تماثل $\mathbb{Z}$، وتولَّد بالانسحاب الذي يجر النسيج طوليًّا حتى ينطبق النقش الأساسيّ على موقع النقش المجاور له مباشرة في ذلك الاتجاه، وبوصفه مثالًا بسيطًا على نسيج متقطع، افترض إشارات التكامل الموضوعة على مسافات متساوية عن بعضها والمستمرة بصورة لا نهائيّة إلى اليسار واليمين، المشار إليها تخطيطيًّا كما يأتي:

$$\ldots\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\int\ldots$$

لنفترض إشارات التكامل متباعدة عن بعضها وحدةً واحدة، فتولَّد زمرة التناظر لهذا النسيج بانسحابٍ τ يجرّ المستوى وحدة واحدة إلى اليمين، وبدورانٍ ρ بـ $180°$ حول نقطة في مركز إشارة تكامل، إذ ليس هناك انعكاسات أفقية أو عمودية، ولا انعكاسات انحدارية، وزمرة النسيج هذه غير إبداليّة؛ فيمكننا التأكّد من أنّ $\tau\rho = \rho\tau^{-1}$، تولَّد الزمرة الزوجيّة D_n من الدرجة n بعنصرين لا يتبدلان معًا: دوران ρ_1 بزاوية $360/n°$ من الرتبة n وانعكاس μ من الرتبة 2 يحقّق $\rho_1\mu = \mu\rho_1^{-1}$ ؛ لذلك فمن الطبيعي استخدام الرمز D_∞ لزمرة النسيج غير الإبداليّة هذه، والمولّدة بـτ ذات الرتبة غير المنتهية و ρ ذات الرتبة 2.

وكمثال آخر، افترض النسيج المعطى بالسلسلة غير المنتهية من حروف D.

...DDDDDDDDDDD...

تولَّد زمرته بانسحاب τ خطوة واحدة الى اليمين وبانعكاس عموديّ μ في خط أفقي يقطع وسط حروف D كلها، يمكننا التأكد من أنّ مولّدي الزمرة هذين يبدّلان مع بعضهما هذه المرة، أي إنّ $\tau\mu = \mu\tau$؛ ولذلك، فزمرة النسيج هذه إبداليّة وتماثل $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$.

من الممكن إثبات أنه إذا صنّفنا مثل الأنسجة المتقطعة هذه فقط من خلال ما إذا كانت زمرها تحوي أم لا تحوي:

دورانًا

انعكاسًا في محور أفقي

انعكاسًا في محور عمودي

انعكاسًا انحداريًّا غير تافه

فإنه سيكون هناك ما مجموعه سبعة احتمالات، والانعكاس الانحداريّ غير التافه في زمرة تناظرات هو واحدٌ لا يساوي حاصل ضرب انسحاب في تلك الزمرة وانعكاس فيها. إنّ الزمرة لسلسلة حروف D أعلاه تحوي انعكاسًا انحداريًّا في الخط الأفقي المارّ بمراكز حروف D، لكن مركبة الانسحاب لكل انعكاس انحداريّ موجودة أيضًا في الزمرة؛ ولهذا تُعدّ جميعها انعكاسات انحدارية تافهة في تلك الزمرة. زمرة النسيج لـ

. . . D D D D D . . .

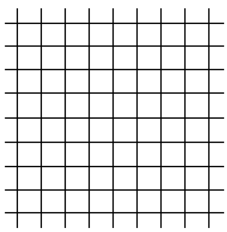
. . . D D D D D . . .

تحوي انعكاسًا انحداريًّا غير تافه، ومركّبة الانسحاب له ليست عنصرًا في الزمرة. تظهر التمارين الحالاتِ السبع الممكنة، وتسألك أن تحدّد – لكل حالة – أيًّا من الأنماط الأربعة للتقايسات المعروضة أعلاه تظهر في زمرة التناظرات، حيث لن نحصل على سبعة تركيباتِ زمرٍ مختلفة، ويمكن إثبات أنّ كلًّا من الزمر التي يُحْصَل عليها تماثل واحدةً من

