8

فضاءات صوبوليف و صياغة تغيراتية لمسائل حدية في فضاء أحادي البعد

1.8. حافز

لنعتبر المسألة الآتية. بإعطاء $f \in C([a,b])$ ، أوجد دالة $u(x)$ تحقق:

$$\left.\begin{array}{lll} -u'' + u = f & \text{على} & [a,b] \\ \cdot\ u(a) = u(b) = 0 & & \end{array}\right\} \tag{1}$$

إن حلا كلاسيكيا - أو حلا قويا - للمسألة (1) هو دالة من المرتبة C^2 على $[a,b]$ تحقق (1) بالمعنى المألوف. بطبيعة الحال فإنه يمكن حل (1) بشكل مباشر بواسطة حساب جد بسيط، و لكننا سوف نتجاهل هذا الجانب من الأمر حتى نوضح الطريقة على هذا المثال الأولي.

نضرب (1) بـ $\varphi \in C^1([a,b])$ و نكامل بالتجزئة؛ ينجم عن ذلك

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi \qquad \forall\varphi \in C^1([a,b]), \qquad \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \tag{2}$$

نلاحظ أن لـ (2) معنى بمجرد أن تكون $u \in C^1([a,b])$ (بعكس (1) التي تفترض أن u قابلة للاشتقاق مرتين)؛ في الحقيقة، إنه يكفي حتى أن يكون لدينا $u, u' \in L^1(a,b)$ مع u' بمعنى يجب توضيحه .

لنقل (مؤقتا) بأن دالة u من المرتبة C^1 محققة لـ (2) هي حل ضعيف لـ (1) .
البرنامج التالي يصف الخطوط العريضة للمقاربة التغيراتية في نظرية المعادلات الجزئية التفاضلية:

مرحلة أ. ـ نحدد فكرة الحل الضعيف؛ هذه الأخيرة تعمل على إدخال فضاءات صوبوليف (Sobolev Spaces) التي هي من الوسائل الأساسية.

مرحلة ب. ـ نثبت وجود و وحدانية حل ضعيف بالطريقة التغيراتية عن طريق مبرهنة لاكس - ملغرام.

مرحلة جـ. ـ نبرهن على أن الحل الضعيف من المرتبة C^2 (مثلا): هذه نتيجة حول الانتظام.

مرحلة د. ـ العودة إلى الحلول الكلاسيكية. نثبت أن حلا ضعيفا من المرتبة C^2 هو حل كلاسيكي.

المرحلة **د** جد بسيطة. بالفعل، لنفرض أن $u \in C^2([a,b])$ ، $u(a) = u(b) = 0$ و u تحقق (2) . بمكاملة (2) بالتجزئة، نحصل على

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

و بالأحرى،

$$\int_a^b (-u'' + u - f)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^1(]a,b[).$$

لكن $C_c^1(]a,b[)$ كثيف في $L^2(a,b)$ (لازمة 23.4) و بالتالي فإن $-u'' + u = f$ حـ. ت (في الحقيقة حيثما كان مادام $u \in C^2$).

2.8. فضاء صوبوليف $W^{1,p}(I)$

لتكن I فترة محدودة أو غير محدودة و ليكن $p \in \mathbb{R}$ بحيث $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

تعريف. ـ إن فضاء صوبوليف $W^{1,p}(I)$ معرف بـ[1]

$$\boxed{W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) \ ; \ \exists g \in L^p(I) \ \text{بحيث} \ \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.}$$

نضع

$$\boxed{H^1(I) = W^{1,2}(I).}$$

لكل $u \in W^{1,p}(I)$ ، نكتب $u' = g$ [2].

ملاحظة 1. ـ نقول في تعريف الفضاء $W^{1,p}$ بأن φ دالة اختبارية. يمكننا على السواء استعمال $C_c^1(I)$ أو $C_c^\infty(I)$ كمجموعة الدوال الاختبارية بما أنه إذا كانت $\varphi \in C_c^1(I)$ فإن $\rho_n * \varphi \in C_c^\infty(I)$ لـ n كبير بشكل كاف و $\rho_n * \varphi \to \varphi$ في C^1 (انظر المقطع 4.4 ؛ بالطبع لتعريف الملفوف التكاملي $\rho_n * \varphi$ نبدأ بتمديد φ بـ 0 خارج I).

ملاحظة 2. ـ من الواضح أنه إذا كانت $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ و إذا كانت $u' \in L^p(I)$ (هنا u' هو المشتق العادي لـ u) فإن $u \in W^{1,p}(I)$. إضافة لذلك فإن المشتق العادي لـ u يتطابق مع مشتق u بمعنى $W^{1,p}$. و بالخصوص إذا كانت I محدودة، فإن $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$ لكل $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

أمثلة. ـ لتكن $I =]-1, +1[$. كتمرين، تحقق بأن:

1) الدالة $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ تنتمي إلى $W^{1,p}(I)$ لكل $1 \leqslant p \leqslant \infty$ و بأن $u' = H$ حيث

$$H(x) = \begin{cases} +1 & \text{إذا} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{إذا} \quad -1 < x < 0. \end{cases}$$

بصفة عامة كل دالة مستمرة على $\bar{I}$ و قابلة للاشتقاق المستمر على أجزاء من $\bar{I}$ ، تنتمي إلى $W^{1,p}(I)$ لكل $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

2) الدالة H لا تنتمي إلى $W^{1,p}(I)$ لكل $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

[1] عندما لا يكون هناك أي غموض، سوف نكتب $W^{1,p}$ عوضا عن $W^{1,p}(I)$.

[2] لاحظ أن لهذه الكتابة معنى : g وحيد بفضل التوطئة 2.4 .

* **ملاحظة** 3. ـ لتعريف الفضاء $W^{1,p}$ يمكننا أيضا استعمال لغة نظرية التوزيعات Distribution Theory (انظر [1] L. Schwartz). كل دالة $u \in L^p(I)$ تمتلك مشتقا بمعنى التوزيع و الذي هو عنصر من الفضاء الأكبر $\mathcal{D}'(I)$. نقول بأن $u \in W^{1,p}(I)$ إذا تطابق هذا المشتق التوزيعي، في الفضاء $\mathcal{D}'(I)$ ، مع دالة من L^p .

عندما يكون $I = \mathbb{R}$ و $p = 2$ ، يمكننا كذلك تعريف فضاءات صوبوليف بواسطة تحويل فورييه Fourier Transform ؛ انظر مثلا [1] Lions – Magenes أو [1] Malliavin . لن نلتفت في موضوعنا هذا إلى هذه الوجهة.

ترميز. ـ الفضاء $W^{1,p}$ مزود بالنظيم

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}.}$$

(أحيانا، إذا كان $1 < p < \infty$ ، يزود بالنظيم المكافئ $\left[\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p\right]^{1/p}$).
الفضاء H^1 مزود بالجداء السلمي

$$\boxed{(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + (u',v')_{L^2};}$$

النظيم المرافق

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

مكافئ لنظيم $W^{1,2}$.

قضية 1.8. **ـ الفضاء** $W^{1,p}$ **هو فضاء بناخ لكل** $1 \leqslant p \leqslant \infty$. **الفضاء** $W^{1,p}$ **انعكاسي**[3] **لـ** $1 < p < \infty$ **و قابل للفصل لـ** $1 \leqslant p < \infty$. **الفضاء** H^1 **فضاء هلبرت قابل للفصل.**

إثبات. ـ أ) لتكن (u_n) متتالية كوشي في $W^{1,p}$ ؛ إذن (u_n) و (u'_n) هما متتاليتان لكوشي في L^p . بالتالي $u_n \longrightarrow u$ في L^p و $u'_n \longrightarrow g$ في L^p . لدينا

$$\int_I u_n \varphi' = -\int_I u'_n \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I),$$

[3] تعد هذه الخاصية امتيازا هاما للفضاء $W^{1,p}$. نفضل، في مسائل حساب التغيرات Calculus of variations ، استعمال $W^{1,p}$ عوضا عن C^1 الذي هو غير انعكاسي (انظر اللازمة 20.3).

