الوحدة الأولى

الزمر والزمر الجزئيّة Groups and subgroups

الفصل 1 مقدّمة وأمثلة
Introduction and Examples

الفصل 2 العمليات الثنائيّة
Binary Operations

الفصل 3 البنى الثنائية المتماثلة
Isomorphic Binary Structures

الفصل 4 الزمر
Groups

الفصل 5 الزمر الجزئيّة
Subgroups

الفصل 6 الزمر الدورية
Cyclic Groups

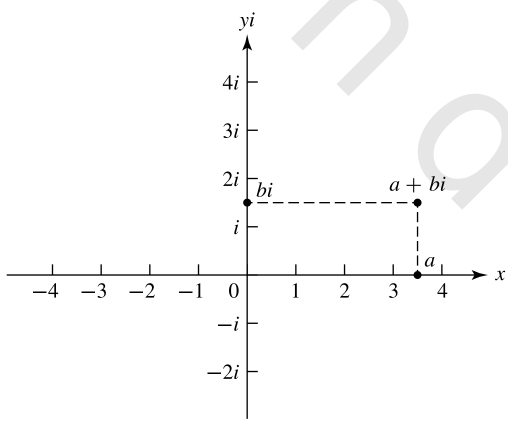
الفصل 7 المجموعات المولّدة ورسومات كايلي الموجّهة
Generating Sets and Cayley Digraphs

الفصل 1 مقدمة وأمثلة **Introduction and Examples**

في هذا الفصل، سنُعنى بإعطائك فكرة بسيطة عن طبيعة الجبر المجرد، فكلنا يألف جمع الأعداد الحقيقية وضربها، إذ إنّ كلًّا من الجمع والضرب يضمّ عددين للحصول على عدد واحد، فمثلًا يضم الجمع 2 و 3 للحصول على 5، نعدّ الجمع والضرب عمليات ثنائيّة، وفي هذا الكتاب، نجرّد هذا المفهوم، وندرس المجموعات التي لدينا فيها واحدة أو أكثر من هذه العمليات الثنائيّة، ثم نفكر في العملية الثنائيّة على مجموعة بأنها تعطي الجبر على هذه المجموعة، ونهتم بالصفات التركيبية لهذا الجبر، ولتوضيح ما نقصد بالصفة التركيبية مع مجموعتنا المألوفة $\mathbb{R}$، مجموعة الأعداد الحقيقية، نلاحظ أنّ المعادلة $x+x=a$ لها حلّ x في $\mathbb{R}$ لكل $a\in\mathbb{R}$، تحديدًا $x=a/2$، في حين أنّ معادلة الضرب المقابلة $x\cdot x=a$ ليس لها حلّ في $\mathbb{R}$ إذا كان $a<0$؛ لذلك $\mathbb{R}$ مع الجمع لها تركيب جبري مختلف عن $\mathbb{R}$ مع الضرب.

أحيانًا يكون التركيب الجبري نفسه لمجموعتين مختلفتين مع عمليتين ثنائيّتين نعدّهما بصورة طبيعية شديدتي الاختلاف، فعلى سبيل المثال: سنرى في الفصل 3 أنّ المجموعة $\mathbb{R}$ مع الجمع لها التركيب الجبري نفسه الذي لمجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+$ مع الضرب!

هذا الفصل مصمّم ليجعلك تفكر في هذه الأشياء بصورة غير دقيقة، وسوف نتعامل مع كل شيء بدقّة في الفصلين 2 و 3. لننتقل الآن إلى بعض الأمثلة، حيث إنّ ضرب الأعداد المركبة ذات القيمة المطلقة 1 يزوّدنا بأمثلة عدة ستكون مفيدة في عملنا وموضّحة له، ونبدأ بمراجعة الأعداد المركبة وضربها.



الشكل 1.1

الأعداد المركبة

يمكن تصور العدد الحقيقي هندسيًّا بوصفه نقطة على خط عادة ما نعدّه المحور x. العدد المركب يمكن أن يُعدّ نقطة في المستوى الإقليدي، كما في الشكل 1.1. لاحظ أننا أسمينا المحور العمودي المحور yi وليس المحور y، وأسمينا النقطة على بعد وحدة واحدة فوق نقطة الأصل i وليس 1. والنقطة ذات الإحداثيات الديكارتية (a,b) سمّيت $a+bi$ في الشكل 1.1. إضافة إلى أنّ مجموعة **الأعداد المركبة (complex numbers)** $\mathbb{C}$ تعرف على النحو الآتي:

$$\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}.$$

نعدّ $\mathbb{R}$ مجموعة جزئيّة من الأعداد المركبة من خلال مطابقة العدد الحقيقي r بالعدد المركب $r + 0i$، فعلى سبيل المثال: نكتب $3 + 0i$ على أنها العدد 3 و $-\pi + 0i$ على أنها العدد $-\pi$ و $0 + 0i$ على أنها العدد 0، وبصورة مشابهة، نكتب $0 + 1i$ على أنها i و$0 + si$ على أنها si.

ظهرت الأعداد المركبة بعد ظهور الأعداد الحقيقية، وقُدِّم العدد المركب i لتوفير حلٍّ للمعادلة التربيعية $x^2 = -1$، لذلك احتجنا إلى:

$$i^2 = -1. \tag{1}$$

للأسف، سُميت i **عددًا تخيليًّا (imaginary number)**، وهذا الاصطلاح قاد أجيالًا من الطلاب إلى رؤيةٍ أكثر تشككًا إلى الأعداد المركبة منها إلى الأعداد الحقيقية. في الواقع، الأعداد كلها مثل $1, 3, \pi, -\sqrt{3}$ و i هي اختراعات من أذهاننا، فليس العدد 1 شيئًا ملموسًا، إذ لو توافر مثل هذا الشيء، فهو بالتأكيد سيكون في مكان رفيعٍ من متحف علمي عظيم، يتدفق عليه سيل مستمرّ من الرياضيين، يحدّقون بـِ 1 في إعجاب ودهشة. أضف إلى ذلك أنّ بيان كيفية اختراع حلول لمعادلاتٍ كثيرةِ الحدود، حتى عندما تكون معاملات كثيرة الحدود ليست حقيقية هدفًا أساسيًّا لهذا الكتاب!

ضرب الأعداد المركبة

يعرّف الضرب $(a + bi)(c + di)$ بالطريقة التي يجب أن يعرّف بها، لننعم في الخصائص المعتادة للعمليات الحسابية الحقيقية، ولتحقيق $i^2 = -1$ انسجامًا مع المعادلة (1).

تحديدًا، نرى أننا نرغب في أن يكون

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2\\ &= ac + adi + bci + bd(-1)\\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i.\end{aligned}$$

لذلك، نعرّف ضرب $z_1 = a + bi$ و $z_2 = c + di$ كما يأتي:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i, \tag{2}$$

وهي على الصورة $r + si$، حيث $r = ac - bd$ و $s = ad + bc$. التحقّق من صواب الخصائص المعتادة $z_1 z_2 = z_2 z_1$، $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$، و $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ لكل $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ أمرٌ روتيني.

مثال 2.1 احسب $(2 - 5i)(8 + 3i)$

الحل لا نتذكر المعادلة (2) بل نحسب الضرب، كما فعلنا عند استنتاج تلك المعادلة، فنحصل على:

$$(2 - 5i)(8 + 3i) = 16 + 6i - 40i + 15 = 31 - 34i.$$ ▲

لتثبيت المعنى الهندسي لضرب الأعداد المركبة نعرّف أولًا **القيمة المطلقة (absolute value)** $|a+bi|$ لـِ $a + bi$ بـِ

$$|a+bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{3}$$

هذه القيمة المطلقة هي عدد حقيقي غير سالب، وهي المسافة من $a + bi$ إلى نقطة الأصل في الشكل 1.1. يمكننا الآن وصف العدد المركب z بصيغة الإحداثيات القطبية

$$z = |z|\ (\cos\theta + i \sin \theta), \tag{4}$$

حيث θ هي الزاوية المقيسة عكس عقارب الساعة من المحور x إلى المتجه من 0 إلى z، كما في الشكل 3.1. تنصّ صيغة مشهورة تنسب إلى ليونارد أويلر على أنّ:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \qquad \text{(صيغة أويلر)}$$

نطلب منك في التمرين 41 أن تشتق صيغة أويلر بصورة منهجية من مفكوك متسلسلة القُوى للدوال e^{θ}، $\cos\ \theta$، و $\sin\ \theta$. باستخدام هذه الصيغة، يمكننا التعبير عن z في المعادلة (4) بالصورة $z = |z|e^{i\theta}$. دعنا نكتب:

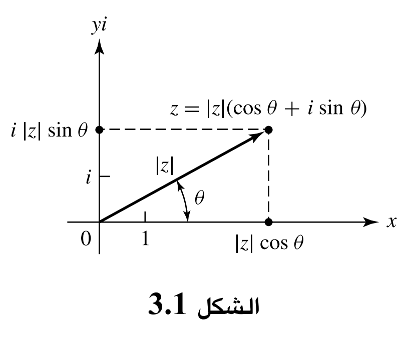
$$z_1 = |z_1|e^{i\theta_1} \quad \text{و} \quad z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$$

ونحسب حاصل ضربهما بهذه الصيغة، مفترضين أنّ قوانين الأسس تنطبق على أسس الأعداد المركبة. نحصل على:

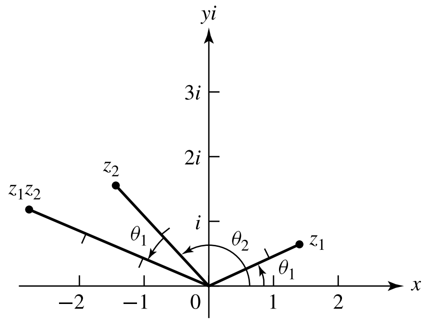
$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\theta_1}|z_2|e^{i\theta_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= |z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i \sin(\theta_1+\theta_2)\right] \tag{5}$$

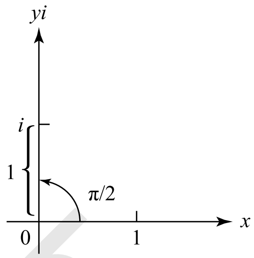
لاحظ أنّ المعادلة (5) تستنتج من المعادلة (4)، حيث $|z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$ والزاوية القطبية θ لـِ z_1z_2 هي المجموع $\theta = \theta_1 + \theta_2$؛ فلذلك – هندسيًّا– نضرب الأعداد المركبة بضرب قيمها المطلقة وجمع زواياها القطبية، كما في الشكل 4.1، ويشير التمرين 39 إلى كيفية استنتاج ذلك من خلال المتطابقات المثلثية دون الرجوع إلى صيغة أويلر وفرضيات حول الرفع لأسس مركبة.



الشكل 3.1



الشكل 4.1



الشكل 5.1

لاحظ أنّ i لها الزاوية القطبية $\pi / 2$ والقيمة المطلقة 1، كما في الشكل 5.1.

لذلك، i^2 لها الزاوية القطبية $2(\pi / 2) = \pi$ و $|1 . 1| = 1$، ولذلك $i^2 = -1$.

مثال 6.1 أوجد جميع الحلول في المجموعة $\mathbb{C}$ للمعادلة $z^2 = i$.

بكتابة المعادلة $z^2 = i$ بالصورة القطبية واستخدام المعادلة (5) نحصل على:

$$|z|^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = 1(0 + i).$$

لذلك، $|z|^2 = 1$؛ ولهذا $|z| = 1$. الزاوية θ لـِ z يجب أن تحقق $\cos 2\theta = 0$ و $\sin 2\theta = 1$. إذن $2\theta = (\pi/2) + n(2\pi)$، وعليه، يكون $\theta = \left(\pi / 4\right) + n\pi$ لعدد صحيح n. قيم n التي تعطي قيمًا لـِ θ، بحيث $0 \le \theta < 2\pi$ هي 0 و1، وتعطي $\theta = \pi / 4$ أو $\theta = 5\pi / 4$. حلولنا هي:

$$z_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{و} \quad z_2 = 1\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

أو

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

▲

7.1 مثال أوجد جميع حلول $z^4 = -16$.

كما في المثال 6.1، نكتب المعادلة بالصورة القطبية حاصلين على:

$$|z|^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16 (-1 + 0i).$$

لذلك، $|z|^4 = 16$؛ ولهذا $|z| = 2$، بينما $\cos 4\theta = -1$ و $\sin 4\theta = 0$. نجد أنّ $4\theta = \pi + n(2\pi)$، وعليه، يكون $\theta = (\pi/4) + n(\pi/2)$ لعدد صحيح n. القيم المختلفة الناتجة لـ θ، بحيث إنّ $0 \le \theta < 2\pi$ هي $\pi/4$، $3\pi/4$، $5\pi/4$، و $7\pi/4$؛ لهذا، فأحد حلول $z^4 = -16$ هو:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}(1+i)$$

وبطريقة مماثلة نجد ثلاثة حلول إضافية،

$\sqrt{2}(-1+i)$، $\sqrt{2}(-1-i)$، و $\sqrt{2}(1-i)$. ▲

يوضح المثالان السابقان طريقة لإيجاد حلول للمعادلة $z^n = a + bi$ بكتابة المعادلة بالصورة القطبية. دائمًا سيكون هناك n حلًّا، شريطة أن يكون $a + bi \neq 0$. تطلب إليك التمارين من 16 إلى 21 أن تحل معادلات من هذا النوع.

لن نستخدم جمع أو قسمة الأعداد المركبة، لكن ربما يجدر بنا أن نذكر أنّ الجمع يعطى بالصيغة:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \tag{6}$$

وقسمة $a + bi$ على $c + di$ غير الصفري يمكن التحايل لإجرائها :

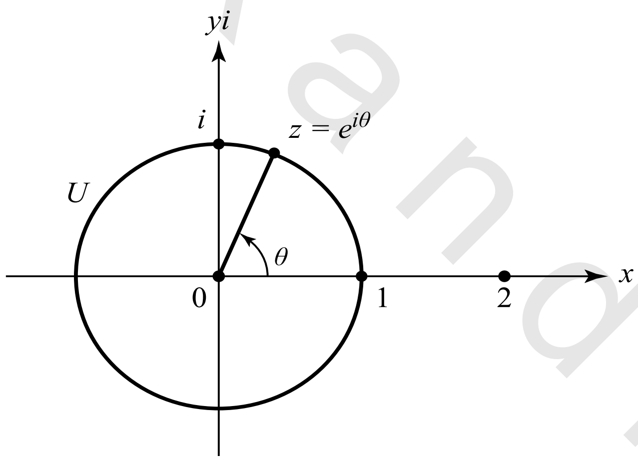
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \tag{7}$$

الجبر على الدوائر

لتكن $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$، أي إن، U هي الدائرة في المستوى الإقليدي التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 1، كما في الشكل 8.1. تبيّن العلاقة $|z_1 z_2| = |z_1| \ |z_2|$ أنّ حاصل ضرب عددين من U ينتمي إلى U؛ نقول إنّ U مغلقة بالنسبة إلى الضرب؛ لذلك يمكننا رؤية الضرب في U على أنه يعطي جبرًا على الدائرة في الشكل 8.1.

كما يتّضح في الشكل 8.1، نقرن بكل $z = \cos\theta + i \sin\theta$ من U عددًا حقيقيًّا $\theta \in \mathbb{R}$ يقع في الفترة نصف المفتوحة $0 \leq \theta < 2\pi$. عادةً ما يرمز لهذه الفترة نصف المفتوحة بالرمز $[0,2\pi)$ ، لكننا نفضل أن نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}_{2\pi}$ لأسباب ستتّضح لاحقًا. تذكّر أنّ الزاوية المقرونة مع حاصل ضرب عددين مركبين z_1z_2 هي مجموع الزاويتين المقرونتين $\theta_1 + \theta_2$. وبالطبع، إذا كان $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$ فإنّ الزاوية في $\mathbb{R}_{2\pi}$ المقرونة بـِ z_1z_2 هي $\theta_1 + \theta_2 - 2\pi$، هذا يعطينا **جمعًا مقياس** 2π **(addition modulo 2π)** على $\mathbb{R}_{2\pi}$. نرمز لهذا الجمع هنا بالرمز $+_{2\pi}$.



الشكل **8.1**

9.1 مثال في $\mathbb{R}_{2\pi}$، يكون $\frac{3\pi}{2} +_{2\pi} \frac{5\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} - 2\pi = \frac{3\pi}{4}$ ▲

ليس هناك شيء مميز في العدد 2π مكّننا من تعريف الجمع على الفترة نصف المفتوحة $\mathbb{R}_{2\pi}$، فنحن نستطيع استخدام أيّ فترة نصف مفتوحة $\mathbb{R}_c = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < c\}$.

10.1 مثال في $\mathbb{R}_{23}$، يكون $12 = 23 - 35 = 19 +_{23} 16$. في $\mathbb{R}_{8.5}$، يكون $5.5 = 8.5 - 14 = 8 +_{8.5} 6$. ▲

الآن، ضرب الأعداد المركبة على الدائرة U، حيث $|z| = 1$ والجمع مقياس 2π على $\mathbb{R}_{2\pi}$ لهما الخصائص الجبرية نفسها، فلدينا التقابل الطبيعي $\theta \leftrightarrow z$، بين $z \in U$ و $\theta \in \mathbb{R}_{2\pi}$ المشار إليه في الشكل 8.1. إضافة إلى ذلك، فقد عرفنا $+_{2\pi}$ قاصدين أن يكون:

إذا كان $z_1 \leftrightarrow \theta_1$ و $z_2 \leftrightarrow \theta_2$، فإنّ $z_1.z_2 \leftrightarrow (\theta_1 +_{2\pi} \theta_2)$. (تماثل) (8)

تبيّن العلاقة (8) أننا لو أعدنا تسمية كل $z \in U$ بـ θ المقابلة المبينة في الشكل 8.1، فإنّ حاصل ضرب عنصرين من U يعاد تسميته بمجموع زاويتي هذين العنصرين؛ لذلك، يجب أن يكون لـ U بالنسبة إلى ضرب الأعداد و $\mathbb{R}_{2\pi}$ بالنسبة إلى الجمع مقياس 2π الخصائص الجبرية نفسها، إنهما يختلفان فقط في أسماء العناصر وأسماء العمليات، حيث يسمّى مثل هذا التقابل الذي يحقق العلاقة (8) التماثل، أضف إلى ذلك أنّ أسماء العناصر وأسماء العمليات الثنائيّة ليست مهمة في الجبر المجرد؛ فنحن نهتم بالخصائص الجبرية. وسنوضّح ما نعني بقولنا: إنّ الصفات الجبرية لـ U ولـ $\mathbb{R}_{2\pi}$ هي ذاتها.

11.1 مثال في U، يوجد عنصر واحد بالضبط e، بحيث إنّ $e.z = z$ لكل $z \in U$، تحديدًا $e = 1$. العنصر 0 من $\mathbb{R}_{2\pi}$ المقابل لـ $1 \in U$ هو العنصر الوحيد e من $\mathbb{R}_{2\pi}$ بحيث إنّ $e +_{2\pi} x = x$ لكل $x \in \mathbb{R}_{2\pi}$ ▲

12.1 مثال للمعادلة $z.z.z.z = 1$ في U أربعة حلول بالضبط، تحديدًا 1، i، -1، و $-i$. الآن، $1 \in U$ و $0 \in \mathbb{R}_{2\pi}$ متقابلان، وللمعادلة $x +_{2\pi} x +_{2\pi} x +_{2\pi} x = 0$ في $\mathbb{R}_{2\pi}$ أربعة حلول بالضبط، تحديدًا $0, \ \pi/2, \ \pi$، و $3\pi/2$ التي بالطبع تقابل $1, \ i, \ -1$، و $-i$ على التوالي. ▲

ولأنّ لدائرتنا U نصف قطر 1، فمحيطها 2π والقياس الدائري للزاوية θ يساوي طول القوس المواجه لها، فإذا تناولنا فترتنا نصف المفتوحة $\mathbb{R}_{2\pi}$، ووضعنا 0 من الفترة على 1 على المحور x، وثنيناها حول الدائرة U بعكس عقارب الساعة، فسوف تدور الطريق بالكامل عائدة إلى 1. إضافة إلى ذلك، فسينطبق كل عدد من الفترة على تلك النقطة من الدائرة التي تمثّل العدد الذي قيمته الزاوية المركزية θ المبينة في الشكل 8.1، وهذا يبين أنّ بإمكاننا التفكير في الجمع على $\mathbb{R}_{2\pi}$ كأنه يحسب بجمع أطوال الأقواس المواجهة بعكس عقارب الساعة، مبتدئين من $z = 1$، وطارحين 2π إذا ما وصل مجموع الأطوال 2π أو زاد عليها.

وإذا فكّرنا في الجمع على الدائرة بدلالة جمع أطوال أقواس من نقطة بداية P على الدائرة متجهين عكس عقارب الساعة، فيمكننا استخدام دائرة نصف قطرها 2 التي محيطها 4π، كما كان الحال مع الدائرة ذات نصف القطر 1. ويمكننا أخذ فترتنا نصف المفتوحة $\mathbb{R}_{4\pi}$ ولفّها بعكس عقارب الساعة بادئين من P، فعندها نرى أنها ستغطي الدائرة كاملة، حيث يعطينا جمع أطوال الأقواس مفهوم الجبر للنقاط على هذه الدائرة ذات نصف القطر2، الذي يماثل بالتأكيد $\mathbb{R}_{4\pi}$ بالنسبة إلى الجمع $+_{4\pi}$. من ناحية ثانية، إذا أخذنا دائرة $|z|=2$ في الشكل 8.1، فإنّ ضرب الأعداد المركبة لا يعطينا جبرًا على هذه الدائرة. تبين العلاقة $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ أنّ حاصل ضرب عددين من مثل هذه الأعداد له القيمة المطلقة 4 وليس 2؛ لذلك، فضرب الأعداد المركبة ليس مغلقًا على هذه الدائرة.

تُظهر الفقرة السابقة أنّ قليلًا من الهندسة يمكن أن يساعد أحيانًا في الجبر المجرد، ويمكننا استخدام الهندسة لإقناع أنفسنا بأنّ $\mathbb{R}_{2\pi}$ و $\mathbb{R}_{4\pi}$ متماثلتان، فببساطة تتمدد الفترة $\mathbb{R}_{2\pi}$ بانتظام لتغطي الفترة $\mathbb{R}_{4\pi}$، أو إن كنت تفضل، استخدم مكبّرًا بقوة 2؛ لذلك نضع قاعدة التقابل $a \leftrightarrow 2a$ بين $a \in \mathbb{R}_{2\pi}$ و$2a \in \mathbb{R}_{4\pi}$. تصبح العلاقة (8) للتماثل:

إذا كان $a \leftrightarrow 2a$ و $b \leftrightarrow 2b$، فإنّ $(a +_{2\pi} b) \leftrightarrow (2a +_{4\pi} 2b)$ (تماثل) (9)

هذا واضح في الحالة $a+b \le 2\pi$، فإذا كان $a + b = 2\pi + c$، فإنّ $2a + 2b = 4\pi + 2c$، ويصبح القرن النهائي في العلاقة المعروضة $c \leftrightarrow 2c$، وهو صحيح.

13.1 مثال $x +_{4\pi} x +_{4\pi} x +_{4\pi} x = 0$ في $\mathbb{R}_{4\pi}$ لها أربعة حلول بالضبط، تحديدًا $0, \pi, 2\pi$، و 3π وهي ضعفا الحلول المتوافرة للمعادلة المشابهة في $\mathbb{R}_{2\pi}$ في المثال 12.1. ▲

ليس هناك شيء مميز حول العددين 2π و 4π في النقاش السابق. بالتأكيد، $\mathbb{R}_c$ مع $+_c$ تماثل $\mathbb{R}_d$ مع $+_d$ لكل $c, d \in \mathbb{R}^+$. نحتاج فقط إلى أن نقرن $x \in \mathbb{R}_c$ بـ $(d/c)x \in \mathbb{R}_d$.

جذور الوحدة

تُسمّى عناصر المجموعة $U_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ **الجذور ذات الرتبة n للوحدة (nth roots of unity)**.

وباستخدام تقنية المثالين 6.1 و 7.1، نرى أنّ العناصر في هذه المجموعة هي الأعداد

$$\cos\left(m\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(m\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{حيث} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

جميعها له القيمة المطلقة 1؛ ولذلك، $U_n \subset U$. إذا جعلنا $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$، فإنّ هذه الجذور ذات الرتبة n للوحدة يمكن أن تكتب بوصفها:

$$1 = \zeta^0, \zeta^1, \zeta^2, \zeta^3, \ldots, \zeta^{n-1}. \qquad (10)$$

لأن $\zeta^n = 1$، هذه ألـ n قوى لـِ ζ مغلقة بالنسبة إلى الضرب، فمثلًا مع $n = 10$ يكون

$$\zeta^6\zeta^8 = \zeta^{14} = \zeta^{10}\zeta^4 = 1.\zeta^4 = \zeta^4.$$

لذلك، نرى أننا نستطيع حساب $\zeta^i\zeta^j$ بحساب $i +_n j$ معتبرين i و j عناصر في $\mathbb{R}_n$.

ليكن $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$. نرى أنّ $\mathbb{Z}_n \subset \mathbb{R}_n$. ومن الواضح أن الجمع مقياس n مغلق على $\mathbb{Z}_n$.

14.1 مثال حلّ المعادلة $x + 5 = 3$ في $\mathbb{Z}_8$ هو $x = 6$؛ لأن $5 +_8 6 = 11 - 8 = 3$. ▲

إذا أعدنا تسمية كلٍّ من الجذور ذات الرتبة n للوحدة في (10) بأُسّها، فسنستخدم كأسماءٍ عناصر $\mathbb{Z}_n$ كلها، وهذا يعطي التقابل بين U_n و $\mathbb{Z}_n$. بوضوح،

إذا كان $\zeta^i \leftrightarrow i$ و $\zeta^j \leftrightarrow j$، فإنّ $(\zeta^i . \zeta^j) \leftrightarrow (i +_n j)$ (تماثل) (11)

لذلك، U_n مع ضرب الأعداد المركبة و $\mathbb{Z}_n$ مع الجمع $+_n$ لهما الخصائص الجبرية نفسها.

15.1 مثال يمكن بيان وجود تماثل لـِ U_8 مع $\mathbb{Z}_8$ فيه $\zeta = e^{i2\pi/8} \leftrightarrow 5$، ووفق هذا التماثل يجب أن يكون $\zeta^2 = \zeta.\zeta \leftrightarrow 5 +_8 5 = 2$. ▲

يطلب منك التمرين 35 مواصلة الحسابات في المثال 15.1 لإيجاد عناصر $\mathbb{Z}_8$ التي تقابل العناصر الستة المتبقية من U_8.

تمارين 1

في التمارين من 1 إلى 9، احسب التعبير الحسابي المعطى، وأعطِ الجواب بالصيغة $a + bi$ لـِ $a,b \in \mathbb{R}$.

1. i^3 **2.** i^4 **3.** i^{23}

4. $(-i)^{35}$ **5.** $(4-i)\,(5+3i)$ **6.** $(8+2i)\,(3-i)$

7. $(2-3i)(4+i)+(6-5i)$ **8.** $(1+i)^3$ **9.** $(1-i)^5$ (استخدم مبرهنة ذات الحدين)

10. جد $|3-4i|$ **11.** جد $|6+4i|$

في التمارين من 12 إلى 15، اكتب العدد المركب المعطى z بالصيغة القطبية $|z|(p+qi)$، حيث $|p+qi|=1$

12. $3 - 4i$ **13.** $-1 + i$ **14.** $12 + 5i$ **15.** $-3 + 5i$

في التمارين من 16 إلى 21، أوجد جميع الحلول في $\mathbb{C}$ للمعادلة المعطاة.

16. $z^4 = 1$ **17.** $z^4 = -1$ **18.** $z^3 = -8$ **19.** $z^3 = -27i$

20. $z^6 = 1$ **21.** $z^6 = -64$

في التمارين من 22 إلى 27، احسب التعبير المعطى مستخدمًا الجمع للمقياس المشار إليه.

22. $16 +_{17} 10$ **23.** $6 +_{10} 8$ **24.** $19.3 +_{25} 20.5$

25. $\frac{1}{2} +_1 \frac{7}{8}$ **26.** $\frac{3\pi}{2} +_{2\pi} \frac{3\pi}{4}$ **27.** $3\sqrt{2} +_{\sqrt{32}} 2\sqrt{2}$

28. وضّح لماذا نقول: إنّ التعبير $5 +_6 8$ في $\mathbb{R}_6$ غير معقول.

في التمارين من 29 إلى 34، أوجد جميع الحلول x للمعادلة المعطاة.

29. $7 +_{15} x = 3$ في $\mathbb{Z}_{15}$. **30.** $\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} +_{2\pi} x$ في $\mathbb{R}_{2\pi}$.

31. $x +_7 x = 3$ في $\mathbb{Z}_7$. **32.** $x +_7 x +_7 x = 5$ في $\mathbb{Z}_7$.

33. $x +_{12} x = 2$ في $\mathbb{Z}_{12}$. **34.** $x +_4 x +_4 x +_4 x = 0$ في $\mathbb{Z}_4$.

35. يؤكد المثال 15.1 وجود تماثل لـِ U_8 مع $\mathbb{Z}_8$ فيه $\zeta = e^{i(\pi/4)} \leftrightarrow 5$ و $\zeta^2 \leftrightarrow 2$.

أوجد العنصر من $\mathbb{Z}_8$ الذي يقابل العنصر ζ^m من العناصر الستة الباقية من U_8 لـِ $m = 0,3,4,5,6,7$.

36. هناك تماثل لـِ U_7 مع $\mathbb{Z}_7$ فيه $\zeta = e^{i(2\pi/7)} \leftrightarrow 4$. أوجد العنصر من $\mathbb{Z}_7$ الذي يجب أن يقابله ζ^m لـِ $m = 0,2,3,4,5,6$.

