مقدّمة للمدرس

هذه مقدمة للجبر المجرّد، إذ إنه من المتوقع أن يكون الطلبة قد درسوا التفاضل والتكامل، وربما الجبر الخطي أيضًا، وعلى أيّة حال، فإنها متطلبات رياضية أولية؛ حيث تظهر الحاجة إلى التفاضل والتكامل والجبر الخطي غالبًا في الأمثلة التوضيحية والتمارين.

وكما هو الحال في الطبعات السابقة للكتاب، يبقى الهدف هو تعليم الطلاب أكبر قدر من المعلومات عن الزمر، والحلقات، والحقول في مقرر دراسي أول، وهذه أول تجربة للتعميم بدراسة الفرضيات الرياضية لكثير من الطلبة؛ وقد ضُمّن الكتاب تفسيرات مكثفة بخصوص ما نحاول تحقيقه، وكيف سنحاول عمله، ولماذا اخترنا هذه الطرق، حيث يشكل إتقان هذا الكتاب أساسًا قويًّا لعمل أكثر تخصصًا في الجبر، ويزود كذلك بتجربة قيمة لأيّ دراسة رياضية مستقبلية بالفرضيات.

تعديلات على الطبعة السادسة

ازدادت المادة التمهيدية من فصل واحد في الطبعة الأولى إلى أربعة فصول في الطبعة السادسة؛ ولأنني أفضل شخصيًّا قضاء وقت قليل قبل الدخول إلى الجبر؛ فقد قضيت وقتًا أقلّ في التمهيد، كان أغلبه مراجعة لكثير من الطلبة، إذ من الممكن ألا يترك لنا قضاء أربعة دروس في التمهيد الوقت الكافي لمعالجة المقرر الدراسي عند الوصول إلى المادة الجديدة؛ ولذلك، عدت في هذه الطبعة إلى فصل تمهيدي واحد على المجموعات والعلاقات، تاركًا بقية الموضوعات لمراجعتها عند الحاجة. ويظهر تلخيص للمصفوفات في ملحق هذه الطبعة.

تكوّنت الطبعتان الأوليان من فصول قصيرة متتالية، يمكن تغطيتها في محاضرة واحدة، وقد رجعت إلى هذا التصميم لتجنب الترقيم الثلاثي المتعب للتعريفات، والمبرهنات، والأمثلة، ...إلخ، أضف إلى ذلك، فقد تغيّر ترتيب العرض؛ وذلك استجابة لاقتراحات المراجعين، بحيث تُغطى مادة الزمر، والحلقات، والحقول بصورة طبيعية في فصل دراسي واحد أولاً، قبل المبرهنة المتقدّمة للزمر، الفصل 1 مقدمة جديدة، في محاولة لإعطاء الشعور حول طبيعة هذه الدراسة.

واستجابة لكثير من الطلبات أيضًا، فقد ضمّنت مادة على الزمر الشباهية في الطبولوجيا، التي ظهرت سابقًا في الطبعتين الأوليين؛ لأن حسابات زمر الشباه تقوي فهم الطالب لزمر العامل، مع مراعاة سهولة الوصول إلى المادة من الفصل 0 إلى 15، إذ يحتاج المرء فقط إلى القراءة عن الزمر الإبدالية الحرة في الفصل 38 من خلال المبرهنة 5.38 بوصفها تمهيدًا، ولأترك مجالاً لزمر الشباه، فقد حذفت مناقشة ذاتيات الحركة، والشيفرات الخطية الثنائية، والبنى الجبرية الإضافية التي ظهرت في الطبعة السادسة.

وضمّنت كذلك القليل من التمارين التي تطلب من الطالب أن يعطي جملة أو جملتين بوصفهما برهانًا مختصرًا لإثباتٍ ظهر في الكتاب، فضلًا عن أنني أعطيت مثالاً لما أتوقعه، قبل هذه التمارين.

بعض المزايا الأخرى

استمرّ تقسيم معظم التمارين إلى أجزاء تتكوّن من حسابات، ومفاهيم، ومبرهنة، وظهرت كذلك إجابات

للتمارين الفردية التي لا تسأل عن البرهان في آخر الكتاب، واستجابة للمقترحات وضعت إجابات للأجزاء (أ)، و(جـ)، و(هـ)، و(ز)، و(ط) فقط لتمارين الصواب والخطأ المكونة من عشرة أجزاء.

وتوجد كذلك الملاحظات التاريخية لفيكتور كاتز بالطبع، إضافة إلى دليل يحوي الحلول كاملة للتمارين جميعها، بما فيها التمارين التي تسأل عن البرهان، وهو متوافر للمدرسين من قبل الناشر.

تظهر خريطة التتابع بأرقام الفصول في المقدمات بصفتها مساعدة على عمل خطة الدراسة.

شكر

كل الامتنان لأولئك الذين راجعوا الكتاب، أو أرسلوا اقتراحاتهم وتصويباتهم، إذ إنني مدين بصورة خاصة لجورج م. بيرجمان، الذي استخدم الطبعة السادسة في عمل قائمة بالأخطاء المطبعية وغيرها، وأرسلها لي مع كثير من الاقتراحات القيمة للتطوير، أقدر حقيقة هذا الجهد الذي لا شك في أنه أنفق عليه الكثير من وقته.

وأود كذلك أن أعرب عن تقديري لوليام هوفمان، وجولي لاشانس، وسندي كودي من مؤسسة أديسون – ويزلي؛ لمساعدتهم في هذا المشروع. أخيرًا، لقد كنت محظوظًا جدًّا بجون بروبست والفريق في "Tech Books" الذين قاموا بإنتاج هذا الكتاب من مخطوطتي، فقد أنتجوا أكثر صفحات الكتاب خالية من الأخطاء ، وساعدوني بكل أدب على حلّ مشكلة فنية واجهتها في أثناء إعداد دليل الحلول.

اقتراحات لمدرسي الجبر الجدد

الملاحظات التي أذكرها هنا ليست ضرورية لأولئك الذين درّسوا الجبر مرات عدّة، واكتشفوا الصعوبات، وطوروا حلولهم الخاصة.

يمثل هذا المقرر الدراسي نقلة نوعية للطلاب من تفاضل وتكامل البكالوريوس التقليدي، إذ لن يكون مجديًا لمعظم الطلاب استخدام أسلوب طلبة الدراسات العليا بعرض المحاضرة، وكتابة التعريفات والبراهين على السبورة لمعظم وقت المحاضرة، وقد وجدت أنه من الأفضل أن أقضي– على الأقل– النصف الأول من وقت المحاضرة، بإجابة أسئلة الواجب المنزلي، ومحاولة الحصول على متطوعين لإعطاء برهان أحد التمارين المطلوبة، وبوجه عام، التحقق من فهم الطلبة للمادة التي سبق، وكلفوا بها، إذ إنني أقضي عادة على الأقل آخر 20 دقيقة من محاضرة ألـ 50 دقيقة، في الحديث عن الأفكار الجديدة للمحاضرة القادمة، وإعطاء برهان واحد على الأقل، تُعدّ محاولة كتابة التعريفات والبراهين جميعها على السبورة من وجهة النظر العملية مضيعة للوقت؛ لإنها بالطبع موجودة في الكتاب.