و عند النهاية

$$\int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

إذن $u \in W^{1,p}$ ، $u' = g$ و $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$ ·

ب) $W^{1,p}$ انعكاسي لـ $1 < p < \infty$ ·

بالفعل، الفضاء المتجهي $E = L^p(I) \times L^p(I)$ انعكاسي· المؤثر $T : W^{1,p} \longrightarrow E$ المعرف بـ: $Tu = [u, u']$ ، تقايس من $W^{1,p}$ في E ؛ إذن $T(W^{1,p})$ هو فضاء جزئي مغلق في E · نستنتج (قضية 17.3) بأن $T(W^{1,p})$ انعكاسي ـ و بالتالي فكذلك هو $W^{1,p}$ ·

جـ) $W^{1,p}$ قابل للفصل لـ $1 \leqslant p < \infty$ ·

بالفعل، إن الفضاء الجدائي $E = L^p(I) \times L^p(I)$ قابل للفصل؛ إذن $T(W^{1,p})$ قابل للفصل كذلك (انظر القضية 22.3)· بالتالي $W^{1,p}$ قابل للفصل· □

ملاحظة 4. ـ من الملائم أن نحتفظ من الإثبات السابق بالأمر الآتي : لتكن (u_n) متتالية من $W^{1,p}$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في L^p و u'_n تتقارب نحو نهاية ما في L^p · إذن $u \in W^{1,p}$ و $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$ (عندما يكون $1 < p \leqslant \infty$ ، يكفي أن نعرف بأن (u'_n) تبقى محدودة bounded في L^p حتى نستنتج بأن $u \in W^{1,p}$ ؛ انظر [EX])·

إن دوال $W^{1,p}$ هي ″ إجمالا ″ مقابلات مشتقات antiderivatives لدوال L^p · بشكل أدق لدينا

مبرهنة 2.8. **ـ لتكن** $u \in W^{1,p}(I)$ **؛ إذن توجد دالة** $\widetilde{u} \in C(\bar{I})$ **بحيث**

$$u = \widetilde{u} \qquad \text{حـ· ت} \qquad \text{على } I$$

و

$$\widetilde{u}(x) - \widetilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt \qquad \forall x, y \in \bar{I}.$$

ملاحظة 5. ـ لنوضح مدى المبرهنة 2.8 · نلاحظ أولا أنه إذا كانت دالة $u \in W^{1,p}$ ، فإن كل دالة v تحقق $u = v$ حـ· ت على I ، تنتمي أيضا إلى $W^{1,p}$ ·

تؤكد المبرهنة 2.8 بأن كل دالة u من $W^{1,p}$ تمتلك ممثلا مستمرا (وحيدا) أي أنه توجد دالة مستمرة تنتمي إلى صنف تكافؤ u بالنسبة للعلاقة $u \sim v$ إذا $u = v$ حـ. ت. عندما يكون ذلك مفيدا[4] ، سنعوض u بشكل منتظم بممثلها المستمر؛ و حتى لا تثقل التداوين، نرمز كذلك بـ u للممثل المستمر. نلاحظ أخيرا بأن الخاصية " تمتلك u ممثلا مستمرا " مختلفة عن الخاصية " u مستمر حـ. ت " .

ملاحظة 6. ـ من الواضح أنه إذا كانت $u \in W^{1,p}$ و إذا $u' \in C(\bar{I})$ فإن $u \in C^1(\bar{I})$ (بشكل أدق $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$ ، و لكن كما ذكر سابقا لن نميز بين u و $\tilde{u}$).

عند إثبات المبرهنة 2.8 ، سوف نستعمل الـ

توطئة 1.8. ـ **لتكن** $f \in L^1_{loc}(I)$ **بحيث**

$$\int_I f\varphi' = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1_c(I). \tag{3}$$

إذن يوجد ثابت C **بحيث** $f = C$ **حـ. ت.**

<u>إثبات.</u> ـ نختار دالة $\in C_c(I)$ بحيث $\int \quad = 1$. لكل دالة $\omega \in C_c(I)$ توجد $\varphi \in C^1_c(I)$ بحيث

$$\varphi' = \omega - \Big(\int_I \omega\Big) \quad .$$

بالفعل، الدالة $h = \omega - \Big(\int_I \omega\Big)$ مستمرة، ذات حامل متراص محتوى في I و بما أن $\int_I h = 0$ ، فإن لـ h مقابل مشتق (وحيد) ذو حامل متراص. نستنتج من (3) بأن

$$\int_I f\Big[\omega - \Big(\int_I \omega\Big) \quad \Big] = 0 \qquad \forall \omega \in C_c(I)$$

أي

$$\int_I \Big[f - \Big(\int_I f \quad \Big)\Big]\omega = 0 \qquad \forall \omega \in C_c(I)$$

[4] على سبيل المثال، لإعطاء معنى لـ $u(x)$ $\forall x \in \bar{I}$.

و بالتالي (توطئة 2.4)، $f-\left(\int_I f\right)=0$ حـ. ت، أي أن $f=C$ حـ. ت مع $C=\int_I f$. □

توطئة 2.8. ــ **لتكن** $g\in L^1_{loc}(I)$ **؛ لـ** y_0 **محدد في** I **نضع**

$$v(x)=\int_{y_0}^{x} g(t)dt, \qquad x\in I.$$

إذن $v\in C(I)$ **و**

$$\int_I v\varphi'=-\int_I g\varphi \qquad \forall\varphi\in C^1_c(I).$$

<u>إثبات.</u> ــ لدينا

$$\int_I v\varphi'=\int_I\Big[\int_{y_0}^{x} g(t)dt\Big]\varphi'(x)dx=-\int_a^{y_0}dx\int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt+\int_{y_0}^{b}dx\int_{y_0}^{x} g(t)\varphi'(x)dt.$$

بتطبيق مبرهنة فوبيني، نستنتج بأن

$$\begin{aligned}\int_I v\varphi' &= -\int_a^{y_0} g(t)dt\int_a^{t}\varphi'(x)dx+\int_{y_0}^{b} g(t)dt\int_t^{b}\varphi'(x)dx\\ &= -\int_I g(t)\varphi(t)dt.\end{aligned}$$

□

<u>إثبات المبرهنة 2.8.</u> ــ نحدد $y_0\in I$ و نضع $\bar u(x)=\int_{y_0}^{x}u'(t)dt$.
بناء على التوطئة 2.8 لدينا

$$\int_I \bar u\varphi'=-\int_I u'\varphi \qquad \forall\varphi\in C^1_c(I).$$

إذن $\int_I (u-\bar u)\varphi'=0$ $\forall\varphi\in C^1_c(I)$. نستنتج من التوطئة 1.8 بأن $u-\bar u=C$ حـ. ت.
للدالة $\widetilde u=\bar u+C$ الخصائص المطلوبة. □

ملاحظة 7. ـ تبين التوطئة 2.8 بأن مقابل مشتق v لدالة g من L^p ينتمي إلى $W^{1,p}$ بمجرد أن تكون $v \in L^p$ ـ و هذا هو الحال دائما عندما تكون I محدودة.

قضية 3.8. ـ **لتكن** $u \in L^p$ **مع** $1 < p \leqslant \infty$. **الخصائص التالية متكافئة**

(1) $u \in W^{1,p}$

(2) **يوجد ثابت** C **بحيث**

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I).$$

(3) **يوجد ثابت** C **بحيث لكل مفتوح** $\omega \subset\subset I$ **و لكل** $h \in \mathbb{R}$ **مع** $|h| < dist(\omega, C^I)$ **فإنه لدينا**

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant C|h|.$$

يمكننا، زيادة على ذلك، اختيار $C = \|u'\|_{L^p(I)}$ **في** (2) **و** (3) .

إثبات. ـ

(1) $\Longleftarrow$ **(2)** بديهي.

(2) $\Longleftarrow$ **(1)** إن الدالي الخطي

$$\varphi \in C_c^\infty(I) \longmapsto \int_I u\varphi'$$

المعرف على فضاء جزئي كثيف من $L^{p'}$ ، مستمر بالنسبة لنظيم $L^{p'}$. إذن فهو يتوسع إلى دالي خطي و مستمر F على $L^{p'}$ (طبق مبرهنة هان - بناخ أو التوسيع بالاستمرارية). يوجد، بمقتضى مبرهنة تمثيل رايز (مبرهنة 11.4 و مبرهنة 14.4)، $g \in L^p$ بحيث

$$< F, \varphi >= \int g\varphi \qquad \forall \varphi \in L^{p'}.$$

نستنتج بالخصوص

$$\int u\varphi' = \int g\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty$$

إذن $u \in W^{1,p}$ ·

$(\mathbf{1}) \Longleftarrow (\mathbf{3})$ لدينا، بمقتضى المبرهنة 2.8 ، لـ $x \in \omega$

$$u(x+h)-u(x)=\int_x^{x+h} u'(t)dt = h\int_0^1 u'(x+sh)ds.$$

إذن

$$|u(x+h)-u(x)| \leqslant |h|\int_0^1 |u'(x+sh)|ds.$$

إذا كان $p=\infty$ فالاستنتاج بديهي؛ فلنفترض إذن بأن $1<p<\infty$ · بتطبيقنا لمتباينة هولدر، نحصل على

$$|u(x+h)-u(x)|^p \leqslant |h|^p\int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds.$$