37. لماذا لا يمكن أن يوجد تماثل لـِ U_6 مع $\mathbb{Z}_6$ فيه $\zeta = e^{i(\pi/3)}$ تقابل 4؟

38. اشتق الصيغتين الآتيتين باستخدام صيغة أويلر وحساب $e^{ia}e^{ib}$:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

و

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

39. ليكن $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. استخدم المتطابقات المثلثية في التمرين 38 لاشتقاق $z_1z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$.

40. أ. اشتق صيغة لـِ $\cos 3\theta$ بدلالة $\sin\theta$ و $\cos\theta$ مستخدمًا صيغة أويلر.

ب. اشتق الصيغة $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ من الفرع (أ) والمتطابقة $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. (سنجد استخدامًا لهذه المتطابقة في الفصل 32).

41. تذّكر من حساب التفاضل مفكوك متسلسلات القوى:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots,$$ و

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

اشتق صيغة أويلر $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ منهجيًّا من هذه الصيغ الثلاث.

الفصل 2

العمليات الثنائية Binary Operations

افترض أننا زوّار لحضارة غريبة في عالم غريب، ونراقب أحد المخلوقات في هذا العالم يعلّم رفقاءه في صفّ جمْعَ الأعداد، وافترض أننا لم نُخْبَر بأن الصفَّ يتعلم الجمع، وإنما أُجْلِسنا في القاعة على هيئة مراقبين لما يجري، وطُلب إلينا أن نعطي تقريرًا عمّا يجري تمامًا. المعلم يصدر أصواتًا تبدو لنا على نحو: جلوب، بويت، فيردّ الصفُّ: بمت، ثم يقول المعلم: أُمبت، جافت، فيردّ الصفُّ: بويت. ماذا يفعل هؤلاء؟ لا نستطيع أن نحكم أنهم يجمعون أعدادًا؛ لأننا أصلاً لا نعلم أنّ هذه الأصوات تمثل أعدادًا، لكننا ندرك بالطبع أن هناك تواصلًا ما يجري، وكل ما يمكننا قوله بشيء من الجزم: إنّ هذه المخلوقات تعرف قاعدة ما، فعندما يُذكر بِلُغتهم زوج من الأشياء، واحدًا تلو الآخر، مثل جلوب، بويت، فإنهم يجمعون على ردٍّ، بمت. يحدث هذا الإجراء نفسه عند تعليم الجمع في صفّنا الأول، حيث يقول المعلم: أربعة، سبعة، فيرد الصفُّ: أحد عشر.

لذلك نُقاد في محاولتنا لتحليل جمع الأعداد وضربها إلى فكرة مفادها أنّ الجمع أساسًا مجرد قاعدة يتعلمها الناس، تمكّنهم من ربط عدد ما بوصفه جوابًا لعددين بترتيب معطًى، كذلك الضرب قاعدة كهذه، لكنّها مختلفة. لاحظ أخيرًا أنه عند إجراء هذا النوع من التعلم مع التلاميذ، فعلى المعلمين أن يكونوا منتبهين قليلًا للشيئين اللذين يعطوهما للصف، فلو أدخل معلم الصفّ الأول فجأة كلمتي عشرة، سماء، لارتبك الصفّ ارتباكًا شديدًا؛ لأن القاعدة معرّفة فقط لأزواج أشياء من مجموعة محددة.

تعريفات وأمثلة

لنحاول نحن الرياضيين صياغة جوهر هذه الأفكار في تعريف مفيد، معمّمين مفهوم جمع الأعداد وضربها. كما نوّهنا في الفصل 0، لن نحاول هنا تعريف المجموعة، إذ يمكننا أن نكون إلى حدّ ما دقيقين رياضيًّا، ونَصِف تعميماتنا بوصفها دوالّ (انظر التعريف 10.0 والمثال 11.0) وليس بوصفها قواعد، وتذكّر من التعريف 4.0 أنه لأيّ مجموعة S، تتكوّن المجموعة $S \times S$ من جميع الأزواج المرتبة (a,b) حيث a وb تنتمي إلى S.

1.2 تعريف **العملية الثنائيّة (binary operation)** $*$ على مجموعة S هي دالّة من $S \times S$ إلى S. لكل $(a,b) \in S \times S$، سنرمز للعنصر $*\big((a,b)\big)$ من S بـ $a*b$. ■

يمكننا بدهيًّا أن نعدّ العملية الثنائيّة $*$ على S تقرن بكل زوج مرتب (a,b) من عناصر S عنصرًا $a*b$ من S. سنواصل بأمثلة.

2.2 مثال جمعُنا المعتاد $+$ هو عملية ثنائيّة على المجموعة $\mathbb{R}$، وضربُنا المعتاد هو عملية ثنائيّة مختلفة على $\mathbb{R}$، ويمكننا في هذا المثال، استبدال أيٍّ من المجموعات $\mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+$، أو $\mathbb{Z}^+$ بـ $\mathbb{R}$. ▲

لاحظ أننا نشترط في العملية الثنائيّة على مجموعة S أن تكون معرّفة لكل زوج مرتب (a,b) من عناصر S.

3.2 مثال لتكن $M(\mathbb{R})$ مجموعة المصفوفات[1] كلها بمدخلات حقيقية، إن جمع المصفوفات المعتاد $+$ ليس عملية ثنائيّة على هذه المجموعة؛ لأن $A+B$ غير معرّف لزوج مرتب (A,B) من مصفوفات لها عدد مختلف من الصفوف أو الأعمدة. ▲

---

(1) معظم طلاب مقرر الجبر المجرد درسوا الجبر الخطي، وأصبحوا معتادين على المصفوفات وعملياتها، ولفائدة هؤلاء الطلاب، غالبًا تُعطى أمثلة تشمل مصفوفات. يمكن للقارئ غير المعتاد على المصفوفات إمّا أن يُسقطها أو أن يذهب إلى الملحق في آخر الكتاب، حيث يتوافر ملخص قصير.

تنتج العملية الثنائيّة على S أحيانًا عملية ثنائيّة على مجموعة جزئيّة H من S أيضًا. نحن هنا نصوغ تعريفًا منهجيًّا.

4.2 تعريف لتكن * عملية ثنائيّة على S، ولتكن H مجموعة جزئيّة من S، فالمجموعة الجزئيّة H **مغلقة بالنسبة إلى** * (**closed under***)، إذا كان لكل $a,b \in H$، لدينا أيضًا $a*b \in H$. في هذه الحالة، العملية الثنائيّة على H المعطاة باقتصار * على H هي **العملية المتولّدة** (**induced operation**) من * على H. ■

ومن تعريفنا نفسه للعملية الثنائيّة * على S، فالمجموعة S مغلقة بالنسبة إلى *، لكن مجموعة جزئيّة ربّما لا تكون كذلك، كما يبين المثال الآتي:

5.2 مثال إن جمعنا المعتاد + على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لا يولّد عملية ثنائيّة على مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية $\mathbb{R}^*$؛ لأن $2 \in \mathbb{R}^*$ و $-2 \in \mathbb{R}^*$، لكن $2+(-2)=0$ و $0 \notin \mathbb{R}^*$. لذلك $\mathbb{R}^*$ ليست مغلقة بالنسبة إلى *. ▲

ستتكرر حاجتنا في كتابنا إلى تحديد ما إذا كانت مجموعة جزئيّة H من S مغلقة بالنسبة إلى عملية ثنائيّة * على S، وللوصول إلى استنتاج صحيح، علينا أن نعرف معنى انتماء عنصر إلى H، وأن نستخدم هذه الحقيقة. وهذه المشكلة التي يعانيها الطلبة. والآن تأكّد أنك تفهم المثال الآتي:

6.2 مثال لتكن + و . عمليتي الجمع والضرب المعتادتين على المجموعة $\mathbb{Z}$، ولتكن $H=\{n^2 \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$. حدد ما إذا كانت H مغلقة بالنسبة إلى (أ) الجمع و (ب) الضرب.

نحتاج في الفرع (أ) فقط إلى ملاحظة أنّ $1^2=1$ و $2^2=4$ من H، لكن $1+4=5$ و $5 \notin H$؛ ولذلك، H ليست مغلقة بالنسبة إلى الجمع.

وللفرع (ب)، افترض أنّ $r \in H$ و $s \in H$. باستخدام ما يعنيه أنّ r و s من H، نرى أنه لا بدّ من وجود عددين صحيحين n و m من $\mathbb{Z}^+$، بحيث إنّ $r=n^2$ و $s=m^2$. وعليه، $rs=n^2m^2=(nm)^2$، وباستخدام وصف العناصر في H وحقيقية أنّ $nm \in \mathbb{Z}^+$، ينتج أنّ $rs \in H$، وعليه، تكون H مغلقة بالنسبة إلى عملية الضرب. ▲

7.2 مثال لتكن F مجموعة جميع الدوالّ f ذوات القيم الحقيقية التي مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. تعودنا من التفاضل والتكامل على التعامل مع العمليات الثنائيّة $-,+,\circ,.$ على F.

تحديدًا، لكل زوج مرتب (f,g) من الدوالّ في F، نعرِّف لكل $x \in \mathbb{R}$

$f+g$ بِـ $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ الجمع،

$f-g$ بِـ $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ الطرح،

$f.g$ بِـ $(f.g)(x)=f(x)g(x)$ الضرب،

و

$f\circ g$ بِـ $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ التركيب.

إن هذه الدوالّ الأربع جميعها أيضًا، حقيقية القيمة ومجالها $\mathbb{R}$؛ لذلك، F مغلقة بالنسبة إلى العمليات الأربع كلها $.$، $-$، $+$، و $\circ$. ▲

العمليات الثنائيّة الموصوفة في الأمثلة أعلاه مألوفة جدًّا للقارئ، وفي هذا الكتاب، نريد أن نجرّد من جبرنا المألوف مفاهيم تركيبية أساسية، ولتأكيد مفهوم التجريد من المألوف، سوف نوضح المفاهيم التركيبية بأمثلة غير مألوفة، فقد قدمنا في الفصل (1) العمليات الثنائيّة: ضرب الأعداد المركبة على U و U_n، الجمع $+_n$ على $\mathbb{Z}_n$، والجمع $+_c$ على $\mathbb{R}_c$.

إنَّ أهم طريقة لوصف عملية ثنائيّة خاصة $*$ على مجموعة معطاة هي وصف العنصر $a*b$ المقرون بكل زوج مرتب (a,b) بخاصية معرّفة بدلالة a وb.

8.2 مثال على $\mathbb{Z}^+$، نعرِّف العملية الثنائيّة $*$ بـ $a*b$ تساوي أصغر a و b، أو القيمة المشتركة إذا كان $a=b$؛ لذلك، $2*11=2$؛ $15*10=10$ و $3*3=3$ ▲

9.2 مثال على $\mathbb{Z}^+$، نعرّف العملية الثنائيّة $*'$ بِـ $a*'b=a$؛ لذلك، $25*'10=25$، $2*'3=2$، و$5*'5=5$. ▲

10.2 مثال على $\mathbb{Z}^+$، نعرّف العملية الثنائيّة $*''$ بِـ $a*''b=(a*b)+2$، حيث إنّ $*$ معرّفة في المثال (8.2)؛ لذلك، $4*''7=6$، $25*''9=11$، و$6*''6=8$. ▲

ربما يبدو أنّ هذه الأمثلة عديمة الأهمية، لكن تأمّل لحظة، افترض أننا ذهبنا إلى متجر لشراء قطعة شوكولاته شهية كبيرة، وأننا رأينا هناك قطعتين متطابقتين إلى جانب بعضهما، غلاف إحداهما مسعّر بِـ 1.67$ وغلاف الأخرى مسعّر بـ 1.79$ نلتقط – بالطبع – تلك المسعّرة بِـ 1.67$، ومعرفتنا أيهما نريد تعتمد على حقيقية أننا تعلمنا العملية $*$ في المثال 8.2 في وقت ما. إنها عملية مهمّة جدًّا. وبالمثل، العملية الثنائيّة $*'$ في المثال 9.2 عُرّفت باستخدام قدرتنا على تمييز الترتيب. فكّر في المشكلة التي سنواجهها إذا لبسنا أحذيتنا أولًا، ثمّ جواربنا! لذلك يتعين ألا نكون متسرّعين في صرف النظر عن بعض العمليات الثنائيّة؛ لأنها قليلة الأهمية، بالطبع، عملياتنا المعتادة لجمع الأعداد وضربها لها أهمية تطبيقية معروفة لنا.

اختير المثالان 8.2 و9.2 ليُظهرا بوضوح أنّ العملية الثنائية يمكن أن تعتمد أو لا تعتمد على ترتيب الزوج المعطى، ففي المثال 8.2، $a*b=b*a$ لكل $a,b\in\mathbb{Z}^+$، وليس هذا هو الحال في المثال 9.2؛ لأنّ $5*'7=5$ لكن $5*'7=7$.

11.2 تعريف العملية الثنائيّة $*$ على مجموعة S **إبداليّة** (**commutative**)، إذا (وفقط إذا) كان $a*b=b*a$ لكل $a,b\in S$. ■

كما أُكِّد في الفصل 0، فمن المألوف في الرياضيات حذف الكلمتين (وفقط إذا) من التعريف. وتفهم التعاريف دائمًا على أنها عبارة إذا وفقط إذا، فالمبرهنات ليست دائمًا عبارات إذا وفقط إذا، ولا يستخدم أبدًا مثل هذا العرف للمبرهنات.

افترض الآن أننا نرغب في دراسة تعبير على الصورة $a*b*c$، تُمَكِّنُنا العملية الثنائيّة* من ربط عنصرين فقط، وهنا لدينا ثلاثة عناصر، والمحاولات الواضحة لربط العناصر الثلاثة هي بتشكيل إمّا $(a*b)*c$ أو $a*(b*c)$. مع * المعرّفة في المثال 8.2، يحسب $(2*5)*9$ كما يأتي: $2*5=2$، ثمّ $2*9=2$. وبالمثل، يحسب $2*(5*9)$ بـ $5*9=5$، ثمّ $2*5=2$؛ لذلك، $(2*5)*9=2*(5*9)$، وليس صعبًا رؤية أنّ لهذه العملية *:

$$(a*b)*c=a*(b*c)،$$

وعليه، فلا التباس في كتابة $a*b*c$، لكن لِـ $*''$ في المثال 10.2،

$$(2*''5)*''9=4*''9=6،$$

في حين

$$2*''(5*''9)=2*''7=4$$

لهذا $(a*''b)*''c$ ليس بالضرورة مساويًا لِـ $a*''(b*''c)$، ويمكن أن يحصل التباس في التعبير $a*''b*''c$.

12.2 تعريف تكون العملية الثنائيّة على مجموعة S **تجميعيّة (associative)**، إذا كان

$(a*b)*c=a*(b*c)$ لكل $a,b,c\in S$. ■

ويمكن إثبات أنه إذا كانت * تجميعيّة، فإن تعابير أطول مثل $a*b*c*d$ لا لبس فيها، ويمكن كذلك إدخال الأقواس بأي طريقة لغايات الحساب، فالنتيجة النهائية لاثنتين من مثل هذه الحسابات ستكون نفسها.

تمّت مراجعة تركيب الدوالّ من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ في المثال 7.2، ولأي مجموعة S وأيّ دالّتين f و g من S إلى S، نعرّف بصورة مشابهة التركيب لـ g متبوعًا بـ f، $f\circ g$ بأنه الدالّة من S إلى S، بحيث إن $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ لكل $x\in S$، يُضاف إلى ذلك أنّ بعض العمليات الثنائيّة الأكثر أهمية التي ندرسها تُعرَّف باستخدام تركيب الدوالّ، ومن المهم معرفة أن هذا التركيب تجميعيّ دائمًا طالما كان معرّفًا.

13.2 مبرهنة (**تجميعيّة التركيب**): لتكن S مجموعة، ولتكن f، وg، و h دوالّ من S إلى S، عندئذٍ يكون:
$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$.

البرهان لبيان تساوي هاتين الدالّتين، علينا إثبات أنهما تعطيان النتيجة نفسها لكل $x\in S$. بالحساب نجد أنّ:

$$\big(f\circ(g\circ h)\big)(x)=f((g\circ h)(x))=f(g(h(x)))$$

و

$$\big((f\circ g)\circ h\big)(x)=(f\circ g)(h(x))=f(g(h(x)))$$

وعليه، يُحصل بالفعل على العنصر نفسه $f(g(h(x)))$ من S. ◆

ومثالًا على استخدام المبرهنة 13.2 لتوفير الجهد، تذكّر أنّ إثبات أنّ ضرب المصفوفات ذات الدرجة $n \times n$ عملية ثنائيّة تجميعيّة باستخدام رمز المجموع هو تمرين مضن إلى حدٍّ ما، وإذا أثبتنا أولًا – في مقرر للجبر الخطي– أنّ هناك تقابلًا بين المصفوفات والتحويلات الخطية، وأنّ ضرب المصفوفات يقابل تركيب التحويلات الخطية (الدوال)، نحصل على هذه التجميعيّة على الفور من المبرهنة 13.2.

جداول

لمجموعة منتهية، يمكن تعريف العملية الثنائيّة على المجموعة من خلال جدول تسرد في أعلاه عناصر المجموعة بوصفها رؤوسًا للأعمدة وفي جانبه الأيسر بوصفها رؤوسًا للصفوف. نشترط دائمًا أن تُسرد العناصر بوصفها رؤوسًا في الأعلى بالترتيب نفسه الذي سُردت فيه بوصفها رؤوسًا نزولًا في الجانب الأيسر. المثال الآتي يوضّح استخدام جدول لتعريف عملية ثنائيّة.

14.2 مثال

يعرّف الجدول 15.2 العملية الثنائيّة * على $S = \{a,b,c\}$ بالقاعدة الآتية :

(المدخل ذو الترتيب i على اليسار) * (المدخل ذو الترتيب j في الأعلى)

= (العنصر في الصف i والعمود j من جسم الجدول).

الجدول 15.2

$*$	a	b	c
a	b	c	b
b	a	c	b
c	c	b	a

لذلك $a*b=c$ و $b*a=a$، وعليه * ليست إبداليّة. ▲

يمكننا أن نرى بسهولة أنّ العملية الثنائيّة المعرّفة بجدول تكون إبداليّة إذا وفقط إذا كانت المدخلات في الجدول متماثلة بالنسبة إلى القطر الذي يبدأ من الزاوية العليا اليسرى من الجدول، وينتهي بالزاوية السفلى اليمنى.

16.2 مثال

أكمل الجدول 17.2 بحيث تكون * عملية ثنائيّة إبداليّة على المجموعة $S = \{a,b,c,d\}$.

الحل

من الجدول 17.2، نرى أنّ $b*a=d$. لكي تكون * إبداليّة، يجب أن يكون لدينا $a*b=d$ كذلك. لهذا نضع d في المربع المناسب الذي يعرّف $a*b$، والذي يقع بتماثل للمربع الذي يعرّف $b*a$ عبر القطر في الجدول 18.2، وبهذه الطريقة نحصل على ما تبقى من الجدول 18.2 لتقديم حلنا. ▲

الجدول 17.2

$*$	a	b	c	d
a	b			
b	d	a		
c	a	c	d	
d	a	b	b	c

الجدول 18.2

$*$	a	b	c	d
a	b	d	a	a
b	d	a	c	b
c	a	c	d	b
d	a	b	b	c

بعض كلمات التحذير

بينت الخبرة الصفيّة الفوضى التي يمكن أن تحدث إذا ما أعطي الطالب مجموعة، وطلب منه تعريف عملية ثنائيّة ما عليها. تذكر أنه في محاولة تعريف عملية ثنائيّة * على مجموعة S يجب أن نكون متأكدين من:

1. عنصر واحد بالضبط يقرن بكل زوج مرتّب ممكن من عناصر S.

2. لكل زوج مرتب من عناصر S، العنصر المقرون به هو أيضًا من S.

فيما يتعلق بالشرط 1، يحاول الطالب عادةً قرن عنصر من S "بمعظم" الأزواج المرتبة، لكن لبعض الأزواج لا يحدد أي عنصر، وعند حدوث ذلك، تكون * **ليست دائمًا معرّفة (not everywhere defined)** على S. يمكن أن يحدث أيضًا أنه لبعض الأزواج، قد تقرنه المحاولة بأكثر من عنصر من عناصر S، أي إنّ هناك التباسًا، ففي أي حالة التباس، تكون * **ليست حسنة التعريف (not well defined)**، وإذا لم يتحقّق الشرط 2، فإنّ S **ليست مغلقة بالنسبة إلى * (not closed under *)**.

فيما يأتي توضيحات عدة لمحاولات تعريف عمليات ثنائيّة على مجموعات، بعضها عديم القيمة. استخدم الرمز * للعملية المجرّبة في كل هذه الأمثلة.

مثال 19.2 على $\mathbb{Q}$، لتكن $a*b = a/b$. هنا * ليست دائمًا معرّفة على $\mathbb{Q}$؛ لأنه لا يُقرن بحسب هذه القاعدة أي عدد نسبيّ بالزوج $(2,0)$. ▲

مثال 20.2 على $\mathbb{Q}^+$، لتكن $a*b = a/b$. هنا كلا الشرطين 1 و 2 متحقّقان، و * عملية ثنائيّة على $\mathbb{Q}^+$. ▲

مثال 21.2 على $\mathbb{Z}^+$، لتكن $a*b = a/b$. هنا يفشل الشرط 2؛ لأن $3*1$ ليس من $\mathbb{Z}^+$؛ لذلك، * ليست عملية ثنائيّة على $\mathbb{Z}^+$؛ لأن $\mathbb{Z}^+$ ليست مغلقة بالنسبة إلى *. ▲

مثال 22.2 لتكن F مجموعة كل الدوالّ ذوات القيم الحقيقية ذات المجال $\mathbb{R}$ كما في المثال 7.2. افترض أننا "عرّفنا" * لتعطي القسمة المعتادة لـ f على g، أي إنّ $f * g = h$، حيث $h(x) = f(x)/g(x)$. هنا لا يتحقق الشرط 2؛ لأن الدوالّ في F يُفترض أن تكون معرَّفة للأعداد الحقيقية كلها، ولبعض $g\in F$ ستكون $g(x)$ صفرًا لبعض قيم x من $\mathbb{R}$ ولن تكون $h(x)$ معرَّفة عند هذه الأعداد من $\mathbb{R}$، فمثلاً: إذا كان $f(x) = \cos x$ و $g(x) = x^2$، فإنّ $h(0)$ غير معرّف، وعليه $h \notin F$. ▲

مثال 23.2 لتكن F كما في المثال 22.2، ولتكن $f * g = h$، حيث h هي الدالّة الأكبر من كلا f و g. هذا "التعريف" عديم الأهمية تمامًا. بدايةً، لم نعرف ما معنى أن تكون دالّة أكبر من أخرى. حتى لو عرّفنا، فأي تعريف معقول سينتج منه أنّ هناك الكثير من الدوالّ أكبر من كلا f و g، وستبقى * ليست حسنة التعريف. ▲

مثال 24.2 لتكن S مجموعة مكوَّنة من 20 شخصًا، وليس منهم اثنان لهما الطول نفسه. عرّف * بـ $a * b = c$، حيث c أطول شخص ضمن الـ 20 من S. هذه عملية ثنائيّة جيدة تمامًا على المجموعة، على الرغم من أنها ليست على وجه الخصوص عملية مشوقة. ▲

مثال 25.2 لتكن S كما في المثال 24.2، ولتكن $a * b = c$، حيث c أقصر شخص في S أطول من كلا a و b. هذه العملية * ليست دائمًا معرّفة؛ لأنه إذا كان a أو b الشخص الأطول في المجموعة، تكون $a * b$ غير معينة. ▲

تمارين 2

حسابات

التمارين من 1 إلى 4 تتعلق بالعملية الثنائيّة * المعرّفة على $S=\{a,b,c,d,e\}$ من خلال الجدول 26.2

1. احسب $b*d$، $c*c$، و $[(a*c)*e]*a$.
2. احسب $(a*b)*c$ و $a*(b*c)$. هل يمكنك القول بناءً على هذه الحسابات ما إذا كانت * تجميعيّة؟
3. احسب $(b*d)*c$ و $b*(d*c)$. هل يمكنك القول بناءً على هذه الحسابات ما إذا كانت * تجميعيّة؟

الجدول 26.2

*	a	b	c	d	e
a	a	b	c	b	d
b	b	c	a	e	c
c	c	a	b	b	a
d	b	e	b	e	d
e	d	b	a	d	c

الجدول 27.2

*	a	b	c	d
a	a	b	c	
b	b	d		c
c	c	a	d	b
d	d			a

الجدول 28.2

*	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	c	d
c	c	d	c	d
d				

4. هل * إبداليّة؟ لماذا؟

5. أكمل الجدول 27.2 لتعرّف عملية ثنائيّة إبداليّة * على $S=\{a,b,c,d\}$.

6. يمكن إكمال الجدول 28.2 لتعريف عملية ثنائيّة تجميعيّة * على $S=\{a,b,c,d\}$. افترض أنّ هذا ممكن، واحسب المدخلات المفقودة.

في التمارين من 7 إلى 11، حدد ما إذا كانت العملية الثنائيّة المعرّفة * إبداليّة، وما إذا كانت * تجميعيّة.

7. * المعرّفة على $\mathbb{Z}$ بالقاعدة $a*b=a-b$

8. * المعرّفة على $\mathbb{Q}$ بالقاعدة $a*b=ab+1$

9. * المعرّفة على $\mathbb{Q}$ بالقاعدة $a*b=ab/2$

10. * المعرّفة على $\mathbb{Z}^+$ بالقاعدة $a*b=2^{ab}$

11. *المعرّفة على $\mathbb{Z}^+$ بالقاعدة $a*b=a^b$

12. لتكن S مجموعة فيها عنصر واحد بالضبط. كم عملية ثنائيّة مختلفة يمكن تعريفها على S؟ أجب عن السؤال إذا كانت S فيها عنصران بالضبط، ثلاثة عناصر بالضبط، n عنصرًا بالضبط.

13. كم عملية ثنائيّة إبداليّة مختلفة يمكن تعريفها على مجموعة من عنصرين؟ على مجموعة من 3 عناصر؟ على مجموعة من n عنصرًا؟

مفاهيم

في التمارين من 14 إلى 16، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

14. العملية الثنائيّة * إبدالّية، إذا وفقط إذا كان $a*b=b*a$.

15. العملية الثنائيّة * على مجموعة S تجميعيّة، إذا وفقط إذا كان لكل $a,b,c\in S$، يكون لدينا $(b*c)*a=b*(c*a)$.

16. المجموعة الجزئيّة H من مجموعة S مغلقة بالنسبة إلى عملية ثنائيّة * على S، إذا وفقط إذا كان $(a*b)\in H$ لكل $a,b\in S$.

في التمارين من 17 إلى 22، حدد ما إذا كان تعريف * يعطي فعلًا عملية ثنائيّة على المجموعة.

في حالة أنّ * ليست عملية ثنائيّة، قرّر ما إذا كان الشرط 1، أو الشرط 2، أو كلا هذين الشرطين في الصفحة 24 لم يتحقّق.

17. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=a-b$.

18. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف* بالقاعدة $a*b=a^b$.

19. على $\mathbb{R}$، عرّف * بالقاعدة $a*b=a-b$.

20. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=c$، حيث c هي أصغر عدد صحيح أكبر من a و b كليهما.

21. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=c$، حيث c هي أكثر من $a+b$ على الأقل بـ 5.

22. على $\mathbb{Z}^+$، عرّف * بالقاعدة $a*b=c$ ، حيث c هي أكبر عدد صحيح أقل من حاصل ضرب a و b.

23. لتكن H المجموعة الجزئيّة من $M_2(\mathbb{R})$ المكوّنة من جميع المصفوفات التي على الصورة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، حيث $a,b\in\mathbb{R}$.
هل H مغلقة بالنسبة إلى:

أ. جمع المصفوفات؟ ب. ضرب المصفوفات؟

24. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

______ أ. إذا كانت * أيّ عملية ثنائيّة على أيّ مجموعة S، فإنّ $a*a=a$ لكل $a\in S$.

______ ب. إذا كانت * أيّ عملية ثنائيّة إبداليّة على أيّ مجموعة S، فإنّ $a*(b*c)=(b*c)*a$ لكل $a,b,c\in S$.

______ جـ. إذا كانت * أيّ عملية ثنائيّة تجميعيّة على أيّ مجموعة S، فإنّ $a*(b*c)=(b*c)*a$ لكل $a,b,c\in S$.

______ د. العمليات الثنائيّة الوحيدة التي لها أهمية ما، هي تلك المعرّفة على مجموعات أعداد.

______ هـ. العملية الثنائيّة * على مجموعة S إبداليّة، إذا وجد $a,b\in S$ بحيث إنّ: $a*b=b*a$.

______ و. كل عملية ثنائيّة معرّفة على مجموعة فيها عنصر واحد بالضبط تكون إبداليّة وتجميعيّة.

______ ز. العملية الثنائيّة على S تقرن على الأقل عنصرًا واحدًا من S بكل زوج مرتّب من عناصر S.

______ ح. العملية الثنائيّة على S تقرن على الأكثر عنصرًا واحدًا من S بكل زوج مرتّب من عناصر S.

______ ط. العملية الثنائيّة على S تقرن عنصرًا واحدًا بالضبط من S بكل زوج مرتّب من عناصر S.

______ ي. العملية الثنائيّة على S يمكن أن تقرن أكثر من عنصر من S بزوجٍ مرتّب ما من عناصر S.

25. أعطِ مجموعة تختلف عن تلك المجموعات الموصوفة في الكتاب، وليست مجموعة أعداد. عرّف عمليتين ثنائيّتين* و '* على هذه المجموعة. تأكد أنّ مجموعتك حسنة التعريف.