أقترح أن تكون –على الأقل– نصف التمارين المطلوبة من الطلاب من تمارين الحسابات، فقد اعتادوا عليها في التفاضل والتكامل، وعلى الرغم من وجود كثير من التمارين التي تسأل عن البراهين، والتي نحب تكليف الطلبة بها، فإنني أنصح بالتكليف بتمرينين أو ثلاثة من مثل هذه التمارين، ومحاولة تكليف أحدهم بشرح كيفية أداء كل برهان في المحاضرة المقبلة. أعتقد أنه يتعيّن تكليف الطلبة إثبات واحد على الأقل في كل واجب منزلي.

يواجه الطلبة وابلاً لا ينتهي من التعريفات والمبرهنات، وهو شيء لم يصادفه الطلبة قط من قبل، ولم يعتادوا إتقان هذا النوع من المواد، فضلًا عن أنّ علامات الامتحانات التي تبدو معقولة بالنسبة إلينا – والتي تطلب قليلاً من التعريفات والبراهين – تكون عادة قليلة ومحبطة لكثير من الطلبة.

وقد ظهرت توصيتي لمعالجة هذه المشكلة في المقال "Happy Abstract Algebra classes" في عدد نوفمبر عام 2001م في إصدار ألـ (MMA FOCUS).

لدينا في جامعة رود أيلاند، مقرر دراسي لفصل واحد في الجبر المجرد لطلبة البكالوريوس، إذ إنّ فصولنا قصيرة جدًّا، ومكوّنة من محاضرات بقرابة (42 – 50) دقيقة، أعطيت ثلاثة اختبارات في حصة ألـ (50) دقيقة عندما درّست المقرر الدراسي ، تاركًا قرابة (38) حصة للتدريس، التي أكلف الطلبة فيها عادةً بواجبات منزلية، وأغطي المادة عادة في الفصول 0 – 11، 13 – 15، 18 – 23، 26، 27،

و29 – 32، التي تساوي (27) فصلاً، بالطبع، أقضي أكثر من حصة في كثير من الفصول، ولكني أجد عادة الوقت لتغطية فصلين آخرين، وأضيف أحيانًا الفصلين 16 و 17. (لا معنى لتقديم الفصل 16 إلا إذا قدّم الفصل 17، أو أقدم الفصل 36 لاحقًا) ، إضافة إلى أنني أغطي عادة الفصل 25 وأحيانًا الفصل 12 (راجع خريطة التتابع)، إذ إنّ الواجب يقضي بعدم إحباط الطلبة في الأسابيع الأولى للمقرر الدراسي.

مقدّمة للطالب

قد يحتاج هذا المقرر الدراسي إلى طرق مختلفة عن تلك التي استخدمتها في مقررات الرياضيات الدراسية السابقة، ومن الممكن أنك أصبحت معتادًا على أداء مسائل الواجب المنزلي من خلال الرجوع للكتاب والبحث عن مسائل مشابهة، ومن ثم تعديل بعض الأرقام فقط، هذا قد يصلح في القليل من تمارين هذا الكتاب، ولكنه لن يصلح لمعظمها، وقد أصبح الفهم لهذا الموضوع مهمًا جدًّا، بحيث لا يُتعامل مع التمارين من غير دراسة الكتاب.

أقدم لك بعض المقترحات لدراسة هذا الكتاب، لاحظ أنّ الكتاب مليء بالتعريفات، والمبرهنات، والنتائج، والأمثلة، فالتعريفات حاسمة، ويجب أن نتفق على المصطلحات؛ لنحرز التقدم، وقد يتبع التعريفَ أحيانًا مثال يوضح المفهوم، إذ ربما تكون الأمثلة أكبر مساعد على دراسة الكتاب؛ ولذلك، أوليت اهتمامًا بالأمثلة، وأقترح أن تتجاوز إثباتات المبرهنات في قراءتك الأولى للفصل، إلا إذا كنت مغرمًا تمامًا بالبراهين، حيث يجب أن تقرأ نصّ المبرهنة، وتحاول أن تفهم فقط ماذا تعني، ثمّ يأتي في العادة مثال يوضح المبرهنة، وهذا يساعد تمامًا على فهم ما تقوله المبرهنة.

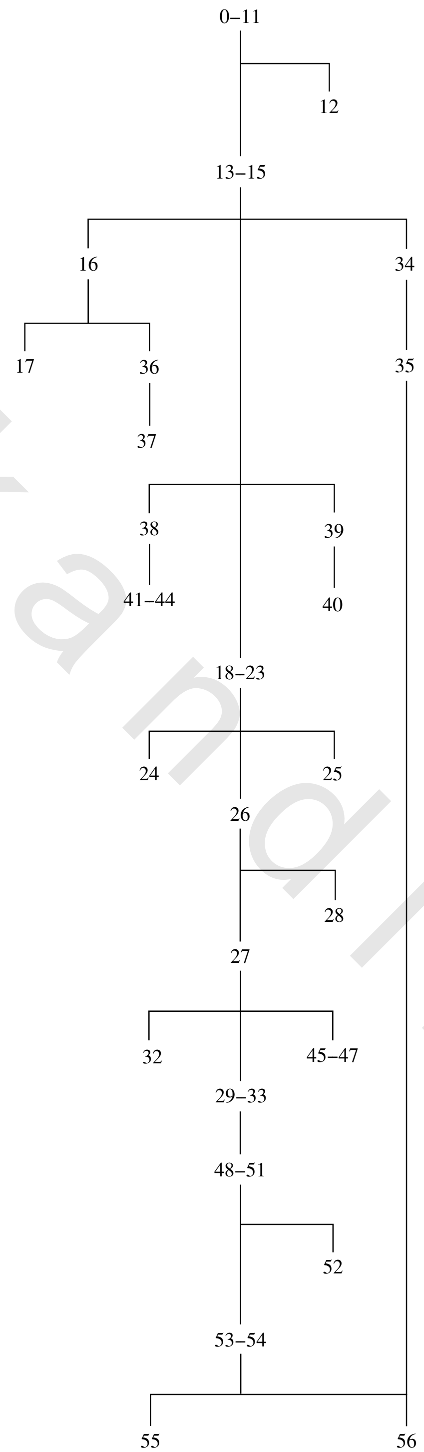
تلخيصًا لذلك، في قراءتك الأولى للفصل، أقترح أن تركز على المعلومات التي يعطيها الفصل، وتحاول اكتشاف فهم حقيقي له، فإذا لم تفهم نصّ المبرهنة، فمن المحتمل أنه لا معنى لقراءتك للإثبات. البراهين أساسية في الرياضيات، وإذا شعرت بأنك قد فهمت المعلومات المعطاة في الفصل، فعليك قراءة البراهين ومحاولة فهم بعضها على الأقل، ومن الجدير بالذكر أنّ براهين النتائج في العادة هي الأسهل؛ لأنها غالبًا تنتج مباشرة من المبرهنة، إضافة إلى أنّ الكثير من التمارين تحت العنوان «مبرهنة» تسأل عن البرهان؛ لذا، حاول ألا تحبط من البداية، فهي تحتاج إلى بعض التمرين والخبرة، فالبراهين في الجبر يمكن أن تكون أكثر صعوبة من البراهين في الهندسة والتفاضل والتكامل؛ لأنه لا توجد في العادة رسمات مقترحة يمكنك رسمها، وغالبًا ينتج البرهان بسهولة إذا حدث، ونظرت فقط إلى المصطلح الصحيح. بالطبع، لا فائدة من تصميم برهان إذا لم تفهم ما الذي تحاول إثباته، على سبيل المثال: إذا سألك تمرين لتثبت أنّ شيئًا معطًى ينتمي لمجموعة محددة، فيجب عليك أن تعرف المعيار المعرّف للعنصر في تلك المجموعة، ومن ثم تبرهن أنّ الشيء المعطى لك يحقق هذا المعيار.