بالنتيجة

$$\begin{aligned}\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^p &\leqslant |h|^p\int_\omega dx\int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds\\ &= |h|^p\int_0^1 ds\int_\omega |u'(x+sh)|^p dx.\end{aligned}$$

لكن لـ $0<s<1$ ، لدينا

$$\int_\omega |u'(x+sh)|^p dx = \int_{\omega+sh} |u'(y)|^p dy \leqslant \int_I |u'(y)|^p dy.$$

بالتالي نستنتج (3) ·

$(\mathbf{3}) \Longleftarrow (\mathbf{2})$ لتكن $\varphi \in C_c^1(I)$ ؛ نختار $\omega \subset\subset I$ بحيث $Supp\varphi \subset \omega$ · لدينا لـ $h \in \mathbb{R}$ مع $|h|<dist(\omega, C^I)$

$$\int_I [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h)-\varphi(x)]dx.$$

و باستعمال متباينة هولدر و (3) نحصل على

$$\Big|\int_I [u(x+h)-u(x)]\varphi(x)dx\Big| \leqslant C|h|\,\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

نستنتج عند النهاية لما $h \to 0$

$$\Big|\int_I u\varphi'\Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}} \qquad \forall\varphi\in C_c^1.$$

□

* **ملاحظة** 8. ـ عندما يكون $p=1$ ، فإن الاقتضاءات الآتية تبقى صحيحة

$$(1) \Longrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3).$$

لنفرض فيما يلي بأن I محدودة. إن الدوال المحققة لـ (1) ، أي دوال $W^{1,1}$ ، هي الدوال المستمرة مطلقا. إنها مميزة كذلك بالخاصية:

(م. م) $\forall\epsilon>0$ ، $\exists\delta>0$ بحيث لكل متتالية متهية من فترات منفصلة $]a_k,b_k[$ من I تحقق $\sum|b_k-a_k|<\delta$ ، فإن $\sum|f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$.

بينما الدوال المحققة لـ (2) [أو (3)] مع $p=1$ هي دوال ذات تغير محدود bounded variation ؛ يمكن تمييز هذه الدوال بعدة طرق:

- هي فرق دالتين متزايدتين محدودتين (مع احتمال أنهما غير مستمرتين) على I .
- هي الدوال u المحققة للخاصية:

(ت. م) يوجد ثابت $C>0$ بحيث $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}|u(t_{i+1})-u(t_i)|\leqslant C$ ، لكل متتالية $t_0<t_1<\ldots<t_k$ من I .

- هي الدوال $u\in L^1(I)$ التي يكون مشتقها التوزيعي قياسا محدودا.

حول هذا الموضوع، يمكن مراجعة [1] Hewitt – Stromberg ، Kolmogorov – Fomin [1] أو [1] Chae .

لازمة 4.8. ـ **تنتمي دالة** u **من** $L^\infty(I)$ **إلى** $W^{1,\infty}(I)$ **إذا و فقط إذا وجد ثابت** C **بحيث**

$$|u(x)-u(y)|\leqslant C|x-y| \qquad \text{حـ. ت} \qquad x,y\in I .$$

<u>إثبات</u>. ـ طبق القضية 3.8 $[(1) \Longleftrightarrow (3)]$ مع $p=\infty$. $\square$

لبعض العمليات الأساسية في التحليل معنى فقط بالنسبة للدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بأكمله (على سبيل المثال الملفوف، تحويل فورييه، إلخ). إذن فإنه من المفيد أن نستطيع تمديد دالة $u \in W^{1,p}(I)$ إلى دالة $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ [4]. النتيجة الآتية تجيب على هذا الانشغال.

مبرهنة 5.8. **(مؤثر التوسيع أو التمديد) ـ ليكن** $1 \leqslant p \leqslant \infty$. **يوجد مؤثر توسيع** $P : W^{1,p}(I) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ **خطي و مستمر بحيث**

$$\begin{aligned}
&(1) \qquad Pu_{|_I} = u \qquad && \forall u \in W^{1,p}(I)\\
&(2) \qquad \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{L^p(I)} \qquad && \forall u \in W^{1,p}(I)\\
&(3) \qquad \|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad && \forall u \in W^{1,p}(I)
\end{aligned}$$

(حيث إن C **مرتبط بـ** $|I| \leqslant \infty$ [5] **فقط).**

<u>إثبات</u>. ـ لنبدأ بالحالة $I=]0,+\infty[$ و لنبرهن بأن التوسيع بالانعكاس Reflection المعرف بـ

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u(x) & \text{إذا} & x \geqslant 0 \\ u(-x) & \text{إذا} & x < 0 \end{array} \right.$$

يجيب على السؤال.
في البداية لدينا $\|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)}$.
لنضع

$$v(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u'(x) & \text{إذا} & x > 0 \\ -u'(-x) & \text{إذا} & x < 0. \end{array} \right.$$

نتحقق بسهولة بأن $v \in L^p(\mathbb{R})$ و بأن

---

[4] إذا مددنا u بـ 0 خارج I ، فإن الدالة المحصل عليها لا تنتمي عموما إلى $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (انظر المقطع 3.8).

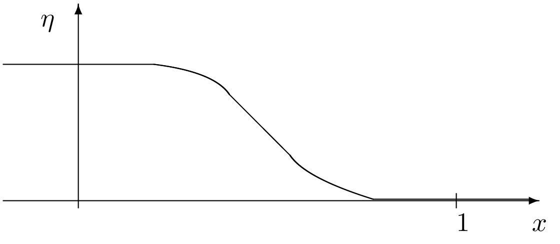
[5] يمكننا أخذ $C=4$ في (2) و $C = 4\left(1+\dfrac{1}{|I|}\right)$ في (3) .

$$u^*(x) - u(0) = \int_0^x v(t)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

بالتالي فإن $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ (انظر الملاحظة 7) و $\|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{W^{1,p}(I)}$.

لنعتبر الآن حالة فترة محدودة I ؛ يمكننا أن نرجع دائما إلى الحالة $I =]0,1[$. نحدد دالة $\eta \in C^1(\mathbb{R})$ ، $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ ، بحيث

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا} \quad x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{إذا} \quad x > \frac{3}{4}. \end{cases}$$



لتكن f دالة معرفة على $]0,1[$ ، نضع

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{إذا} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \text{إذا} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

سوف نحتاج إلى

توطئة 3.8 **ـ لتكن** $u \in W^{1,p}(I)$ ، **إذن**

$\eta\widetilde{u} \in W^{1,p}(0,\infty)$ و $(\eta\widetilde{u})' = \eta'\widetilde{u} + \eta\widetilde{u'}$.

<u>إثبات</u>. ـ لتكن $\varphi \in C_c^1(]0,\infty[)$ ؛ لدينا

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta\widetilde{u}\varphi' = \int_0^1 \eta u\varphi' &= \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] \\ &= -\int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi, \qquad \text{بما أن } \eta\varphi \in C_c^1(]0,1[). \\ &= -\int_0^\infty (\widetilde{u'}\eta + \widetilde{u}\eta')\varphi. \end{aligned}$$

□

نهاية إثبات المبرهنة 5.8 . ـ تعطى $u \in W^{1,p}(I)$. نكتب

$$u = \eta u + (1-\eta)u.$$

توسع الدالة ηu بداية إلى $]0,+\infty[$ بـ $\widetilde{\eta u}$ (بفضل التوطئة 3.8) ثم توسع إلى $\mathbb{R}$ بالانعكاس. نحصل هكذا على دالة $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ توسع ηu و بحيث

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)}, \qquad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

(حيث C يرتبط بـ $\|\eta'\|_{L^\infty}$).

نتبع طريقة مماثلة مع $(1-\eta)u$ ، أي نوسع في البداية $(1-\eta)u$ إلى $]-\infty,1[$ بـ 0 على $]-\infty,0]$ ثم نمدد إلى $\mathbb{R}$ بالانعكاس (حول النقطة 1). نحصل هكذا على دالة $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ توسع $(1-\eta)u$ و بحيث

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant 2\|u\|_{L^p(I)}, \qquad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

إذن $Pu = v_1 + v_2$ يجيب على السؤال. □

تبقى بعض خصائص الدوال ذات المرتبة C^1 سارية بالنسبة لدوال $W^{1,p}$ (انظر مثلا اللازمتين 9.8 و 10.8). من الملائم إثبات هذه الخصائص " بواسطة الكثافة " density باستعمال النتيجة الآتية.