براهين

26. برهن أنه إذا كانت * عملية ثنائيّة تجميعيّة وإبداليّة على مجموعة S، فإنّ:

$$(a*b)*(c*d)=[(d*c)*a]*b$$

لكل $a,b,c,d\in S$. افترض قانون التجميع فقط لثلاثيات كما في التعريف، أي افترض فقط أنّ:

$$(x*y)*z=x*(y*z)$$

لكل $x,y,z\in S$.

في التمرينين 27 و 28، برهن العبارة أو أعطِ مثالًا مناقضًا.

27. كل عملية ثنائيّة على مجموعة مكوّنة من عنصر واحد هي إبداليّة وتجميعيّة.

28. كل عملية ثنائيّة إبداليّة على مجموعة مكوّنة من عنصرين تمامًا هي تجميعيّة.

لتكن F مجموعة جميع الدوالّ ذوات القيم الحقيقية التي مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. عرّف المثال 7.2 العمليات الثنائيّة . ,$-$,$+$، و $\circ$ على F. في التمارين من 29 إلى 35، برهن العبارة المعطاة أو أعطِ مثالًا مناقضًا.

29. جمع الدوالّ + على F تجميعيّ.

30. طرح الدوالّ $-$ على F إبدالي.

31. طرح الدوالّ $-$ على F تجميعيّ.

32. ضرب الدوالّ . على F إبداليّ.

33. ضرب الدوالّ . على F تجميعيّ.

34. تركيب الدوالّ $\circ$ على F إبداليّ.

35. إذا كانت $*$ و $*'$ أي عمليتين ثنائيّتين على مجموعة S، فإنّ:

$$a*(b*'c)=(a*b)*'(a*c) \quad \text{لكل} \quad a,b,c\in S.$$

36. افترض أنّ $*$ عملية ثنائيّة تجميعيّة على مجموعة S. لتكن $H=\{a\in S \mid a*x=x*a$ لكل $x\in S\}$.

أثبت أنّ H مغلقة بالنسبة إلى $*$. (نفكر في H على أنها مكوّنة من جميع عناصر S التي تتبدل مع كل عنصر من S).

37. افترض أنّ $*$ عملية ثنائيّة تجميعيّة وإبداليّة على مجموعة S. أثبت أنّ $H=\{a\in S \mid a*a=a\}$ مغلقة بالنسبة إلى $*$. (عناصر H هي **متساويات القوى** (**idempotents**) للعملية الثنائية $*$).

الفصل 3 **البنى الثنائيّة المتماثلة Isomorphic Binary structures**

قارن بين الجدول 1.3 للعملية الثنائيّة * على المجموعة $S=\{a,b,c\}$ والجدول 2.3 للعملية الثنائيّة '* على المجموعة $T=\{\#, \$, \&\}$.

لاحظ أنه إذا استبدلنا في الجدول 1.3 # بـ a أينما وردت، $ بـ b، و & بـ c مستخدمين التقابل

$$a \leftrightarrow \# \qquad b \leftrightarrow \$ \qquad c \leftrightarrow \&$$

نحصل على الجدول 2.3 تمامًا، ويختلف الجدولان فقط في الرموز (أو الأسماء) التي تشير إلى العناصر والرموز * و'* التي تشير للعمليتين، وإذا أعدنا كتابة الجدول 3.3 بالعناصر بحسب الترتيب y, x, z، فسنحصل على الجدول 4.3. (هنا لم ننشئ تقابلًا؛ وسردنا فقط العناصر نفسها بترتيب مختلف خارج الخطين السميكين في الجدول). باستبدال y في الجدول 1.3 بـ a أينما وردت، x بـ b، و z بـ c باستخدام التقابل

$$a \leftrightarrow y \qquad b \leftrightarrow x \qquad c \leftrightarrow z$$

نحصل على الجدول 4.3. نفكر في الجداول 3.3 ،و2.3 ،و1.3 و4.3 على أنها متماثلة تركيبيًّا، فهذه الجداول الأربعة تختلف فقط في الأسماء (أو الرموز) لعناصرها، وفي الترتيب الذي تسرد فيه هذه العناصر بوصفها رؤوسًا في الجدول، من ناحية ثانية، الجدول 5.3 للعملية الثنائيّة $\bar{*}$ والجدول 6.3 للعملية الثنائيّة $\hat{*}$ على المجموعة $S=\{a,b,c\}$ مختلفان تركيبيًّا عن بعضهما وعن الجدول 1.3. في الجدول 1.3، يظهر كل عنصر ثلاث مرات في جسم الجدول، بينما يحوي جسم الجدول 5.3 عنصرًا واحدًا، وهو b. وفي الجدول 6.3، لكل $s \in S$ نحصل على القيمة c نفسها لـ $s \,\hat{*}\, s$ عبر القطر من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين، بينما نحصل على ثلاث قيم مختلفة في الجدول 1.3؛ لذلك، فالجداول من 1.3 إلى 6.3 تعطي فقط ثلاث عمليات ثنائيّة مختلفة تركيبيًّا على مجموعة من ثلاثة عناصر، شريطة أن نتغاضى عن أسماء العناصر وترتيب ظهورها بوصفها رؤوسًا في الجدول.

الوضع الذي ناقشناه توًّا مماثل إلى حدّ ما لوضع أطفال في فرنسا وفي ألمانيا يتعلمون عملية الجمع على المجموعة $\mathbb{Z}^+$. لدى الأطفال أسماء مختلفة، هي: (آن، دو، توا، ... مقابل آين، تسفاي، دراي...) للأعداد، لكنهم يتعلمون التركيب الثنائيّ نفسه. (في هذه الحالة، يستخدمون الرموز نفسها للأعداد، ولهذا ستظهر جداول الجمع نفسها لديهم إذا سردوا الأعداد بالترتيب نفسه).

الجدول 1.3

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

الجدول 2.3

$*'$	#	$	&
#	&	#	$
$	#	$	&
&	$	&	#

الجدول 3.3

$*''$	x	y	z
x	x	y	z
y	y	z	x
z	z	x	y

الجدول 4.3

$*''$	y	x	z
y	z	y	x
x	y	x	z
z	x	z	y

الجدول 5.3

$\bar{*}$	a	b	c
a	b	b	b
b	b	b	b
c	b	b	b

الجدول 6.3

$\hat{*}$	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

نحن مهتمون بدراسة أنواع البنى المختلفة التي يمكن أن تعطيها العمليات الثنائيّة على مجموعات فيها عدد العناصر نفسه، كما سبق تمثيله والجداول 4.3،و5.3، و6.3، لنفترض أنّ **البنية الجبرية الثنائيّة**[2] **(binary algebraic structure)** $\langle S,*\rangle$ هي مجموعة S مع عملية ثنائيّة $*$ على S. حتى تكون بنيتان $\langle S,*\rangle$ و$\langle S',*'\rangle$ من مثل هذه البنى الجبرية متماثلتين تركيبيًّا بالفهم الذي وصفناه، يجب أن يتوافر لدينا تقابل بين العناصر x من S والعناصر x' من S'، بحيث إنه

إذا كان $x \leftrightarrow x'$ و $y \leftrightarrow y'$، فإنّ $x*y \leftrightarrow x'*'y'$ (1)

يتوافر تقابل إذا كانت S وS' لهما عدد العناصر نفسه، ومن المألوف وصف التقابل بإعطاء دالّة أحاديّة وغامرة ϕ من S إلى S' (انظر التعريف 12.0)، ولمثل هذه الدالّة ϕ، نعدّ المعادلة $\phi(x)=x'$ قارئةً للتقابل $x \leftrightarrow x'$ الترتيب من اليسار إلى اليمين، حيث يمكن التعبير بدلالة ϕ عن التقابل الأخير $\leftrightarrow$ في (1)، الذي يؤكد أنّ التركيب الجبري في S' هو نفسه الذي في S بِـ

$$\phi(x*y)= \phi(x)*' \phi(y).$$

تعرف مثل هذه الدالّة التي تبين أنّ النظامين الجبريين متماثلان تركيبيًّا بالتماثل؛ لذا، نعطي تعريفًا منهجيًّا.

7.3 تعريف لتكن $\langle S,*\rangle$ و$\langle S',*'\rangle$ بنيتين جبريتين ثنائيّتين، يعرّف **التماثل** (**isomorphism**) من S إلى S' على أنّه دالّة أحاديّة غامرة ϕ من S إلى S' بحيث إن:

$\phi(x*y)= \phi(x)*' \phi(y)$ لكل $x,y \in S$ (خاصية التشاكل) (2)

2 تذكر ان الكتابة بخط غامق تشير إلى أننا نقدم تعريفاً لمصطلح

إذا توافرت مثل هذه الدالّة ϕ، فنقول: إن S و S' **بنيتان ثنائيّتان متماثلتان** (**isomorphic binary structures**)، ونرمز لذلك بـ $S \simeq S'$ ، مع حذف * و *' من الرمز. ■

ربّما تتعجب من تسميتنا للشرط الظاهر في التعريف 7.3 خاصية التشاكل، وليس خاصية التماثل، فمفهوم التماثل يشمل فكرة التقابل التي تظهر قبلها في التعريف من خلال الكلمتين أحاديّة وغامرة. سنناقش في الوحدة 13 العلاقة بين S و S' عندما تحقق $\phi: S \to S'$ خاصية التشاكل الظاهرة، لكن ϕ ليست بالضرورة أحاديّة، عندئذٍ تسمى ϕ تشاكلًا، وليس تماثلًا.

من الواضح أننا أثبتنا في الفصل 1 أنّ البنيتين الثنائيّتين $\langle U,\cdot\rangle$ و $\langle \mathbb{R}_c, +_c\rangle$ متماثلتان لكل $c \in \mathbb{R}^+$. كذلك، $\langle U_n,\cdot\rangle$ و $\langle \mathbb{Z}_n, +_n\rangle$ متماثلتان لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

يطلب منّا التمرين 27 أن نثبت أنه لمجموعة من البنى الجبرية الثنائيّة، العلاقة $\simeq$ في التعريف 7.3 هي علاقة تكافؤ على المجموعة، حيث بيّنت مناقشتنا التي قادت إلى التعريف السابق أنّ البنى الثنائيّة المعرّفة بالجداول من 1.3 إلى 4.3 تقع في صفّ التكافؤ نفسه، بينما تقع تلك المعطاة في الجدولين 5.3 و 6.3 في صفّ تكافؤ مختلف. نتابع مناقشة كيفية محاولة تحديد ما إذا كانت البنى الثنائيّة متماثلة.

كيفية إثبات أنّ البنى الثنائيّة متماثلة

نعطي الآن مخططًا تمهيديًا يبيّن كيف ننطلق من التعريف 7.3 لإثبات أنّ بنيتين ثنائيّتين $\langle S,*\rangle$ و $\langle S',*'\rangle$ متماثلتان.

خطوة 1 عرّف الدالّة ϕ التي تعطي تماثل S مع S'، وهذا يعني أنّ علينا أن نصف بطريقة ما، ما هي $\phi(s)$ لكل $s \in S$.

خطوة 2 أثبت أنّ ϕ دالة أحادية. أي، افترض أنّ $\phi(x)=\phi(y)$ في S'، واستنتج من ذلك أنّ $x = y$ في S.

خطوة 3 أثبت أنّ ϕ غامرة إلى S'. أي، افترض أنّ $s' \in S'$ معطًى، وبيّن وجود $s \in S$، بحيث إنّ $\phi(s) = s'$.

خطوة 4 أثبت أنّ $\phi(x*y) = \phi(x)*'\phi(y)$ لكل $x, y \in S$. هذا مجرد حسابات فقط. احسب كلًّا من طرفي المعادلة، وتحقق ما إذا كانا متساويين.

8.3 مثال لنثبت أنّ البنية الثنائيّة $\langle \mathbb{R}^+,\cdot\rangle$ مع عملية الجمع المعتادة تماثل البنية $\langle \mathbb{R}^+,\cdot\rangle$، حيث $\cdot$ هي الضرب المعتاد.

خطوة 1 علينا بطريقة ما تحويل عملية الجمع إلى ضرب. تذكّر من $a^{b+c}=(a^b)(a^c)$ أنّ جمع الأسس يقابل ضرب الكميتين؛ لذلك، نحاول تعريف $\phi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ بالقاعدة $\phi(x)=e^x$ لكل $x \in \mathbb{R}$. لاحظ أنّ $e^x > 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$، لهذا فعلًا $\phi(x) \in \mathbb{R}^+$.

خطوة 2 إذا كان $\phi(x) = \phi(y)$، فإنّ $e^x = e^y$. بأخذ اللوغاريتم الطبيعي نرى أنّ $x = y$، لهذا فعلًا ϕ أحاديّة.

خطوة 3 إذا كان $r \in \mathbb{R}^+$، فإنّ $\ln(r) \in \mathbb{R}$ و $\phi(\ln r) = e^{\ln r} = r$ ؛ لذلك ϕ غامرة إلى $\mathbb{R}^+$.

خطوة 4 لـ $x, y \in \mathbb{R}$، لدينا $\phi(x+y) = e^{x+y} = e^x.\ e^y = \phi(x).\ \phi(y)$؛ لذلك نرى أنّ ϕ هي فعلًا تماثل. ▲

مثال 9.3 لتكن $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$، أي إن $2\mathbb{Z}$ هي مجموعة جميع الأعداد الصحيحة الزوجية، الموجبة، والسالبة، والصفر. ندّعي أنّ $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ تماثل $\langle 2\mathbb{Z},+\rangle$، حيث + هي الجمع المعتاد. هذا سوف يعطي مثالًا على بنية ثنائيّة $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ تماثل في الحقيقة بنية مكوّنة من مجموعة جزئيّة فعلية بالنسبة إلى العملية المتولّدة، على خلاف المثال 8.3 الذي كانت فيه العمليتان مختلفتين بالكامل.

خطوة 1 الدالّة الواضحة $\phi : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$ التي يمكن تجريبها تعطى بـ $\phi(n) = 2n$ لِـ $n \in \mathbb{Z}$.

خطوة 2 إذا كان $\phi(m) = \phi(n)$، فإنّ $2m = 2n$ وعليه $m = n$؛ لذلك ϕ أحاديّة.

خطوة 3 إذا كان $n \in 2\mathbb{Z}$، فإنّ n عدد زوجي، وعليه $n = 2m$، حيث $m = n/2 \in \mathbb{Z}$ ؛ لذلك $\phi(m) = 2(n/2) = n$ وعليه تكون ϕ غامرة إلى $2\mathbb{Z}$.

خطوة 4 لتكن $m, n \in \mathbb{Z}$، عندئذٍ، تثبت المعادلة

$$\phi(m+n) = 2(m+n) = 2m + 2n = \phi(m) + \phi(n)$$

أنّ ϕ تماثل. ▲

كيفية إثبات أنّ البنى الثنائيّة ليست متماثلة

نتحول الآن إلى عكس السؤال، تحديدًا:

كيف نثبت أنّ بنيتين ثنائيّتين $\langle S,*\rangle$ و $\langle S',*'\rangle$ ليستا متماثلتين، إذا كان هذا هو الحال؟

هذا سيعني أنه لا توجد دالة أحاديّة وغامرة ϕ من S إلى S' تحقّق الخاصية $\phi(x*y) = \phi(x)*'\phi(y)$ لكل $x, y \in S$، بوجه عام، من الواضح أنه من غير المعقول تجريب جميع الدوالّ الأحاديّة الغامرة من S إلى S'، وفحص ما إذا كانت تحقّق هذه الخاصية، إلّا في حالة عدم توافر مثل هذه الدوالّ. هذه تحديدًا هي الحالة التي لا تملك فيها S و S' عدد العناصر نفسه. (انظر التعريف 13.0).

مثال 10.3 البنيتان الثنائيّتان $\langle \mathbb{Q},+\rangle$ و $\langle \mathbb{R},+\rangle$ ليستا متماثلتين؛ لأن عدد عناصر $\mathbb{Q}$ هو $\aleph_0$، بينما $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$. (انظر المناقشة التي أعقبت المثال 13.0). لاحظ أنّ القول:إنّ $\mathbb{Q}$ مجموعة جزئيّة فعلية من $\mathbb{R}$ لا يكفي، فالمثال 9.3 يبين أنّ المجموعة الجزئيّة الفعلية مع العملية المتولّدة يمكن في الحقيقة أن تماثل البنية الثنائيّة الكليّة. ▲

الخاصية التركيبية (structural property) لبنية ثنائيّة هي خاصية يجب أن تشترك فيها أيّ بنية مماثلة، وإنها لا تتعلق بالأسماء أو بعض المميزات غير التركيبية للعناصر، فمثلًا: البنيتان الثنائيّتان المعرفتان بالجدولين 1.3 و 2.3 متماثلتان على الرغم من أنّ العناصر مختلفة كليًّا، كذلك لا تتعلق الخاصية التركيبية بما نعدّه "اسمًا" للعملية الثنائيّة. ويبين المثال 8.3 أنّ البنية الثنائيّة التي عمليتها جمعنا المعتاد يمكن أن تماثل أخرى عمليتها ضربنا المعتاد، لكن عدد العناصر في S هو خاصية تركيبية لِـ $\langle S,*\rangle$.

في حالة توافر دالّة أحاديّة غامرة من S إلى S'، فنبرهن عادةً أنّ $\langle S,*\rangle$ لا تماثل $\langle S',*'\rangle$ (إذا كان هذا هو الحال) بإثبات أنّ إحداهما تحقّق خاصية تركيبية لا تتمتع بها الأخرى.

11.3 مثال كلتا المجموعتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^+$ لهما عدد العناصر $\aleph_0$، وهناك كثير من الدوالّ الأحاديّة الغامرة من $\mathbb{Z}$ إلى $\mathbb{Z}^+$، لكن البنيتين الثنائيّتين $\langle \mathbb{Z},\cdot\rangle$ و $\langle \mathbb{Z}^+,\cdot\rangle$ حيث $\cdot$ هي الضرب المعتاد، غير متماثلتين، ويتوافر عنصران x في $\langle \mathbb{Z},\cdot\rangle$، بحيث إن $x\cdot x = x$، تحديدًا 0 و 1، لكن في $\langle \mathbb{Z}^+,\cdot\rangle$، يتوافر عنصر وحيد 1. ▲

نسرد بعض الأمثلة على خصائص تركيبية وخصائص غير تركيبية ممكنة لبنية ثنائيّة $\langle S,*\rangle$؛ لمساعدتك على التفكير في الإتجاه الصحيح.

خصائص تركيبية ممكنة	خصائص غير تركيبية ممكنة
1. المجموعة فيها 4 عناصر.	أ. العدد 4 هوعنصر.
2. العملية إبداليّة.	ب. العملية تسمّى "جمعًا"
3. $x*x = x$ لكل $x \in S$.	جـ. عناصر S مصفوفات.
4. للمعادلة $a*x = b$ حلّ x في S لكل $a,b \in S$.	د. S مجموعة جزئيّة من $\mathbb{C}$.

قدّمنا في الفصل 2 المفاهيم الجبرية للإبدال والتجميع، ويتّضح مفهوم تركيبيّ آخر سيكون مهمًّا لنا بالجدول 3.3، حيث العملية الثنائيّة "* على المجموعة $\{x,y,z\}$، لدينا $u = x * u = u * x$" لكل الاختيارات الممكنة x، y، و z مكان u؛ لذلك، تؤدي x الدور نفسه الذي يؤديه 0 في $\langle \mathbb{R},+\rangle$، حيث $u = 0 + u = u + 0$ لكل $u \in \mathbb{R}$، والدور نفسه الذي يؤديه 1 في $\langle \mathbb{R},.\rangle$، حيث $u = 1.u = u.1$ لكل $u \in \mathbb{R}$، ولأن الجدولين 1.3 و 2.3 يعطيان بنيتين مماثلتين لتلك التي في الجدول 3.3، فيجب لذلك أن يقدما عنصرًا بخاصية مشابهة، حيث نرى أنّ $b*u = u*b = u$ لكل عنصر u يظهر في الجدول 1.3، وأنّ $u = \$ *' u = u *' \$$ لكل العناصر u في الجدول 2.3. نعطي تعريفًا منهجيًّا لهذا المفهوم التركيبي، ونثبت مبرهنة صغيرة.

12.3 تعريف لتكن $\langle S,*\rangle$ بنية ثنائيّة. يسمّى العنصر e من S **العنصر المحايد للعملية *** **(identity element for *)** إذا كان

$$e * s = s * e = s \text{ لكل } s \in S.$$ ■

13.3 مبرهنة (**وحدانية العنصر المحايد**) للبنية الثنائيّة $\langle S,*\rangle$ على الأكثر عنصر محايد واحد، أي إنه إذا وُجد عنصر محايد، فهو وحيد.

البرهان بالسير بحسب الطريقة القياسية لإثبات الوحدانية، افترض أنّ كلا e و $\bar{e}$ عنصران من S يؤديان دور عنصرين محايدين، ندعهما يتنافسان معًا، وبافتراض e عنصرًا محايدًا، فيجب أن يكون لدينا $e*\bar{e} = \bar{e}$، لكن بافتراض $\bar{e}$ عنصرًا محايدًا، فيجب أن يكون لدينا $e*\bar{e} = e$؛ لذلك نحصل على $e = \bar{e}$، ما يثبت أنّ العنصر المحايد يجب أن يكون وحيدًا. ◆

إذا كان لديك الآن إدراك جيد لمفهوم تماثل البنى الثنائيّة، فسيكون واضحًا أن توافر عنصر محايد لِـ * هو بالفعل خاصية تركيبية للبنية $\langle S,*\rangle$. على أيّ حال، نعلم بالخبرة أنّ كثيرًا من القرّاء سيكونون غير قادرين على رؤية الغابة على الرغم من كل ما ظهر من أشجار، ولهؤلاء، نعطي برهانًا دقيقًا، متخطّين لمس تلك الأشجار المتشابكة.

14.3 مبرهنة افترض أنّ $\langle S,*\rangle$ فيها عنصر محايد e لِـ *. إذا كان $\phi: S \to S'$ تماثلًا من $\langle S,*\rangle$ إلى $\langle S',*'\rangle$، فإنّ $\phi(e)$ عنصر محايد للعملية الثنائيّة '* على S'.

البرهان لتكن $s' \in S'$. علينا أن نثبت أنّ $\phi(e) *' s' = s' *' \phi(e) = s'$، ولأنّ ϕ تماثل، فتكون دالّة أحاديّة غامرة من S إلى S'، ويوجد على وجه الخصوص $s \in S$، بحيث إنّ $\phi(s) = s'$. الآن، e عنصر محايد لِـ * وعليه، نعلم أنّ $e*s = s*e = s$. ولأنّ ϕ دالّة، فنحصل على:

$$\phi(e*s) = \phi(s*e) = \phi(s).$$

باستخدام التعريف 7.3 للتماثل، نستطيع إعادة كتابة ذلك على الصورة:

$$\phi(e) *' \phi(s) = \phi(s) *' \phi(e) = \phi(s)$$

وبتذكّر أننا اخترنا $s \in S$، بحيث إنّ $\phi(s)=s'$ نحصل على العلاقة المطلوبة

$$\phi(e) *' s' = s' *' \phi(e) = s'.$$ ◆

نختم بثلاثة أمثلة إضافية تبين عن طريق خصائص تركيبية أنّ بنى ثنائيّة معيّنة غير متماثلة. ونطلب إليك في التمارين أن تثبت– كما في المبرهنة 14.3– أنّ الخصائص التي استخدمناها في هذه الأمثلة للتمييز بين البنى هي بالفعل تركيبية، أي إنها يجب إن تكون مشتركة بين أي بنى متماثلة.

15.3 مثال سنبين أنّ البنيتين الثنائيّتين $\langle \mathbb{Q},+\rangle$ و $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ بالنسبة إلى الجمع المعتاد ليستا متماثلتين. (كلا $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ لها عدد العناصر $\aleph_0$؛ ولذلك، هناك الكثير من الدوالّ الأحاديّة الغامرة من $\mathbb{Q}$ إلى $\mathbb{Z}$) للمعادلة $x + x = c$ حل x لكل $c \in \mathbb{Q}$، لكن ليس هذا هو الحال في $\mathbb{Z}$. فمثلًا ، ليس للمعادلة $x+x = 3$ حل في $\mathbb{Z}$. (قدمنا خاصية تركيبية تميز بين هاتين البنيتين). ▲

16.3 مثال البنيتان الثنائيّتان $\langle \mathbb{C}, \cdot \rangle$ و $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ بالنسبة إلى الضرب المعتاد ليستا متماثلتين. (يمكن إثبات أن $\mathbb{C}$ و $\mathbb{R}$ لهما عدد العناصر نفسه) للمعادلة $x.x = c$ حل x لكل $c \in \mathbb{C}$، لكن $x \cdot x = -1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$. ▲

17.3 مثال البنية الثنائيّة $\langle \mathrm{M}_2(\mathbb{R}), . \rangle$ للمصفوفات الحقيقية من الدرجة 2×2 مع ضرب المصفوفات المعتاد لا تماثل $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ مع ضرب الأعداد المعتاد. (يمكن إثبات أنّ كلتا المجموعتين لها عدد العناصر $|\mathbb{R}|$). فضرب الأعداد إبداليّ، لكن ضرب المصفوفات ليس كذلك. ▲

■ تمارين 3

في التمارين جميعها، + هي الجمع المعتاد على المجموعة، حيثما عُينت، و $\cdot$ هي الضرب المعتاد.

حسابات

1. ما الأشياء الثلاثة التي علينا فحصها لتحديد ما إذا كانت الدالّة $\phi : S \to S'$ تماثلًا لبنية ثنائيّة $\langle S, * \rangle$ مع $\langle S', *' \rangle$؟

في التمارين من 2 إلى 10، حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة تماثلًا من البنية الثنائيّة الأولى إلى الثانية. (انظر التمرين 1). إذا لم تكن تماثلًا، لماذا لا؟

2. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$، حيث $\phi(n) = -n$ لِكل $n \in \mathbb{Z}$

3. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$، حيث $\phi(n) = 2n$ لِكل $n \in \mathbb{Z}$

4. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$، حيث $\phi(n) = n + 1$ لِكل $n \in \mathbb{Z}$

5. $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ حيث $\phi(x) = x / 2$ لِكل $x \in \mathbb{Q}$

6. $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{Q}, \cdot \rangle$، حيث $\phi(x) = x^2$ لِكل $x \in \mathbb{Q}$

7. $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$ حيث $\phi(x) = x^3$ لِكل $x \in \mathbb{R}$

8. $\langle M_2(\mathbb{R}), \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$، حيث $\phi(A)$ محددة المصفوفة A

9. $\langle M_1(\mathbb{R}), \cdot \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, \cdot \rangle$، حيث $\phi(A)$ محددة المصفوفة A

10. $\langle \mathbb{R}, ^{+} \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}^{+}, \cdot \rangle$، حيث $\phi(r) = 0.5^{r}$ لِكل $r \in \mathbb{R}$

في التمارين من 11 إلى 15، لتكن F مجموعة جميع الدوالّ ϕ من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ التي لها مشتقات من الرتب جميعها. اتبع تعليمات التمارين من 2 إلى 10.

11. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle F, + \rangle$، حيث $\phi(f) = f'$، مشتقة f

12. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ حيث $\phi(f) = f'(0)$

13. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle F, + \rangle$ حيث $\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$

14. $\langle F, + \rangle$ مع $\langle F, + \rangle$، حيث $\phi(f)(x) = \dfrac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)dt\right]$

15. $\langle F, \cdot \rangle$ مع $\langle F, \cdot \rangle$، حيث $\phi(f)(x) = x \,.\, f(x)$

16. الدالّة $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ المعرفة بـ $\phi(n)=n+1$ لكل $n\in\mathbb{Z}$ أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{Z}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Z}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط :

أ. $\langle\mathbb{Z},+\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Z},*\rangle$، ب. $\langle\mathbb{Z},*\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Z},+\rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Z}$.

17. الدالّة $\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ المعرفة بـ $\phi(n)=n+1$ لكل $n\in\mathbb{Z}$ أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{Z}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Z}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط:

أ. $\langle\mathbb{Z},\cdot\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Z},*\rangle$، ب. $\langle\mathbb{Z},*\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Z},\cdot\rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Z}$.

18. الدالّة $\phi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ المعرفة بـ $\phi(x)=3x-1$ لكل $x\in\mathbb{Q}$ أحادية وغامرة إلى $\mathbb{Q}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Q}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط:

أ. $\langle\mathbb{Q},+\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Q},*\rangle$، ب. $\langle\mathbb{Q},*\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Q},+\rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Q}$.

19. الدالّة $\phi:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ المعرّفة بـ $\phi(x)=3x-1$ لكل $x\in\mathbb{Q}$ أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{Q}$. أعطِ تعريفًا لعملية ثنائيّة * على $\mathbb{Q}$ بحيث تكون ϕ تماثلًا يربط:

أ. $\langle\mathbb{Q},\cdot\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Q},*\rangle$، ب. $\langle\mathbb{Q},*\rangle$ بصورة غامرة بـ $\langle\mathbb{Q},\cdot\rangle$.

في كل حالة، أعطِ العنصر المحايد لـ * على $\mathbb{Q}$.

مفاهيم

20. يلَخِّص شرط التشاكل للتماثل ϕ الظاهر في التعريف 7.3 أحيانًا بالقول:"ϕ يجب أن تتبدل مع العملية (العمليتين) الثنائيّة". وضّح كيف يمكن رؤية ذاك الشرط بهذه الطريقة.

في التمرينين 21 و 22، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب– إذا كانت هناك حاجة للتصحيح– بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

21. الدالّة $\phi:S\to S'$ تماثل، إذا وفقط إذا كان $\phi(a*b)=\phi(a)*'\phi(b)$.

22. لتكن * عملية ثنائيّة على مجموعة S. العنصر e من S بالخاصية $s*e=s=e*s$ هو عنصر محايد لـ * لكل $s\in S$.