هناك كثير من المساعدات لك على الدراسة في نهاية الكتاب. بالطبع، ستكتشف إجابات الأسئلة الفردية التي لا تسأل عن البرهان، وإذا مررت برمز لا تعرفه مثل $\mathbb{Z}_n$ مثلاً، فانظر إلى مسرد الرموز الذي يظهر بعد ثبت المراجع، أمّا إذا مررت بمصطلح لا تعرفه، مثل التماثل الذاتي الداخلي، فيمكنك البحث في مسرد المصطلحات عن الصفحة الأولى لظهور هذا المصطلح.

الخلاصة، على الرغم من أنّ فهم الموضوع مهم في كل مقرر دراسي للرياضيات، فإنه في الحقيقة حاسم لأدائك في هذا المقرر الدراسي، الذي عسى أن تجد فيه خبرة مجزية.

ج. ب. ف

خريطة التتابع



الفصل 0 المجموعات والعلاقات Sets And Relations

حول التعريفات ومفهوم المجموعة

لا يدرك كثير من الطلبة الأهمية الكبرى للتعريفات في الرياضيات، وتنشأ هذه الأهمية من حاجة الرياضيين إلى التواصل فيما بينهم، فلو حاول شخصان التواصل فيما بينهما حول موضوع ما، فلا بد أن يكونا مشتركين في فهم مفرداته التقنية. وعلى أيّ حال هناك ضعفٌ بنائي مهم في هذا الأمر.

إنه من المستحيل أن نعرّف كل مفهوم.

مثلًا افترض أننا عرّفنا مفهوم المجموعة على هذا النحو: "**المجموعة (set)** هي جماعة مكونة من أشياء"، فمن الطبيعي أن يسأل المرء عن المقصود بالجماعة، وهذا يجعلنا نعرفها على النحو الآتي: "الجماعة هي تجمّع من أشياء"، وهنا يظهر السؤال الآتي: ما التجمّع؟ ولأن مفردات اللغة منتهية، فسنجد أنفسنا بعد حين نستخدم كلمات سبق استخدامها (تقليدية أو مبتذلة)، وعندها يكون التعريف مفرغًا من معناه وعديم الأهمية، ويدرك الرياضيون أنه لا بدّ من وجود مفاهيم غير معرّفة أو بدائية نبدأ منها، وقد اتفقوا حاليًا على أن المجموعة هي أحد هذه المفاهيم البدائية، فضلًا عن أننا لن نعرّف المجموعة، لكننا نأمل أنه إذا ذكرت عبارات، مثل "مجموعة الأعداد الحقيقية" أو "مجموعة أعضاء مجلس الشيوخ الأمريكي" أن تكون مفاهيم الناس المختلفة للمقصود متشابهة بما يكفي لجعل التواصل معقولًا.

نجمل بعض الأشياء التي سنفترضها حول المجموعات باختصار كالآتي:

1. تتكوّن المجموعة S من **عناصر (elements)**، وإذا كان a أحد هذه العناصر، فنشير إلى ذلك بالرمز $a \in S$.

2. هناك مجموعة واحدة بالضبط ليس فيها عناصر، وهي **المجموعة الخالية (empty set)** ويرمز لها بـ $\emptyset$.

3. يمكننا وصف المجموعة، إما بإعطاء صفة مميزة لعناصرها، مثل «مجموعة أعضاء مجلس الشيوخ الأمريكي» أو بسرد العناصر. الطريقة القياسية لوصف مجموعة بسرد العناصر هي بحصر أسماء العناصر – مفصولة بفواصل – بين حاصرتين، على سبيل المثال $\{1، 2، 15\}$ إذا وصفت مجموعة بصفة مميزة $P(x)$ لعناصرها x، فإنه عادة ما يستخدم رمز الحواصر $\{x \mid P(x)\}$ ويقرأ «مجموعة كل x بحيث إن العبارة $P(x)$ عن x صحيحة» وعليه:

$$\{x \mid \text{عدد صحيح موجب أقل من أو يساوي 8 } x\} = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$= \{2x \mid x = 1 ,2 ,3 ,4\}$$

الرمز $\{x \mid P(x)\}$ عادة ما يسمى «رمز بناء– المجموعة».

4. **المجموعة حسنة التعريف (well defined)** تعني أنه إذا كانت S مجموعة و a شيء ما، فإنه إما a في S – ويرمز لها بـ $a \in S$ – أو بالتأكيد a ليس في S – ويرمز لها بـ $a \notin S$. ومن ثم يجب علينا ألا نقول أبدًا "اعتبر المجموعة S لبعض الأعداد الموجبة،" لأنه ليس واضحًا فيما إذا كان $2 \in S$ أو $2 \notin S$. من الناحية الأخرى، يمكننا اعتبار المجموعة T لكل الأعداد الصحيحة الموجبة الأولية حسنة التعريف وذلك لأن كل عدد صحيح موجب هو بلا ريب إما أوليًا أو غير أولي. ومن ثم $5 \in T$ و $14 \notin T$. من الممكن أن يكون صعبًا أن نحدد بالفعل ما إذا كان شيء ما في مجموعة. على سبيل المثال، عندما أرسل هذا الكتاب للطباعة من المحتمل أنه لم يكن معلومًا فيما إذا كان $2^{\left(2^{65}\right)} + 1$ في T. على أي حال، من المؤكد أن $2^{\left(2^{65}\right)} + 1$ إما أوليًا أو غير أولي.

ومن غير الملائم في هذا الكتاب أن نُرْجِع تعريف كل شيء نستخدمه إلى مفهوم المجموعة، فمثلاً: لن نُعَرِّفَ العدد π بدلالة مجموعةٍ أبدًا.

كل تعريف هو عبارة من النوع إذا وفقط إذا.

مع هذا الفهم تُذكَر التعريفات عادة بحذف فقط إذا، لكنها دائمًا تُفهم بوصفها جزءًا من التعريف، وعليه، يمكننا تعريف المثلث متساوي الساقين على النحو: "يكون المثلث **متساوي الساقين (isosceles)** إذا كان له ضلعان متساويان في الطول،" وهذا نعني به حقيقةً أن المثلث متساوي الساقين إذا وفقط إذا كان له ضلعان متساويان في الطول.

يتعيّن علينا في كتابنا هذا تعريف الكثير من المصطلحات، فنستخدم على وجه التخصيص ترقيمًا وتعليمًا لتعريفات المفاهيم الجبرية الرئيسة التي نهتم بها، ولتجنب كمية مربكة من مثل هذه التعليمات والترقيمات، عرّفنا كثيرًا من المصطلحات ضمن متن الكتاب وتمارينه باستخدام الطباعة بالحرف الغامق.

اصطلاح الخط الغامق
المصطلح المطبوع **بحرف غامق** في جملة يتم تعريفه في تلك الجملة.

لا تعتقد أن عليك أن تحفظ التعريف حرفيًّا، بل إن الشيء المهم إدراك المفهوم، وعليه، يمكنك بالضبط تعريف المفهوم نفسه بكلماتك الخاصة، وهكذا فالتعريف الآتي: "المثلث **المتساوي الساقين** هو مثلث له ضلعان متساويان " هو على نحو كاملٍ صحيح، وقد كان لزامًا علينا أن نؤخر صياغتنا لمصطلح الخط الغامق إلى ما بعد استخدامناً له في مناقشة تعريف المجموعة؛ وذلك لأننا لم نكن عرّفنا المجموعة بعد!