• **مبرهنة** 6.8. **(كثافة) ـ لتكن** $u \in W^{1,p}(I)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$. **إذن توجد متتالية** (u_n) **في** $C_c^\infty(\mathbb{R})$ **بحيث** $u_{n|_I} \longrightarrow u$ **في** $W^{1,p}(I)$.

إثبات. ـ يمكننا الافتراض دائما بأن $I = \mathbb{R}$ ؛ و إلا بدأنا بتمديد u إلى دالة من $W^{1,p}(\mathbb{R})$ بفضل المبرهنة 5.8 . نستعمل تقنية مهمة أساسها الملفوف (الذي يرجع الدوال C^∞) و البتر Truncation (الذي يرجع الدوال ذات حوامل متراصة).

أ) ملفوف

سوف نحتاج إلى الـ

توطئة 4.8. ــ **لتكن** $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ **و لتكن** $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ **مع** $1 \leqslant p \leqslant \infty$. **إذن**

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \qquad \text{و} \qquad (\rho * v)' = \rho * v' \cdot$$

إثبات. ــ لنفترض بداية بأن حامل ρ متراص. نعلم بأن $\rho * v \in L^p$. لتكن $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$ ؛ لدينا، بحسب القضيتين 16.4 و 20.4

$$\int (\rho * v)\varphi' = \int v(\check{\rho} * \varphi') = \int v(\check{\rho} * \varphi)' = -\int v'(\check{\rho} * \varphi) = -\int (\rho * v')\varphi.$$

بالتالي

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \qquad \text{و} \qquad (\rho * v)' = \rho * v' \cdot$$

إذا كان حامل ρ غير متراص، ندخل متتالية (ρ_n) من $C_c(\mathbb{R})$ بحيث $\rho_n \longrightarrow \rho$ في L^1 . حسب ما سبق فإنه لدينا

$$\rho_n * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \qquad \text{و} \qquad (\rho_n * v)' = \rho_n * v' \cdot$$

بيد أنه لدينا $\rho_n * v \longrightarrow \rho * v$ في L^p و $\rho_n * v' \longrightarrow \rho * v'$ في L^p (انظر المبرهنة 22.4). نستنتج بواسطة الملاحظة 4 بأن

$$\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \qquad \text{و بأن} \qquad (\rho * v)' = \rho * v' \cdot$$

$\square$

ب) بتر

نحدد دالة $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ بحيث $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ و

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & \text{إذا} \quad |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{إذا} \quad |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

نعرف المتتالية

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right) \qquad \text{لـ} \qquad n = 1, 2, \ldots \cdot \tag{4}$$

نتحقق بسهولة، بفضل مبرهنة التقارب المرجح، بأنه إذا كانت دالة $f \in L^p$ مع $1 \leqslant p < \infty$ فإن $\zeta_n f \longrightarrow f$ في L^p ·

جـ) استنتاج

نختار متتالية تنظيمية (ρ_n) · لنبرهن بأن المتتالية $u_n = \zeta_n(\rho_n * u)$ تتقارب إلى u في $W^{1,p}$ · قبل كل شيء لدينا $\|u_n - u\|_{L^p} \longrightarrow 0$ · بالفعل لنكتب

$$u_n - u = \zeta_n[(\rho_n * u) - u] + [\zeta_n u - u]$$

و بالتالي

$$\|u_n - u\|_{L^p} \leqslant \|(\rho_n * u) - u\|_{L^p} + \|\zeta_n u - u\|_{L^p} \longrightarrow 0.$$

بعد ذلك لدينا بفضل التوطئة 4.8 ،

$$u_n' = \zeta_n'(\rho_n * u) + \zeta_n(\rho_n * u').$$

بناء عليه فإن

$$\begin{aligned}\|u_n' - u'\|_{L^p} &\leqslant \|\zeta_n'(\rho_n * u)\|_{L^p} + \|\zeta_n(\rho_n * u') - u'\|_{L^p}\\ &\leqslant \frac{C}{n}\|u\|_{L^p} + \|(\rho_n * u') - u'\|_{L^p} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

حيث $C = \|\zeta'\|_{L^\infty}$ · $\square$

ملاحظة 9. ـ على العموم، لا يمكننا اختيار متتالية (u_n) من $C_c^\infty(I)$ في المبرهنة 6.8 (حول هذا الموضوع انظر المقطع 3.8)· بعبارة أخرى، $C_c^\infty(I)$ غير كثيف في $W^{1,p}(I)$ (إلا إذا كان $I = \mathbb{R}$)·

• **مبرهنة** 7.8. **ـ يوجد ثابت C (مرتبط بـ $|I| \leqslant \infty$ فقط) بحيث**

$$\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(I), \qquad \forall\ 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{5}$$

بتعبير آخر فإن $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ بتباين مستمر لكل $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ·
إضافة إلى ذلك، فعندما تكون I محدودة، فإنه يكون لدينا

$$\textbf{التباين} \quad W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I}) \quad \textbf{متراص لكل} \quad 1 < p \leqslant \infty\ \cdot \tag{6}$$

التباين $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ **متراص لكل** $1 \leqslant q < \infty$ · (7)

إثبات· ـ نبدأ بإثبات (5) بالنسبة لـ $I = \mathbb{R}$ ؛ تستنتج الحالة العامة بفضل مبرهنة التوسيع (مبرهنة 5.8)· لتكن $v \in C_c^1(\mathbb{R})$ ؛ إذا كان $1 \leqslant p < \infty$ نضع $G(s) = |s|^{p-1}s$ · تنتمي الدالة $w = G(v)$ إلى $C_c^1(\mathbb{R})$ و

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

إذن لدينا لـ $x \in \mathbb{R}$

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^{x} p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt,$$

و باستعمال متباينة هولدر، نحصل على

$$|v(x)|^p \leqslant p\|v\|_{L^p}^{p-1}\,\|v'\|_{L^p}.$$

و عليه، نستنتج، بفضل متباينة يونغ (انظر المقطع 2.4) بأن

$$\forall v \in C_c^1(\mathbb{R}) \qquad \|v\|_{L^\infty} \leqslant C\|v\|_{W^{1,p}} \tag{8}$$

حيث إن C ثابت عام[6] ·
نستدل الآن بالكثافة· لتكن $u \in W^{1,p}$ ؛ توجد متتالية $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ بحيث إن $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (مبرهنة 6.8)· بتطبيق (8) نرى بأن (u_n) متتالية لكوشي في L^∞ · بالتالي $u_n \longrightarrow u$ في L^∞ و عليه نحصل على (5) ·

إثبات (6) · ـ لتكن $\mathcal{F}$ كرة الوحدة في $W^{1,p}(I)$ مع $1 < p \leqslant \infty$ · لـ $u \in \mathcal{F}$ لدينا

$$|u(x) - u(y)| = \Big|\int_y^x u'(t)dt\Big| \leqslant \|u'\|_{L^p}\,|x-y|^{1/p'} \leqslant |x-y|^{1/p'} \qquad \forall x, y \in I.$$

يستنتج إذن من مبرهنة أسكولي بأن $\mathcal{F}$ متراصة نسبيا في $C(\bar{I})$ ·

إثبات (7) · ـ لتكن $\mathcal{F}$ كرة الوحدة في $W^{1,1}(I)$ · للبرهنة على أن $\mathcal{F}$ متراصة نسبيا في $L^q(I)$ مع $1 \leqslant q < \infty$ ، نطبق اللازمة 26.4 · لنتحقق من الشرط (23.4) ·

---

[6] لاحظ أن $p^{1/p} \leqslant e^{1/e}$ $\forall p \geqslant 1$ ·

لتكن I $\omega \subset\subset I$ ، $u \in \mathcal{F}$ و $|h| < dist(\omega, C^I)$. لدينا بحسب القضية 3.8 (3)

$$\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant |h|\,\|u'\|_{L^1(I)} \leqslant |h|.$$

إذن

$$\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^q dx \leqslant \big(2\|u\|_{L^\infty(I)}\big)^{q-1} \int_\omega |u(x+h)-u(x)|dx \leqslant C|h|,$$

و بالتالي

$$\Big(\int_\omega |u(x+h)-u(x)|^q dx\Big)^{1/q} \leqslant C^{1/q}|h|^{1/q} < \epsilon \qquad \text{إذا} \qquad |h| < \delta \ .$$

لنتحقق من الشرط (24.4) . لدينا لـ $u \in \mathcal{F}$

$$\|u\|_{L^q(I\setminus\omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(I)}\,|I\setminus\omega|^{1/q} \leqslant C|I\setminus\omega|^{1/q} < \epsilon$$

شريطة أن يكون $|I\setminus\omega|$ صغيرا بشكل كاف؛ نختار ω حتى يتحقق ذلك. $\square$

ملاحظة 10. ـ التباين $W^{1,1}(I) \subset C(\bar{I})$ مستمر و لكنه لا يكون متراصا أبدا، حتى لو كانت I فترة محدودة، حاول التأكد من ذلك أو انظر [EX] . بيد أنه إذا كانت (u_n) محدودة في $W^{1,1}(I)$ (مع I محدودة أو غير محدودة) فإنه توجد متتالية جزئية (u_{n_k}) بحيث تتقارب $(u_{n_k}(x))$ لكل $x \in I$ (هذه هي مبرهنة Helly ؛ انظر مثلا [EX]).
عندما تكون الفترة I غير محدودة و $1 < p \leqslant \infty$ ، فإن التباين $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ مستمر، و لكنه غير متراص؛ حاول التأكد من ذلك أو انظر [EX] . إلا أنه إذا كانت (u_n) محدودة في $W^{1,p}(I)$ مع $1 < p \leqslant \infty$ ، فإنه توجد متتالية جزئية (u_{n_k}) و يوجد $u \in W^{1,p}(I)$ بحيث إن $u_{n_k} \longrightarrow u$ في $L^\infty(J)$ لكل J محدودة، $J \subset I$ (انظر مثلا [EX]).