براهين مختصرة

إنّ قدرتك على إعطاء اختصار بجملة أو جملتين لبرهان موضحًا فكرة البرهان دون التفاصيل والحسابات جميعها تشكل فحصًا جيدًا لفهمك لذلك البرهان، لاحظ أننا قلنا: "جملة" وليس "معادلة"، ومن الآن فصاعدًا، ستحوي بعض مجموعات تمارينا مسألة أو مسألتين تطلبان اختصار برهان في الكتاب، وسيندر أن تتجاوز ثلاث جمل، سنوضح لك ماذا نعني بالاختصار، فها هو اختصارنا بجملة واحدة للمبرهنة 14.3. اقرأ نصّ المبرهنة الآن، ثم اقرأ اختصارنا.

بتمثيل العنصر من S' على الصورة $\phi(s)$ لعنصر ما $s\in S$، استخدم خاصية التشاكل لـ ϕ لإعادة حساب $\phi(e)*'\phi(s)$ في S.

هذا هو نوع التوضيح الذي يمكن أن يعطيه رياضيّ لآخر إذا ما سُئل: "كيف تمّ البرهان؟" ونحن لم نقم بالحسابات أو نوضّح لماذا نستطيع تمثيل العنصر من S' على الصورة $\phi(s)$. سيُنتج تزويد التفاصيل كلها برهانًا مكتوبًا بالكامل. أعطينا في اختصارنا فقط خلاصة الحجة.

23. أعطِ إثباتًا مختصرًا للمبرهنة 13.3.

براهين

24. أحيانًا، يسمّى العنصر المحايد للعملية الثنائيّة * الموصوف بالتعريف 12.3 "العنصر المحايد ذا الجهتين". أعطِ بعبارة كاملة تعريفين مناظرين لِـ :

أ. العنصر المحايد الأيسر e_L لِـ *، و ب. العنصر المحايد الأيمن e_R لِـ *.

بيّنت المبرهنة 13.3 أنه إذا وُجد العنصر المحايد ذو الجهتين لـ *، فإنه وحيد. هل يصحّ الشيء نفسه للعنصر المحايد ذي الجهة الواحدة الذي عرفته توًّا؟ إذا كان كذلك، فبرهن، وإذا لم يكن كذلك فأعطِ مثالًا مناقضاً $\langle S, *\rangle$ لمجموعة منتهية S، وأوجد أول موقع يتعطلّ فيه إثبات المبرهنة 13.3.

25. متابعة لأفكار التمرين 24، هل يمكن أن يكون لبنية ثنائية عنصر محايد أيسر e_L وآخر أيمن e_R، بحيث إن $e_L \neq e_R$؟ إذا كان كذلك، فأعطِ مثالًا باستخدام عملية على مجموعة منتهية S، وإن لم يكن كذلك، فأثبت أنه مستحيل.

26. تذكّر أنــه إذا كانت $f : A \to B$ دالّة أحاديّة غامرة مــن A إلى B، فإنّ $f^{-1}(b)$ هو $a \in A$ الوحيد، بحيث إن $f(a) = b$ برهن على أنه إذا كان $\phi: S \to S'$ تماثلًا من $\langle S,*\rangle$ إلى $\langle S',*'\rangle$، فإنّ ϕ^{-1} تماثلٌ من $\langle S',*'\rangle$ إلى $\langle S,*\rangle$.

27. برهن على أنه إذا كان $\phi: S \to S'$ تماثلًا من $\langle S, *\rangle$ إلى $\langle S',*'\rangle$، وكان $\psi: S' \to S''$ تماثلًا من $\langle S',*'\rangle$ إلى $\langle S'',*''\rangle$، فإنّ الدالّة المركّبة $\psi \circ \phi$ تكون تماثلًا من $\langle S, *\rangle$ إلى $\langle S'',*''\rangle$.

28. برهن على أنّ علاقة التماثل $\simeq$ الموصوفة في التعريف 7.3 هي علاقة تكافؤ على أيّ مجموعة من بنى ثنائيّة. يمكنك ببساطة اقتباس النتيجتين اللتين طلب منك إثباتهما في التمرينين السابقين في المواقع المناسبة في برهانك.

في التمارين من 29 إلى 32، أعطِ برهانًا دقيقًا للمتشكك على أنّ الخصائص المشار إليها للبنية الثنائيّة $\langle S, *\rangle$ هي بالفعل خصائص تركيبية. (فعلنا ذلك في المبرهنة 14.3 للخاصية": يوجد عنصر محايد لِـ *").

29. العملية * إبداليّة.

30. العملية * تجميعيّة.

31. لكل $c \in S$، للمعادلة $x * x = c$ حل x في S.

32. يوجد عنصر b في S، بحيث $b * b = b$.

33. لتكن H المجموعة الجزئيّة من $M_2(\mathbb{R})$ المؤلفة من جميع المصفوفات التي على الصورة $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$، حيث $a,b \in \mathbb{R}$. بيّن التمرين 23 من الفصل 2 أنّ H مغلقة بالنسبة إلى جمع المصفوفات وضربها.

أ. أثبت أنّ $\langle \mathbb{C},+\rangle$ تماثل $\langle H,+\rangle$.

ب. أثبت أنّ $\langle \mathbb{C},.\rangle$ تماثل $\langle H,.\rangle$.

(نقول إنّ: H تمثيل مصفوفاتي للأعداد المركبة $\mathbb{C}$).

34. هناك 16 بنية ثنائية محتملة على المجموعة $\{a,b\}$ من عنصرين. ما عدد البنى غير المتماثلة (أي، المختلفة تركيبيًّا) من بين هذه الـ 16؟ بتعبير أكثر دقة بدلالة التماثل $\simeq$ الذي هو علاقة تكافؤ على هذه المجموعة من 16 بنية: كم صفّ تكافؤ هناك؟ اكتب بنية واحدة من كل صفّ تكافؤ. [مساعدة: تبديل a و b في كل مكان في الجدول، ثم إعادة كتابة الجدول بسرد العناصر بالترتيب الأصلي لا ينتج دائمًا جدولًا مختلفًا عن الذي بدأنا به].

الفصل 4 الزمر Groups

لنكمل تحليلنا لخبراتنا السابقة في الجبر، فبمجرد أن نتقن المسائل الحسابية في جمع الأعداد وضربها، نصبح قادرين على أن نستخدم هذه العمليات الثنائيّة في حل المسائل، وغالبًا ما تؤدي المسائل إلى معادلات تتضمن مجهولاً x يتعيّن حسابه، إذ إنّ أبسط هذه المعادلات هي المعادلات الخطية على الصور $a + x = b$ لعملية الجمع، و $ax = b$ للضرب، والمعادلة الخطية في حالة الجمع لها دائمًا حل عددي، وكذلك في حالة الضرب بشرط أن $a \neq 0$. في الحقيقة، إن الحاجة إلى حل معادلة خطية مثل $5 + x = 2$ كانت الدافع لاستخدام الأعداد السالبة، وكذلك ظهرت الحاجة إلى الأعداد النسبية عند حل معادلة، مثل $2x = 3$.

ومن المرغوب فيه أن نكون قادرين على حلّ معادلات خطية تتضمن عملياتنا الثنائيّة، ولكن هذا ليس ممكنًا للعمليات الثنائيّة جميعها؛ فعلى سبيل المثال: المعادلة $a * x = a$ ليس لها حل في $S = \{a, b, c\}$ للعملية * في المثال 14.2؛ لذلك دعونا نضع بصورة مجردة الخصائص الجبرية المعروفة للجمع التي تمكّننا من حلّ المعادلة $5 + x = 2$ في $\mathbb{Z}$، ويجب ألا نشير لعملية الطرح؛ لأننا مهتمين بالحلّ باستخدام عملية ثنائيّة واحدة، التي هي في حالتنا هذه عملية الجمع.

خطوات الحل:

$5 + x = 2$	معطًى
$-5 + (5 + x) = -5 + 2$	إضافة -5
$(-5 + 5) + x = -5 + 2$	خاصية التجميع
$0 + x = -5 + 2$	حساب $-5 + 5$
$x = -5 + 2$	خصائص ألـ 0
$x = -3$	حساب $-5 + 2$

بصورة محددة، لم نبرهن على أنّ -3 هي الحلّ للمعادلة، ولكننا أثبتنا أنها الحل الممكن الوحيد. لنثبت أنّ -3 هي الحل، علينا حساب $(-3) + 5$. وبخطوات مشابهة، يمكن حلّ المعادلة $2x = 3$ في الأعداد النسبية مع عملية الضرب.

$2x = 3$	معطًى
$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(3)$	الضرب في $\frac{1}{2}$
$(\frac{1}{2} \cdot 2)x = \frac{1}{2}3$	خاصية التجميع
$1.x = \frac{1}{2}3$	حساب $\frac{1}{2}2$
$x = \frac{1}{2}3$	خاصية ألـ 1
$x = \frac{3}{2}$	حساب $\frac{1}{2}3$

نستطيع الآن معرفة طبيعة الخصائص التي يجب أن تتمتع بها المجموعة S والعملية الثنائيّة $*$ المعرّفة عليها، لمحاكاة هذه الخطوات للمعادلة $a * x = b$، حيث $a,b \in S$، إنّ توافر عنصر e في المجموعة S الذي يتمتع بالخاصية $e * x = x$ لكل $x \in S$ شيء أساسي في هذه الخطوات، وفي مثال الجمع، أدى 0 دور العنصر e، و أدى 1 هذا الدور في مثال الضرب، ثم نحتاج إلى عنصر a' في S الذي يتمتع بالخاصية $a' * a = e$. في مثال الجمع، حيث $a = 5$، أدى العنصر -5 دور a' وأدى $\frac{1}{2}$ هذا الدور في مثال الضرب، عندما كانت $a = 2$. أخيرًا نحتاج إلى قانون التجميع، وما يتبقى هو مجرد حسابات. وباتباع الأسلوب نفسه، نرى أنه لحلّ المعادلة $x * a = b$ (تذكّر أنّ $x * a$ لا تساوي بالضرورة $a * x$) سنحتاج إلى عنصر e في المجموعة S، بحيث $x * e = x$ لكل $x \in S$، و a' في S حيث $a * a' = e$. بهذه الخصائص للعملية $*$ على S، سنكون متأكدين من مقدرتنا على حلّ المعادلات الخطية. لذلك نحتاج إلى نظام ثنائيّ تجميعي $\langle S,* \rangle$ يحوي عنصرًا محايدًا e، ولكل $a \in S$، يوجد $a' \in S$ بحيث $a * a' = a' * a = e$. هذا بالتحديد هو مفهوم الزمرة (group) الذي سنعرفه الآن.

تعريف وأمثلة

سنعطي تعريفًا مستقلًّا بدلًا من وصف الزمرة باستخدام المصطلحات التي تمّ تعريفها في الفصلين 2 و 3 كما فعلنا في نهاية الفقرة السابقة، ما يساعد أيّ شخص يقرأ هذا الكتاب على اكتشاف مفهوم الزمرة بصورة موجزة.

1.4 تعريف الزمرة **(Group)** $\langle G,* \rangle$ هي مجموعة G مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائيّة $*$، بحيث تحقق المسلّمات الآتية:

$\mathscr{G}_1$: لكل $a,b,c \in G$

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad \text{قانون التجميع لـ } *$$

$\mathscr{G}_2$: يوجد عنصر e في G، بحيث إنه لكل $x \in G$،

$$e * x = x * e = x \quad e \text{ عنصر محايد لـ } *$$

$\mathscr{G}_3$: لكل $a \in G$، يوجد عنصر a' في G، بحيث

$$a * a' = a' * a = e \quad a' \text{ معكوس (أو نظير) } a$$ ■

2.4 مثال يمكننا أن نرى بسهولة أنّ $\langle U,. \rangle$ و $\langle U_n,. \rangle$ زمرتان؛ لأن عملية الضرب على الأعداد المركبة تجميعية وكلتا المجموعتين U و U_n تحوي العنصر المحايد لعملية الضرب 1. لكل $e^{i\theta} \in U$، العملية

$$e^{i\theta} \cdot e^{i(2\pi-\theta)} = e^{2\pi i} = 1$$

تبرهن على أنّ كل عنصر في U له معكوس. لكل $z \in U_n$، العملية

$$z \cdot z^{n-1} = z^n = 1$$

تبرهن على أنّ كل عنصر في U_n له معكوس؛ ولهذا فإنّ $\langle U,.\rangle$ و$\langle U_n,.\rangle$ زمرتان؛ ولأن $\langle \mathbb{R}_c ,+_c \rangle$ تماثل $\langle U,.\rangle$، نستنتج أن $\langle \mathbb{R}_c ,+_c \rangle$ زمرة لكل $c \in \mathbb{R}^+$. وبالمثل، فإنّ كون $\langle \mathbb{Z}_n ,+_n \rangle$ تماثلُ $\langle U_n,.\rangle$ يبرهن على أنّ $\langle \mathbb{Z}_n ,+_n \rangle$ زمرة لكل $n \in \mathbb{Z}^+$. ▲

نشير هنا إلى أننا سنتساهل أحيانًا في التعبير، فبدلًا من استخدام التمثيل الثنائيّ للزمرة $\langle G,*\rangle$، سنستعيض عنها غالبًا بالزمرة G، وسيكون مفهومًا ضمنًا أنّ هناك عملية ثنائية * معرفة على المجموعة G، وعندما تكون الدقّة مطلوبة، سنحدد العملية * على G، ونقول:"الزمرة G بالنسبة إلى العملية *". فمثلًا، يمكننا أن نشير إلى الزمر $\mathbb{Z}$، و$\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع بدلًا من كتابة الشكل المسهب $\langle \mathbb{Z} ,+\rangle$،و $\langle \mathbb{Q},+\rangle$ و$\langle \mathbb{R},+\rangle$. ولنا الحرية أيضًا في التعبير عن الزمرة $\mathbb{Z}_8$ من غير تحديد العملية.

نبذة تاريخية

هناك ثلاثة جذور تاريخية واضحة لتطور نظرية الزمر المجردة في تراث الرياضيات في القرن التاسع عشر: نظرية المعادلات الجبرية، ونظرية الأعداد، والهندسة، وقد استخدمت في هذه المجالات الثلاثة طرق التعليل في نظرية الزمر، على الرغم من أنها كانت أكثر وضوحًا في المجال الأول.

أحد المظاهر الرئيسة في هندسة القرن التاسع عشر كان البحث عن الثابت تحت تأثير أنواع مختلفة من التحويلات الهندسية، وانصبَّ التركيز تدريجيًّا على التحويلات نفسها، التي يمكن في حالات عدة النظر إليها بوصفها عناصر في زمر.

في نظرية الأعداد، أتمَّ ليونارد أويلر (Leonhard Euler) في القرن الثامن عشر التعامل مع بواقي قسمة قوى a^n على عدد أولي محدد p، وهذه البواقي لها خصائص "الزمرة". وكذلك تعامل كارل ف. جاوس (Carl F. Gauss) في كتابه (Disquisitiones Arithmeticae) عام 1800م بصورة مكثفة مع الصيغ التربيعية $ax^2 + 2bxy+ cy^2$، وبرهن بصورة خاصّة على أنّ فصول التكافؤ لهذه الصيغ مع عملية التركيب اتصفت بما أفضى إلى خصائص الزمرة.

وأخيرًا، زوّدتنا نظرية المعادلات الجبرية بالتصور الأكثر وضوحًا لمفهوم الزمرة. وفي الحقيقة، استخدم جوزيف – لويس لاجرانج (Joseph-Louis Lagrange 1736 – 1813) تباديل جذور المعادلة بوصفها أداة لحلها. وبالطبع عُدّت هذه التباديل أخيرًا عناصر في زمرة.

تمكّن بصورة مستقلة كل من والتر فون دايك (Walter von Dyck 1856 – 1934) وهنريك ويبر (Heinrich Weber 1842 – 1913) عام 1882م من دمج هذه الجذور التاريخية الثلاثة معًا، وإعطاء تعريفٍ لمفهوم الزمرة المجردة.

3.4 تعريف يقال عن الزمرة G: إنها إبداليّة أو أبيلية (**Commutative or Abelian Group**)، إذا كانت عمليتها الثنائيّة إبداليّة. ■

نبذة تاريخية

تُسمَّى الزمر الإبداليّة زمرًا أبيلية تكريمًا للرياضي النرويجي نيلز هينرك أبيل (Niels Henrik Abel 1802 – 1829). كان أبيل مهتمًّا بحلّ معادلات كثيرات الحدود، وقد برهن في بحث كُتب عام 1828م، أنه إذا كانت جذور معادلة من هذا النوع من المعادلات يمكن كتابتها على صورة دوالّ نسبية h ,... ,f, g باستخدام إحداها، ولتكن x، ولكل زوج $f(x)$ و $g(x)$ من هذه الجذور تتحقق العلاقة $f(g(x)) = g(f(x))$، فإنّ المعادلة قابلة للحلّ باستخلاص الجذور، لقد برهن أبيل أنّ هذه الدوالّ في الحقيقة هي دوالّ تباديل لجذور هذه المعادلة، وهكذا، فإنّ هذه الدوالّ تكون عناصر من زمرة التباديل المعرفة على هذه الجذور، وقد كانت الخاصية الإبداليّة لزمرة التباديل هذه المرتبطة بحل المعادلات ما دفع كامايل جوردان (Camille Jordan) في بحثه عام 1870م في الجبر لتسمية هذه الزمر الزمر الأبيلية، وهكذا صار هذا الاسم منذ ذلك الوقت يطلق على الزمر الإبداليّة بوجه عام.

اهتم أبيل بالرياضيات منذ سن المراهقة، وسرعان ما تفوق على أساتذته في النرويج، ثم حصل على منحة حكومية للسفر والدراسة في الخارج عام 1825م ليصل إلى برلين، حيث زامل أوجست سريل(August Crelle) مؤسس أكثر المجلات الألمانية إنتاجًا، إضافة إلى أنه شارك بالكثير من الأبحاث في مجلة سريل سنوات عدة بما فيها الكثير في مجال الدوالّ الإهليجية التي كان في الحقيقة المؤسس لها. عاد أبيل إلى النرويج عام 1827م دون وظيفة وبالكثير من الديون، ولكنه مع ذلك استمر في كتابة أبحاث متميزة، يذكر أنّ أبيل مات بداء السل، وهو في عمر 26، وقبل يومين من نجاح سريل في الحصول على وظيفة له في جامعة برلين.

لنقدم بعض الأمثلة لمجموعة مع عمليات ثنائيّة تكوّن زمرًا وأخرى لا تكون زمرًا.

مثال 4.4 المجموعة $\mathbb{Z}^+$ بالنسبة إلى الجمع ليست زمرة. لا يتوافر عنصر محايد لعملية + في $\mathbb{Z}^+$. ▲

مثال 5.4 مجموعة الأعداد الصحيحة غير السالبة (تشمل 0) بالنسبة إلى الجمع ليست زمرة، فهي تحوي عنصرًا محايدًا 0 غير أنها لا تحوي معكوس العدد 2. ▲

مثال 6.4 الخصائص المعروفة للأعداد الصحيحة والنسبية، وكذلك الحقيقية والمركبة تبرهن أنّ $\mathbb{Z}$ ، و$\mathbb{Q}$ ، و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الجمع هي زمر إبداليّة. ▲

مثال 7.4 المجموعة $\mathbb{Z}^+$ بالنسبة إلى الضرب ليست زمرة، فهي تحوي عنصرًا محايدًا 1، ولكن لا تحوي معكوس 3. ▲

مثال 8.4 الخصائص المعروفة للأعداد النسبية، والحقيقية، والمركبة تبرهن أنّ مجموعات الأعداد الموجبة $\mathbb{Q}^+$ و $\mathbb{R}^+$ ومجموعات الأعداد غير الصفرية و$\mathbb{Q}^*$، و$\mathbb{R}^*$، و $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب هي زمر إبداليّة. ▲

مثال 9.4 مجموعة الدوالّ ذوات القيم الحقيقية على المجال $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى جمع الاقترانات زمرة إبداليّة. ▲

مثال 10.4 (**جبر خطي**) على دارسي فضاء المتجهات أن يلاحظوا أنّ مسلمات فضاء المتجهات V المتعلقة بجمع المتجهات يمكن إيجازها بالقول: إن V بالنسبة إلى جمع المتجهات زمرة إبداليّة. ▲

مثال 11.4 إنّ مجموعة المصفوفات $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ من الدرجة $m \times n$ بالنسبة إلى جمع المصفوفات زمرة، حيث المصفوفة من الدرجة $m \times n$ ومدخلاتها 0 جميعها هي العنصر المحايد، وهي زمرة إبداليّة. ▲

مثال 12.4 إنّ مجموعة المصفوفات $M_n(\mathbb{R})$ من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات ليست زمرة؛ لأنّ المصفوفة من الدرجة $n \times n$ وجميع مدخلاتها 0 ليس لها معكوس. ▲

مثال 13.4 برهن أنّ المجموعة الجزئيّة S من $M_n(\mathbb{R})$ التي تتكوّن من جميع المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات زمرة.

الحل أولاً نبرهن أنّ S مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. افترض أنّ A و B في S؛ لذلك كلٌ من A^{-1} و B^{-1} متوافران و $AA^{-1} = BB^{-1} = I_n$، إذن:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = I_n$$

لذلك AB مصفوفة ذات معكوس، وتنتمي للمجموعة S.

نظرًا لأنّ ضرب المصفوفات عملية تجميعيّة و I_n تمثل العنصر المحايد، وكل عنصر في S له معكوس بحسب تعريف S، نستنتج في الحقيقة أنّ S زمرة، وهي ليست إبداليّة، بل إنها مثالنا الأول لزمرة غير إبداليّة. ▲

زمرة المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n \times n$ التي درسناها في المثال السابق لها أهمية جوهرية في الجبر الخطي، وهي **الزمرة الخطية العامة من الدرجة n (general linear group of degree n)**، وعادة يرمز لها بالرمز $GL(n,\mathbb{R})$. فمَن درس منكم الجبر الخطي يعرف أن المصفوفة A في $GL(n,\mathbb{R})$ تولّد تحويلا خطيًّا ذا معكوس $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، عرّف بالقاعدة $T(x)=Ax$، والعكس كذلك صحيح، حيث إنّ كل تحويل خطي ذي معكوس من $\mathbb{R}^n$ إلى نفسها معرّف بهذه الطريقة باستخدام مصفوفة في $GL(n,\mathbb{R})$. وكذلك ضرب المصفوفات مرتبط بتركيب التحويلات الخطية، وهكذا فإنّ التحويلات الخطية كلها ذات المعكوس من $\mathbb{R}^n$ إلى نفسها تشكل زمرة مع عملية التركيب. ويعبّر عن هذه الزمرة في العادة على الصورة $GL(\mathbb{R}^n)$، وبالطبع $GL(n,\mathbb{R}) \simeq GL(\mathbb{R}^n)$.

مثال 14.4 لتكن * معرفة على $\mathbb{Q}^+$ بالقاعدة $a * b = \frac{ab}{2}$. عندئذٍ،

$$(a*b)*c = \frac{ab}{2} * c = \frac{abc}{4}$$

وكذلك:

$$a*(b*c) = a * \frac{bc}{2} = \frac{abc}{4}$$

وهكذا، فإنّ العملية * تجميعيّة. تظهر الحسابات أنّ:

$$2*a = a*2 = a$$

لكل $a \in \mathbb{Q}^+$، وبهذا يكون 2 هو العنصر المحايد لـ * . وأخيرًا:

$$a * \frac{4}{a} = \frac{4}{a} * a = 2$$

وهكذا $a' = \dfrac{4}{a}$ هو معكوس a. إذن، $\mathbb{Q}^+$ مع العملية * تكوّن زمرة. ▲

الخصائص الأساسية للزمر

في تحركنا لإثبات أول مبرهنة على الزمر، يجب أن نستخدم التعريف 1.4؛ لأنه الشيء الوحيد الذي نعرفه عن الزمر في هذه اللحظة، ويمكن توظيف التعريف 1.4 والمبرهنة الأولى في إثبات المبرهنة الثانية، وإثبات المبرهنة الثالثة يمكن أن يستخدم التعريف والمبرهنة الأولى والثانية، وهكذا.

سترسخ مبرهنتنا الأولى قوانين الحذف، ونعرف في حسابات الأعداد الحقيقية، أنّ $2a = 2b$ تؤدي إلى أنّ $a = b$، ونحتاج فقط إلى قسمة كلا طرفي المعادلة $2a = 2b$ على 2، أو بصورة مكافئة ضرب كلا الطرفين بـ $\dfrac{1}{2}$، المعكوس الضربي لـ 2. سنكرر هذا الإثبات لبرهان قوانين الحذف لأي زمرة. لاحظ أننا سوف نستخدم قانون التجميع.

مبرهنة 15.4 إذا كانت G زمرة مع عملية ثنائيّة *، فإنّ **قانوني الحذف من اليمين واليسار** يتحققان في G، بمعنى أنّ $a * b = a * c$ يؤدي إلى $b = c$، و$b * a = c * a$ يؤدي إلى $b = c$ لكل $a, b, c, \in G$.

البرهان افترض أنّ $a * b = a * c$. وهكذا باستخدام $\mathscr{G}_3$، يوجد a' و

$$a' * (a * b) = a' * (a * c)$$

وبحسب قانون التجميع:

$$(a' * a) * b = (a' * a) * c$$

وبحسب تعريف a' في $\mathscr{G}_3$، $a' * a = e$، وعليه، يكون:

$$e * b = e * c$$

بحسب تعريف e في $\mathscr{G}_2$،

$$b = c$$

وبصورة مماثلة، باستخدام $b * a = c * a$ يمكن استنتاج أنّ $b = c$ بالضرب من جهة اليمين بـ a' واستخدام مسلمات الزمرة. ♦

يمكن لبرهاننا الآتي استخدام المبرهنة 15.4. سنثبت أنّ "المعادلة الخطيّة" في الزمرة لها حلّ وحيد، تذكّر أننا اخترنا الخصائص المناسبة للزمرة؛ لتمكننا من إيجاد الحلّ لهذا النوع من المعادلات.

مبرهنة 16.4 إذا كانت G زمرة مع عملية ثنائيّة *، وكانت a و b عنصرين في G، فإنّ المعادلتين الخطيّتين $a * x = b$ و $y * a = b$ لهما حلان وحيدان x و y في G.

البرهان في البداية سنثبت وجود حلّ على الأقل للمعادلة بملاحظة أنّ $a' * b$ يمثل حلًّا للمعادلة: $a * x = b$، لاحظ أنّ:

$$a * (a' * b) = (a * a') * b \quad \text{خاصية التجميع}$$
$$= e * b \quad a' \text{ تعريف}$$
$$= b \quad e \text{ خاصية}$$

وهكذا، فإنّ $x = a' * b$ تمثل حلًّا للمعادلة $a * x = b$. وبصورة مشابهة، $y = b * a'$ تمثل حلاً للمعادلة $y * a = b$.

ولإثبات أنّ y هي الحلّ الوحيد، سنستخدم الطريقة التقليدية بافتراض أنّ لدينا حلّين، y_2 , y_1 بحيث إنّ $y_1 * a = b$ و $y_2 * a = b$. إذن، $y_1 * a = y_2 * a$، وباستخدام المبرهنة 15.4، $y_1 = y_2$. يمكن برهان أنّ x حلّ وحيد بطريقة مماثلة. ♦

بالطبع، لإثبات أنّ الحلّ وحيد في المبرهنة السابقة، كان بإمكاننا اتباع الأسلوب الذي استخدمناه في التقديم لتعريف الزمرة، وبإثبات أنه إذا كان $a * x = b$، فإنّ $x = a' * b$. ولكننا اخترنا استخدام الطريقة التقليدية لبرهان أنّ شيئًا ما وحيد؛ تحديدًا، افترض أنّ لديك اثنين من هذه الأشياء، ثم برهن أنهما يجب أن يكونا متساويين، لاحظ أنّ الحلّين $x = a' * b$ و $y = b * a'$ ليسا بالضرورة متساويين إلا إذا كانت * تبديلية.

ولأنّ الزمر حالة خاصة من الأنظمة الثنائية، نعرف من المبرهنة 13.3 أنّ العنصر المحايد e في الزمرة وحيد، سنذكر هذا بوصفه جزءًا من المبرهنة الآتية؛ ليسهل الرجوع إليه.

17.4 مبرهنة في أي زمرة G مع عملية ثنائيّة *، يوجد عنصر واحد فقط e في G، بحيث إنّ:

$$e * x = x * e = x$$

لكل $x \in G$، وكذلك، فلكل $a \in G$ يوجد عنصر واحد فقط a' في G، بحيث إنّ

$$a' * a = a * a' = e$$

– بصورة مختصرة– العنصر المحايد ومعكوس كل عنصر في الزمرة وحيدان.

البرهان تثبت المبرهنة 13.3 أنّ العنصر المحايد وحيد في أيّ نظام ثنائيّ، لا حاجة في هذه الحالة إلى أيّ من مسلمات الزمرة لإثبات ذلك.

بالعودة إلى إثبات أنّ المعكوس وحيد، افترض أنّ $a \in G$ له معكوسان a' و a''، وهكذا فإنّ $a'' * a = a * a'' = e$ و $a' * a = a * a' = e$.

إذن
$$a * a'' = a * a' = e$$

وباستخدام المبرهنة 15.4،

$$a'' = a'$$

وهكذا، فإنّ معكوس a في الزمرة وحيد. ♦

لاحظ أنه في أيّ زمرة G،

$$(a * b) * (b' * a') = a * (b * b') * a' = (a * e) * a' = a * a' = e$$

هذه المعادلة والمبرهنة 17.4 تثبتان أنّ $b' * a'$ هو المعكوس الوحيد لـ $a * b$. بمعنى أنّ $(a * b)' = b' * a'$. نصوغ هذا بوصفه نتيجة.