سنعرّف في هذا الفصل بعض المفاهيم المألوفة بوصفها مجموعات، وذلك لتوضيحها ومراجعتها، ونعطي أولًا بعض التعريفات والرموز.

1.0 تعريف المجموعة B **مجموعة جزئيّة من مجموعة (subset of a set)** A يرمز لها بـ $B \subseteq A$ أو $A \supseteq B$ إذا كان كل عنصر في B هو في A، وستستخدم الرموز $B \subset A$ أو $A \supset B$ لـِ $B \subseteq A$ ، لكن $B \neq A$. ■

لاحظ أنه وفقًا لهذا التعريف، لأيّ مجموعة A، A نفسها و ϕ كلتاهما مجموعتان جزئيّتان من A.

2.0 تعريف إذا كانت A أيّ مجموعة، فإن A **مجموعة جزئيّة غير فعليّة من (improper subset of)** A، أيّ مجموعة جزئيّة أخرى من A هي **مجموعة جزئيّة فعليّة من (proper subset of)** A. ■

3.0 مثال لتكن $S = \{1, 2, 3\}$. هذه المجموعة S لها بصورة كلّية ثماني مجموعات جزئيّة، هي:

$$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$$ ▲

4.0 تعريف لتكن A و B مجموعتين، المجموعة $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ و } b \in B\}$ هي **الضرب الديكارتي (Cartesian product)** لـِ A و B. ■

5.0 مثال إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{3, 4\}$، فإن لدينا:

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$$ ▲

خلال هذا الكتاب سينجز كثير من العمل متضمنًا مجموعات أعدادٍ مألوفة، لنعتني برموز هذه المجموعات مرة واحدة وأخيرة.

$\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة (الأعداد الصحيحة: الموجبة، والسالبة، والصفر).

$\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد النسبيّة (الأعداد التي يمكن التعبير عنها بوصفها خوارج قسمة m/ n لأعداد صحيحة، حيث $n \neq 0$).

$\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقيّة.

$\mathbb{Z}^+$، $\mathbb{Q}^+$، و $\mathbb{R}^+$ هي مجموعات الأعداد الموجبة في $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، و $\mathbb{R}$ على الترتيب.

$\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركّبة.

$\mathbb{Z}^*$، $\mathbb{Q}^*$ ، $\mathbb{R}^*$ ، و $\mathbb{C}^*$ هي مجموعات الأعداد غير الصفريّة في $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{R}$، و$\mathbb{C}$، على الترتيب.

6.0 مثال المجموعة $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ هي المستوى الإقليدي المألوف الذي نستخدمه في أوّل مقرر دراسي تفاضل وتكامل لرسم بيانات دوالّ. ▲

العلاقات بين المجموعات

سنقدم الآن مفهوم ارتباط عنصر a من مجموعة A مع عنصر b من مجموعة B، التي يمكننا أن نرمز لها بـ $a\mathscr{R}b$ ، حيث إنّ الرمز $a\mathscr{R}b$ يُظْهِرُ العنصرين a و b بترتيب من اليسار إلى اليمين، كما في الرمز (a, b) لعنصر في $A \times B$، وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي لعلاقة $\mathscr{R}$ بوصفها مجموعة.

7.0 تعريف **العلاقة (relation)** بين مجموعتين A وB، هي مجموعة جزئيّة $\mathscr{R}$ من $A\times B$. فنقرأ $(a,b) \in \mathscr{R}$ على النحو "a ترتبط بـ b"، ونكتب $a \mathscr{R} b$. ■

8.0 مثال (**علاقة المساواة (Equality Relation)**): توجد علاقة مألوفة واحدة بين مجموعة ونفسها، حيث نعُدّ كل مجموعة S ذكرت في هذا الكتاب تمتلكها: أي علاقة المساواة = المعرفة على مجموعة S بـ

= هي المجموعة الجزئيّة $\{(x,x) \mid x \in S\}$ من $S \times S$.

وعليه، لأيّ $x \in S$ لدينا $x = x$، لكن إذا كان x و y عنصرين مختلفين في S، فإن

$(x,y) \notin =$، ونكتب $x \neq y$. ▲

سنشير إلى أيّ علاقة بين مجموعة S ونفسها – كما في المثال السابق– بوصفها **علاقة على S (relation on)**.

9.0 مثال البيان للدالّة f حيث $f(x) = x^3$ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، هو المجموعة الجزئيّة $\{(x,x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$ من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ، وعليه، هي علاقة على $\mathbb{R}$ ، حيث تُحَدَّد الدالّة تمامًا من خلال بيانها. ▲

يقترح المثال السابق بدلاً من تعريف "دالّة" $y = f(x)$ لتكون "قاعدة" تخصِّص لكل $x \in \mathbb{R}$ عنصرًا واحدًا فقط $x \in \mathbb{R}$، ويمكننا بسهولة وصفها بأنها مجموعة جزئيّة من نوع مُعَيّن من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ، أي بوصفها علاقة من نوع معيّن، فنُحَرِّر أنفسنا من $\mathbb{R}$ ، ونتعامل مع أيّ مجموعتين X و Y.

10.0 تعريف الدالــة (**function**) ϕ التـي ترسـل X إلى Y، هـي علاقـة بـين X و Y، مـع الخاصـيّة أن كل $x \in X$ تظهـر بوصـفها عضـوًا أوّليًّـا لـزوج مرتّـب (x, y) واحـد فقـط في ϕ، وتُسـمَّى دالّـة كهـذه أيضًـا **تطبيقًـا** (**map or mapping**) مـن X إلى Y. نكتـب $\phi: X \rightarrow Y$، ونُعَـبِّر عـن $(x, y) \in \phi$ بــ $\phi(x) = y$، **والمجــال** (**domain**) لــ ϕ هــو المجموعــة X، أمــا المجموعــة Y، فهـي **المجــال المقابــل** (**codomain**) لــِ ϕ، **والمــدى** (**range**) لــِ ϕ هــو $\phi[X] = \{\phi(x) \mid x \in X\}$. ■

11.0 مثال يمكننا النظر إلى عملية جمع الأعداد الحقيقية بوصفها دالّة $+: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$، أي دالّة ترسل $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$، فعلى سبيل المثال: التأثير لـ + على $(2,3) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ معطًى برمز الدالّة على النحو: $+((2, 3)) = 5$. برمز المجموعات نكتب $((2, 3), 5) \in +$، وبالطبع الرمز المألوف لنا هو $2 + 3 = 5$. ▲

تعداد

عدد العناصر في مجموعة X هو **العدد الرئيس** (**cardinality**) لـ X، ويرمز له عادة بـ $|X|$، فعلى سبيل المثال: لدينا $|\{2, 5, 7\}| = 3$، وسيكون مهمًّا لنا مَعْرِفة فيما إذا كانت مجموعتان لهما العدد الرئيس نفسه، فليس هناك مشكلة إن كانت كلتا المجموعتين منتهيتين؛ فيمكننا ببساطة عَدُّ العناصر في كل مجموعة. لكن، هل $\mathbb{Z}$ ، و $\mathbb{Q}$ ، و $\mathbb{R}$ لها العدد الرئيس نفسه؟ ولإقناع أنفسنا بأن مجموعتين X و Y لهما العدد الرئيس نفسه، نحاول أن نعرض لكل $x \in X$ ازدواجًا مع y واحدة فقط في Y، بطريقة يكون فيها كل عنصر من Y يُستعمل أيضًا مرة واحدة لهذه الازدواج، للمجموعتين $X = \{2, 5, 7\}$ و $Y = \{?, !, \#\}$ الازدواج الآتي:

$$2 \leftrightarrow ?,\ 5 \leftrightarrow \#,\ 7 \leftrightarrow !$$

يبيّن أن لهما العدد الرئيس نفسه، لاحظ أنه يمكننا أيضًا عرض الازدواج هذه على النحو: $\{(2, ?), (5, \#), (7, !)\}$، التي هي– بوصفها مجموعة جزئيّة من $X\times Y$ – علاقة بين X و Y. الازدواج:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & -4 & 4 & -5 & \cdots \end{array}$$