ملاحظة 11. ـ لتكن I فترة محدودة و $1 \leqslant q \leqslant \infty$. بفضل (5) ، نبرهن بسهولة بأن النظيم

$$|||u||| = \|u'\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

مكافئ لنظيم $W^{1,p}(I)$ (انظر مثلا [EX]).

ملاحظة 12. ـ لتكن I فترة غير محدودة. إذا كانت $u \in W^{1,p}(I)$ ، فإن $u \in L^q(I)$ لكل $q \in [p, \infty]$ بما أن

$$\int |u|^q \leqslant \|u\|_{L^\infty}^{q-p} \|u\|_{L^p}^p.$$

و لكن في الغالب فإن $u \notin L^q(I)$ لـ $q \in [1, p[$ (انظر [EX]).

لازمة 8.8. ــ **نفترض بأن** I **غير محدودة و لتكن** $u \in W^{1,p}(I)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$. **إذن لدينا**

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \to \infty}} u(x) = 0. \tag{9}$$

إثبات. ــ حسب المبرهنة 6.8 ، توجد متتالية $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R})$ بحيث $u_{n|_I} \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(I)$. نستنتج من (5) بأن $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \longrightarrow 0$ ؛ و عليه فإننا نحصل على (9) . بالفعل بإعطاء $\epsilon > 0$ ، نختار n كبيرا بشكل كاف حتى يكون $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} < \epsilon$ ؛ بيد أنه لـ $|x|$ كبير بما فيه الكفاية لدينا $u_n(x) = 0$ و بالتالي فإن $|u(x)| < \epsilon$. $\square$

• **لازمة** 9.8 **(اشتقاق جداء). ــ لتكن** $u, v \in W^{1,p}(I)$ **مع** $1 \leqslant p \leqslant \infty$. **إذن** $uv \in W^{1,p}(I)$[7] **و**

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{10}$$

زيادة على ذلك، لدينا قاعدة المكاملة بالتجزئة

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' \qquad \forall x, y \in \bar{I}. \tag{11}$$

إثبات. ــ نلاحظ بداية بأن $u \in L^\infty$ (مبرهنة 7.8) و بالتالي فإن $uv \in L^p$.

[7] لاحظ أن هذه النتيجة تتعارض مع خصائص L^p . فعموما إذا كانت u و v تنتميان إلى L^p فإن الجداء uv لا ينتمي إلى L^p . نقول بأن $W^{1,p}$ حلقة بناخ.

نبدأ بالحالة حيث $1 \leqslant p < \infty$ ؛ لتكن (u_n) و (v_n) متتاليتين من $C_c^1(\mathbb{R})$ بحيث $u_{n|_I} \longrightarrow u$ و $v_{n|_I} \longrightarrow v$ في $W^{1,p}(I)$ · إذن $u_n \longrightarrow u$ و $v_n \longrightarrow v$ في $L^\infty(I)$ (مبرهنة 7.8)؛ نستخلص من ذلك أن $u_n v_n \longrightarrow uv$ في $L^\infty(I)$ و في $L^p(I)$ · لدينا

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \longrightarrow u'v + uv' \quad \text{في} \quad L^p(I) \cdot$$

ينتج عن ذلك أن $uv \in W^{1,p}(I)$ و أن $(uv)' = u'v + uv'$ (طبق الملاحظة 4 على المتتالية $u_n v_n$)·

أخيرا نحصل على (11) بمكاملة (10) ·

لنفترض الآن بأن $u, v \in W^{1,\infty}(I)$ · إذن

$$uv \in L^\infty(I) \quad \text{و} \quad u'v + uv' \in L^\infty(I) \cdot$$

يبقى التحقق من أن

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

من أجل ذلك، نثبت فترة مفتوحة $J \subset I$ بحيث $Supp\varphi \subset J$ · إذن $u, v \in W^{1,p}(J)$ لكل $p < \infty$ و بناء على ما سبق نعلم أن

$$\int_J uv\varphi' = -\int_J (u'v + uv')\varphi$$

أي أن

$$\int_I uv\varphi' = -\int_I (u'v + uv')\varphi.$$

□

لازمة 10.8 **(اشتقاق تركيب)· ـ لتكن** $G \in C^1(\mathbb{R})$ **بحيث** $G(0) = 0$[8] **و لتكن** $u \in W^{1,p}(I)$ · **إذن**

$$Gou \in W^{1,p}(I) \quad \text{و} \quad (Gou)' = (G'ou)u' \cdot$$

---

[8] هذا الاستثناء ليس ضروريا عندما تكون I محدودة [أو عندما تكون I غير محدودة و $p = \infty$]· لكنه يبقى ضروريا إذا كانت I غير محدودة و $1 \leqslant p < \infty$ ·

<u>إثبات</u>. ـ ليكن $M = \|u\|_{L^\infty}$. بما أن $G(0) = 0$ فإنه يوجد ثابت C بحيث $|G(s)| \leqslant C|s|$ لـ $s \in [-M, +M]$. إذن $Gou \in L^p(I)$ بما أن $|Gou| \leqslant C|u|$. و بالطريقة نفسها لدينا $(G'ou)u' \in L^p(I)$. يبقى التحقق بأن

$$\int_I (Gou)\varphi' = -\int_I (G'ou)u'\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I). \tag{12}$$

لنفرض بداية بأن $1 \leqslant p < \infty$. إذن توجد متتالية (u_n) من $C_c^\infty(\mathbb{R})$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(I)$ و في $L^\infty(I)$. بالتالي $Gou_n \longrightarrow Gou$ في $L^\infty(I)$ و $(G'ou_n)u_n' \longrightarrow (G'ou)u'$ في $L^p(I)$. بيد أنه لدينا

$$\int (Gou_n)\varphi' = -\int (G'ou_n)u_n'\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

بالتالي نستنتج (12) .

بالنسبة للحالة $p = \infty$ ، نتبع نفس النهج كما في اللازمة 9.8 . □

فضاءات صوبوليف $W^{m,p}(I)$

تعريف. ـ ليكن $m \geqslant 2$ عددا طبيعيا و $1 \leqslant p \leqslant \infty$ عددا حقيقيا. نعرف بالاستقراء الفضاء

$$W^{m,p}(I) = \{\, u \in W^{m-1,p}(I), \quad u' \in W^{m-1,p}(I)\,\}.$$

نضع

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

نتحقق بسهولة بأن $u \in W^{m,p}(I)$ إذا و فقط إذا وجدت m دوال $g_1, \ldots, g_m \in L^p(I)$ بحيث

$$\int_I uD^j\varphi = (-1)^j \int_I g_j\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \qquad \forall j = 1, 2, \ldots, m$$

حيث إن $D^j\varphi$ يرمز للمشتق ذي المرتبة j لـ φ . عندما $u \in W^{m,p}(I)$ ، يمكننا إذن، اعتبار المشتقات المتتالية $u' = g_1, (u')' = g_2 \ldots$ حتى المرتبة m ؛ و نرمز إليها بـ Du ، D^2u ، $\ldots$ ، D^mu .