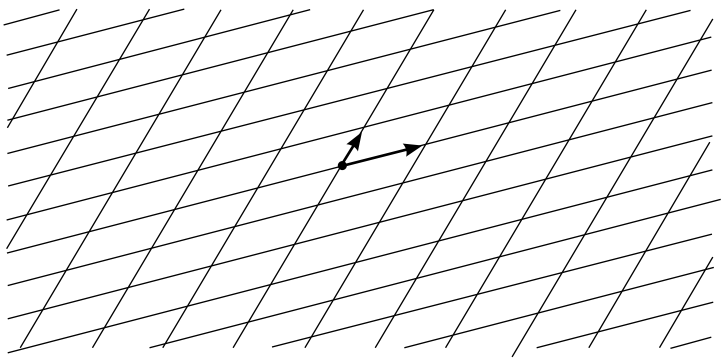
$$D_\infty \times \mathbb{Z}_2 \text{ أو } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2 , \mathbb{Z} , D_\infty$$

ستكون دراسة التناظرات ممتعة بالقدر نفسه عندما يُكرَّر نقش على شكل مربع، أو متوازي أضلاع، أو معين، أو سداسيّ بانسحابات في اتجاهي متجهين غير متوازيين لملءِ المستوى كليًّا ، مثل النقوش التي تظهر على ورق الجدران، وتسمّى هذه الزمرُ زمر ورق الجدران (*wallpaper groups*) أو الزمر البلوريّة المستوية (*plane crystallographic groups*)، في حين أنّ النسيج لا يمكن حمله إلى نفسه بدروان بزاوية موجبة أقل من $180°$، إلا أنه من الممكن أن يكون لبعض هذه النقوش مالئةِ المستوى دورانات بـ $60°$، و$90°$، و$120°$، و$180°$، ويُوفِّر الشكل 6.12 توضيحًا، حيث يتألفَ من مربع، وسنهتم بزمرة تقايسات المستوى التي تحمل هذا المربع بصورة غامرة إلى نفسه أو إلى مربّع آخر، فتُعطى مولِّداتٌ لهذه الزمرة بانسحابين: (واحدٌ بِجَرِّ المربع إلى الجار اللاحق إلى اليمين وواحدٌ إلى اللاحق في الأعلى)، وبتدوير بـ $90°$ حول مركز المربّع، وبانعكاس في الخط العمودي (أو الأفقي) على امتداد حافة المربعِ، إذ إنّ انعكاسًا واحدًا هو كل ما يلزم لـ «قلب المستوى»؛ ويمكن استخدام انعكاس قطري أيضًا، حيث يمكن استخدام الانسحابات والدورانات من جديد بعد أن يتم القلب، فضلًا عن أنّ زمرة التقايسات لهذا النقش الدوري في المستوى تحوي بالتأكيد زمرةً جزئيّة تماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تُولَّد بالانسحابين وحدةً إلى اليمين وإلى الأعلى، وزمرةً جزئيّة تماثل D_4، تُولَّد بتلك التقايسات التي تحمل مربّعًا (يمكن أن يكون أيّ مربع) إلى نفسه.

إذا افترضنا أنّ المستوى مُلِئ بمتوازيات أضلاع، كما في الشكل 7.12، فلن نحصل على أنماط التقايسات جميعها التي حصلنا عليها للشكل 6.12، زمرة التناظر هذه المرة مُوَلَّدةٌ بالانسحابات المشار إليها بالأسهم والدوران بـِ $180°$ حول أيّ رأسٍ لمتوازي أضلاع.



الشكل 6.12



الشكل 7.12

من الممكن إثبات أنّ هناك 17 نمطًا مختلفًا من نقوش ورق الجدران عند تصنيفها بحسب أنماط الدورانات، والانعكاسات، والانعكاسات الانحداريّة غير التافهة التي تتمع بها، ارجع إلى ([8] Gallian) للاطلاع على صورٍ لهذه الاحتمالات ألـ 17 والاطلاع على مخطّط يُسهِّل التعرّف عليها، حيث ستوضح التمارين بعضًا منها. الوضع في الفضاء أكثر تعقيدًا؛ فيمكن إثبات أنّ هناك 230 زمرةً بلوريّةً ثلاثيّةَ الأبعاد. يشتمل التمرين الأخير الذي سنعطيه على دوراناتٍ في الفضاء.

وقد اشتمل عمل الفنان إشَر (M. C. Escher 1898–1973) على نقوشٍ مالِئةٍ للمستوى، حيث تشتمل التمارين على إعادة إنتاج أربعةٍ من أعماله من هذا النمط.

تمارين 12

1. يبين هذا التمرين أنّ زمرة التناظرات لنوعٍ معيّنٍ من الأشكال الهندسية ربّما يعتمد على بعد الفضاء الذي نعُدّ الشكل واقعًا فيه.

أ. صِف التناظرات كلها لنقطةٍ من خط الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$؛ أي، صِفْ تقايسات $\mathbb{R}$ كلها التي تترك نقطةً واحدة مثبتة.