تبيّن أن المجموعتين $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^+$ لهما العدد الرئيس نفسه. ازدواج كهذا – يبيّن أن مجموعتين X و Y لهما العدد الرئيس نفسه– هو علاقة $\leftrightarrow$ من نوع خاص بين X و Y تُسمَّى **تقابلًا أحاديًا (one-to-one correspondence)**؛ لأن كل عنصر x في X يظهر بالضبط مرة واحدة في هذه العلاقة، ويمكننا أن نَعُدَّ هذا التقابل الأحادي بأنه دالّة مجالها X، ومداها Y؛ وذلك لأن كل y في Y تظهر أيضًا في زوج ما $y \leftrightarrow x$. نصوغ هذه المناقشة في تعريف:

12.0 تعريف الدالّة[1] $\phi : X \rightarrow Y$ **أُحاديّة (one-to-one)**، إذا كان $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ فقط عندما $x_1 = x_2$ (انظر التمرين 37)، والدالّة ϕ **غامرة (onto)** لـِ Y إذا كان المدى لـِ ϕ هو Y. ■

إذا كانت مجموعة جزئيّة من $X \times Y$ دالّةُ أحاديّة ϕ، ترسل X بصورة غامرة إلى Y، فإن كل $x \in X$ يظهر بوصفه عضوًا أوّليًا في زوج مرتب واحد فقط في ϕ، وكل $y \in Y$ يظهر أيضًا بوصفه عضوًا ثانيًا في زوج مرتب واحد فقط في ϕ. وعليه، إذا بادلنا العضوين الأول والثاني في الأزواج المرتّبة (x, y) جميعها في ϕ؛ لنحصل على مجموعة أزواج مرتّبة (y, x) – حصلنا على مجموعة جزئيّة من $Y \times X$ – التي تعطي دالّة أحاديّة ترسل Y بصورة غامرة إلى X، وتسمّى هذه الدالّة **دالّة المعكوس (inverse function)** لـِ ϕ، ويرمز لها بـ ϕ^{-1}. بوجه عام، إذا كانت ϕ ترسل X بصورة أحاديّة وغامرة إلى Y، وكان $\phi(x) = y$؛ فإن ϕ^{-1} ترسل Y بصورة أحاديّة وغامرة إلى X وعليه فإن $\phi^{-1}(y) = x$.

13.0 تعريف مجموعتان، X و Y لهما **العدد الرئيس نفسه (same cardinality)**، إذا وجدت دالّة أُحاديّة تُرسل X بصورة غامرة إلى Y، أي إذا وجد تقابل أحادي بين X و Y. ■

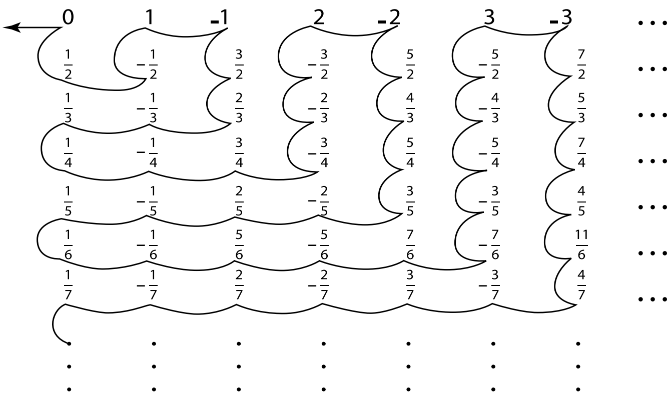
14.0 مثال الدالّة $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$، حيث $f(x) = x^2$ ليست أحاديّة؛ لأن $f(2) = f(-2) = 4$، لكن $2 \neq -2$، أيضًا هي ليست غامرة لـ $\mathbb{R}$؛ لأن المدى هو المجموعة الجزئيّة الفعليّة لكل الأعداد غير السالبة في $\mathbb{R}$ ومن ناحية أخرى فالدالة، $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرَّفة بـ $g(x) = x^3$ هي دالة أحاديّة وغامرة لـِ $\mathbb{R}$. ▲

بَيَّنّا أن $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^+$ لهما العدد الرئيس نفسه، ونرمز لهذا العدد بـ $\aleph_0$؛ ولذلك، $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}^+| = \aleph_0$، أضف إلى ذلك أنه من العجيب أن مجموعة جزئيّة فعليّة من مجموعة غير منتهية يمكن أن يكون عددها الرئيس هو العدد الرئيس نفسه للمجموعة الكاملة؛ إذ إن **المجموعة غير المنتهية (infinite set)** يمكن أن تُعرَّف بوصفها مجموعة لها هذه الخاصيّة.

إننا نتساءل بصورة طبيعية فيما إذا كانت المجموعات غير المنتهية جميعها لها العدد الرئيس نفسه، كالذي للمجموعة $\mathbb{Z}$. فالمجموعة يكون عددها الرئيس هو $\aleph_0$ إذا وفقط إذا كانت عناصرها جميعها يمكن أن تسرد في صف لا نهائي، بحيث نستطيع "ترقيمها" باستخدام $\mathbb{Z}^+$. الشكل 15.0 يشير إلى أن هذا ممكن للمجموعة $\mathbb{Q}$، ففي المصفوفة المربعة للكسور التي تمتد إلى اليمين وإلى الأسفل بصورة لا نهائية، وتحوي عناصر $\mathbb{Q}$ كلها، نرى خيطًا يشقّ طريقًا ملتويًا خلال هذه المصفوفة، لنتخيّل أنّ الكسور ملتصقة بهذا الخيط، وأننا أخذنا بداية الخيط، وسحبناه لليسار في اتجاه السهم، فإن الخيط سيستقيم، وستظهر عناصر $\mathbb{Q}$ جميعها عليه في صف لا نهائي كالآتي: $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1, \frac{3}{2}, \ldots$ إذن لدينا أيضًا $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.

---

1. نذكر اصطلاحًا فنيًّا آخر استخدم من قبَل تلاميذ بورباكي (N.Bourbaki) قد تشاهده في مكان آخر. في اصطلاح بورباكي الدالة الأحادية هي دالة **متباينة** (injection) والدالة الغامرة هي دالة **شاملة** (surjection)، أما الدالة الأحادية والغامرة فهي دالة **تقابل** (bijection).