18.4 نتيجة لتكن G زمرة. لكل $a , b \in G$، $(a * b)' = b' * a'$.

نثري معلوماتك، فنشير هنا إلى أنّ أنظمة جبرية ثنائيّة بمسلمات أضعف من تلك الخاصة بالزمر قد درست بصورة مكثفة جدًا، ومن هذه الأنظمة الأضعف، **شبه الزمرة (semigroup)**، وهي مجموعة معرف عليها عملية ثنائيّة تجميعيّة، وهي ربما حظيت بأكبر اهتمام، **أمّا المونويد (monoid)**، فهو شبه زمرة تحوي عنصرًا محايدًا لعمليتها الثنائيّة، لاحظ أنّ الزمرة تكون شبه زمرة ومونديد.

أخيرًا، من الممكن إعطاء مسلمات للزمرة $\langle G, * \rangle$ التي تظهر للوهلة الأولى أضعف، مثل:

1- العملية الثنائيّة * على G تجميعيّة.

2- يوجد عنصر محايد من اليسار e في G، بحيث $e * x = x$ لكل $x \in G$.

3- لكل $a \in G$، يوجد معكوس من اليسار a' في G، بحيث $a' * a = e$.

من هذا التعريف ذي الجهة الواحدة، يمكن إثبات أنّ العنصر المحايد من اليسار هو كذلك عنصر محايد من اليمين، والمعكوس من اليسار هو كذلك معكوس من اليمين للعنصر نفسه. وهكذا يجب ألا يقال: إنّ هذه المسلمات أضعف؛ لأنها تعطي النظام نفسه الذي سُمي الزمرة، ويمكن التصور أنه قد يكون من الأسهل في بعض الحالات التأكد من هذه المسلمات ذات الجهة الواحدة بدلاً من المسلمات ذات الجهتين، وبالطبع، عند استخدام التناظر نجد أنه من الواضح أنّ هناك مسلمات من اليمين للزمرة.

الزمر المنتهية وجداول الزمر

كانت أمثلتنا كلها بعد المثال 2.4 لزمر غير منتهية، وهي زمر ذات مجموعة G لها عدد لا نهائي من العناصر، ونتحول الآن للزمر المنتهية، بدءًا من أصغر المجموعات المنتهية.

لأنّ الزمر يجب أن تحتوي على الأقل عنصرًا واحدًا – العنصر المحايد – فإنّ أصغر مجموعة يمكن أن تشكل زمرة هي المجموعة ذات العنصر الوحيد $\{e\}$، والعملية الثنائيّة الوحيدة * التي يمكن تعريفها على $\{e\}$ هي $e * e = e$، والمسلمات الثلاث للزمرة متحققة في هذه الحالة، أمّا العنصر المحايد، فهو معكوس نفسه في أي زمرة.

لنجرب الآن وضع نظام الزمرة على مجموعة مكوّنة من عنصرين، لأنّ أحد العنصرين يجب أن يؤدي دور العنصر المحايد، فيمكننا أن ندع المجموعة تكون $\{e , a\}$، ولنحاول أن نضع جدولًا للعملية الثنائيّة * على $\{e , a\}$، التي ستعطي نظام زمرة للمجموعة $\{e , a\}$.

عندما نضع جدولًا لعملية الزمرة، سوف نضع العنصر المحايد أولًا، كما في الجدول الآتي:

$*$	e	a
e		
a		

ولأنّ e هو العنصر المحايد، فإنّ:

$$e * x = x * e = x$$

لكل $x \in \{e, a\}$، وهكذا، فنحن ملزمون أن نملأ الجدول كما يأتي: إذا كانت * ستعطي زمرة.

$*$	e	a
e	e	a
a	a	

وكذلك، فإنّ لـ a معكوس a' بحيث:

$$a * a' = a' * a = e.$$

في حالتنا هذه، a' يجب أن تكون إما e أو a، ولأنّ $a' = e$ لا يمكن أن تؤدي المطلوب، فيجب أن تكون $a' = a$، وهكذا، فعلينا أن نكمل الجدول كما يأتي:

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

مسلمات الزمرة كلها متحققة الآن، ما عدا (ربما) خاصية التجميع، والتحقق من التجميع على أساس كل حالة بصورة منفصلة باستخدام الجدول المعرّف للعملية يمكن أن يكون عملية مضنية، ولكننا نعلم أنّ $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ مع عملية الجمع مقياس 2 تشكل زمرة، وبحسب عملنا السابق، فإنّ 0 ستستبدل بـ e و 1 بـ a في الجدول، وهكذا فإنّ خاصية التجميع يجب أن تكون متحققة في الجدول الذي يحوي e و a.

وبأخذ هذا المثال في الحسبان، فيجب أن نكون قادرين على وضع بعض الشروط الأساسية على جدول العملية الثنائية المعرّف على مجموعة منتهية؛ ليحقق خصائص الزمرة عليها، فيجب أن يكون عنصر واحد في المجموعة يؤدي دور العنصر المحايد، الذي سنرمز له بالرمز e، والشرط $e * x = x$ يعني أنّ الصفّ من الجدول المقابل لـ e على أقصى اليسار يجب أن يحوي تمامًا العناصر التي تظهر في أعلى الجدول وبالترتيب نفسه، وكذلك، فإنّ الشرط $x * e = x$ يعني أنّ العمود الذي يحوي e في الأعلى، يجب أن يحوي تمامًا العناصر التي تظهر أقصى اليسار، وبالترتيب نفسه، حيث إنّ حقيقة أنّ لكل عنصر a معكوس من اليمين واليسار تعني أنّ الصفّ الذي يحوي a في أقصى اليسار يجب أن تظهر فيه e، وكذلك العمود الذي

يحوي a في الأعلى يجب أن يحتوي على e، وهذا يعني أن e ستظهر في كل صف وفي كل عمود. وهكذا باستخدام المبرهنة 16.4، ليس فقط للمعادلتين $a * x = e$ و $y * a = e$ حلول وحيدة، بل كذلك المعادلتان $a * x = b$ و $y * a = b$. وبخطوات شبيهة، ما يعني أنّ كل عنصر b في الزمرة يجب أن يظهر مرة واحدة فقط في كل صفّ وفي كل عمود من الجدول.

افترض الآن العكس، بمعنى أنّ جدول العملية الثنائيّة المعرفة على مجموعة منتهية يحوي عنصرًا يؤدي دور العنصر المحايد، وفي كل صفّ وفي كل عمود، يظهر كل عنصر من المجموعة مرة واحدة فقط، في هذه الحالة يمكن إثبات أنّ النظام يشكل زمرة إذا وفقط إذا كانت خاصية التجميع متحقّقة، وإذا كانت العملية الثنائيّة * معطاة من خلال جدول ما، فإنّ التحقّق من خاصية التجميع يكون في الغالب مربكًا، ولكن إذا كانت العملية * معرّفة بصفة مميزة لـ $a * b$، فإنّ التحقّق من خاصية التجميع يكون في العادة سهلًا، ولحسن الطالع، فإنّ الحالة الثانية هي التي يواجهها الشخص عادة.

رأينا أنه توجد بصورة أساسية زمرة واحدة مكوّنة من عنصرين، بمعنى أنه إذا كان هناك عنصران يرمز لهما بـ e و a، حيث يظهر العنصر المحايد e أولًا، فإنّ الجدول يجب أن يظهر كما في الجدول 19.4، افترض الآن أنّ المجموعة تحوي ثلاثة عناصر، كما سبق، يمكننا أن ندع المجموعة تكون $\{e, a, b\}$، وليكن e عنصرًا محايدًا، فإنّ العملية الثنائيّة * على هذه المجموعة يجب أن تكون كما في الجدول 20.4، وهذا يَدَعُ أربعة أماكن لتعبئتها، إذ يمكنك أن ترى بسرعة أنّ الجدول 20.4 يجب أن يكمل ليصبح مثل الجدول 21.4 إذا كان كل صفّ وكل عمود يجب أن يحوي كل عنصر مرة واحدة، ولأنه كانت هناك طريقة واحدة لإكمال الجدول و $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ مع الجمع مقياس 3 تشكل زمرة، فإنّ خاصية التجميع يجب أن تتحقّق لجدولنا الذي يحوي e, a و b.

افترض الآن أنّ G' أي زمرة مكوّنة من ثلاثة عناصر، وتخيل جدولًا لـ G'، حيث يظهر العنصر المحايد أولًا، ولأن تعبئتنا لجدول $G = \{e, a, b\}$ يمكن إنجازها بطريقة واحدة فقط، فبإمكاننا أن نرى أنه لو أخذنا جدول G'، وأعدنا تسمية العنصر المحايد بـ e، والعنصر الذي يليه بـ a والثالث بـ b، فإنّ الجدول الناتج لـ G' يجب أن يكون هو جدول G نفسه. كما تمّ توضيحه في الفصل 3، فإنّ إعادة التسمية تعطي تماثلًا بين الزمرة G' والزمرة G. والتعريف 7.3 أعطى مفهوم التماثل والأنظمة الثنائيّة المتماثلة، ولأن الزمر هي حالة خاصة من الأنظمة الثنائيّة، فإنّ التعريف نفسه ينطبق عليها، وهكذا فإنّ عملنا السابق يمكن تلخيصه بأن الزمر جميعها التي تتكوّن من عنصر واحد متماثلة، والزمر كلها التي تتكوّن من عنصرين متماثلة، والزمر كلها التي تتكوّن من ثلاثة عناصر متماثلة. سوف نستخدم المصطلح وفق التماثل (*Up to iso-morphism*) لنعبّر عن هذه المطابقة باستخدام علاقة التكافؤ $\simeq$. وهكذا يمكننا القول: "تتوافر زمرة واحدة فقط مكوّنة من ثلاثة عناصر وفق التماثل".

الجدول 19.4

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

الجدول 20.4

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a		
b	b		

الجدول 21.4

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

تمارين4

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، حدّد إذا كانت العملية الثنائيّة * تعطي نظام زمرة على المجموعة المعطاة. وإذا لم يكن الناتج زمرة، فحدّد أول واحدة من المسلمات $\mathscr{G}_1$ ، $\mathscr{G}_2$ ، $\mathscr{G}_3$ (بهذا الترتيب) من التعريف 1.4 لا تتحقّق.

1. لتكن * مُعرّفة على $\mathbb{Z}$ كالآتي: $a * b = ab$.
2. لتكن * مُعرّفة على $2\mathbb{Z} = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ كالآتي: $a * b = a + b$.
3. لتكن * معرّفة على $\mathbb{R}^+$ كالآتي: $a * b = \sqrt{ab}$.
4. لتكن * معرّفة على $\mathbb{Q}$ كالآتي: $a * b = ab$.
5. لتكن * معرّفة على مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية $\mathbb{R}^*$ كالآتي: $a * b = a/b$.
6. لتكن * معرّفة على $\mathbb{C}$ كالآتي: $a * b = |ab|$.
7. أعطِ مثالًا على زمرة إبداليّة G، حيث G تحوي بالضبط 1000 عنصر.
8. بإمكاننا أيضًا أن نعدّ الضرب $._n$ مقياس n في $\mathbb{Z}_n$، على سبيل المثال: $5 ._7 6 = 2$ في $\mathbb{Z}_7$ لأن $5.6 = 30 = 4(7)+2$ المجموعة $\{1, 3, 5, 7\}$ مع الضرب $._8$ مقياس 8 هي زمرة. أعطِ جدول هذه الزمرة.
9. أثبت أنّ الزمرة $\langle U, .\rangle$ لا تماثل أيًّا من $\langle \mathbb{R}, +\rangle$ و $\langle \mathbb{R}^*, .\rangle$ (الزمر الثلاثة عدد عناصرها $|\mathbb{R}|$).
10. ليكن n عددًا صحيحًا موجبًا، ولتكن $n\mathbb{Z} = \{nm \mid m \in \mathbb{Z}\}$

    أ. أثبت أنّ $\langle n\mathbb{Z}, +\rangle$ زمرة.

    ب. أثبت أنّ $\langle n\mathbb{Z}, +\rangle \simeq \langle \mathbb{Z}, +\rangle$.

في التمارين من 11 إلى 18، حدّد إذا كانت مجموعة المصفوفات المعطاة بالنسبة إلى العملية المحددة _ جمع المصفوفات أو ضربها _ زمرة. تذكّر أنّ **المصفوفة القطرية (diagonal matrix)** مصفوفة مربعة عناصرها غير الصفرية تقع فقط على **القطر الرئيس (main diagonal)**، وذلك من الزاوية العلوية اليسرى إلى الزاوية السفلية اليمنى. **المصفوفة المثلثة العلوية (upper triangular)** مصفوفة مربعة عناصرها جميعها أسفل القطر الرئيس أصفار. يرتبط بكل مصفوفة A من الدرجة $n \times n$ عدد يسمى محددة A، ويرمز له بالرمز $det\,(A)$. إذا كان كل من A و B مصفوفتين من الدرجة $n \times n$، فإنّ $det\,(AB) = det\,(A)\,det\,(B)$. وكذلك $det\,(I_n)=1$، وتكون A مصفوفة ذات معكوس إذا وفقط إذا كان $det(A) \neq 0$.

11. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى جمع المصفوفات.

12. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

13. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$، التي لا يحوي قطرها الصفر بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

14. جميع المصفوفات القطرية من الدرجة $n \times n$، حيث عناصر القطر جميعها إما 1 أو -1 بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

15. جميع المصفوفات المثلثة العلوية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

16. جميع المصفوفات المثلثة العلوية من الدرجة $n \times n$ بالنسبة إلى جمع المصفوفات.

17. جميع المصفوفات المثلثة العلوية من الدرجة $n \times n$، التي محددها 1 بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

18. جميع المصفوفات من الدرجة $n \times n$، التي محددها إما 1 أو -1 بالنسبة إلى ضرب المصفوفات.

19. لتكن S مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا -1. عَرِّف $*$ على S كالآتي:

$$a * b = a + b + ab$$

أ. أثبت أنّ $*$ عملية ثنائيّة على S.

ب. أثبت أنّ $\langle S, * \rangle$ زمرة.

ج. أوجد حلّ المعادلة $2 * x * 3 = 7$ في S.

20. هذا التمرين يثبت وجود زمرتين غير متماثلتين على مجموعة من أربعة عناصر.

لتكن المجموعة $\{e, a, b, c\}$، حيث e العنصر المحايد لعملية الزمرة، عندها سيبدأ جدول الزمرة، كما في الجدول 22.4. المربع المشار إليه بعلامة الاستفهام لا يمكن تعبئته بـ a، بل يجب تعبئته إمًّا بالعنصر المحايد e أو بعنصر يختلف عن e وa، وفي الحالة الأخيرة ودون أن يكون هناك فقدان للتعميم، نفترض أنّ هذا العنصر هو b. فإذا عُبئ هذا المربع بـ e، فيمكن إكمال الجدول بطريقتين للحصول على زمرة، أوجِدْ هذين الجدولين. (لا حاجة للتحقق من قانون التجميع)، وإذا عُبّئ هذا المربع بـ b، فإنّ الجدول يكتمل بطريقة واحدة فقط ليعطي زمرة، أوجِدْ هذا الجدول. (مرة أخرى، لا حاجة للتحقق من قانون التجميع). لديك الآن ثلاثة جداول: اثنان منها يشكلان زمرتين متماثلتين، حدّد أيّ الجداول هي، وأعطِ الدالّة الأحاديّة الغامرة التي تشكل تماثلًا، وذلك بإعادة تسمية العناصر.

أ. هل الزمر التي عدد عناصرها 4 جميعها إبداليّة؟

ب. أيّ الجداول يعطي زمرة تماثل الزمرة U_4، فنعلم بذلك أنّ العملية الثنائيّة المعرّفة بالجدول تجميعيّة؟

ج. أثبت أنّ الزمرة المعطاة في أحد الجدولين الآخرين هي في حقيقتها الزمرة نفسها في تمرين 14، وذلك عندما تأخذ n قيمة محددة، وبذلك نعلم أنّ العملية المعرفة بذلك الجدول هي تجميعيّة أيضًا.

21. تبعًا لتمرين 12 في الفصل 2 يوجد 16 عملية محتملة على مجموعة من عنصرين. فكم منها تعطي نظام الزمرة؟ وكم من ألـ 19683 عملية ثنائيّة محتملة على مجموعة من 3 عناصر تعطي نظام الزمرة؟

مفاهيم

22. اعتبر المسلّمات $\mathscr{G}_1$ $\mathscr{G}_2$ و $\mathscr{G}_3$ للزمرة. التي قدمناها بالترتيب $\mathscr{G}_1\mathscr{G}_2\mathscr{G}_3$. من الترتيبات المعتبرة لطرح هذه المسلمات $\mathscr{G}_1\mathscr{G}_3\mathscr{G}_2$، $\mathscr{G}_2\mathscr{G}_1\mathscr{G}_3$، $\mathscr{G}_2\mathscr{G}_3\mathscr{G}_1$، $\mathscr{G}_3\mathscr{G}_1\mathscr{G}_2$ و$\mathscr{G}_3\mathscr{G}_2\mathscr{G}_1$ من هذه الترتيبات الستة المحتملة، ثلاثة فقط مقبولة بوصفها تعريفًا. أيّ هذه الترتيبات غير مقبول؟ ولماذا؟ (تذكّر أنّ معظم المدرسين يسألون الطلاب أن يعرّفوا الزمرة في اختبار واحد على الأقل).

الجدول 22.4

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	?		
b	b			
c	c			

23. التعريفات الآتية للزمرة مأخوذة _ حتى فيما يتعلق بالتهجئة وعلامات الترقيم _ من أوراق عمل طلاب كتبوها على نحو متسرع من غير اهتمام. انتقد هؤلاء الطلاب.

أ. الزمرة G هي مجموعة من العناصر مع عملية ثنائيّة * حيث تتحقق الشروط الآتية:

* تجميعيّة.

يوجد $e \in G$ حيث

العنصر المحايد = $e * x = x * e = x$

لكل $a \in G$ يوجد a' (معكوس) حيث

$$a.\ a' = a'.\ a = e$$

ب. الزمرة هي مجموعة G حيث

العملية على G تجميعيّة.

يوجد عنصر محايد (e) في G.

لكل $a \in G$ يوجد a' (معكوس لكل عنصر).

جـ. الزمرة هي مجموعة مع عملية ثنائيّة، حيث العملية الثنائيّة معرفة.

المعكوس موجود.

العنصر المحايد موجود.

د. المجموعة G تُسمَّى زمرة على العملية الثنائيّة *، حيث لكل $a, b \in G$ العملية الثنائيّة * تجميعيّة بالنسبة إلى الجمع.

يوجد عنصر $\{e\}$ حيث:

$$a * e = e * a = e$$

لكل عنصر a يوجد عنصر a' حيث:

$$a * a' = a' * a = e$$

24. أعط جدولًا لعملية ثنائيّة على المجموعة $\{e, a, b\}$ المكوّنة من ثلاثة عناصر تحقق المسلمات $\mathscr{G}_2$ و $\mathscr{G}_3$ للزمرة، ولكن لا تَحقق المسلمة $\mathscr{G}_1$.

25. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

_________ أ. يمكن أن تحوي الزمرة أكثر من عنصر محايد.

_________ ب. أيّ زمرتين من ثلاثة عناصر متماثلتان.

ـــــــــــــــ جـ. أيّ معادلة خطية في الزمرة لها حلّ.

ـــــــــــــــ د. الموقف الصحيح من التعريف هو حفظه، بحيث تستطيع أن تعيده كلمة، كلمة، كما جاء في الكتاب.

ـــــــــــــــ هـ. أيّ تعريف يقدّمه الشخص للزمرة يكون صحيحًا، بشرط أنّ أيّ شيء يكون زمرة بحسب تعريف هذا الشخص، يكون زمرة بحسب تعريف الكتاب.

ـــــــــــــــ و. أيّ تعريف يقدّمه الشخص للزمرة يكون صحيحًا، بشرط استطاعته أن يثبت أنّ أيّ شيء يحقّق هذا التعريف، فإنه يحقّق كذلك تعريف الكتاب وبالعكس.

ـــــــــــــــ ز. أيّ زمرة منتهية مكوّنة من ثلاثة عناصر على الأكثر تكون إبداليّة.

ـــــــــــــــ ح. المعادلة على الصورة $a * x * b = c$ لها دائمًا حلّ وحيد في الزمرة.

ـــــــــــــــ ط. المجموعة الخالية يمكن أن تُعدّ زمرة.

ـــــــــــــــ ي. كل زمرة تمثل بُنية جبرية ثنائية.

براهين مختصرة

سنعطي مثالًا لبرهان مختصر. هذه جملة مختصرة لبرهان أنّ معكوس العنصر a في الزمرة $\langle G, * \rangle$ يكون وحيدًا.

نفترض أنّ $a * a' = e$ و $a * a'' = e$، استعمل قانون الحذف من اليسار على المعادلة: $a * a' = a * a''$.

لاحظ أننا قلنا: "قانون الحذف من اليسار" وليس "المبرهنة 15.4". فنحن نفترض دائمًا أنّ اختصارنا قد أعطي بوصفه توضيحًا في أثناء مناقشة على الغداء، دون الإشارة إلى ترقيم الكتاب وبأقل ما يمكن من المصطلحات.

26. أعطِ اختصارًا بجملة واحدة لبرهان قانون الحذف من اليسار في المبرهنة 15.4.

27. أعطِ اختصارًا بجملتين على الأكثر لبرهان على أنّ $ax = b$ لها حل وحيد في الزمرة، كما في المبرهنة 16.4.

براهين

28. من إدراكنا البدهي لمفهوم تماثل الزمر، يتعيّن أن يكون واضحًا أنه إذا كان $\phi: G \to G'$ تماثلًا للزمر، فإنّ $\phi(e)$ هو العنصر المحايد e' للزمرة G'. تذكّر أنّ المبرهنة 14.3 أثبتت هذا في البنيتين الثنائيّتين المتماثلتين $\langle S, * \rangle$ و $\langle S', *' \rangle$. وبالطبع هذا يغطي حالة الزمر.

وكذلك يتعيّن أن يكون بدهيًّا أنه إذا كان a و a' معكوسين لبعضهما في G، فإنّ $\phi(a)$ و $\phi(a')$ معكوسان لبعضهما في G'، بمعنى أنّ $\phi(a)' = \phi(a')$. أعطِ برهانًا واضحًا للمتشكك الذي لا يستطيع أن يرى الغابة على الرغم من وجود الأشجار.

29. أثبت أنه إذا كانت G زمرة منتهية بعنصر محايد e وبعدد زوجي من العناصر، فإنه يوجد عنصر $a \neq e$ في G بحيث $a * a = e$.

30. لتكن $\mathbb{R}^*$ تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية جميعها ما عدا 0. عرّف * على $\mathbb{R}^*$ من خلال العلاقة $a * b = |a|b$.

أ. أثبت أنّ * عملية ثنائيّة تجميعيّة على $\mathbb{R}^*$.

ب. أثبت أنه يوجد عنصر محايد من اليسار للعملية * ومعكوس من اليمين لكل عنصر في $\mathbb{R}^*$.

جـ. هل $\mathbb{R}^*$ مع هذه العملية الثنائيّة زمرة؟

د. وضحّ أهمية هذا التمرين.

31. إذا كانت * عملية ثنائيّة على المجموعة S، يسمى العنصر x في S متساوي القوى **(idempotent)** مع العملية * إذا كان $x * x = x$. أثبت أنّ الزمرة تحوي متساوي قوى واحدًا فقط. (يمكنك استخدام أيّ من النظريات التي بُرهنت في الكتاب حتى الآن).

32. أثبت أنّ أي زمرة لها عنصر محايد e وتحقّق الخاصية $x * x = e$ لكل $x \in G$ تكون إبداليّة. [مساعدة: استخدم $(a * b) * (a * b)$].

33. لتكن G زمرة إبداليّة، وليكن $c^n = c * c * \ldots * c$، n من المرات، حيث $c \in G$ و $n \in \mathbb{Z}^+$. اكتب برهانًا باستخدام الاستقراء الرياضي لإثبات أنّ:

$$(a * b)^n = (a^n) * (b^n) \text{ لكل } a, b \in G.$$

34. لتكن G زمرة ذات عدد منتهٍ من العناصر. أثبت أنه لكل $a \in G$ يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$ بحيث إنّ $a^n = e$. ارجع إلى تمرين 33 لمعرفة معنى a^n. [مساعدة: استخدِم العناصر $e, a, a^2, a^3, \ldots, a^m$، حيث m هو عدد عناصر G، ثم استخدم قوانين الحذف].

35. أثبت أنه إذا كان $(a * b)^2 = a^2 * b^2$، حيث a و b عنصران في G، فإنّ $a * b = b * a$. ارجع إلى التمرين 33 لمعرفة معنى a^2.

36. لتكن G زمرة، ولتكن $a, b \in G$. أثبت أنّ $(a * b)' = a' * b'$ إذا وفقط إذا كان $a * b = b * a$.

37. لتكن G زمرة، وافترض أنّ $a * b * c = e$ حيث $a, b, c \in G$. أثبت أنه $b * c * a = e$ كذلك.

38. أثبت أنّ المجموعة G مع العملية الثنائيّة * التي تحقّق المسلمات من اليسار 1و2 و 3 المذكورة في صفحة 43 تشكل زمرة.

39. برهن على أنه إذا كانت G مجموعة غير خالية مع العملية الثنائيّة التجميعيّة *، بحيث $a * x = b$ و $y * a = b$ لها حلول في G لكل $a, b \in G$، فإنّ G تكون زمرة. [مساعدة: استخدم التمرين 38].

40. لتكن $\langle G, . \rangle$ زمرة. عرّف العملية الثنائيّة * على G بحيث: $a * b = b \, . \, a$

لكل $a, b \in G$. أثبت أنّ $\langle G, * \rangle$ زمرة، وأنها في الحقيقة تماثل $\langle G, . \rangle$.

[مساعدة: استخدم الدالّة ϕ، حيث $\phi(a) = a'$ لكل $a \in G$].

41. لتكن G زمرة، وليكن g عنصرًا في G. أثبت أنّ الدالّة i_g، حيث $i_g(x) = gxg'$ لكل $x \in G$ تشكّل تماثلًا من G إلى نفسها.

الفصل5 الزمر الجزئيّة Subgroups

الترميز والمصطلحات

حان الوقت لتوضيح بعض المصطلحات والرموز المتعارف على استخدامها في نظرية الزمر، فلا يُلزِم علماء الجبر أنفسهم استخدام الرمز * للإشارة إلى عملية ثنائيّة مختلفة عن عمليتي الجمع والضرب المعتادتين، فهم يكتبون رمز الجمع أو الضرب المعتادين، حتى إنهم يسمّون العملية جمعًا أو ضربًا بناءً على الرمز المستخدم، الرمز + هو بالطبع رمز الجمع، أمّا الضرب فيرمز له بكتابة العنصرين المضروبين متجاورين ومن غير نقطة ما لم يكن هناك مجالٌ للبس؛ لذلك فسوف نستخدم إمّا الرمز $a+b$ الذي يُقرأ "مجموع a و b" ، أو الرمز ab الذي يقرأ "ضرب a وb" بدلًا من الرمز $a*b$. هناك اتفاق غير مكتوب على ضرورة استخدام الرمز + للدلالة بوضوح على أنّ العملية إبداليّة، فعلماء الجبر يشعرون بعدم الارتياح إذا ما شاهدوا $a+b \neq b+a$، ولهذا السبب فسوف نستخدم باستمرار رمز الضرب، حيثما لا يكون مضمونًا أنّ العملية إبداليّة.

يستخدم علماء الجبر الرمز 0 عادة للإشارة إلى محايد الجمع والرمز 1 للإشارة إلى محايد الضرب، وهم يفعلون ذلك حتى لو لم يكونا يمثلان العددين الصحيحين 0 و1، أمَّا في حالة الحديث عن أعداد مع إمكانية حدوث إشكال، فإنّ الرمزين e و u يستخدمان للعنصرين المحايدين، وعليه، فإنّ جدول زمرة من ثلاثة عناصر يمكن أن يكون مثل الجدول 1.5 أو – لأن الزمرة إبداليّة – يظهر جدول مثل الجدول 2.5. سوف نواصل في الحالات العامة استخدام الرمز e للإشارة إلى العنصر المحايد للزمرة.

الجدول 1.5

	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

من الشائع الإشارة إلى معكوس عنصر a في زمرة بالرمز a^{-1} في حالة رمز الضرب، وبالرمز $-a$ في حالة رمز الجمع، لذلك فسوف نستخدم هذين الرمزين من الآن فصاعدًا بدل الرمز a'.

لتكن n عددًا صحيحًا موجبًا، فإذا كان a عنصرًا من زمرة G برمز الضرب، فإننا نشير إلى حاصل الضرب $aaa...a$ المكوّن من n عامل a بالرمز a^n، ونعُدّ a^o هي العنصر المحايد e، ونشير إلى حاصل الضرب $a^{-1}a^{-1}a^{-1}...a^{-1}$ المكوّن من n عامل بالرمز a^{-n}، ومن السهل ملاحظة انطباق قانون الأسس المعتاد $a^m a^n = a^{m+n}$ لكل $m,n \in \mathbb{Z}$. الأمر واضح في الحالة $m,n \in \mathbb{Z}^+$، ونوضح حالة أخرى من خلال مثال:

$$a^{-2}a^5 = a^{-1}a^{-1}aaaaa = a^{-1}(a^{-1}a)\ aaaa = a^{-1}eaaaa = a^{-1}(ea)aaa$$

$$= a^{-1}aaaa = (a^{-1}a)\ aaa = eaaa = (ea)\ aa = aaa = a^3.$$

الجدول 2.5

+	0	a	b
0	0	a	b
a	a	b	0
b	b	0	a

أمَّا في حالة رمز الجمع، فإننا نشير إلى $a+a+a+ ... +a$ المكون من n حد بالرمز na، كما نشير إلى $(-a)+(-a)+(-a)+...+(-a)$ المكوّن من n حد بالرمز $-na$، ونعُدّ $0a$ هي العنصر المحايد، لكن في حالة الرمز na، فيجب الانتباه إلى أنّ n من $\mathbb{Z}$ وليست من G، وإنّ الإرباك الناتج من اعتبار n عنصرًا من G في الرمز na ، هو أحد الأسباب التي تجعلنا نميل إلى تقديم نظرية الزمر باستخدام رمز الضرب، حتى لو كانت العملية إبدالية، فلا أحد يخطئ في فهم n عندما تظهر بوصفها أُسًّا.