ب. صِف التناظرات (الانسحابات، الانعكاسات،... إلخ) كلها لنقطة في المستوى $\mathbb{R}^2$.

جـ. صِف التناظرات كلها لقطعة مستقيمة من $\mathbb{R}$.

د. صِف التناظرات كلها لقطعة مستقيمة من $\mathbb{R}^2$.

هـ. صِف بعض التناظرات لقطعة مستقيمة من $\mathbb{R}^3$.

2. لِتُشِرْ P إلى تقايُسِ مستوًى حافظٍ للاتجاه، ولتُشر R إلى واحدٍ عاكسٍ للاتجاه. املأ الجدول بـِ P أو R للإشارة إلى صفة حفظ أو عكس الاتجاه لحاصل الضرب.

	P	R
P		
R		

3. املأ الجدول لإعطاء جميع الأنماط المحتملة لتقايسات المستوى المعطاة بحاصل ضرب نمطين، فمثلًا: حاصل ضرب دورانين يمكن أن يكون دورانًا، أو يمكن أن يكون نمطًا آخر. املأ المربع الذي يخصّ $\rho\rho$ بكلا الحرفين، واستخدم إجابتك في حل التمرين 2 في حذف بعض الأنماط، وأخرج المحايد من الحساب.

	τ	ρ	μ	γ
τ				
ρ				
μ				
γ				

4. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من عنصر واحد هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

5. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من عنصرين هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

6. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من ثلاثة عناصر هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

7. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من أربعة عناصر مماثلة لـِ $\mathbb{Z}_4$، هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

8. ارسم شكلًا في المستوى تكون زمرةٌ من أربعة عناصر مماثلة لزمرة كلاين الرباعية V، هي زمرة تناظراته في $\mathbb{R}^2$.

9. أعطِ احتمالات رتبة تقايس لكلٍّ من الأنماط الأربعة لتقايسات المستوى (غير المحايد)، في زمرة تناظراتٍ في المستوى.

10. لتقايس المستوى ϕ نقطة ثابتة (*fixed point*)، إذا وجدت نقطة P في المستوى على أن يكون $\phi(P) = P$. أيّ من الأنماط الأربعة لتقايسات المستوى (غير المحايد) يمكن أن يكون له نقطة ثابتة؟

11. بالرجوع إلى التمرين 10، أيّ أنماطِ تقايسات المستوى – إن وُجِد – له نقطة ثابتة واحدة بالضبط؟

12. بالرجوع إلى التمرين 10، أيّ أنماطِ تقايسات المستوى – إن وُجِد – له نقطتان ثابتتان بالضبط؟

13. بالرجوع إلى التمرين 10، أيُّ أنماط تقايسات المستوى– إن وُجِد – له عدد غير منتهٍ من النقاط الثابتة؟

14. برهن هندسيًّا على أنّ تقايس المستوى الذي يترك ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ثابتةٍ، يجب أن يكون الدالّة المحايدة.

15. باستخدام التمرين 14، أثبت جبريًّا أنه إذا توافق تقايسا المستوى ϕ و ψ عند ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، أي إذا كان $\phi(P_i) = \psi(P_i)$ لنقاطٍ ليست على استقامة واحدة P_1، P_2، و P_3، فإنّ ϕ و ψ هما الدالّة نفسها.

16. هل تشكل الدورانات – إضافة إلى الدالّة المحايدة – زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

17. هل تشكل الانسحابات – إضافة إلى الدالّة المحايدة – زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

18. هل تشكل الدورانات حول نقطة مخصوصة P – إضافة إلى الدالّة المحايدة– زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

19. هل يشكل الانعكاس حول خط مخصوص L – إضافة إلى الدالّة المحايدة – زمرةً جزئيّة من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

20. هل تشكل الانعكاسات الانحداريّة – إضافة إلى الدالّة المحايدة– زمرةً جزئية من زمرة تقايسات المستوى؟ لماذا؟ أو لماذا لا؟

21. أيٌّ من الأنماط الأربعة لتقايسات المستوى يمكن أن تكون عناصر في زمرة جزئيّة منتهية من زمرة تقايسات المستوى؟

22. لإكمال تفصيلٍ في إثبات المبرهنة 5.12، لتكن G زمرةَ تقايساتٍ مستوًى منتهية. أثبت أنّ الدورانات في G – إضافة إلى التقايس المحايد – تشكل زمرة جزئيّة H من G، وأنه إمّا $H=G$ أو $|G| = 2|H|$. [مساعدة: استخدم الطريقة نفسها التي استخدمناها في إثبات أنّ $|S_n| = 2|A_n|$].