الفضاء $W^{m,p}(I)$ مزود بالنظيم

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

و الفضاء H^m مزود بالجداء السلمي

$$(u,v)_{H^m} = (u,v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^{m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}.$$

نبرهن بأن النظيم $\|\ \|_{W^{m,p}}$ مكافئ للنظيم $|||u||| = \|u\|_{L^p} + \|D^m u\|_{L^p}$ ؛ بشكل أدق، نثبت بأنه إذا كان $1 \leqslant j \leqslant m-1$ ، فإنه $\forall \epsilon > 0$ ، $\exists C$ (مرتبط بـ ϵ و $|I| \leqslant \infty$) بحيث

$$\|D^j u\|_{L^p} \leqslant \epsilon \|D^m u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{m,p}$$

(انظر مثلا [EX]).

يمكن للقارئ تعميم إلى فضاءات $W^{m,p}$ الخصائص المبرهن عنها لـ $W^{1,p}$ ؛ على سبيل المثال $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$ مع تباين مستمر.

3.8. فضاء $W_0^{1,p}(I)$

تعريف. ـ بإعطاء $1 \leqslant p < \infty$ ، نرمز بـ $W_0^{1,p}(I)$ إلى إغلاقة $C_c^1(I)$ في $W^{1,p}(I)$.
نكتب $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$ [9] .

الفضاء $W_0^{1,p}$ مزود بالنظيم المستخلص من $W^{1,p}$ ؛ الفضاء H_0^1 مزود بالجداء السلمي المستخلص من H^1 . الفضاء $W_0^{1,p}$ هو فضاء بناخ، قابل للفصل؛ و أكثر من ذلك فهو انعكاسي لـ $1 < p < \infty$. الفضاء H_0^1 هو فضاء هلبرت، قابل للفصل.

ملاحظة 13. ـ عندما تكون $I = \mathbb{R}$ ، نعرف بأن $C_c^1(\mathbb{R})$ كثيف في $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (انظر مبرهنة 6.8) و بناء عليه فإن $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

ملاحظة 14. ـ باستعمال متتالية تنظيمية (ρ_n) نتحقق بسهولة بأن:

[9] نكتب غالبا $W_0^{1,p}$ و H_0^1 عوضا عن $W_0^{1,p}(I)$ و $H_0^1(I)$.

(1) $C_c^\infty(I)$ كثيف في $W_0^{1,p}(I)$ ·
(2) إذا $u \in W^{1,p}(I) \frown C_c(I)$ فإن $u \in W_0^{1,p}(I)$ ·

تعطي النتيجة التالية خاصية مميزة لدوال $W_0^{1,p}(I)$:

• **مبرهنة** 11.8. **ـ لتكن** $u \in W^{1,p}(I)$ ، **إذن** $u \in W_0^{1,p}(I)$ **إذا و فقط إذا** $u = 0$ **على** ∂I ·

ملاحظة 15. ـ تشرح المبرهنة 11.8 مدى أهمية الدور الذي يلعبه الفضاء $W_0^{1,p}$ · إذ أن المعادلات التفاضلية (أو التفاضلية الجزئية) ترتبط بشروط حدية boundary conditions · نعني بذلك أن قيمة u عند ∂I مفروضة·

إثبات· ـ إذا $u \in W_0^{1,p}$ ، فإنه توجد متتالية (u_n) من $C_c^1(I)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(I)$ · إذن $u_n \longrightarrow u$ بانتظام على $\bar{I}$ و بالتالي فإن $u = 0$ على ∂I ·
عكسيا، لتكن $u \in W^{1,p}$ بحيث $u = 0$ على ∂I · نثبت دالة $G \in C^1(\mathbb{R})$ بحيث

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{إذا} \quad |t| \leqslant 1 \\ t & \text{إذا} \quad |t| \geqslant 2 \end{cases}$$

و

$$|G(t)| \leqslant |t| \qquad \text{لكل} \qquad t \in \mathbb{R} \cdot$$

نضع $u_n = \dfrac{1}{n} G(nu)$ بحيث $u_n \in W^{1,p}(I)$ (لازمة 10.8)· من ناحية أخرى

$$Suppu_n \subset \{x \in I; \quad |u(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

و بالتالي فإن $Suppu_n$ مجموعة متراصة محتواة في I (استعمل مسألة أن $u = 0$ على ∂I و $u(x) \longrightarrow 0$ عندما $|x| \longrightarrow \infty$ ، $x \in I$)· بالتالي $u_n \in W_0^{1,p}(I)$ (انظر الملاحظة 14)·
في الأخير، نتحقق بسهولة بواسطة مبرهنة التقارب المرجح بأن $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}$ · $\square$

ملاحظة 16. ـ نشير إلى خاصيتين أخريتين لدوال $W_0^{1,p}$ (انظر مثلا [EX])·

(1) ليكن $1 < p < \infty$ و $u \in L^p(I)$ ، إذن $u \in W_0^{1,p}(I)$ إذا و فقط إذا وجد ثابت C بحيث

$$\Big| \int_I u\varphi' \Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

(2) ليكن $1 \leqslant p < \infty$ و $u \in L^p(I)$ ، نعرف $\bar{u}$ بـ

$$\bar{u}(x) = \left\{ \begin{array}{lll} u(x) & \text{إذا} & x \in I \\ 0 & \text{إذا} & x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{array} \right.$$

إذن $u \in W_0^{1,p}(I)$ إذا و فقط إذا $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ ·

• قضية 12.8 **(متباينة بوانكاريه** Poincaré **)· ــ نفرض بأن** I **محدودة· إذن يوجد ثابت** C **(مرتبط بـ** $|I|$ **) بحيث**

$$\|u\|_{W^{1,p}} \leqslant C\|u'\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I). \tag{13}$$

بعبارة أخرى، الكمية $\|u'\|_{L^p}$ **هي نظيم على** $W_0^{1,p}(I)$ **، مكافئ لنظيم** $W^{1,p}$ ·

إثبات· ــ لـ $u \in W_0^{1,p}(I)$ لدينا

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \Big| \int_a^x u'(t)dt \Big| \leqslant \|u'\|_{L^1}.$$

إذن $\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|u'\|_{L^1}$ ؛ نستنتج (13) بفضل متباينة هولدر· □

ملاحظة 17. ــ إذا كانت I محدودة، تعرف الكمية $(u', v')_{L^2}$ جداء سلميا على H_0^1 و النظيم الذي يرافقه - أي $\|u'\|_{L^2}$ - مكافئ لنظيم H^1 ·

ملاحظة 18. ــ بإعطاء عدد طبيعي $m \geqslant 2$ و عدد حقيقي $1 \leqslant p < \infty$ ، نعرف الفضاء $W_0^{m,p}(I)$ كإغلاقة $C_c^m(I)$ في $W^{m,p}(I)$ · نثبت بأن

$$W_0^{m,p}(I) = \{ u \in W^{m,p}(I) \text{ ؛ } u = Du = \ldots = D^{m-1}u = 0 \quad \text{على } \partial I \} \cdot$$

يجدر بنا التمييز بين

$$W_0^{2,p}(I) = \{\ u \in W^{2,p}(I)\ ؛\quad u = Du = 0 \quad \text{على}\ \partial I\ \}$$

و

$$W^{2,p}(I) \frown W_0^{1,p}(I) = \{\ u \in W^{2,p}(I)\ ؛\quad u = 0 \quad \text{على}\ \partial I\ \}\ ؛$$

انظر [EX] ·

* ثنوي $W_0^{1,p}$

ترميز ـ نرمز بـ $W^{-1,p'}(I)$ لثنوي $W_0^{1,p}(I)$ (مع $1 \leqslant p < \infty$) و بـ $H^{-1}(I)$ لثنوي $H_0^1(I)$ ·

وفقا للملاحظة 1 من الفصل 5 ، نطابق L^2 مع ثنويه، و لكن لا نطابق H_0^1 مع ثنويه· لدينا الاحتواءان

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1}$$

و التباينان مستمران و كثيفان·

إذا كانت I محدودة ، فإن

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \qquad \text{لكل}\ 1 \leqslant p < \infty$$

و التباينان مستمران و كثيفان·

إذا كانت I غير محدودة ، فإنه لدينا فقط

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \qquad \text{لكل}\ 1 \leqslant p \leqslant 2$$

و التباينان مستمران و كثيفان (انظر الملاحظة 12)·

يمكن تمثيل عناصر $W^{-1,p'}$ بواسطة دوال من $L^{p'}$ ؛ بشكل أدق لدينا

قضية 13.8. ـ **ليكن** $F \in W^{-1,p'}$ · **إذن توجد** $f_0, f_1 \in L^{p'}$ **بحيث**

$$< F, v >= \int f_0 v + \int f_1 v' \qquad \forall v \in W_0^{1,p}$$

و

$$\|F\| = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}}, \|f_1\|_{L^{p'}}\}.$$