الشكل 15.0

إذا كان العدد الرئيس للمجموعة $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$ هو $\aleph_0$، فإن جميع عناصرها يمكن أن تسرد على صورة كسور عشرية غير منتهية ممتدة للأسفل، متخذة شكلًا لانهائيًّا في عمود، ربما على النحو:

$$
\begin{array}{c}
0.3659663426\ldots\\
0.7103958453\ldots\\
0.0.58493553\ldots\\
0.9968452214\ldots\\
\vdots
\end{array}
$$

سنثبت الآن أنّ أيّ ترتيب على هذه الصورة، يجب أن يسقط عنصرًا ما في S، بالتأكيد S تحوي عددًا r، تكون فيه المنزلة ذات الترتيب n بعد الفاصلة العشرية هي رقم لا يساوي أيًّا من 0 و 9، ولا يساوي المنزلة ذات الترتيب n للعدد ذي الترتيب n في هذه القائمة، فمثلًا: من الممكن أن تبدأ r بـ $0.5637\ldots$. باختلاف الرقم 5 بعد الفاصلة العشرية عن الرقم 3، يتبيّن لنا أن r ليس العدد الأول في القائمة S المسرودة في الترتيب المبيّن، وباختلاف الرقم 6 عن 1 في المنزلة العشرية الثانية، يتبيّن لنا أيضًا أن r ليست العدد الثاني في القائمة، وهكذا ، ولأننا نستطيع عمل هذا التبرير مع أيّ قائمة، فإننا نرى أن S فيها عناصر أكثر بكثير مما يمكن قرنه بتلك في $\mathbb{Z}^+$. يشير التمرين 15 إلى أن $\mathbb{R}$ فيها عدد عناصر S نفسه، وقد رمزنا لعدد عناصر $\mathbb{R}$ بـ $|\mathbb{R}|$، ويشير التمرين 19 إلى أن هناك عددًا لانهائيًّا من الأعداد الرئيسة المختلفة، حتى أكبر من $|\mathbb{R}|$.

التجزئة وعلاقات التكافؤ

تكون المجموعات **منفصلة (disjoint)** إذا لم تكن فيها اثنتان بينهما عنصر مشترك، وسنحتاج لاحقًا إلى أن نجزّئ مجموعة لها بنية جبريّة (مثلاً مفهوم الجمع) إلى مجموعات جزئيّة منفصلة، تصبح عناصر بنية جبريّة مرتبطة بالمجموعة، ثم نختم هذا الفصل بدراسة لمثل هذه التجزئات أو التقطيع للمجموعات.

16.0 تعريف **التجزئة (partition)** لمجموعة S هي عائلة لمجموعات جزئيّة غير خالية من S يكون فيها كل عنصر من S في واحدة فقط من هذه المجموعات الجزئيّة، والمجموعات الجزئيّة هي **خلايا (cells)** التجزئة. ■

عندما نناقش تجزئة لمجموعة S، نرمز للخليّة التي تحوي العنصر x في S بـ $\overline{x}$.

17.0 مثال بتقسيم $\mathbb{Z}^+$ إلى مجموعتين: المجموعة الجزئيّة للأعداد الصحيحة الموجبة الزوجيّة (تلك التي تقبل القسمة على 2)، والمجموعة الجزئيّة للأعداد الصحيحة الموجبة الفردية (تلك التي باقي قسمتها على 2 هو 1)، نحصل على تجزئة لِـ $\mathbb{Z}^+$ إلى خليّتين.

فمثلاً، نستطيع أن نكتب

$$\overline{14} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \ldots\}$$

أيضًا يمكننا تجزئة $\mathbb{Z}^+$ إلى ثلاث خلايا: واحدة تتألّف من الأعداد الصحيحة الموجبة القابلة للقسمة على 3، وأخرى تتألّف من الأعداد الصحيحة الموجبة التي يكون باقي قسمتها على 3 هو 1، والأخيرة تتألّف من الأعداد الصحيحة الموجبة التي يكون باقي قسمتها على 3 هو 2.

وبالتعميم – لكل عدد صحيح موجب n – يمكننا تجزئة $\mathbb{Z}^+$ إلى n خليّة وفقًا للباقي فيما إذا كان $0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1$ وذلك عند قسمة عدد صحيح موجب على n، فهذه الخلايا هي **صفوف البواقي قياس (residue classes modulo) n** في $\mathbb{Z}^+$، ويسألنا التمرين 35 أن نعرض هذه التجزئات للحالات $n = 2, 3, 5$. ▲

إن كل تجزئة لمجموعة S تعطي بطريقة طبيعية علاقة $\mathcal{R}$ على S: أي لـِ $x, y \in S$، ليكن $x\,\mathcal{R}\,y$ إذا وفقط إذا كان x و y في الخليّة نفسها للتجزئة. باستخدام رمز المجموعة، يمكننا كتابة $x\,\mathcal{R}\,y$ على النحو: $(x,y) \in \mathcal{R}$ (انظر التعريف 7.0). وبقليل من التفكير، يظهر أنّ هذه العلاقة $\mathcal{R}$ على S تحقّق الخصائص الثلاث لعلاقة التكافؤ في التعريف الآتي:

18.0 تعريف **علاقة التكافؤ (equivalence relation)** $\mathcal{R}$ على مجموعة S، هي علاقة تحقّق الخصائص الثلاث الآتية لكل $x, y, z \in S$:

1. (منعكسة): $x\,\mathcal{R}\,x$
2. (متناظرة): إذا كان $x\,\mathcal{R}\,y$، فإن $y\,\mathcal{R}\,x$.
3. (متعدية): إذا كان $x\,\mathcal{R}\,y$ و$y\,\mathcal{R}\,z$، فإن $x\,\mathcal{R}\,z$. ■

لنوضح، لماذا نجد العلاقة $\mathcal{R}$ المقابلة لتجزئة لـِ S تحقّق شرط التناظر في التعريف؟ علينا أن نلاحظ فقط أنه إذا كان x و y في الخليّة نفسها (أي إن $x\,\mathcal{R}\,y$)، فإن y وx في الخليّة نفسها (أي إن $y\,\mathcal{R}\,x$). والآن نترك الملاحظات المشابهة لإثبات خاصيتي الانعكاس والتعدي للتمرين 28.

19.0 مثال لأيّ مجموعة غير خالية S، علاقة المساواة = المعرفة من خلال المجموعة الجزئية $\{(x, x) \mid x \in S\}$ من $S \times S$ هي علاقة تكافؤ. ▲

مثال 20.0 (**التطابق مقياس n**): ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$. علاقة التكافؤ على $\mathbb{Z}^+$ المقابلة لتجزئة $\mathbb{Z}^+$ إلى صفوف بواقي مقياس n التي نوقشت في المثال 17.0 هي **تطابق مقياس** (**congruence modulo n**)، ويرمز لها في بعض الأحيان بـ $\equiv_n$. بدلاً من كتابة $a \equiv_n b$، نكتب عادة $a \equiv b$ (مقياس n)، وتقرأ "a تطابق b مقياس n". مثلًا: لدينا $27 \equiv 15$ (مقياس 4)؛ لأن كليهما 15 و27 له الباقي 3 عند قسمته على 4. ▲

مثال 21.0 لتكن $\Re$ العلاقة على المجموعة $\mathbb{Z}$ المعرفة بـ $n \Re m$ إذا وفقط إذا كان $nm \geq 0$، لنحدد الآن فيما إذا كانت $\Re$ علاقة تكافؤ.

منعكسة $a \Re a$؛ لأن $a^2 \geq 0$ لكل $a \in \mathbb{Z}$.

متناظرة: إذا كان $a \Re b$، فإن $ab \geq 0$ وهكذا $ba \geq 0$ ومن ثم $b \Re a$.