23. لإكمال تفصيلٍ في إثبات المبرهنة 5.12، لتكن G زمرة منتهية مؤلفة من التقايس المحايد والدورانات حول نقطة واحدة P في المستوى. أثبت أنّ G دوريّة، وتُولَّد بالدوران من G الذي يُحرِّكُ المستوى عكس عقارب الساعة حول P بالزواية الأصغر $\theta > 0$. [مساعدة: اتبع فكرة برهان أنّ الزمرة الجزئيّة من زمرة دوريّة هي دوريّةٌ].
في التمارين من 24 إلى 30، وضِّح الأنماط السبعة المختلفة للأنسجة، حين تُصنَّفُ بحسب تناظراتها. تخيّل الشكل المبيَّن يتواصل بصورة لا نهائية إلى اليمين واليسار، تحوي زمرة التناظر للنسيج انسحاباتٍ دائمًا. أجب عن الأسئلة الآتية حول زمرة التناظرات للنسيج لكل واحد من هذه التمارين:

أ. هل تحوي الزمرة دورانًا؟

ب. هل تحوي الزمرة انعكاسًا في خط أفقي؟

جـ. هل تحوي الزمرة انعكاسًا في خط عمودي؟

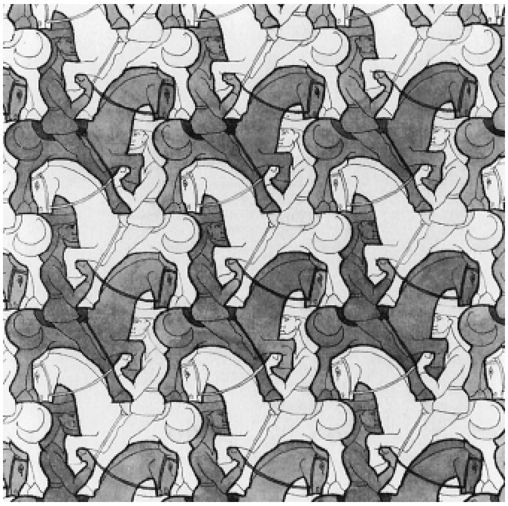
د. هل تحوي الزمرة انعكاسًا انحداريًّا غير تافه؟

هـ. أيّ من الزمر الممكنة $\mathbb{Z}, D_\infty, \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_2$ أو $D_\infty \times \mathbb{Z}_2$ تماثل زمرة التناظر للنسيج؟

24. F F F F F F F F F F F F F F F

25. T T T T T T T T T T

26. E E E E E E E E E E E E



الشكل 8.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بفرسان (© 1946م مؤسسة إِشر – بارن – هولندا (M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).

.27 **Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z Z**

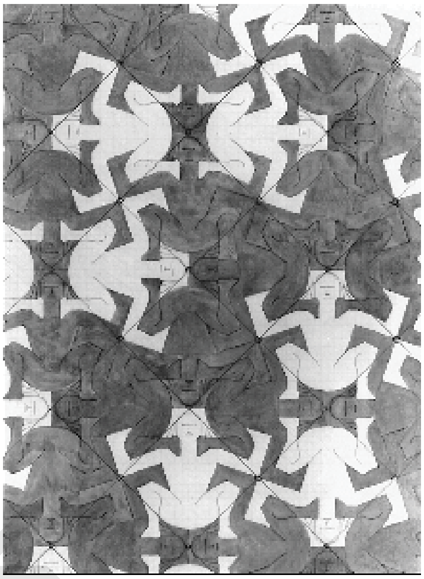
.28 **H H H H H H H H H H**

.29
⌋ ⌋ ⌋ ⌋ ⌋
⌉ ⌉ ⌉ ⌉ ⌉

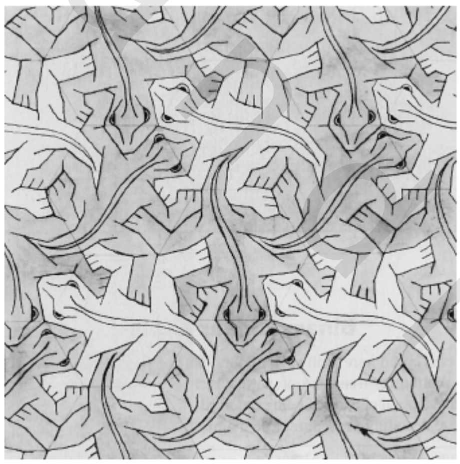
.30
∩ ∩ ∩ ∩
∪ ∪ ∪ ∪

تصف التمارين من 31 إلى 37 نقشًا يستخدم في ملء المستوى بالانسحاب في الاتجاهين المعطيين في المتجهين المحدَّدين. أجب عن هذه الأسئلة في كل حالة.