لنشرح مصطلحًا إضافيًّا كثير الاستخدام ما يجعله جديرًا بالذكر في تعريف خاص.

3.5 تعريف إذا كانت G زمرة، فإنّ رتبة (**order**) ***G***، $|G|$، هي عدد عناصر G. (تذكّر من الفصل 0 أنه لأيّ مجموعة S، $|S|$ هي عدد عناصر S). ■

المجموعات الجزئيّة والزمر الجزئيّة

ربما لاحظت أنّ لدينا أحيانًا زمرًا محتواة في زمر أكبر، فالزمرة $\mathbb{Z}$ مع الجمع مثلًا محتواة في الزمرة $\mathbb{Q}$ مع الجمع، التي هي بدورها محتواة في الزمرة $\mathbb{R}$ مع الجمع. عندما ننظر إلى الزمرة $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ على أنها محتواة في الزمرة $\langle \mathbb{R},+\rangle$، فيجب ملاحظة أنّ عملية الجمع $+$ على عددين صحيحين m,n بوصفها عناصر من $\langle \mathbb{Z},+\rangle$ تنتج العنصر نفسه $n + m$ الناتج عند اعتبار أنّ m,n عنصران من $\langle \mathbb{R},+\rangle$؛ لذلك – وعلى الرغم من أنّ $\mathbb{Q}^+$ محتواة بوصفها مجموعة في $\mathbb{R}$ – فإننا لا نعُدّ الزمرة $\langle \mathbb{Q}^+,.\rangle$ محتواة في $\langle \mathbb{R},+\rangle$، ففي هذا المثال $2.3 = 6$ في $\langle \mathbb{Q}^+,\cdot\rangle$، في حين $2+3=5$ في $\langle \mathbb{R},+\rangle$، ولا نشترط أن تكون المجموعة في زمرة ما، هي مجموعة جزئيّة من مجموعة زمرة أخرى وحسب، بل نشترط علاوة على ذلك أنّ عملية الزمرة على المجموعة الجزئيّة هي العملية المتولّدة (*induced operation*)، التي تعطي لكل زوج مرتب من المجموعة الجزئيّة الناتج نفسه الذي تعطيه عملية الزمرة على المجموعة الكليّة.

4.5 تعريف إذا كانت H مجموعة جزئيّة من زمرة G مغلقة بالنسبة إلى العملية الثنائيّة على G، وكانت H ذاتها تشكل زمرة مع العملية المتولّدة من G، فإنّ H تكون **زمرة جزئية** (***subgroup***) من G. سوف نستخدم الرمز $H \leq G$ أو $G \geq H$ للدلالة على أنّ H زمرة جزئيّة من G، والرمز $H < G$ أو $G > H$ يعني أنّ $H \leq G$ لكن $H \neq G$. ■

لذلك، $\langle \mathbb{Z},+\rangle < \langle \mathbb{R},+\rangle$، لكن $\langle \mathbb{Q}^+,.\rangle$ ليست زمرة جزئيّة من $\langle \mathbb{R},+\rangle$ على الرغم من أنّ $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{R}$ بوصفها مجموعات. لأيّ زمرة G، فإنّ G ذاتها و $\{e\}$ زمرتان جزئيّتان من G، بحيث إنّ e هو العنصر المحايد في G.

5.5 تعريف إذا كانت G زمرة، فإنّ الزمرة الجزئيّة G ذاتها هي **الزمرة الجزئيّة غير الفعلية** (***improper subgroup***) من G، في حين أنّ الزمر الجزئيّة الأخرى كلها **زمر جزئيّة فعلية** (***proper subgroups***). الزمرة الجزئيّة $\{e\}$ هي **الزمرة الجزئيّة التافهة** (***trivial subgroup***) من G، والزمر الجزئيّة الأخرى كلها غير تافهة (***nontrivial***). ■

ننتقل الآن إلى بعض التوضيحات.

مثال 6.5 لتكن $\mathbb{R}^n$ زمرة الجمع للمتجهات الصفية من الرتبة n بإحداثيات حقيقية، المجموعة الجزئيّة المكوّنة من المتجهات كلها التي 0 هو المدخل في أول مركبة هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{R}^n$. ▲

مثال 7.5 $\mathbb{Q}^+$ بالنسبة إلى الضرب هي زمرة جزئيّة فعلية من $\mathbb{R}^+$ بالنسبة إلى الضرب. ▲

مثال 8.5 الجذور النونية للواحد في $\mathbb{C}$ تشكل زمرة جزئيّة U_n من زمرة الأعداد المركبة غير الصفرية $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب. ▲

مثال 9.5 هناك نوعان مختلفان من بنَى الزمر ذات الرتبة 4 (انظر تمرين 20 من الفصل 4). ونَصِفهما من خلال جدولي الزمر لهما (جدول 10.5 و 11.5). الزمرة V هي **زمرة كلاين الرباعية** (***Klein* 4-group**)، وقد أُخذ الرمز V من الكلمة الألمانية (*Vier*) وتعني أربعة. الزمرة $\mathbb{Z}_4$ تماثل زمرة الجذور الرابعة للواحد بالنسبة إلى الضرب $U_4=\{1, i, -1, -i\}$.

الزمرة الجزئيّة الفعلية غير التافهة الوحيدة من $\mathbb{Z}_4$ هي $\{0, 2\}$ لاحظ أنّ $\{0, 3\}$ ليست زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}_4$؛ لأنّ $\{0,3\}$ ليست مغلقة بالنسبة إلى +، فعلى سبيل المثال: $3 + 3 = 2$ و $2 \notin \{0, 3\}$. لكن الزمرة V لها ثلاث زمر جزئيّة فعلية غير تافهة، وهي: $\{e,a\}$ و $\{e,c\}$ و $\{e, b\}$. هنا $\{e, a, b\}$ ليست زمرة جزئيّة؛ لأنّ $\{e, a, b\}$ ليست مغلقة بالنسبة إلى عملية V، حيث إنّ $ab=c$ و $c \notin \{e, a,b\}$. ▲

الجدول 10.5

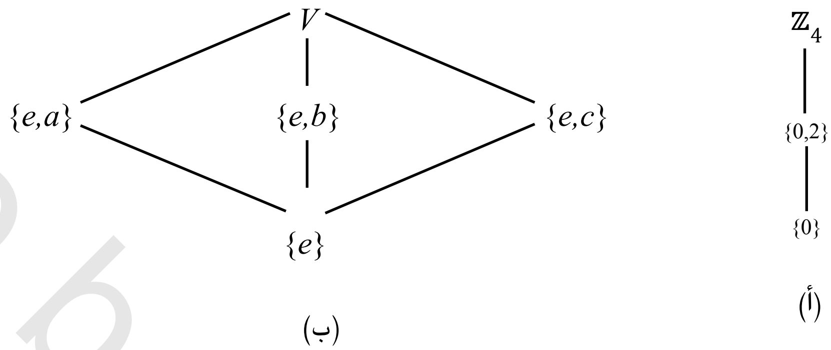
$\mathbb{Z}_4$: +	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

الجدول 11.5

V:	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

غالبًا ما يكون رسم مخطط الزمر الجزئيّة للزمر الجزئيّة لزمرة ما مفيدًا. إن جريان خط متجه إلى الأسفل من زمرة G إلى زمرة H، يعني أنّ H زمرةٌ جزئيّة من G؛ لذلك، فإنّ الزمرة الأكبر توضع في أعلى المخطط. الشكل 12.5 يحتوي على مخططي الزمر الجزئيّة لكل من $\mathbb{Z}_4$ و V في مثال 9.5.

لاحظ أنه إذا كان $H \leq G$ و $a \in H$، فإنّ المعادلة $ax = a$ يجب أن يكون لها حلّ وحيد بحسب المبرهنة 16.4، وهذا الحلّ هو تحديدًا العنصر المحايد من H، لكن هذه المعادلة يمكن النظر إليها بوصفها معادلة في G، ونرى أنّ هذا الحلّ الوحيد يجب أن يكون أيضًا هو العنصر المحايد e من G، وبتطبيق حجة مشابهة على المعادلة $ax = e$ بوصفها معادلة في H و G نستنتج أنّ a^{-1}، معكوس a في G، هو أيضًا معكوس a في الزمرة الجزئيّة H.



الشكل 12.5 (أ) مخطط زمر $\mathbb{Z}_4$ الجزئيّة.
(ب) مخطط زمر V الجزئيّة.

13.5 مثال لتكن F زمرة جميع الدوالّ ذوات القيم الحقيقية التي مجالها $\mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع. المجموعة الجزئيّة من F والمكوّنة من تلك الدوالّ المتصلة هي زمرة جزئيّة من F؛ لأن مجموع دالّتين متصلتين متصل، والدالّة f حيث $f(x)=0$ لكل x هو العنصر المحايد الجمعيّ، وإذا كان f متصلًا، فإنّ $-f$ متصل. ▲

من الملائم توافر خطوات روتينية لتحديد ما إذا كانت مجموعة جزئيّة من زمرة G زمرة جزئيّة من G. المثال 13.5 يظهر مثل هذا الروتين، وفي المبرهنة الآتية سنثبت صلاحيته بعناية. على الرغم من توافر معيار موجز مكوّن من شرط واحد فقط، إلاّ أننا نفضّل هذه المبرهنة الأكثر وضوحًا لمقرّرٍ دراسي أول.

14.5 مبرهنة تكون مجموعة جزئيّة H من زمرة G زمرةً جزئيّة من G إذا وفقط إذا كان:

1- H مغلقة بالنسبة إلى عملية G الثنائيّة،

2- عنصر G المحايد e موجودًا في H،

3- لكل $a \in H$ يكون صحيحًا أن $a^{-1} \in H$ أيضًا.

البرهان إن ضمان تحقّق الشروط 1و2 و3 إذا كان $H \leq G$ ينتج مباشرة عن تعريف الزمرة الجزئيّة وعن الملاحظات السابقة للمثال 13.5.

في المقابل، افترض أنّ H مجموعة جزئيّة من الزمرة G، بحيث تتحقّق الشروط 1، و2 و3. ينتج من 2 على الفور أنّ $\mathscr{G}_2$ متحقق. كذلك $\mathscr{G}_3$ متحقّق من 3، ويبقى التأكد من المسلّمة التجميعيّة $\mathscr{G}_1$؛ لكن وبالتأكيد، فإنه لكل $a,b,c \in H$ يكون صحيحًا أنّ $(ab)\,c= a(bc)$ في H؛ لأننا نستطيع النظر إليها بوصفها معادلة في G، حيث يتحقّق قانون التجميع؛ لذلك فإنّ $H \leq G$. ◆

15.5 مثال لتكن F كما في المثال 13.5. المجموعة الجزئيّة من F المكوّنة من الدوالّ القابلة للاشتقاق زمرة جزئيّة من F؛ لأن مجموع دالّتين قابلتين للاشتقاق قابلٌ للاشتقاق، الدالّة الثابتة 0 قابلة للاشتقاق، وإذا كان f قابلًا للاشتقاق، فإن $-f$ قابل للاشتقاق. ▲

16.5 مثال تذكّر من الجبر الخطي أنّ كل مصفوفة مربعة A تقترن بعدد $\det(A)$ يسمّى محددتها، وأنّ A تكون ذات معكوس إذا وفقط إذا كان $\det(A) \neq 0$، وإذا كانت A و B مصفوفتين مربعتين من الدرجة نفسها، فإنه يمكن إثبات أنّ $\det(AB) = \det(A).\det(B)$. لتكن G هي زمرة الضرب للمصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n\times n$ ذات المدخلات من $\mathbb{C}$، ولتكن T هي المجموعة الجزئيّة من G المكوّنة من المصفوفات ذات المحدّدة 1. المعادلة $\det(AB) = \det(A).\det(B)$ تبيّن أنّ T مغلقة بالنسبة إلى ضرب المصفوفات. تذكّر أنّ المصفوفة المحايدة I_n محددتها 1. ومن المعادلة $\det(A).\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1$ نرى أنه إذا كان $\det(A) = 1$، فإنّ $\det(A^{-1}) = 1$. المبرهنة 14.5 تثبت أنّ T زمرة جزئيّة من G. ▲

الزمر الجزئيّة الدورية

لننظر في كبر زمرة جزئيّة H من $\mathbb{Z}_{12}$ إذا ما احتوت العنصر 3، فيجب أن تحوي العنصر المحايد 0 و 3+3 التي هي 6؛ لذلك يجب أن تحوي 6+3 التي هي 9. لاحظ أنّ معكوس 3 هو 9، وأنّ معكوس 6 هو 6، إذ من السهل التأكد من أنّ $H = \{0,3,6,9\}$ زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}_{12}$، وأنها أصغر زمرة جزئيّة تحوي 3.

لنحاكي هذا التبرير في حالة أكثر عمومًا، فكما نوّهنا من قبل، نستخدم دائمًا رمز الضرب في أيّ مناقشة عامة، ولتكن G زمرة، ولتكن $a \in G$. إن الزمرة الجزئيّة من G التي تحوي a يجب – بحسب المبرهنة 14.5– أن تحوي a^n، وهو ناتج حاصل ضرب a في نفسها n مرّة لأي عدد صحيح موجب n، حيث تعطي قوى a الصحيحة الموجبة هذه مجموعة مغلقة بالنسبة إلى الضرب، لكن من الممكن أن يكون معكوس a ليس في هذه المجموعة، ومن المؤكد أنّ الزمرة الجزئيّة التي تحوى a يجب أن تحوي a^{-1}، وبوجه عام، يجب أن تحوي a^{-m} لكل $m \in \mathbb{Z}^+$، ويجب أن تحوي العنصر المحايد $e=a^0$. يُلخّص ما سبق بأنّ الزمرة الجزئيّة من G التي تحوي العنصر a، يجب أن تحوي العناصر a^n كلها (أو na لرمز الجمع) لكل $n \in \mathbb{Z}$، أي إنّ الزمرة الجزئيّة التي تحوي a يجب أن تحوي $\left\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. لاحظ أنّ a^n (قوى a) ليست بالضرورة مختلفة، ففي الزمرة V في مثال 9.5 مثلًا،

$a^2=e$، $a^3=a$، $a^4=e$، $a^{-1}=a$ وهكذا.

17.5 مبرهنة وبهذا نكون قد أنجزنا إثبات المبرهنة الآتية تقريبًا.

لتكن G زمرة، ولتكن $a \in G$. عندئذٍ تكون:

$$H = \left\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$$

زمرة جزئيّة من G، وهي أصغر[3] زمرة جزئيّة من G تحوي a، أي إنّ أيّ زمرة جزئيّة تحوي a ستحوي H.

3- ربما نحتاج إلى أن نميّز عند الحاجة بين مصطلحي أصغريّ (minimal) وأصغر (smallest)، عند إطلاقهما على مجموعات جزئيّة ذات خاصية ما من مجموعة S. تكون المجموعة الجزئيّة H من S أصغرية بالنسبة إلى الخاصية إذا كانت H تحقق الخاصية، وليس هناك مجموعة جزئيّة $K \neq H$، $K \subset H$ تحقق الخاصية، وإذا كانت H تحقق الخاصية و$H \subseteq K$ لكل مجموعة جزئيّة K تحقق الخاصية، فإنّ H هي أصغر مجموعة جزئيّة تحقق الخاصية، ويمكن أن يكون هناك أكثر من مجموعة جزئيّة أصغريّة، لكن يمكن أن تتوافر مجموعة جزئيّة أصغر واحدة فقط. ولتوضيح ذلك، $\{e,a\}$، و$\{e,b\}$، و$\{e,c\}$ هي زمر جزئيّة أصغرية غير تافهة من V (انظر الشكل 12.5)، لكن V لا تحوي زمرة جزئيّة أصغر غير تافهة.

البرهان سنفحص الشروط الثلاثة على المجموعة الجزئيّة من زمرة لتعطي زمرة جزئيّة (الواردة في المبرهنة 14.5)، ولأنّ $a^r a^s = a^{r+s}$ لكل $r, s \in \mathbb{Z}$، فنرى أنّ الضرب في G لعنصرين من H يبقى في H، ما يعني أنّ H مغلقة بالنسبة إلى عملية الزمرة G، كذلك $a^0 = e$، وعليه، فإنّ $e \in H$، ولِـ $a^r \in H$ يكون $a^{-r} \in H$ و $a^{-r}a^r = e$. نخْلُصُ إلى أن الشروط كلها متحققة و$H \leq G$.

بيّنت مناقشتنا التي سبقت نصّ المبرهنة أنّ أيّ زمرة جزئيّة من G تحوي a يجب أن تحوي H؛ لذلك فإنّ H هي أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي a. ♦

18.5 مثال لتكن G زمرة، ولتكن $a \in G$. فإنّ الزمرة الجزئيّة $\{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ من G الموصوفة في المبرهنة 17.5 تسمّى **الزمرة الجزئيّة الدورية من G المولّدة بالعنصر a** (***cyclic subgroup of G generated by a***)، ويرمز لها بالرمز $\langle a \rangle$. ■

19.5 تعريف

العنصر a من G **يولّد** G (**generates**)، ويُعدّ **مولّدًا** (**generator**) للزمرة G إذا كان $\langle a \rangle = G$
تُعدّ الزمرة G **دورية** (**cyclic**) إذا وجد عنصر a في G يولّدها. ■

20.5 مثال

لتكن $\mathbb{Z}_4$ وV الزمرتين في المثال 9.5، فإنّ $\mathbb{Z}_4$ دورية و 1 و3 مولّدان، أي إنّ:

$$\langle 1 \rangle = \langle 3 \rangle = \mathbb{Z}_4.$$

لكن V ليست دورية، حيث إنّ $\langle a \rangle$،و$\langle b \rangle$، و$\langle c \rangle$ زمر جزئيّة فعلية مكوّنة من عنصرين. بالطبع $\langle e \rangle$ هي الزمرة الجزئيّة التافهة المكوّنة من عنصر واحد. ▲

21.5 مثال

الزمرة $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى عملية الجمع هي زمرة دورية، و1 و-1 مولّدان لها، وهما المولّدان الوحيدان، كذلك لـ $n \in \mathbb{Z}^+$، الزمرة $\mathbb{Z}_n$ بالنسبة إلى عمليةالجمع مقياس n دورية، وإذا كان $n>1$، فإنّ 1 وn-1 مولّدان، لكن ربما يتوافر غيرهما. ▲

22.5 مثال لتكن الزمرة $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع، فدعنا نجد $\langle 3 \rangle$. الرمز هنا هو الجمع، و $\langle 3 \rangle$ يجب أن تحوي

3 ، $3+3 = 6$، $3+3+3 = 9$، وهكذا،

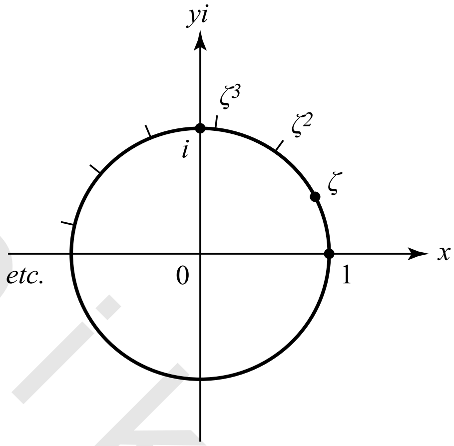
0، -3 ، $-3+-3 = -6$ ، $-3+-3+-3 = -9$، وهكذا.

أي إنّ الزمرة الجزئيّة الدورية المولّدة بـ 3 تتكوّن من مضاعفات 3 كلها، الموجبة والسالبة والصفر. نرمز لهذه الزمرة الجزئيّة بالرمز $3\mathbb{Z}$ إضافة إلى $\langle 3 \rangle$، وبطريقة مشابهة ستمثل $n\mathbb{Z}$ الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle n \rangle$ من $\mathbb{Z}$. لاحظ أنّ $6\mathbb{Z} < 3\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$. ▲

23.5 مثال لكل عدد صحيح موجب n، لتكن U_n زمرة ضرب الجذور ذات الرتبة n للواحد في $\mathbb{C}$. يمكن تمثيل عناصر U_n هندسيًّا بنقاط متساوية البعد على دائرة حول نقطة الأصل، كما في الشكل 24.5. النقطة الداكنة تمثل العدد:

$$\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

التفسير الهندسي – الموضّح في الفصل 1– لضرب الأعداد المركبة يبيّن في الحال أنه عند رفع ζ لقوى تسلك طريقها عكس عقارب الساعة حول الدائرة، مارّةً على عناصر U_n كلّها؛ لذلك، فإنّ U_n بالنسبة إلى الضرب هي زمرة دورية، و ζ مولد. الزمرة U_n هي الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle\zeta\rangle$ من الزمرة U المكوّنة من الأعداد المركبة z كلها، بحيث $|z|=1$ بالنسبة إلى الضرب. ▲



الشكل 24.5

تمارين5

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، حدّد ما إذا كانت المجموعة الجزئيّة المعطاة من الأعداد المركبة تشكل زمرة جزئيّة من زمرة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ بالنسبة إلى الجمع.

1. $\mathbb{R}$ **2.** $\mathbb{Q}^+$ **3.** $7\mathbb{Z}$

4. مجموعة الأعداد التخيلية الصافية $i\mathbb{R}$ بما فيها 0

5. مجموعة المضاعفات النسبية $\pi\mathbb{Q}$ للعدد π **6.** المجموعة $\{\pi^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$

7. أي من المجموعات في التمارين من 1 إلى 6 تشكل زمرًا جزئيّة من زمرة الأعداد المركبة غير الصفرية $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب؟

في التمارين من 8 إلى 13، حدّد ما إذا كانت المجموعة المعطاة من المصفوفات ذات المعكوس من الدرجة $n\times n$ بمدخلات حقيقية تشكل زمرة جزئيّة من $GL(n,\mathbb{R})$.

8. المصفوفات ذات المحددة 2 من الدرجة $n\times n$.

9. المصفوفات القطرية من الدرجة $n\times n$ دون أصفار على القطر الرئيس.

10. المصفوفات المثلثة العليا من الدرجة $n \times n$ دون أصفار على القطر الرئيس.

11. المصفوفات ذات المحددة -1 من الدرجة $n\times n$.

12. المصفوفات ذات المحددة 1 أو -1 من الدرجة $n\times n$.

13. مجموعة المصفوفات A من الدرجة $n\times n$ ، بحيث $(A^T)\ A= I_n$. [هذه المصفوفات تُسمَّى (**متعامدة *orthogonal***). تذكّر أنّ A^T، منقول A، هو المصفوفة التي عمودها ذو الترتيب j هو صفّ A ذو الترتيب j لكل $1\leq j \leq n$، وأنّ عملية المنقول تحقق الخاصية $(AB)^T= (B^T)\ (A^T)$].

لتكن F مجموعة جميع الدوالّ ذوات القيم الحقيقية التي مجالها $\mathbb{R}$، ولتكن $\widetilde{F}$ هي المجموعة الجزئيّة من F المكونة من تلك الدوالّ التي لها قيمة غير صفرية عند أيّ نقطة من $\mathbb{R}$. في التمارين من 14 حتى 19، حدّد ما إذا كانت المجموعة الجزئيّة المعطاة من F مع العملية المتولّدة تشكل (أ)– زمرة جزئيّة من الزمرة F بالنسبة إلى الجمع، (ب)– زمرة جزئيّة من الزمرة $\widetilde{F}$ بالنسبة إلى الضرب.

14. المجموعة الجزئيّة $\widetilde{F}$

15. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in F$، بحيث إنّ $f(1) = 0$

16. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in \widetilde{F}$، بحيث إنّ $f(1) = 1$

17. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in \widetilde{F}$، بحيث إنّ $f(0) = 1$

18. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من كل $f \in \widetilde{F}$، بحيث إنّ $f(0) = -1$

19. المجموعة الجزئيّة المكوّنة من جميع الاقترانات الثابتة في F.

20. فيما يأتي تسع زمر. أعطِ قائمة كاملة لعلاقات الزمر الجزئيّة بالصورة $G_i \leq G_j$ المتحققة بين هذه الزمر المعطاة $G_1 ,G_2 , \ldots ,G_9$.

$G_1 = \mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_2 = 12\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_3 = \mathbb{Q}^+$ بالنسبة إلى الضرب.

$G_4 = \mathbb{R}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_5 = \mathbb{R}^+$ بالنسبة إلى الضرب.

$G_6 = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب.

$G_7 = 3\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

$G_8 =$ مجموعة مضاعفات 6 الصحيحة بالنسبة إلى الجمع.

$G_9 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب.

21. اكتب خمسة عناصر على الأقل من كل من الزمر الدورية الآتية:

أ. $25\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع.

ب. $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ بالنسبة إلى الضرب.

جـ. $\{\pi^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب.

في التمارين من 22 إلى 25، صِف العناصر كلها في الزمرة الجزئيّة الدورية من $GL(2, \mathbb{R})$ المولّدة بالمصفوفة المعطاة من الدرجة 2×2

22. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

26. أيّ من الزمر الآتية دورية؟ لكل زمرة دورية، اذكر مولّداتها كلها.

$G_1 = \langle \mathbb{Z}, +\rangle$ $G_2 = \langle \mathbb{Q}, +\rangle$ $G_3 = \langle \mathbb{Q}^+, .\rangle$ $G_4 = \langle 6\mathbb{Z}, +\rangle$

$G_5 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ بالنسبة إلى الضرب

$G_6 = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ بالنسبة إلى الضرب

في التمارين من 27 إلى 35، أوجد رتبة الزمرة الجزئيّة الدورية من الزمرة المعطاة والمولّدة بالعنصر المشار إليه.

27. الزمرة الجزئيّة من $\mathbb{Z}_4$ المولّدة بـ 3

28. الزمرة الجزئيّة من V المولّدة بـ c (انظر الجدول 11.5)

29. الزمرة الجزئيّة من U_6 المولّدة بـ $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

30. الزمرة الجزئيّة من U_5 المولّدة بـ $\cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

31. الزمرة الجزئيّة من U_8 المولّدة بـ $\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

32. الزمرة الجزئيّة من U_8 المولّدة بـ $\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}$

33. الزمرة الجزئيّة من زمرة الضرب G للمصفوفات كلها ذات المعكوس من الدرجة 4×4 المولّدة بـِ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

34. الزمرة الجزئيّة من زمرة الضرب G للمصفوفات كلها ذات المعكوس من الدرجة 4×4 المولّدة بـِ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

35. الزمرة الجزئيّة من زمرة الضرب G للمصفوفات كلها ذات المعكوس من الدرجة 4×4 المولّدة بـِ:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

36. أ. أكمل الجدول 25.5 لإعطاء الزمرة $\mathbb{Z}_6$ من 6 عناصر.

ب . احسب الزمر الجزئيّة $\langle 0 \rangle$, $\langle 1 \rangle$, $\langle 2 \rangle$, $\langle 3 \rangle$,$\langle 4 \rangle$, $\langle 5 \rangle$ من الزمرة $\mathbb{Z}_6$ المعطاة في الفرع (أ).

جـ. أي العناصر هي مولّدات للزمرة $\mathbb{Z}_6$ في الفرع (أ)؟

د . أعطِ مخطط الزمر الجزئيّة للزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_6$ الواردة في الفرع (ب). (سوف نرى لاحقًا أنّ هذه هي كل الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_6$).

الجدول 25.5

$\mathbb{Z}_6$:

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					

مفاهيم

في التمرينين 37 و 38، صحِّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

37. الزمرة الجزئيّة من زمرة G هي مجموعة جزئيّة H من G تحوي عنصر G المحايد e، وتحوي كذلك معكوس أيّ من عناصرها.

38. تكون الزمرة دوريةً إذا وفقط إذا وجد $a \in G$، بحيث إنّ $G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

39. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

______ أ. قانون التجميع يتحقق في أيّ زمرة.

______ ب. ربما تتوافر زمرة لا يتحقق فيها قانون الحذف.

______ جـ. كل زمرة هي زمرة جزئيّة من ذاتها.

______ د. لكل زمرة زمرتان جزئيتان غير فعليتين بالضبط.

______ هـ. في كل زمرة دورية، كل عنصر هو مولّد.

______ و. الزمرة الدورية لها مولّد وحيد.

______ ز. كل مجموعة من الأعداد تشكل زمرة تحت الجمع، تشكل زمرة تحت الضرب أيضًا.

______ ح. الزمرة الجزئيّة يمكن تعريفها بوصفها مجموعة جزئيّة من الزمرة.

______ ط. $\mathbb{Z}_4$ هي زمرة دورية.

______ ي. كل مجموعة جزئيّة من أي زمرة تشكل زمرة جزئيّة بالنسبة إلى العملية المتولّدة.

40. أثبت من خلال مثال أنه من الممكن أن يكون للمعادلة التربيعية $x^2 = e$ أكثر من حلين في زمرة G بمحايد e.

براهين

في التمرينين 41 و42، لتكن $\phi : G \to G'$ تماثلًا من الزمرة $\langle G, *\rangle$ إلى الزمرة $\langle G', *'\rangle$. اكتب برهانًا لإقناع المتشكك في العبارة البدهية الواضحة.

41. إذا كانت H زمرة جزئيّة من G، فإنّ $\phi[H] = \{\phi(h) \mid h \in H\}$ زمرة جزئيّة من G'، أي إنّ التماثل يحمل الزمر الجزئيّة إلى زمر جزئيّة.