عندما تكون I محدودة، يمكننا أخذ $f_0 = 0$ ·

إثبات. ـ نزود الفضاء $E = L^p \times L^p$ بالنظيم

$$\|h\| = \|h_0\|_{L^p} + \|h_1\|_{L^p} \qquad \text{حيث} \qquad h = [h_0, h_1] \cdot$$

التطبيق $T : u \in W_0^{1,p} \longmapsto [u, u'] \in E$ هو تقايس من $W_0^{1,p}$ في E · نضع $G = T(W_0^{1,p})$ و نزوده بالنظيم المستخلص من E ، و $S = T^{-1} : G \longrightarrow W_0^{1,p}$ · التطبيق $h \in G \longmapsto < F, Sh >$ هو دالي خطي مستمر على G · بفضل مبرهنة هان بناخ يمكننا تمديده إلى دالي خطي مستمر على E نرمز له بـ ϕ مع $\|\phi\|_{E'} = \|F\|$ · بمقتضى مبرهنة التمثيل لرايز نعلم بأنه يوجد $f_0, f_1 \in L^{p'}$ بحيث

$$< \phi, h >= \int f_0 h_0 + \int f_1 h_1 \qquad \forall h \in E.$$

من السهل التحقق بأن $\|\phi\|_{E'} = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}}, \|f_1\|_{L^{p'}}\}$ ·
عندما تكون I محدودة، نزود $W_0^{1,p}$ بالنظيم $\|u'\|_{L^p}$ (انظر القضية 12.8). نطبق الاستدلال السابق مع $E = L^p$ و $T : u \in W_0^{1,p} \longmapsto u' \in L^p$ · $\square$

ملاحظة 19. ـ الدالتان f_0 و f_1 غير وحيدتين.

ملاحظة 20. ـ اعتدنا أن نطابق F بالتوزيع $f_0 - f_1'$ (حسب التعريف، التوزيع $f_0 - f_1'$ هو الدالي الخطي $v \longmapsto \int f_0 v + \int f_1 v'$ على C_c^∞).

ملاحظة 21. ـ استنتاج القضية 13.8 يظل ساريا بالنسبة للداليات الخطية المستمرة على $W^{1,p}$ ·

4.8. بعض الأمثلة لمسائل حدية

ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -u''+u=f & \text{على} & I=]0,1[\\ u(0)=u(1)=0 & & \end{array}\right\} \qquad (14)$$

حيث إن f دالة معطاة (مثلا في $C(\bar{I})$ ، أو في $L^2(I)$). يدعى الشرط الحدي $u(0)=u(1)=0$ بشرط ديريكليه Dirichlet's condition (المتجانس homogeneous).

تعاريف. ـ الحل الكلاسيكي Classical solution لـ (14) هو دالة $u \in C^2(\bar{I})$ **تحقق** (14) (بالمعنى العادي). الحل الضعيف لـ (14) هو دالة $u \in H_0^1(I)$ **تحقق**

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I). \qquad (15)$$

لنبدأ بتطبيق البرنامج الذي حددناه في المقطع 1.8 .

المرحلة أ . ـ كل حل كلاسيكي، هو حل ضعيف. هذا بديهي بفضل قاعدة المكاملة بالتجزئة للازمة 9.8 .

المرحلة ب . ـ وجود و وحدانية الحل الضعيف:

• **قضية** 14.8. ـ **لكل** $f \in L^2$ ، **يوجد حل وحيد** $u \in H_0^1$ **لـ** (15) .
إضافة إلى ذلك، نحصل على u **عن طريق**

$$\min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\};$$

و هذا هو مبدأ ديريكليه.

إثبات. ـ نطبق مبرهنة لاكس - ملغرام (أو ببساطة مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه) في فضاء هلبرت $H = H_0^1(I)$ مع الشكل الثنائي الخطية

$$a(u,v) = \int u'v' + \int uv =< u, v >_{H^1}$$

و الدالي الخطي $\varphi : v \longmapsto \int fv$. $\square$

ملاحظة 22. ـ بإعطاء $F \in H^{-1}$ ، نعلم حسب مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه بأنه توجد $u \in H_0^1$ بحيث

$$< u, v >_{H^1} =< F, v >_{H^{-1}, H_0^1} \qquad \forall v \in H_0^1.$$

إن المؤثر $F \longmapsto u$ هو التشاكل التقابلي لرايز - فريشيه من H^{-1} على H_0^1 . يمكننا أن نعتبر بأن u حل معمم للمعادلة $-u'' + u = F$.

مرحلتا جـ و د . ـ انتظام و عودة إلى الحل الكلاسيكي.

نلاحظ في البداية بأنه إذا كانت $f \in L^2$ و إذا كانت $u \in H_0^1$ حلا ضعيفا، فإن $u \in H^2$. بالفعل فإنه لدينا

$$\int u'v' = \int (f - u)v \qquad \forall v \in C_c^1$$

إذن $u' \in H^1$ (بما أن $f - u \in L^2$)، أي أن $u \in H^2$. و بالإضافة إذا كانت $f \in C(\bar{I})$ فإن الحل الضعيف u ينتمي إلى $C^2(\bar{I})$. إذ أنه $(u')' \in C(\bar{I})$ و بالتالي $u' \in C^1(\bar{I})$ (انظر الملاحظة 6)؛ بناء على ذلك $u \in C^2(\bar{I})$. يتم الانتقال من حل ضعيف $u \in C^2(\bar{I})$ إلى حل كلاسيكي كما في المقطع 1.8 .

ملاحظة 23. ـ إذا كانت $f \in H^k(I)$ مع k عدد طبيعي $\geqslant 1$ ، نتحقق بسهولة (بالاستقراء) بأن الحل u لـ (15) ينتمي إلى $H^{k+2}(I)$.

إن الطريقة الموصوفة أعلاه جد مرنة و تتكيف مع عدد كبير من المسائل. نشير إلى بعض المسائل التي كثيرا ما تتكرر. من الضروري توضيح الفضاء الدالي الذي نعمل فيه بالنسبة لكل مسألة .

مثال 1 **(شرط ديريكليه غير المتجانس)** · ـ ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{rl} -u''+u=f & \text{على} \quad I=]0,1[\\ u(0)=\alpha, \quad u(1)=\beta \end{array}\right\} \qquad (16)$$

مع $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ محددان و f دالة معطاة·

• **قضية** 15.8. **ـ بإعطاء** $f\in L^2(I)$ **و** $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ **، توجد** $u\in H^2(I)$ **وحيدة محققة لـ** (16) · **إضافة إلى ذلك نحصل على** u **عن طريق**

$$\min_{\substack{v\in H^1 \\ v(0)=\alpha, v(1)=\beta}} \left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2)-\int_I fv\right\}.$$

علاوة على ذلك، فإنه إذا كانت $f\in C(\bar{I})$ **، فإن** $u\in C^2(\bar{I})$ ·

إثبات· ـ لنشر إلى طريقتين ممكنتين·

الطريقة الأولى · ـ نحدد دالة منتظمة u_0 بحيث $u_0(0)=\alpha$ و $u_0(1)=\beta$ [10] و نقوم بتغيير المجهول $\tilde{u}=u-u_0$ ؛ فإن $\tilde{u}$ يحقق

$$\left\{\begin{array}{l} -\tilde{u}''+\tilde{u}=f+u_0''-u_0 \\ \tilde{u}(0)=\tilde{u}(1)=0. \end{array}\right.$$

إذن نكون قد عدنا إلى المسألة السابقة بالنسبة لـ $\tilde{u}$ ·

الطريقة الثانية · ـ نعتبر في فضاء H^1 ، المجموعة المحدبة المغلقة

$$K=\{\, v\in H^1(I); \quad v(0)=\alpha, \quad v(1)=\beta\,\}.$$

إذا كانت u حلا كلاسيكيا لـ (16) فإنه يكون لدينا

$$\int_I u'(v-u)'+\int_I u(v-u)=\int_I f(v-u) \qquad \forall v\in K.$$

و عليه لدينا بالخصوص

[10] اختر مثلا u_0 دالة تآلفية affine function ·

$$\int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geqslant \int_I f(v-u) \qquad \forall v \in K. \tag{17}$$

نستعمل إذن مبرهنة ستامباكيا (مبرهنة 6.5) : يوجد $u \in K$ ، وحيدا، محققا لـ (17) ؛ فضلا على ذلك يحصل u عن طريق

$$\min_{v\in K}\Big\{\frac{1}{2}\int_I ({v'}^2+v^2) - \int_I fv\Big\}.$$

للرجوع إلى الحل الكلاسيكي، نختار في (17) $v = u \pm \omega$ مع $\omega \in H_0^1(I)$ و نحصل على

$$\int_I u'\omega' + \int_I u\omega = \int_I f\omega \qquad \forall \omega \in H_0^1(I).$$

هذا يستلزم $u \in H^2(I)$ ، إلخ.