أ. هل تحوي زمرة التناظرات أيّ دورانات؟ إذا حَوَت، فبأيّ زاوية ممكنة θ حيث $0 < \theta \leq 180°$؟



الشكل 9.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسانٍ تخيلية (© 1936م مؤسسة إِشر – بارن – هولندا (M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).



الشكل 10.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بزواحف (© 1939م مؤسسة إِشر – بارن – هولندا (M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).

ب. هل تحوي زمرةُ التناظرات أيّ انعكاسات؟

جـ. هل تحوي زمرة التناظرات أيّ انعكاسات انحدارية غير تافهة؟

31. مربعٌ بحوافّ أفقية وعمودية باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيَيْن في المتجهين $(1, 0)$ و $(0, 1)$.

32. مربعٌ كالذي في التمرين 31 باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيَيْن في المتجهين $(1, 1/2)$ و $(0, 1)$.

33. مربعٌ كالذي في التمرين 31 مع الحرف L في مركزه باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و (0, 1).

34. مربع كالذي في التمرين 31 مع الحرف E في مركزه باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و (0, 1).

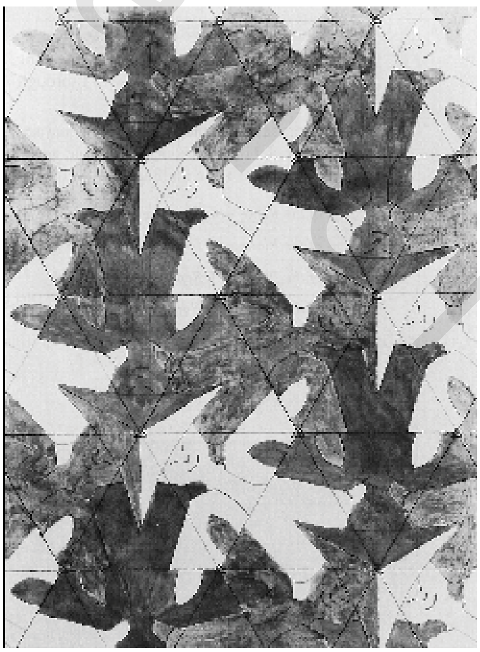
35. مربعٌ كالذي في التمرين 31 مع الحرف H في مركزه باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و (0, 1).

36. سداسي منتظم برأسٍ في الأعلى باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و $\left(1,\sqrt{3}\right)$.

37. سداسي منتظم برأسٍ في الأعلى يحوي مثلثًا متساوي الأضلاع برأس في الأعلى ومركّزٍ في مركز السداسي، باستخدام اتجاهي الانسحاب المعطيين في المتجهين (1, 0) و $\left(1,\sqrt{3}\right)$.

تتعلق التمارين من 38 إلى 41 بالأعمال الفنية لإشر (M.C. Escher). أهمل التظليل في الأشكال، وافترض أنّ العلامات في كل صورة إنسان، أو زاحف، أو فارس هي نفسها، ولو أنها محجوبة بسبب التظليل. أجب عن الأسئلة (أ)، و(ب)، و(جـ) نفسها، التي سُئلت للتمارين من 31 إلى 36، وأجب كذلك عن هذا الفرع (د).

د. بفرض محاورٍ إحداثية أفقية وعمودية بتدريج متساوٍ كالمعتاد، أعطِ متجهاتٍ في الاتجاهين غير المتوازيين لمتجهين تولّد زمرة الانسحابات. لا تشغل نفسك بطول هذه المتجهات.



الشكل 11.12: دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسان (© 1936م مؤسسة إشر – بارن – هولندا M. C. Escher Foundation–Baarn–Holland). الحقوق جميعها محفوظة).

38. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بفرسان في الشكل 8.12.

39. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسان تخيلية في الشكل 9.12.

40. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بزواحف في الشكل 10.12.

41. دراسة التقسيم المنتظم للمستوى بصور إنسان في الشكل 11.12.

42. أثبت أنّ دورانات المكعب في الفضاء تشكل زمرةً تماثل S_4. [مساعدة: دوران المكعب يُبدِّل الأقطار المارة بمركز المكعب].