42. إذا كانت G دورية، فإنّ G' دورية.

43. أثبت أنه إذا كانت H وK زمرتين جزئيّتين من زمرة إبداليّة G، فإنّ:

$$\{hk \mid h \in H \text{ و } k \in K\}$$

هي زمرة جزئيّة من G.

44. أوجد الخلل في الحجة الآتية : "الشرط 2 من المبرهنة 14.5 فائض لإمكانية استنتاجه من 1 و3، فلو كان $a \in H$ ، فإنّ $a^{-1} \in H$ من 3، ومن 1، $aa^{-1} = e$ هو عنصر من H، وهذا يثبت 2".

45. بيّن أنّ المجموعة الجزئيّة غير الخالية H من زمرة G تكون زمرة جزئيّة من G، إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$ لكل $a,b \in H$. (هذا واحد من أكثر المعايير – المشار إليها قبل المبرهنة 14.5 – إيجازًا).

46. برهن أنّ الزمرة الدورية التي لها مولّد واحد فقط يمكن أن تحوي على الأكثر عنصرين.

47. برهن أنه إذا كانت G زمرة إبداليّة مكتوبة بالضرب وبعنصر محايد e، فإنّ العناصر كلها x من G التي تحقّق المعادلة $x^2 = e$ تشكل زمرة جزئيّة H من G.

48 أعِد التمرين 47 للحالة العامة للمجموعة H المكوّنة من الحلول x كلها للمعادلة $x^n = e$ لعدد صحيح محدّد $n \geq 1$ في زمرة إبداليّة G بمحايد e.

49. أثبت أنه إذا كان $a \in G$، حيث G هي زمرة منتهية بمحايد e، فإنه يوجد $n \in \mathbb{Z}^+$، بحيث إنّ $a^n = e$.

50 لتكن المجموعة الجزئيّة المنتهية غير الخالية H من الزمرة G مغلقةً بالنسبة إلى عملية G الثنائيّة. أثبت أنّ H زمرةٌ جزئيّة من G.

51 لتكن G زمرة، ولتكن a عنصرًا محددًا من G. أثبت أنّ:

$$H_a = \{x \in G \mid xa = a\,x\}$$

هي زمرة جزئيّة من G.

52. تعميمًا للتمرين 51، لتكن S أيّ مجموعة جزئيّة من زمرة G.

أ. أثبت أنّ $H_S = \{x \in G \mid xs = sx,\ \text{لكل}\ x \in S\}$ هي زمرة جزئيّة من G.

ب. بالرجوع إلى الفرع (أ)، الزمرة الجزئيّة H_G هي **مركز** (**center**) G. أثبت أنّ H_G زمرة إبداليّة.

53. لتكن H زمرة جزئيّة من زمرة G. لِـ $a,b \in G$، لتكن $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان $ab^{-1} \in H$. أثبت أنّ $\sim$ علاقة تكافؤٍ على G.

54. لمجموعتين H و K، نعرّف **التقاطع** (***intersection***) $A \cap K$ على النحو

$$H \cap K = \{x \mid x \in H \ \text{و}\ x \in K\}$$

أثبت أنه إذا كان $H \leq G$ و $K \leq G$ ، فإنّ $H \cap K \leq G$. (تذكّر أنّ $\leq$ ترمز إلى "زمرة جزئيّة من" وليس "مجموعة جزئيّة من").

55. برهن أنّ كل زمرة دورية هي إبداليّة.

56. لتكن G زمرة، ولتكن $G_n = \{g^n \mid g \in G\}$. تحت أيّ فرضيات على G يمكننا إثبات أنّ G_n زمرة جزئيّة من G؟

57. أثبت أنّ الزمرة التي ليس لها زمر جزئيّة فعلية غير تافهة تكون دورية.

الفصل 6 الزمر الدورية Cyclic Groups

تذكّر الحقائق والرموز الآتية من الفصل 5. إذا كانت G زمرة و $a \in G$، فإنّ

$$H = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

زمرة جزئية من G (المبرهنة 17.5). هذه الزمرة هي **الزمرة الجزئيّة الدورية** $\langle a \rangle$ **من** G **المولّدة بـ** a (**cyclic subgroup** $\langle a \rangle$ **of** G **generated by** a). كذلك، لزمرة معطاة G وعنصر a من G، إذا كان:

$$G = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

فإنّ a **مولّد** (**generator**) لـِ G والزمرة $G= \langle a \rangle$ **دورية** (**cyclic**). سنقدّم الآن مصطلحًا جديدًا. لتكن a عنصرًا من زمرة G، فإذا كانت الزمرة الجزئيّة $\langle a \rangle$ من G منتهية، فإنّ **رتبة** a (**order**) هي الرتبة $|\langle a \rangle|$ لهذه الزمرة الجزئيّة، وبخلاف ذلك نقول: إنّ a من **رتبة لا نهائية** (**infinite order**). سوف نرى في هذا الفصل أنه إذا كان $a \in G$ ذا رتبة منتهية m، فإنّ m هي أصغر عدد صحيح موجب، بحيث إنّ $a^m = e$.

إنّ الهدف الأول لهذا الفصل هو وصف الزمر الدورية كلها والزمر الجزئيّة كلها من الزمر الدورية، وهذا ليس تمرينًا تافهًا، سنرى لاحقًا أنّ الزمر الدورية تشكل وحدات بناءٍ لجميع الزمر الإبداليّة الصغيرة صغرًا كافيًا، وعلى وجه الخصوص للزمر الإبداليّة المنتهية كلها، فالزمر الدورية أساسية لفهم الزمر.

خصائص أساسية للزمر الدورية

نبدأ بإثبات أنّ الزمر الدورية إبداليّة

مبرهنة 1.6 كل زمرة دورية هي إبداليّة.

البرهان لتكن G زمرة دورية، ولتكن a مولدًا لـِ G بحيث إنّ:

$$G = \langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

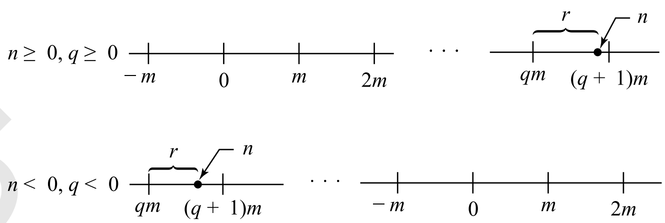
إذا كان g_1 و g_2 أي عنصرين من G، يوجد عددان صحيحان r و s، بحيث إنّ $g_1=a^r$ و $g_2=a^s$؛ لذلك:

$$g_1 g_2 = a^r a^s = a^{r+s} = a^{s+r} = a^s a^r = g_2 g_1$$

وعليه، تكون G إبداليّة. ◆

سوف نواصل استخدام رمز الضرب في عملنا العام حول الزمر الدورية على الرغم من أنها إبداليّة.

خوارزمية القسمة الآتية تبدو تافهة، ولكنها أداة أساسية لدراسة الزمر الدورية:



الشكل 2.6

3.6 خوارزمية القسمة لـِ $\mathbb{Z}$ (Division Algorithm for $\mathbb{Z}$): إذا كان m عددًا صحيحًا موجبًا و n أي عدد صحيح، فإنه يوجد عددان صحيحان وحيدان q و r، بحيث إنّ:

$$n = mq + r \text{ و } 0 \leq r < m.$$

البرهان

سنعطي توضيحًا تخطيطيًا بدهيًا باستخدام الشكل 2.6. عيّن مضاعفات m وموقع n على محور الأعداد الحقيقية (x-axis). الآن، إمَّا أن تقع n على مضاعف qm لـِ m وتؤخذ r القيمة 0، أو أن تقع n بين مضاعفين لـِ m. عند حدوث الحالة الأخيرة، لتكن qm هي أول مضاعف لـِ m على يسار n، فتكون r كما في الشكل 2.6. لاحظ أنّ $0 \leq r < m$. وحدانية q و r تنتج من أنه لو لم تكن n مضاعفًا لـِ m بحيث يمكن أخذ $r = 0$، لتوافر مضاعف وحيد qm لـِ m إلى يسار n وعلى مسافة أقل من m عن n، كما في الشكل 2.6. ◆

في رموز خوارزمية القسمة، يسمى q **ناتج القسمة** (**أو خارج القسمة**) (**quotient**) و r **باقي القسمة** (**remainder**) غير سالب عند قسمة n على m.

4.6 مثال

أوجد ناتج القسمة q والباقي r عند قسمة 38 على 7 بحسب خوارزمية القسمة.

الحلّ

مضاعفات 7 الموجبة هي 7, 14, 21, 28, 35, 42, ... لاختيار المضاعف الذي يترك باقيًا غير سالب أقل من 7 نكتب:

$$38 = 35 + 3 = 7(5) + 3$$

لذا، فناتج القسمة $q=5$ والباقي $r=3$. ▲

5.6 مثال أوجد ناتج القسمة q والباقي r عند قسمة -38 على 7 بحسب خوارزمية القسمة.

الحل مضاعفات 7 السالبة هي -7، -14، -21، -28، -35، -42، ... .ولاختيار المضاعف الذي يترك باقيًا غير سالب أقل من 7 نكتب:

$$-38 = -42 + 4 = 7(-6) + 4$$

لذا، فناتج القسمة $q= -6$ والباقي $r = 4$. ▲

سوف نستخدم خوارزمية القسمة في إثبات أنّ الزمرة الجزئيّة H من زمرة دورية G تكون دوريةً كذلك. فكّر لحظة فيما علينا فعله للبرهنة على ذلك، علينا أن نستخدم تعريف الزمرة الدورية طالما أننا لم نثبت بعد سوى القليل عن الزمر الدورية. أي إنّ علينا أن نستخدم حقيقة أنّ G لها عنصر مولّد a، ثم علينا أن نقدّم بدلالة هذا المولّد a مولّدًا $c = a^m$ لـ H لاستنتاج أنّ H دورية. في الواقع هناك خيار طبيعي واحد فقط للقوّة m لـ a يمكننا تجريبه، فهل يمكنك تخمينه قبل أن تقرأ إثبات المبرهنة؟

6.6 مبرهنة الزمرة الجزئيّة من زمرة دورية تكون دورية.

البرهان لتكن G زمرة دورية مولّدة بـ a، ولتكن H زمرة جزئيّة من G. إذا كان $H=\{e\}$، فإنّ $H = \langle e\rangle$ دورية. وإذا كان $H \neq \{e\}$، فإنّ هناك $n \in \mathbb{Z}^+$، بحيث إنّ $a^n \in H$.

ليكن m أصغر عدد صحيح في $\mathbb{Z}^+$ بحيث إنّ $a^m \in H$.

ندّعي أنّ $c = a^m$ يولّد H، أي إنّ

$$H = \langle a^m \rangle = \langle c \rangle$$

يجب أن نبين أنّ كل $b \in H$ هي من قوى c، ولأنّ $b \in H$ و $H \leq G$، فيوجد n بحيث إنّ $b = a^n$. أوجد q و r بحيث إنّ:

$$n = mq + r \text{ حيث } 0 \leq r < m$$

بناءً على خوارزمية القسمة؛ لذلك:

$$a^n = a^{mq+r} = (a^m)^q\, a^r،$$

وعليه، يكون:

$$a^r = (a^m)^{-q} a^n.$$

الآن، لأنّ $a^n \in H$، $a^m \in H$، و H زمرة، فإنّ كلًّا من $(a^m)^{-q}$ و a^n في H.

لذلك فإنّ

$(a^m)^{-q} a^n \in H$؛ أي أن $a^r \in H$.

لأنّ m كانت أصغر عدد صحيح موجب، بحيث إنّ $a^m \in H$ و $0 \le r < m$، يجب أن يكون $r = 0$. لذلك، $n = qm$ و

$$b = a^n = (a^m)^q = c^q,$$

ولذلك، b من قوى c. ♦

كما لوحظ في المثالين 21.5 و 22.5 أنّ $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع دورية، ولأي عدد صحيح موجب n تكون المجموعة $n\mathbb{Z}$ المكوّنة من مضاعفات n زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع، وهي تحديدًا الزمرة الجزئيّة الدورية المولدة بـِ n. المبرهنة 6.6 تبيّن أنّ هذه الزمر الجزئيّة الدورية هي الزمر الجزئيّة الوحيدة من $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع، وهذا ما نصوغه بوصفه نتيجة.

7.6 نتيجة الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع هي بالتحديد الزمر $n\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع لـِ $n \in \mathbb{Z}$.

تعطينا هذه النتيجة طريقة رائعة لتعريف القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين موجبين r و s. التمرين 45 يبين أنّ $H = \{nr + ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئيّة من الزمرة $\mathbb{Z}$ بالنسبة إلى الجمع. لذلك يجب أن تكون H دورية ولها مولّد d يمكننا اختياره موجبًا.

8.6 تعريف ليكن r و s عددين صحيحين موجبين. المولّد الموجب d للزمرة الدورية

$$H = \{nr + ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$$

بالنسبة إلى الجمع هو **القاسم المشترك الأعظم (greatest common divisor)** (ويختصر gcd) لـِ r و s. نكتب $d = \gcd(r,s)$. ■

من التعريف لاحظ أنّ d قاسم لكل من r و s؛ لأن كلًّا من $r = 1r + 0s$ و $s = 0r + 1s$ في H، ولأنّ $d \in H$، فيوجد عددان صحيحان n و m، حيث:

$$d = nr + ms.$$

نرى أنّ أيّ عدد صحيح يقسم كلًّا من r و s يقسم الطرف الأيمن من هذه المعادلة؛ ولذلك يجب أن يكون قاسمًا لـ d كذلك، لهذا يجب أن تكون d أكبر عدد يقسم كلًّا من r و s؛ وهذا تعليل الاسم الذي أُعطي لـِ d في التعريف 8.6.

9.6 مثال أوجد gcd لـِ 42 و 72.

الحل القواسم الموجبة لـ 42 هي 42 ,21 ,14 ,7 ,6 ,3 ,2 ,1. القواسم الموجبة لـِ 72 هي 4 ,3 ,2 ,1, 72 ,36 ,24 ,18 ,12 ,9 ,8 ,6. القاسم المشترك الأعظم هو 6. لاحظ أنّ $6=(3)(72)+(-5)(42)$ هناك خوارزمية للتعبير عن القاسم المشترك الأعظم d بدلالة r و s على الصورة $d = nr + ms$، لكننا لا نحتاج إلى استخدامها هنا. ▲

يكون العددان الصحيحان الموجبان **أوّليّين نسبيًا** (**relatively prime**) إذا كان gcd لهما هو 1، مثلًا: 12 و 25 أوّليّان نسبيًّا، لاحظ أنه ليس لهما عامل أوَّلي مشترك. سنحتاج في مناقشتنا للزمر الجزئيّة من زمر دورية إلى معرفة ما يأتي:

إذا كان s و r أوّليّين نسبيًّا، وكان r تقسم sm، فإنّ r يجب أن تقسم m.	(1)

لنبرهن ذلك. إذا كان r و s أوّليّين نسبيًّا، فإنّ بالإمكان كتابة:

$$1 = ar + bs \quad \text{حيث } a, b \in \mathbb{Z}.$$

بالضرب في m نحصل على:

$$m = arm + bms$$

الآن، r تقسم كلًّا من arm و bsm ؛ لأنّ r تقسم sm؛ ولذلك تكون r قاسمًا للطرف الأيمن لهذه المعادلة، إذن، r يجب أن تقسم m.

بُنية الزمر الدورية

يمكننا الآن وصف الزمر الدورية كلها وفق التماثل.

10.6 مبرهنة لتكن G زمرة دورية بمولّد a، فإذا كانت رتبة G لا نهائية، فإنّ G تماثل $\langle \mathbb{Z},+\rangle$. وإذا كانت G ذات رتبة منتهية n، فإنّ G تماثل $\langle \mathbb{Z}_n, +_n\rangle$.

البرهان **حالة I** لكل الأعداد الصحيحة الموجبة m، $a^m \neq e$. في هذه الحالة، ندّعي أنه لا يمكن لقوتين مختلفتين h و k أن تنتجا عنصرين متساويين a^h و a^k من G.

افترض أنّ $a^h = a^k$ ، ولنقل: إنّ $h > k$. هذا يضمن أنّ:

$$a^h a^{-k} = a^{h-k} = e،$$

مما يناقض فرض الحالة I. وأخيرًا، فأيّ عنصر من G يمكن التعبير عنه بالصورة a^m لعدد وحيد $m \in \mathbb{Z}$ ؛ لذلك، فالدالّة $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}$ المعطاة بـِ $\phi(a^i) = i$ حسنة التعريف (well define)، وأحاديّة، وغامرة إلى $\mathbb{Z}$، كذلك:

$$\phi(a^i a^j) = \phi(a^{i+j}) = i + j = \phi(a^i) + \phi(a^j)$$

ولذلك، ϕ يُحقق صفة التشاكل، ويكون تماثلًا .

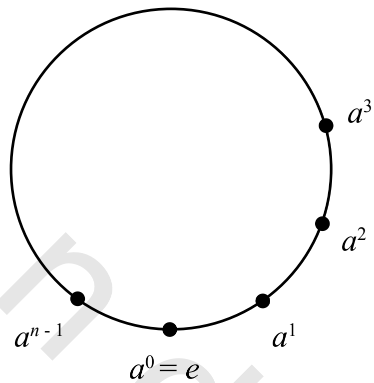
حالة II $a^m = e$ لعدد ما صحيح موجب m. لتكن n أصغر عدد صحيح موجب، بحيث إنّ $a^n=e$، فإذا كان $s \in \mathbb{Z}$ و $s = nq + r$ لـ $0 \le r < n$، فإنّ $a^s = a^{nq+r} = (a^n)^q a^r = e^q\ a^r = a^r$. كما في الحالة I، إذا كان $0 < k < h < n$ و $a^h = a^k$، فإنّ $a^{h-k} = e$ و $0 < h\text{-}k < n$، ما يناقض اختيارنا لـ n؛ لذلك، فالعناصر

$$a^0 = e,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots, a^{n-1}$$

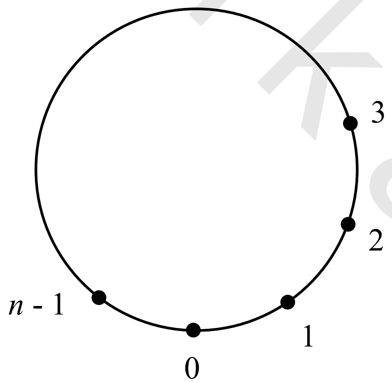
جميعها مختلفة وتشكل عناصر G كلها؛ ولهذا، فالدالّة $\psi : G \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ المعطاة بـ $\psi(a^i) = i$ حيث $i=0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ حسنة التعريف، وأحاديّة، وغامرة إلى $\mathbb{Z}_n$ ، ولأن $a^n = e$، فنرى أنّ $a^i a^j = a^k$ حيث $k = i +_n j$؛ لذلك، فإنّ:

$$\psi(a^i a^j) = i +_n j = \psi(a^i) +_n \psi(a^j),$$

وعليه، يحقق ψ صفة التشاكل، ويكون تماثلًا. ♦



الشكل **11.6**



الشكل **12.6**

13.6 مثال بتحفيزٍ من عملنا مع U_n، من المحبّذ تصوّر العناصر $e=a^0$، a^1،a^2،...، a^{n-1} لزمرة دورية من الرتبة n على أنها موزعة بانتظام على دائرة (انظر الشكل 11.6). وُضِعَ العنصر a^h على الدائرة في الموقع ذي الترتيب h من هذه الوحدات المتساوية وفي تجاه عكس عقارب الساعة، مقيسًا من الأسفل، حيث وُضع $e=a^0$. لضرب a^h و a^k من خلال المخطّط نبدأ من a^h ، وندور k وحدة إضافية عكس عقارب الساعة. حتى نرى حسابيًّا أين ننتهي، نجد q و r بحيث إنّ:

$$h + k = nq + r \quad \text{لـ}\ 0 \le r < n\ .$$

nq تدور بنا حول الدائرة دورة كاملة q مرة، ثمّ ننتهي إلى a^r ▲

إنّ الشكل 12.6 هو من حيث الجوهر الشكل 11.6 نفسه، لكن النقاط سمّيت بالقوى على المولّد. العملية على هذه القوى هي الجمع مقياسn.

الزمر الجزئيّة من الزمر الدورية المنتهية

أنهينا وصفنا للزمر الدورية، وانتقلنا إلى زمرها الجزئية، –أعطتنا النتيجة 7.6 معلومات كاملة عن الزمر الجزئيّة من الزمر الدورية اللانهائية؛ لنعطي المبرهنة الأساسية المتعلقة بمولّدات الزمر الجزئيّة للزمر الدورية المنتهية.

14.6 مبرهنة لتكن G زمرة دورية فيها n عنصر ومولّدة بـ a، وليكن $b \in G$، وليكن $b = a^s$. عندئذ تولّد b زمرة جزئيّة دورية H من G تحوي n/d عنصرًا، حيث d هي القاسم المشترك الأعظم لـ n و s.

وكذلك $\langle a^s \rangle = \langle a^t \rangle$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(s,n) = \gcd(t,n)$.

البرهان b تولّد زمرة جزئيّة دورية H من G، وهذا معروف من المبرهنة 17.5؛ لذا، يلزمنا فقط أن نثبت أنّ H لها n/d عنصر، وباتباع النقاش في الحالة II من المبرهنة 10.6، نرى أنّ H لها من العناصر بقدر أصغر قوة موجبة m لـ b تعطي المحايد. الآن، $b = a^s$، و $b^m = e$ إذا وفقط إذا كان $(a^s)^m = e$، أو إذا وفقط إذا كان n تقسم ms. ما أصغر عدد صحيح موجب m بحيث إنّ n تقسم ms؟ لتكن d هي gcd لـ n و s. عندئذٍ يوجد عددان صحيحان u و v، بحيث إنّ:

$$d = un + vs.$$

ولأنّ d تقسم كلًّا من n و s، يمكننا أن نكتب

$$1 = u(n/d) + v(s/d)$$

حيث كلا n/d و s/d عدد صحيح، هذه المعادلة الأخيرة تبيّن أنّ n/d و s/d أوّليّان نسبيًّا؛ لأن أيّ عدد صحيح يقسم كليهما يجب أن يقسم 1 كذلك. نتمنى أن نجد أصغر m موجبة، بحيث إنّ:

$$\frac{ms}{n} = \frac{m(s/d)}{(n/d)} \text{ عدد صحيح.}$$

من خاصية القسمة الموطّرة (1)، نستنتج أنّ n/d يجب أن تقسم m؛ ولذلك، فأصغر مثل هذه الـ m هي n/d. وعليه، تكون رتبة H هي n/d.

وبأخذ $\mathbb{Z}_n$ في هذه اللحظة بوصفها نموذجًا للزمرة الدورية ذات الرتبة n، نرى أنه إذا كانت d قاسمًا لـ n، فإنّ الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle d \rangle$ من $\mathbb{Z}_n$ فيها n/d عنصر، وتحوي الأعداد الصحيحة الموجبة m كلها التي تقلّ عن n، بحيث إنّ $\gcd(m,n) = d$؛ لذلك، فهناك زمرة جزئيّة واحدة فقط من $\mathbb{Z}_n$ رتبتها n/d، وبأخذ الفقرة السابقة في الحسبان يتبيّن على الفور أنه إذا كانت a مولّدًا للزمرة الدورية G، فإنّ $\langle a^s \rangle = \langle a^t \rangle$ إذا وفقط إذا كان $\gcd(t,n) = \gcd(s,n)$. ♦

15.6 مثال على سبيل المثال: مستخدمًا رمز الجمع، لتكن $\mathbb{Z}_{12}$ مع المولّد $a = 1$، ولأنّ القاسم المشترك الأعظم لـ 3 و 12 هو 3، فتولّد $3 = 3.1$ زمرة جزئيّة من $4 = \frac{12}{3}$ عناصر، تحديدًا

$$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}.$$

ولأنّ gcd لـ 8 و 12 هو 4، فتولّد 8 زمرة جزئيّة من $3 = \frac{12}{4}$ عناصر، تحديدًا

$$\langle 8 \rangle = \{0, 4, 8\}.$$

ولأنّ gcd لـ 12 و 5 هو 1، فتولّد 5 زمرة جزئيّة من $12 = \frac{12}{1}$ عنصرًا، أي إنّ 5 هو مولّد للزمرة $\mathbb{Z}_{12}$ كاملةً. ▲

النتيجة الآتية تنتج مباشرة عن المبرهنة 14.6.

16.6 نتيجة إذا كانت a مولّدًا لزمرة دورية منتهية G من الرتبة n، فإنّ مولّدات G الأخرى هي العناصر التي على الصورة a^r حيث r أوّليّة نسبيًّا مع n.

17.6 مثال دعنا نجد الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_{18}$ كلها، ونعطي مخطط الزمر الجزئيّة لها، الزمر الجزئيّة كلها دورية. بحسب النتيجة 16.6، العناصر 1،و5،و7،و11،و13، و17 هي مولّدات $\mathbb{Z}_{18}$. ابتداءً من 2،

$$\langle 2\rangle = \{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}$$

هي من الرتبة 9 ولها عناصر مولّدة بالصورة $h2$، حيث h أوّليّة نسبيًّا مع 9، تحديدًا $h = 1,2,4,5,7,8$؛ ولذلك $h2 = 2, 4, 8,10,14,16$. العنصر 6 من $\langle 2\rangle$ يولّد $\{0,6,12\}$، و12 كذلك هي مولّد لهذه الزمرة الجزئيّة.

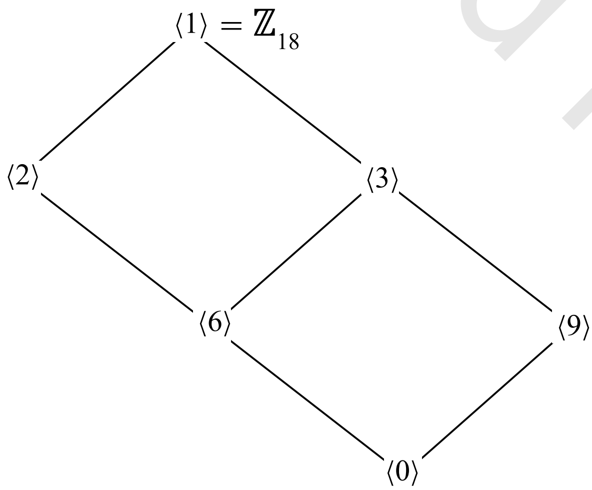
أوجدنا حتى الآن الزمر الجزئيّة المولّدة بـ 11 ،و10،و8،و7،و6،و5،و4، و2،و1،و0 و16، و14، و13، و12 ، و17، ولم يبقَ إلا اعتبار 3،و9،و15.

$$\langle 3\rangle = \{0,3,6,9,12,15\}،$$

و15 كذلك تولّد هذه الزمرة ذات الرتبة 6؛ لأن 15=5.3 و gcd لـِ 5 و 6 هو 1. أخيرًا،

$$\langle 9\rangle = \{0,9\}.$$

مخطط الزمر الجزئيّة لهذه الزمر الجزئيّة من $\mathbb{Z}_{18}$ معطًى في الشكل 18.6



الشكل 18.6 مخطط الزمر الجزئيّة لـ $\mathbb{Z}_{18}$.

هذا المثال مباشر، نخشى أن نكون قد كتبناه بطريقة مفصلة تجعله يبدو معقّدًا. التمارين تعطي بعض التطبيق في هذا الاتجاه. ▲

تمارين6

حسابات

في التمارين من 1 إلى 4، أوجد ناتج القسمة والباقي بحسب خوارزمية القسمة عند قسمة n على m.

1. $n = 42$ ، $m = 9$ **2.** $n = -42$ ، $m = 9$

3. $n = -50$ ، $m = 8$ **4.** $n = 50$ ، $m = 8$

في التمارين من 5 إلى 7، أوجد القاسم المشترك الأعظم للعددين الصحيحين.

5. 32 و 24 **6.** 48 و 88 **7.** 360 و 420

في التمارين من 8 إلى 11، أوجد عدد مولّدات الزمرة الدورية ذات الرتبة المعطاة.

8. 5 **9.** 8 **10.** 12 **11.** 60

تماثل زمرة مع نفسها يُدعى **تماثلًا ذاتيًا للزمرة** (**automorphism of the group**). في التمارين من 12 إلى 16، أوجد عدد التماثلات الذاتية للزمرة المعطاة.

[مساعدة: استخدم التمرين 44. ماذا يجب أن تكون صورة المولّد تحت تأثير التماثل الذاتي؟]

12. $\mathbb{Z}_2$ **13.** $\mathbb{Z}_6$ **14** $\mathbb{Z}_8$ **15.** $\mathbb{Z}$ **16.** $\mathbb{Z}_{12}$

في التمارين من 17 إلى 21، أوجد عدد عناصر الزمرة الدورية المشار إليها.

17. الزمرة الجزئيّة الدورية من $\mathbb{Z}_{30}$ المولّدة بـ 25 .

18. الزمرة الجزئيّة الدورية من $\mathbb{Z}_{42}$ المولّدة بـ 30 .

19. الزمرة الجزئيّة الدورية $\langle i \rangle$ من زمرة الأعداد المركبة غير الصفرية $\mathbb{C}^*$ بالنسبة إلى الضرب.

20. الزمرة الجزئيّة الدورية من الزمرة $\mathbb{C}^*$ في التمرين 19 المولّدة بـ $(1+i)/\sqrt{2}$.

21. الزمرة الجزئيّة الدورية من الزمرة $\mathbb{C}^*$ في التمرين 19 المولّدة بـ $1+i$.

في التمارين من 22 إلى 24، أوجد الزمر الجزئيّة كلها من الزمرة المعطاة، وارسم مخطط الزمر الجزئيّة لها.