متعدية: إذا كان $a \Re b$ و $b \Re c$، فإن $ab \geq 0$ و $bc \geq 0$. وعليه، $ab^2c = acb^2 \geq 0$. إذا علمنا أن $b^2 > 0$ ، يمكننا استنتاج أنَّ $ac \geq 0$ وعليه فإن $a \Re c$. علينا فحص الحالة $b = 0$ على نحو منفصل، حيث تبيّن لحظة تفكير أن $-3 \Re 0$ و $0 \Re 5$، لكن ليس لدينا $-3 \Re 5$. وعليه، فالعلاقة $\Re$ ليست متعدية، إذن فهي ليست علاقة تكافؤ. ▲

لاحظنا فيما سبق أن التجزئة تنتج علاقة تكافؤ طبيعية، وسوف نثبت الآن أن علاقة التكافؤ على مجموعة تعطي تجزئة طبيعية للمجموعة. المبرهنة الآتية تذكر كلتا النتيجتين بوصفها مرجعًا لهما.

مبرهنة 22.0 (**علاقات التكافؤ والتجزئات**): لتكن S مجموعة غير خالية، ولتكن $\sim$ علاقة تكافؤ على S. عندئذٍ $\sim$ تنتج تجزئة لـِ S، حيث

$$\bar{a} = \{\, x \in S \mid x \sim a \,\}$$

أيضًا، كل تجزئة لـِ S تنشئ علاقة تكافؤ $\sim$ على S، حيث $a \sim b$ إذا وفقط إذا كان a وb في خليّة التجزئة نفسها.

البرهان

يجب أن نثبت أن الخلايا المختلفة $\bar{a} = \{x \in S \mid x \sim a\}$ لـِ $a \in S$ تعطي تجزئة لـِ S؛ ولذلك، فإن كل عنصر في S هو في خليّة ما، وهكذا إذا كان $a \in \bar{b}$، فإن $\bar{a} = \bar{b}$. ليكن $a \in S$، عندئذٍ ومن خلال الشرط (1) فإن $a \in \bar{a}$ ، وهكذا a في خليّة واحدة على الأقل.

افترض الآن أن a أيضًا في خليّة $\bar{b}$. نحتاج إلى أن نثبت أنّ $\bar{a} = \bar{b}$ بوصفها مجموعات؛ وستثبت هذه أن a لا يمكن أن يكون في أكثر من خليّة واحدة، وهناك طريقة قياسية لإثبات أن مجموعتين متساويتان:

أثبت أن كل مجموعة هي مجموعة جزئيّة من الأخرى.

نثبت أولًا أن $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. ليكن $x \in \bar{a}$، عندئذٍ $x \sim a$؛ لكن $a \in \bar{b}$، وهكذا $a \sim b$، عندئذٍ – من خلال شرط التعدي (3) $x \sim b$، وهكذا $x \in \bar{b}$. وعليه، $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. نثبت بعد ذلك أن $\bar{b} \subseteq \bar{a}$. ليكن $y \in \bar{b}$ ، عندئذٍ $y \sim b$؛ لكن $a \in \bar{b}$، وهكذا $a \sim b$ ومن خلال شرط التناظر (2) $b \sim a$، عندئذٍ من خلال التعدي (3) فإن $y \sim a$ وهكذا $y \in \bar{a}$ ، لهذا أيضًا $\bar{b} \subseteq \bar{a}$ وهكذا $\bar{b} = \bar{a}$ ، ويكون برهاننا قد اكتمل. ◆

كل خليّة في التجزئة الناشئة من علاقة تكافؤ، هي **صف تكافؤ** (**equivalence class**).

تمارين 0

في التمارين من 1 إلى 4، صِف المجموعة بسرد عناصرها.

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\}$

2. $\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = 3\}$

3. $\{m \in \mathbb{Z} \mid mn = 60 \text{ for some } n \in \mathbb{Z}\}$

4. $\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 - m < 115\}$

في التمارين من 5 إلى 10، قَرِّر فيما إذا كان الشيء الموصوف مجموعة بالفعل (حسنة التعريف)، ثم أعطِ وصفًا بديلًا لكل مجموعة.

5. $\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid$ عدد كبير $n\}$

6. $\{n \in \mathbb{Z} \mid n^2 < 0\}$

7. $\{n \in \mathbb{Z} \mid 39 < n^3 < 57\}$

8. $\{x \in \mathbb{Q} \mid$ عدد صحيح تقريبًا $x\}$

9. $\{x \in \mathbb{Q} \mid$ يمكن أن يكتب وله مقام أكبر من 100 $x\}$

10. $\{x \in \mathbb{Q} \mid$ يمكن أن يكتب وله مقام موجب أقل من 4 $x\}$

11. اكتب المجموعة $\{a, b, c\} \times \{1, 2, c\}$ بذكر عناصرها.

12. لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$. لكل علاقة بين A و B معطاة بوصفها مجموعة جزئيّة من $A \times B$، قَرِّر فيما إذا كانت دالّة ترسل A إلى B، وإذا كانت دالّة، قرِّر فيما إذا كانت أُحاديّة، وفيما إذا كانت غامرة لـ B.

أ. $\{(1, 4), (2, 4), (3, 6)\}$

ب. $\{(1, 4), (2, 6), (3, 4)\}$

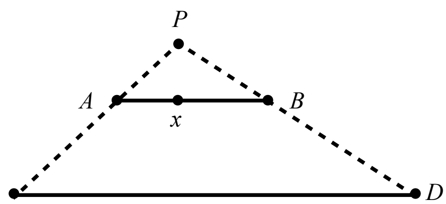
جـ. $\{(1, 6), (1, 2), (1, 4)\}$

د. $\{(2, 2), (1, 6), (3, 4)\}$

هـ. $\{(1, 6), (2, 6), (3, 6)\}$

و. $\{(1, 2), (2, 6), (2, 4)\}$

13. وضِّح هندسيًّا أن قطعتين مستقيمتين AB و CD مختلفتين في الطول لهما عدد النقاط نفسه، وذلك من خلال إشارتك في الشكل 23.0 إلى نقطة y على CD، يمكن أن تقرن بنقطة x على AB.



الشكل 23.0

14. تذكّر أن لـ $a, b \in \mathbb{R}$ و $a < b$، **الفترة المغلقة (closed internal)** $[a, b]$ في $\mathbb{R}$ معرفة على النحو $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$. أثبت أنّ الفترات المعطاة لها العدد الرئيس نفسه، بإعطاء صيغة لدالّة أُحاديّة f ترسل الفترة الأولى بصورة غامرة إلى الثانية.

أ. $[0, 1]$ و $[0, 2]$ ب. $[1, 3]$ و $[5, 25]$ جـ. $[a, b]$ و $[c, d]$

15. أثبت أنّ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ و $\mathbb{R}$ لهما العدد الرئيس نفسه، [مساعدة: أوجد دالّة ابتدائيّة بالاستعانة

بالتفاضل والتكامل، ترسل فترة بصورة أحاديّة وغامرة إلى $\mathbb{R}$، وبعد ذلك بسحب وتقايس مناسبين، اجعل المجال هو المجموعة S].

لأي مجموعة A، نرمز بـ $\rho(A)$ **لمجموعة المجموعات الجزئيّة (Power set)** من A، فمثلاً: إذا كانت $A=\{a, b, c, d\}$،

فإن $\{a,b,c\} \in \rho(A)$ المجموعة $\rho(A)$ تسمى مجموعة القوى **(Power set)**. التمارين من 16 إلى 19 تتعامل مع مفهوم مجموعة المجموعات الجزئيّة من A.

16. اسرد عناصر مجموعة القوى للمجموعة المعطاة، وأعطِ العدد الرئيس لمجموعة القوى.