22. $\mathbb{Z}_{12}$ **23.** $\mathbb{Z}_{36}$ **24.** $\mathbb{Z}_8$

في التمارين من 25 إلى 29، أوجد رتب الزمر الجزئيّة جميعها من الزمرة المعطاة

25. $\mathbb{Z}_6$ **26.** $\mathbb{Z}_8$ **27.** $\mathbb{Z}_{12}$ **28.** $\mathbb{Z}_{20}$ **29.** $\mathbb{Z}_{17}$

مفاهيم

في التمرينين 30 و31، صحّح تعريف الحدّ المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب –إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

30. العنصر a من الزمرة G له الرتبة $n \in \mathbb{Z}^+$ إذا وفقط إذا كان $a^n = e$.

31. القاسم المشترك الأعظم لعددين صحيحين موجبين هو أكبر عدد صحيح موجب يقسم كليهما.

32. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ.

______ أ. كل زمرة دورية تكون إبداليّة.

______ **ب.** كل زمرة إبداليّة تكون دورية.

______ **جـ.** $\mathbb{Q}$ بالنسبة إلى الجمع هي زمرة دورية.

______ د. أي عنصر من أيّ زمرة دورية يولد الزمرة.

______ هـ. هناك على الأقل زمرة إبداليّة واحدة من أيّ رتبة منتهية > 0.

______ و. كل زمرة من رتبة ≤ 4 تكون دورية.

______ ز. كل مولّدات $\mathbb{Z}_{20}$ أعداد أوّلية.

______ ح. إذا كانت G و G' زمرتين، فإنّ $G \cap G'$ زمرة.

______ ط. إذا كانت H و K زمرتين جزئيتين من زمرة G، فإنّ $H \cap K$ زمرة.

______ ي. كل زمرة دورية من رتبة > 2 لها على الأقل مولّدان مختلفان.

في التمارين من 33 إلى 37، أعطِ مثالًا على زمرة بالخاصية الموصوفة، أو وضّح لماذا لا يتوافر مثل هذا المثال.

33. زمرة منتهية ليست دورية.

34. زمرة لا نهائية ليست دورية.

35. زمرة دورية لها مولّد واحد فقط.

36. زمرة دورية لا نهائية لها أربعة مولّدات.

37. زمرة دورية منتهية لها أربعة مولّدات.

مولدات زمرة الضرب الدورية U_n المؤلفة من الجذور النونيّة كلها للواحد في $\mathbb{C}$ هي **الجذور النونيّة البدائية للواحد** (**primitive *n*th roots of unity**). في التمارين من 38 إلى 41، أوجد الجذور النونيّة البدائية للواحد لقيمة n المعطاة.

38. $n = 4$

39. $n = 6$

40. $n = 8$

41. $n = 12$

براهين مختصرة

42. أعطِ اختصارًا بجملة واحدة لإثبات المبرهنة 1.6.

43. أعطِ اختصارًا بما لا يزيد على ثلاث جمل لإثبات المبرهنة 6.6.

براهين

44. لتكن G زمرة بمولّد a، G' زمرة تُماثل G. إذا كان $\phi: G \longrightarrow G'$ تماثلًا، أثبت أنه لكل $x \in G$، تتحدد $\phi(x)$ تمامًا من قيمة $\phi(a)$، أي إنه إذا كان: $\phi: G \to G'$ و $\psi: G \longrightarrow G'$ تماثلين، بحيث إنّ، $\phi(a) = \psi(a)$ فإنّ $\phi(x) = \psi(x)$ لكل $x \in G$

45. ليكن r و s عددين صحيحين موجبين. أثبت أنّ $\{nr + ms \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ هي زمرة جزئيّة من $\mathbb{Z}$.

46. ليكن a و b عنصرين من زمرة G. أثبت أنه إذا كانت ab لها رتبة منتهية n، فإنّ ba لها الرتبة n كذلك.

47. ليكن r و s عددين صحيحين موجبين.

أ. عرّف **المضاعف المشترك الأصغر** (**least common multiple**) لـِ r و s بوصفه مولّدًا لزمرة دورية ما.

ب. تحت أيّ شروط يكون المضاعف المشترك الأصغر لـِ r و s حاصل ضربهما rs؟

جـ. تعميمًا للفرع (ب)، أثبت أنّ حاصل ضرب القاسم المشترك الأعظم والمضاعف المشترك الأصغر لـِ r و s هو rs.

48 أثبت أنّ الزمرة التي لها فقط عدد منتهٍ من الزمر الجزئيّة يجب أن تكون زمرة منتهية.

49 بيّن بمثال مناقض أنّ "عكس" المبرهنة 6.6 الآتي ليس مبرهنة: "إذا كانت الزمرة G تحقّق أنّ كل زمرة جزئيّة فعلية

منها دورية، فإنّ G دورية".

50. لتكن G زمرة وافترض أنّ $a \in G$ تولّد زمرة جزئيّة دورية من الرتبة 2 وأنها العنصر الوحيد بهذه الصفة. أثبت أنّ $ax = xa$ لكل $x \in G$. [مساعدة: اعتبر $(xax^{-1})^2$].

51. ليكن p و q عددين أوّليّين مختلفين. أوجد عدد مولّدات الزمرة الدورية $\mathbb{Z}_{pq}$.

52. لتكن p عددًا أوّليًا. أوجد عدد مولّدات الزمرة الدورية $\mathbb{Z}_{p^r}$ ، حيث r عدد صحيح ≥ 1.

53. أثبت أنه في الزمرة الدورية المنتهية G ذات الرتبة n – مكتوبة بالضرب – للمعادلة $x^m = e$ بالضبط m حلٌ x في G لكل عدد صحيح موجب m يقسم n.

54. بالرجوع إلى التمرين 53، ما الوضع إذا كان $1 < m < n$ و m لا تقسم n؟

55. أثبت أنّ $\mathbb{Z}_p$ ليس لها زمر جزئيّة فعلية غير تافهة إذا كانت p عددًا أوّليًا.

56. لتكن G زمرة إبداليّة، ولتكن H و K زمرتين جزئيّتين دوريتين منتهيتين، حيث $|H| = r$ و $|K| = s$.

أ. أثبت أنه إذا كان r و s أوّليّين نسبيًا، فإنّ G تحوي زمرة جزئيّة دورية من الرتبة rs.

ب. تعميمًا للفرع (أ)، أثبت أنّ G تحوي زمرة جزئيّة دورية رتبتها المضاعف المشترك الأصغر لـ r و s.

الفصل 7 المجموعات المولّدة ورسومات كايلي الموجّهة
Generating Sets And Cayley Digraphs

لتكن G زمرة، وليكن $a \in G$. لقد وصفنا الزمرة الجزئيّة $\langle a \rangle$ من G، التي هي أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي العنصر a. افترض أننا نرغب في إيجاد أصغر زمرة جزئيّة ممكنة تحوي كلًّا من a وعنصرًا آخر b من G ، حيث نرى من المبرهنة 17.5 أنّ أيّ زمرة جزئيّة تحوي a و b يجب أن تحوي a^n و b^m لكل $m,n \in \mathbb{Z}$، ونتيجة لذلك، يجب أن تحوي جميع حواصل الضرب المنتهية لمثل هذه القوى لـ a و b، كالتعبير $a^2b^4a^{-3}b^2a^5$ مثلًا. لاحظ أنه لا يمكننا "تبسيط" هذا التعبير بكتابة قوى a أولًا متبوعةً بقوى b؛ لأن G يمكن أن تكون غير إبدالّية، لكن حواصل ضرب تعبيرات من هذا النوع هي تعبيرات من النوع نفسه، إضافة إلى ذلك، $e = a^0$ ونظير تعبير من هذا النوع هو أيضًا تعبير من النوع نفسه، فعلى سبيل المثال: نظير $a^2b^4a^{-3}b^2a^5$ هو $a^{-5}b^{-2}a^3b^{-4}a^{-2}$. بحسب المبرهنة 14.5، هذا يثبت أنّ حواصل الضرب هذه كلها لقوى صحيحة لـ a و b تشكل زمرة جزئيّة من G، التي يجب أن تكون بالتأكيد أصغر زمرة جزئيّة تحوي a و b. نسمّي a و b **مولّدين (generators)** لهذه الزمرة الجزئيّة، وفي حالة أنّ هذه الزمرة الجزئيّة هي كل G، فنقول: إنّ $\{a,b\}$ **تولّد (generates)** G، وبالطبع، ليس محجورًا علينا أخذ عنصرين فقط $a,b \in G$، فيمكننا إجراء المناقشة نفسها لثلاثة، أو أربعة، أو أي عدد من العناصر من G، طالما أخذنا فقط حواصل ضرب منتهية لقواها الصحيحة.

1.7 مثال زمرة كلاين الرباعية $V = \{e,a,b,c\}$ في المثال 9.5 تُولَّد بـ $\{a,b\}$؛ لأن $ab = c$. وهي كذلك تُولَّد بـ $\{a,c\}$، $\{b,c\}$، و $\{a,b,c\}$، فإذا وُلّدت الزمرة G بمجموعة جزئيّة S، فإنّ أيّ مجموعة جزئيّة من G تحوي S تُولِّد G. ▲

2.7 مثال الزمرة $\mathbb{Z}_6$ تُولَّد بـ $\{1\}$ و $\{5\}$، وهي كذلك تُولَّد بـ $\{2,3\}$؛ لأن $5 = 3 + 2$؛ ولذلك، فإنّ أيّ زمرة جزئيّة تحوي 2 و 3 يجب أن تحوي 5، وعليه، يجب أن تكون $\mathbb{Z}_6$ هي أيضًا تُولَّد بـ $\{3,4\}$، $\{2,3,4\}$، $\{1,3\}$، و $\{3,5\}$، لكنها لا تُولَّد بـ $\{2,4\}$؛ لأن $\langle 2 \rangle = \{0,2,4\}$ تحوي 2 و 4. ▲

لقد أعطينا تفسيرًا بدهيًّا للزمرة الجزئيّة من زمرة G المُوَلَّدة بمجموعة جزئيّة من G. فيما يأتي شرح تفصيلي للفكرة نفسها بطريقة أخرى، تحديدًا من خلال تقاطع زمر جزئية، فبعد أن ندرك مفهومًا ما إدراكًا بدهيًّا، فمن الرائع أن نحاول كتابته بصورة أنيقة قدر الإمكان. نعطي تعريفًا مبنيًّا على مبرهنة المجموعات، ونعمّم مبرهنة وردت في التمرين 54 من الفصل 5.

3.7 تعريف لتكن $\{S_i \mid i \in I\}$ تكتّلًا من مجموعات، وهنا يمكن أن تكون I أيّ مجموعة من الأدلّة، **التقاطع** $\bigcap_{i \in I} S_i$ **للمجموعات S_i (intersection of the sets)** هو مجموعة العناصر كلها التي في المجموعات S_i كلها، أي إنّ:

$$\bigcap_{i \in I} S_i = \{x \mid x \in S_i \text{ لكل } i \in I\}.$$

إذا كانت I منتهية، $I = \{1,2,\ldots,n\}$، فيمكننا أن نشير إلى $\cap_{i \in I} S_i$ بـ

$$S_1 \cap S_2 \cap \ldots \cap S_n.$$ ■

4.7 مبرهنة تقاطع بعض الزمر الجزئيّة H_i من G، حيث $i \in I$ أيضًا زمرة جزئيّة من G.

البرهان لنثبت الانغلاق، لتكن $a \in \bigcap_{i\in I} H_i$ و $b \in \bigcap_{i\in I} H_i$؛ ولذلك، $a \in H_i$ لكل $i \in I$ و $b \in H_i$ لكل $i \in I$؛ لذلك $ab \in H_i$ لكل $i \in I$ ؛ لأن H_i زمرة، وعليه، يكون $ab \in \bigcap_{i\in I} H_i$.

لأنّ H_i زمرة جزئيّة لكل $i \in I$، فإنّ $e \in H_i$ لكل $i \in I$ ؛ ولذلك، $e \in \bigcap_{i\in I} H_i$.
أخيرًا، لـ $a \in \bigcap_{i\in I} H_i$ يكون $a \in H_i$ لكل $i \in I$، وعليه، يكون $a^{-1} \in H_i$ لكل $i \in I$، وهذا يضمن أنّ $a^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$. ♦

لتكن G زمرة، وليكن $a_i \in G$ حيث $i \in I$. توجد على الأقل زمرة جزئيّة من G تحوي العناصر a_i كلها، حيث $i \in I$، تحديدًا G ذاتها، وتؤكد المبرهنة 4.7 أننا لو أخذنا تقاطع الزمر الجزئيّة كلها من G التي تحوي a_i حيث $i \in I$، فسنحصل على زمرة جزئيّة H من G. هذه الزمرة الجزئيّة H هي أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي كل a_i حيث $i \in I$.

5.7 تعريف لتكن G زمرة، وليكن $a_i \in G$ حيث $i \in I$. أصغر زمرة جزئيّة من G تحوي $\{a_i \mid i \in I\}$ هي **الزمرة الجزئيّة المولّدة بـ (subgroup generated by)** $\{a_i \mid i \in I\}$. فإذا كانت هذه الزمرة الجزئيّة هي G كاملةً، فإنّ $\{a_i \mid i \in I\}$ **تولّد (generates)** G وألـ a_i **مولّدات (generators)** لـ G. وإذا توافرت مجموعة منتهية $\{a_i \mid i \in I\}$ تولّد G، فإنّ G **منتهية التولّد (finitely generated)**. ■

لاحظ أنّ هذا التعريف منسجم مع تعريفنا السابق لمولّد الزمرة الدورية، ولاحظ أيضًا أنّ العبارة a هي مولّدٌ لـ G تعني إمّا $G = \langle a \rangle$ أو a هي عنصر في مجموعة جزئيّة من G تولّد G، والسياق الذي تظهر فيه العبارة يحدّد المعنى المقصود. مبرهنتنا الآتية تعطي النظرة المتبصّرة لتركيب الزمرة الجزئيّة من G المولّدة بـ $\{a_i \mid i \in I\}$، التي تمت مناقشتها لمولّدين قبل المثال 1.7.

6.7 مبرهنة إذا كانت G زمرةً و $a_i \in G$ حيث $i \in I$، فإنّ عناصر الزمرة الجزئيّة H من G المولّدة بـ $\{a_i \mid i \in I\}$ هي بالتحديد تلك العناصر من G التي هي حاصل ضرب منتهٍ من قوى صحيحة لـ a_i، حيث يمكن ورود قوًى محدّدة لـ a_i مرّات عدّة في الضرب.

البرهان لتكن K مجموعة حواصل الضرب كلها المنتهية لقوًى صحيحة لـ a_i، عندئذ تكون $K \subseteq H$. نحتاج فقط إلى أن نلاحظ أنّ K زمرة جزئيّة لإتمام المطلوب؛ لأن H هي أصغر زمرة جزئيّة تحوي a_i حيث $i \in I$. لاحظ أنّ حاصل ضرب عناصر من K يبقى في K. ولأنّ $e = (a_i)^0$، نستنتج أنّ $e \in K$. لكل عنصر k من K، إذا شكلنا من حاصل الضرب الذي يعطي k حاصلَ ضربٍ جديد بترتيب عكسيّ لـ a_i وإشارات معاكسة للقوى نحصل على k^{-1} التي تنتمي إلى K، فمثلاً:

$$\left[(a_1)^3 \; (a_2)^2 (a_1)^{-7}\right]^{-1} = (a_1)^7 (a_2)^{-2} (a_1)^{-3}$$،

التي بدورها تنتمي إلى K. ♦

رسومات كايلي الموجهة

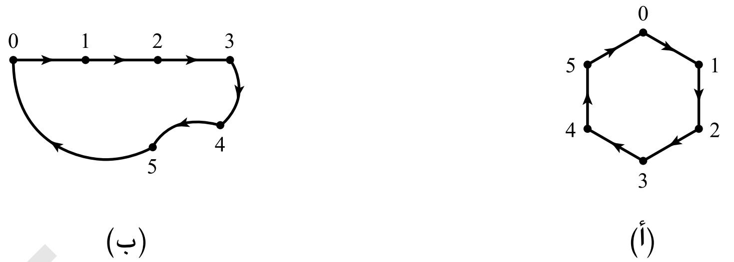
لكل مجموعة مولّدة S لزمرة منتهية G، يوجد رسم موجه (directed graph، وعادة ما تختصر digraph) يمثل الزمرة بدلالة المولّدات من S. هذه التمثيلات المرئية للزمر ابتكرت من قبل كايلي، وكذلك يشار إليها في المراجع بمخططات كايلي.

ببداهة، **الرسم الموجه (digraph)** يتكون من عدد منتهٍ من النقاط تسمّى **رؤوس (vertices)** الرسم الموجه، وبعض **الحواف (arcs)** (لكل منها اتجاه يشار إليه بسهم) التي تربط الرؤوس، ففي الرسم الموجه لزمرة G باستخدام مجموعة مولّدة S، لدينا رأس – ممثل بنقطة – لكل عنصر من G، وكل مولّد من S يشار إليه بنوع من الحواف، إذ يمكننا عند التعامل مع القلم والورق أن نستخدم ألوانًا مختلفة لأنواع الحواف المختلفة، ولأنّ الألوان المختلفة ليست متوافرة في كتابنا، فسنستخدم أنماطًا مختلفة من الحواف، متصلة ، مقطّعة، ومنقّطة مثلًا للإشارة إلى مولّدات مختلفة، فلو كان $S = \{a,b,c\}$، فيمكننا الإشارة إليها على النحو :

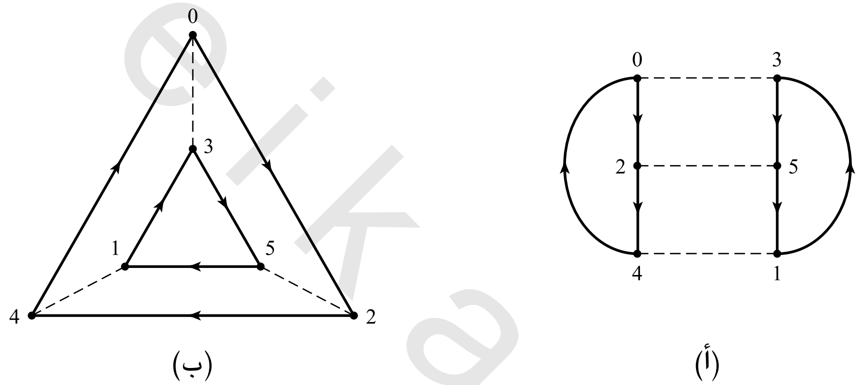
a: ——→——, b: ---→---, و c: ⋯⋯→⋯⋯.

مع هذه الرموز، ورود x•——→——•y في رسم كايلي الموجه يعني أنّ $xa = y$، أي إنّ الانتقال عبر حافّة في اتجاه السهم يدل على أنّ ضرب عنصر الزمرة عند بداية الحافّة من اليمين بالمولّد الذي يخصّ نوع الحافة ينتج عنصر الزمرة عند نهاية الحافّة. بالطبع، لأننا في زمرة، ندرك مباشرة أنّ $ya^{-1} = x$، ولهذا فالانتقال عبر الحافّة بعكس اتجاه السهم يقابل الضرب من اليمين بمعكوس المولّد المعنيّ، فإذا كان مولّد من S هو معكوس نفسه، فمن المألوف أن يشار إلى ذلك بحذف السهم من الحافة بدلًا من استخدام سهم مزدوج، مثلًا: إذا كان $b^2 = e$، فيمكننا أن نشير إلى b بـ ————————.

7.7 مثال كلا الرسمين الموجهين الظاهرين في الشكل 8.7 يمثل الزمرة $\mathbb{Z}_6$ مع المجموعة المولّدة $S = \{1\}$. ليس هناك أيّ أهمية لطول الحافّة وشكلها ولا للزاوية بين الحواف. ▲



الشكل 8.7 رسمان موجهان لـِ $\mathbb{Z}_6$ مع $S = \{1\}$ باستخدام $\xrightarrow{1}$.



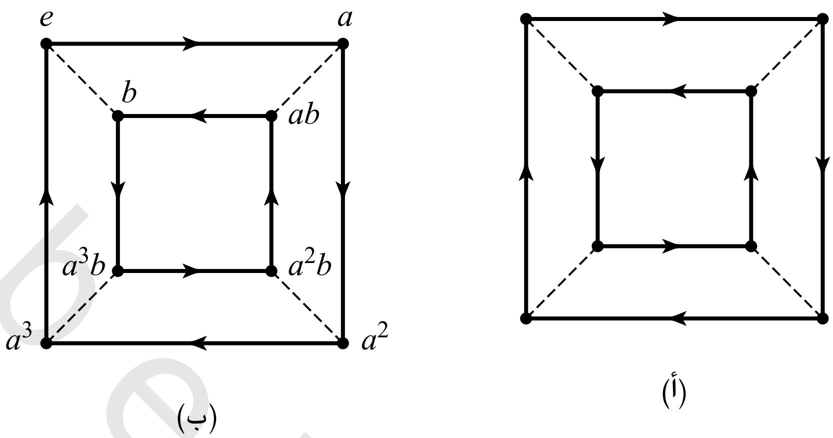
الشكل 9.7 رسمان موجهان لـِ $\mathbb{Z}_6$ مع $S = \{2,3\}$ باستخدام $\xrightarrow{2}$ و $\overset{3}{- - - -}$.

10.7 مثال كلا الرسمين الموجهين الظاهرين في الشكل 9.7 يمثلان الزمرة $\mathbb{Z}_6$ مع المجموعة المولّدة $S = \{2, 3\}$، ولأنّ 3 هي معكوس نفسها، فلا يتوافر سهم على الحواف المقطّعة التي تمثل 3. لاحظ كيف تبدو مخططات كايلي هذه مختلفة عن تلك التي في الشكل 8.7 للزمرة نفسها، ويعود سبب الاختلاف إلى الاختيار المختلف لمجموعة المولّدات. ▲

إنّ أيّ رسم موجه لزمرة يجب أن يحقّق هذه الخصائص الأربع للأسباب المشار إليها.

الخاصية	السبب
1- الرسم الموجه متصل، أي إنه يمكننا الانتقال من أيّ رأس g إلى أيّ رأس h عبر حوافّ متتالية بادئين من g ومنتهين بـ h.	أيّ معادلة $gx = h$ لها حل في الزمرة.
2- تنطلق حافّة واحدة على الأكثر من رأس g إلى رأس h.	الحل لـ $gx = h$ وحيد.
3- لكل رأس g حافّة واحدة بالضبط من كل نوع تبدأ من g، وأخرى من كل نوع تنتهي بـ g.	لـ $g \in G$ ولكل مولّد b يمكننا حساب gb، و $(gb^{-1})\,b = g$.
4- إذا قادت متتاليتان مختلفتان من أنواع الحواف ابتداء من رأس g إلى الرأس h نفسه، فإنهما ابتداءً من أيّ رأس u ستقودان إلى الرأس v نفسه.	إذا كان $gq = h$ و $gr = h$، فإنّ $ug^{-1}h = ur$

ويمكن بالعكس إثبات أنّ أيّ رسم موجهٍ يحقق هذه الخصائص الأربعة يكون رسم كايلي موجهًا لزمرة ما؛ وبسبب التماثل لمثل هذا الرسم الموجه، يمكننا اختيار أسماء، مثل a , b , c لأنواع الحواف المختلفة، وتسمية رأس e لتمثيل المحايد، وتسمية كل رأس آخر بحاصل ضرب أسماء حواف ومعكوساتها بصورة تنقلنا إلى هذا الرأس ابتداءً من الذي أسميناه e. بعض الزمر المنتهية أُنْشِئَت أول مرة (أُوْجِدت) باستخدام رسومات موجهة.



الشكل 11.7

12.7 مثال

يظهر في الشكل 11.7 (أ) رسم موجه يحقق الخصائص الأربعة في صفحة 71. للحصول على الشكل 11.7 (ب) اخترنا الأسماء.

وأسمينا رأسًا e، ثم أسمينا الرؤوس الأخرى كما هو مبين، وحصلنا على زمرة من ثمانية عناصر $\{e,a,a^2,a^3,b,ab\ ,a^2b,a^3b\}$، لاحظ أنّ العنصر الذي أسميناه ab يمكن تسميته كذلك ba^{-1}، الرأس الذي أسميناه a^3 يمكن تسميته a^{-1}، وهكذا، فإنّ حساب ضرب العناصر في هذه الزمرة ليس صعبًا، فلحساب $(a^3b)(a^2b)$ نبدأ من الرأس المسمّى a^3b، وننتقل حافّتين متصلتين متتاليتين، فحافّة مقطّعة لنصل إلى الرأس a؛ ولذلك، $(a^3b)(a^2b) = a$، وبهذا النمط يمكننا كتابة الجدول لهذه الزمرة ذات العناصر الثمانية. ▲

■ تمارين 7

حسابات

في التمارين من 1 إلى 6، اسرد عناصر الزمرة الجزئيّة المولدة بالمجموعة الجزئيّة المعطاة.

1. المجموعة الجزئيّة $\{2,3\}$ من $\mathbb{Z}_{12}$

2. المجموعة الجزئيّة $\{4,6\}$ من $\mathbb{Z}_{12}$

3. المجموعة الجزئيّة $\{8,10\}$ من $\mathbb{Z}_{18}$

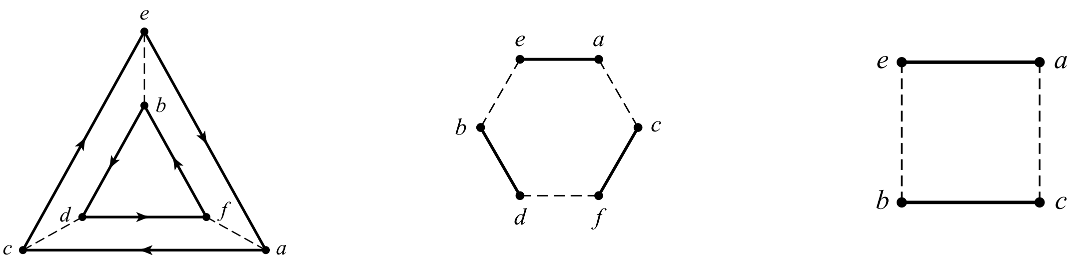
4. المجموعة الجزئيّة $\{12,30\}$ من $\mathbb{Z}_{36}$

5. المجموعة الجزئيّة $\{12,42\}$ من $\mathbb{Z}$

6. المجموعة الجزئيّة $\{18,24,39\}$ من $\mathbb{Z}$

7. للزمرة الموصوفة في المثال 12.7 احسب حواصل الضرب باستخدام الشكل 11.7 (ب).

أ. $(a^2b)a^3$ ب. $(ab)(a^3b)$ جـ. $b(a^2b)$



(جـ) (ب) (أ)

الشكل 13.7

في التمارين من 8 إلى 10، أعطِ جدول الزمرة ذات الرسم الموجه المشار إليه. وفي كل رسم موجه، خذ e بوصفها عنصرًا محايدًا. أورد e أولًا في جدولك، واسرد باقي العناصر بترتيب هجائي؛ حتى يسهل عليك التأكد من جوابك.

8. الرسم الموجه في الشكل 13.7 (أ).

9. الرسم الموجه في الشكل 13.7 (ب).

10. الرسم الموجه في الشكل 13.7 (جـ).

مفاهيم

11. كيف يمكننا من رسم كايلي الموجه استنتاج ما إذا كانت الزمرة المقابلة إبداليّة أم لا؟

12. بالرجوع إلى التمرين 11، حدّد ما إذا كانت الزمرة المقابلة لرسم كايلي الموجه في الشكل 11.7 (ب) إبداليّة.

13. هل يتضح من رسم كايلي الموجه لزمرة أنّ الزمرة دورية أم لا؟ [مساعدة: انظر إلى الشكل 9.7 (ب)].

14. المثلث الخارجي الكبير في الشكل 9.7 (ب) يُظهر الزمرة الجزئيّة الدورية $\{0, 2, 4\}$ من $\mathbb{Z}_6$. هل يُظهر بالمثل المثلث الداخلي الأصغر زمرة جزئيّة دورية من $\mathbb{Z}_6$؟ لماذا أو لماذا لا؟

15. المجموعة المولّدة $S = \{1, 2\}$ لـِ $\mathbb{Z}_6$ تحوي مولّدات أكثر مما يجب؛ لأن 1 مولد للزمرة، وعلى الرغم من ذلك، يمكننا رسم رسم كايلي الموجه لـِ $\mathbb{Z}_6$ مع هذه المجموعة المولدة S. ارسم مثل هذا الرسم.

16. ارسم رسم كايلي الموجه لـِ $\mathbb{Z}_8$ بأخذ المجموعة المولّدة $S = \{2, 5\}$.

17. العلاقة **(relation)** على مجموعة مولّدات S لزمرة G هي معادلة تساوي حاصل ضرب ما لمولّدات ومعكوساتها بالمحايد e من G فعلى سبيل المثال: إذا كانت $S = \{a,b\}$ و G إبداليّة، بحيث إنّ $ab = ba$، فإنّ $aba^{-1}b^{-1} = e$ هي علاقة، وإذا كان علاوة على ذلك b هي معكوس نفسها، فإنّ $b^2 = e$ هي علاقة أخرى.

أ. وضّح كيف يمكننا إيجاد بعض العلاقات على S من رسم كايلي الموجه لـِ G.

ب. أوجد ثلاث علاقات على مجموعة المولّدات $S = \{a,b\}$ للزمرة الموصوفة بالشكل 11.7 (ب).

18. ارسم رسومات موجهة للزمرتين من الرتبة 4 مختلفتي التركيب، بأخذ أصغر مجموعة مولّدات ممكنة في كل حالة. لا يلزمك تسمية الرؤوس.

براهين

19. أثبت أنه لـِ $n \geq 3$، توجد زمرة غير إبداليّة لها $2n$ عنصر، وتُولّد بعنصرين من الرتبة 2.