أ. ϕ **ب.** $\{a\}$ **جـ.** $\{a, b\}$ **د.** $\{a, b, c\}$.

17. لتكن A مجموعة منتهية، وليكن $|A| = s$. بالاعتماد على التمرين السابق، اقترح مخمنّة عن قيمة $|\rho(A)|$، ثم حاول إثباتها.

18. لأيّ مجموعة A – منتهية أو غير منتهية – لتكن B^A مجموعة الدوالّ جميعها التي ترسل A إلى $B = \{0, 1\}$. أثبت أنّ B^A و $\rho(A)$ لهما العدد الرئيس نفسه [مساعدة: كل عنصر في B^A يُحدِّدُ بطريقة طبيعية مجموعة جزئيّة من A].

19. أثبت أنّ مجموعة القوى لمجموعة A – منتهية أو غير منتهية – فيها عناصر أكثر بكثير من أن تكون قادرة على أن توضع في تقابل أحادي مع A، ثم فسّر لماذا يعني هذا الحدس وجود عدد غير نهائي لأعداد رئيسة غير نهائيّة. [مساعدة: تخيل دالّة أُحاديّة ϕ معطاة ترسل A إلى $\rho(A)$، وأثبت أن ϕ لا يمكن أن تكون غامرة لـ $\rho(A)$ بمناقشة فيما إذا كان $x \in \phi(x)$ لكل $x \in A$، واستخدم هذه الفكرة لِتُعَرِّفَ مجموعة جزئيّة S من A ليست في مدى ϕ]. هل مفهوم مجموعة كل شيء مقبول من ناحية منطقية؟ لماذا أو لماذا لا؟

20. لتكن $A = \{1, 2\}$، ولتكن $B = \{3, 4, 5\}$.

أ. وضّح – باستخدام A و B – لماذا نعُدّ $2 + 3 = 5$، ثم استخدم استنتاجًا مشابهًا مع مجموعات من اختيارك لتقرّر ماذا ستعُدّ القيمة لـ

1. $3+\aleph_0$ 2. $\aleph_0+\aleph_0$.

ب. وضّح لماذا نعُدّ $6 = 3 \cdot 2$ برسم النقاط لـ $A \times B$ في المستوى $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$، ثم استخدم استنتاجًا مشابهًا، وذلك بالاستعانة بشكل من الكتاب؛ لتقرر ماذا ستعُدّ قيمة $\aleph_0 \cdot \aleph_0$.

21. كم عددًا في الفترة $0 \le x \le 1$ يمكن أن يعبَّر عنه بالشكل ##. ، حيث كل # هو أحد الأرقام 9 ,… ,3 ,2 ,1 ,0؟ وكم عددًا يوجد على الشكل #####.؟ باتباع فكرة كهذه والتمرين 15، قرّر ماذا ستعُدّ القيمة لـ $10^{\aleph_0}$، وماذا عن $12^{\aleph_0}$ و $2^{\aleph_0}$؟

22. إكمالًا للفكرة في التمرين السابق وباستخدام التمرينين 18 و19، استخدم رمزًا أُسيًّا لتملأه في الفراغات الثلاثة؛ لتعطي سردًا لخمسة تعدادات، كل منها أكبر من الذي يسبقه.

$\aleph_0, |\mathbb{R}|$,____ ,____ ,____.

في التمارين من 23 إلى 27، أوجد عدد التجزئات المختلفة لمجموعة لها عدد العناصر المعطاة.

23. عنصر **24.** عنصران **25.** 3 عناصر

26. 4 عناصر **27.** 5 عناصر

28. افترض أنّ لديك تجزئة لمجموعة S. الفقرة التي أعقبت التعريف 18.0 وضّحت لماذا العلاقة:

$x \mathscr{R} y$ إذا وفقط إذا كان x و y في الخليّة نفسها

تحقّق شرط التناظر لعلاقة التكافؤ، اكتب تفسيرًا مشابهًا. لماذا تحقق أيضًا خاصيتا الانعكاس والتعدي؟

في التمارين من 29 إلى 34، حدّد فيما إذا كانت العلاقة المعطاة علاقة تكافؤ على المجموعة، ثم صِف التجزئة الناشئة من كل علاقة تكافؤ.

29. $n \mathscr{R} m$ في $\mathbb{Z}$، إذا كان $nm > 0$

30. $x \mathscr{R} y$ في $\mathbb{R}$، إذا كان $x \geq y$

31. $x \mathscr{R} y$ في $\mathbb{R}$ ، إذا كان $|x| = |y|$

32. $x \mathscr{R} y$ في $\mathbb{R}$، إذا كان $|x - y| \leq 3$

33. $n \mathscr{R} m$ في $\mathbb{Z}^+$، إذا كان n وm لهما عدد المنازل نفسه في الرمز الاعتيادي للأساس 10.

34. $n \mathscr{R} m$ في $\mathbb{Z}^+$ ، إذا كان n و m لهما المنزلة الأخيرة نفسها في الرمز الاعتيادي للأساس 10.

35. مستخدمًا رمز المجموعة على الصورة $\{\#, \#, \#, \ldots\}$ لمجموعة غير منتهية، اكتب صفوف الرواسب قياس n في $\mathbb{Z}^+$، التي نوقشت في المثال 17.0 لقيمة n المشار إليها.

أ. $n = 2$ ب. $n = 3$ جـ. $n = 5$

36. ليكن $n \in \mathbb{Z}^+$، ولتكن ~ المعرَّفة على $\mathbb{Z}$ بـ $r \sim s$ إذا وفقط إذا كان r-s يقبل القسمة على n، أي إذا وفقط إذا كان $r - s = nq$ لعنصر ما $q \in \mathbb{Z}$.

أ. أثبت أنّ ~ علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$. (تُسمَّى "تطابق مقياس n" كما كانت لـِ $\mathbb{Z}^+$. انظر الفرع ب) .

ب. أثبت أنه عندما نقتصر على المجموعة الجزئيّة $\mathbb{Z}^+$ من $\mathbb{Z}$، فإن ~ تمثل علاقة التكافؤ – تطابق مقياس n – للمثال 20.0.

جـ. خلايا هذه التجزئة لـِ $\mathbb{Z}$ هي صفوف البواقي قياس n في $\mathbb{Z}$. أعد التمرين 35 لصفوف التكافؤ مقياس في $\mathbb{Z}$ بدلاً من أن يكون في $\mathbb{Z}^+$، مستخدمًا الرمز $\{\ldots, \#, \#, \#, \#, \ldots\}$ لهذه المجموعات غير المنتهية.

37. يُخطئ الطلاب عادة في فهم مفهوم الدالّة (التطبيق) الأحاديّة، من الممكن أن يكون السبب معروفًا. انظر إلى الدالّة $\phi : A \to B$، فسترى أن لها اتجاهًا يترافق معها – من A إلى B – وتلاحظ أن توقع الدالّة الأحاديّة لتكون دالّة تحمل نقطة واحدة من A إلى نقطة واحدة من B – في الاتجاه المشار إليه بالسهم، يبدو ببساطة منطقيًّا، ولكن بالتأكيد كل دالّة من A إلى B تؤدي ذلك، والتعريف 12.0 لا يقول ذلك مطلقًا. والآن صَمِّم درسًا بأفضل ما تستطيع، تحلّ فيه الدوالّ الموصوفة في التعريف 12.0 محل دوالّ اثنين – إلى – اثنين. (إنه من المستحيل تقريبًا أن نتوسّع أكثر باستخدام تغيير المصطلح).