* **مثال** <u>2</u> **(مسألة شتورم - ليوفيل** Sturm – Liouville) . ــ لنعتبر حل هذه المسألة

$$\left.\begin{array}{r} -(pu')' + qu = f \\ u(0)=u(1)=0 \end{array}\right\} \quad \text{على} \quad I =]0,1[\tag{18}$$

حيث $p \in C^1(\bar I)$ ، $q \in C(\bar I)$ و $f \in L^2(I)$ دوال معطاة مع

$$p(x) \geqslant \alpha > 0 \qquad \forall x \in \bar I.$$

إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (18) فإن

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

نتبنى الفضاء $H_0^1(I)$ كفضاء دالي، و كدالي ثنائي الخطية، مستمر و متناظر،

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I quv.$$

إذا كان $q \geqslant 0$ ، فإن الدالي إهليلجي بفضل متباينة بوانكاريه (قضية 12.8). إذن (مبرهنة لاكس - ملغرام) يوجد $u \in H_0^1$ وحيدا بحيث

$$a(u,v) = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

إضافة إلى ذلك، يحصل على u عن طريق

$$\min_{v\in H_0^1}\Big\{\frac{1}{2}\int_I (p{v'}^2+qv^2) - \int_I fv\Big\}.$$

من الواضح أن $pu' \in H^1$ ؛ إذن $u' = \frac{1}{p}.pu' \in H^1$ و بالتالي فإن $u \in H^2$ ٠ في الأخير إذا كان $f \in C(\bar{I})$ فإن $u \in C^2(\bar{I})$ و يكون u حلا كلاسيكيا لـ (18) ٠

لنعتبر الآن المسألة الأعم التالية

$$\left.\begin{array}{l} -(pu')' + ru' + qu = f \\ u(0) = u(1) = 0 \;\cdot \end{array}\right\} \qquad \text{على} \qquad I =]0,1[\tag{19}$$

الفرضيات على p و q هي نفسها كما سبق و $r \in C(\bar{I})$ ٠
إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (19) فإنه لدينا

$$\int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

نتبنى، كفضاء دالي، الفضاء $H_0^1(I)$ و كدالي ثنائي الخطية و مستمر

$$a(u,v) = \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv.$$

هذا الدالي غير متناظر٠ في بعض الحالات يكون إهليلجيا: على سبيل المثال إذا كان $q \geqslant 1$ و $r^2 \leqslant \alpha$ أو إذا كان $q \geqslant 1$ و $r \in C^1(\bar{I})$ مع $|r'| \leqslant 2$ ـ لاحظ بأن

$$\int_I rv'v = -\frac{1}{2}\int_I r'v^2 \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

يمكننا إذن تطبيق مبرهنة لاكس - ملغرام و لكن لا توجد مسألة تصغير مرافقة٠ لنشر إلى وسيلة تسمح لنا بالرجوع إلى دالي ثنائي الخطية٠ ندخل مقابل مشتق R لـ $\frac{r}{p}$ و نضع $\zeta = e^{-R}$ ٠ تكتب المعادلة (19) بعد الضرب بـ ζ :

$$-\zeta pu'' - \zeta p'u' + \zeta ru' + \zeta qu = \zeta f$$

أو بشكل آخر (ما دام $\zeta' p + \zeta r = 0$) :

$$-(\zeta pu')' + \zeta qu = \zeta f.$$

ندخل إذن على H_0^1 الدالي الثنائي الخطية، المستمر و المتناظر

$$a(u,v) = \int_I \zeta pu'v' + \int_I \zeta quv.$$

إذا كان $q \geqslant 0$ ، فإن $a(u,v)$ يكون إهليلجيا و بالتالي فإنه يوجد $u \in H_0^1$ وحيدا بحيث

$$a(u,v) = \int_I \zeta fv \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

إضافة إلى ذلك، يحصل على u عن طريق

$$\min_{v\in H_0^1}\Big\{\frac{1}{2}\int_I(\zeta p v'^2+\zeta q v^2)-\int_I \zeta f v\Big\}.$$

نتحقق بسهولة بأن $u\in H^2$ و بأنه إذا كان $f\in C([0,1])$ فإن $u\in C^2([0,1])$ يكون حلا كلاسيكيا لـ (19) .

مثال 3 **(شرط نيومان** Neumann **التجانس)** . ــ ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -u''+u=f & \text{على} & I=]0,1[\\ u'(0)=u'(1)=0\ . & & \end{array}\right\} \qquad (20)$$

• **قضية** 16.8. **ــ لكل** $f\in L^2(I)$ ، **يوجد** $u\in H^2(I)$ **وحيد يحقق** (20)[11] .
إضافة إلى ذلك يحصل u **عن طريق**

$$\min_{v\in H^1}\Big\{\frac{1}{2}\int_I(v'^2+v^2)-\int_I fv\Big\}.$$

إذا $f\in C(\bar I)$ ، **فإن** $u\in C^2(\bar I)$.

إثبات. ــ إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (20) فإن

$$\int_I u'v'+\int_I uv=\int_I fv \qquad \forall v\in H^1(I). \tag{21}$$

يستحسن إذن العمل في فضاء هلبرت $H^1(I)$ و ليس في $H_0^1(I)$ كما سبق (نؤكد على أن $u(0)$ و $u(1)$ هما مجهولان قبليا). نطبق مبرهنة لاكس - ملغرام (أو مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه) مع الدالي الثنائي الخطية $a(u,v)=\int_I u'v'+\int_I uv$ و مع الدالي الخطي $\varphi: v\longmapsto\int_I fv$. نحصل على حل وحيد $u\in H^1(I)$ لـ (21) . نستنتج قبل كل شيء من (21) بأن $u\in H^2(I)$ و بعد ذلك بأن

$$\int_I(-u''+u-f)v+u'(1)v'(1)-u'(0)v'(0)=0 \qquad \forall v\in H^1(I). \tag{22}$$

---

[11] لاحظ أن $u\in H^2(I)\Longrightarrow u\in C^1(\bar I)$ و بالتالي يكون للشرط $u'(0)=u'(1)=0$ معنى. و لو كان لدينا فقط $u\in H^1$ لما كان له معنى.

في (22) ، نبدأ باختيار $v \in H_0^1(I)$ و نحصل على $-u'' + u = f$ حـ. ت. بالعودة إلى (22) نحصل على

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0 \qquad \forall v \in H^1(I).$$

بما أن $v(0)$ و $v(1)$ قيمتان كيفيتان، نستنتج بأن $u'(0) = u'(1) = 0$. $\square$

مثال 4 **(شرط نيومان غير المتجانس)** . ــ ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -u'' + u = f & \text{على} & I =]0,1[\\ u'(0) = \alpha \ \text{،} & & u'(1) = \beta \end{array}\right\} \qquad (23)$$

مع $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ عددين معطيين و f دالة معطاة.

قضية $16.8'$. **ــ لكل** $f \in L^2(I)$ **و لكل** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **، يوجد** $u \in H^2(I)$ **وحيد يحقق** (23). **إضافة إلى ذلك يحصل على** u **عن طريق**

$$\min_{v \in H^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv + \alpha v(0) - \beta v(1) \right\}.$$

إثبات. ــ إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (23) فإن

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1) \qquad \forall v \in H^1(I). \qquad (24)$$

من الملائم إذن تطبيق مبرهنة لاكس - ملغرام في الفضاء $H^1(I)$ مع الدالي الثنائي الخطية $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$ و الدالي الخطي

$$\varphi : v \longmapsto \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1).$$

هذا الدالي الخطي مستمر (بفضل المبرهنة 7.8). بعد ذلك نتبع نفس الطريقة كما في المثال 3 لإثبات أن $u'(0) = \alpha$ ، $u'(1) = \beta$. $\square$

مثال 5 **(شروط حدية مختلطة)** . ــ ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{ll} -u''+u=f & \text{على} \quad I=]0,1[\\ u(0)=0 \text{ ،} & u'(1)=0 \text{ .} \end{array}\right\} \tag{25}$$

إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (25) فإن

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv. \qquad \forall v \in H^1(I) \qquad \text{مع} \qquad v(0)=0 \tag{26}$$

من الملائم العمل في الفضاء الهلبرتي

$$H = \{\, v \in H^1(I); \quad v(0)=0 \,\}.$$

يترك للقارئ مباشرة بقية البرنامج.

مثال 6 **(شروط حدية ثالثة)**. ــ ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{ll} -u''+u=f & \text{على} \quad I=]0,1[\\ u'(0)-ku(0)=0 \text{ ،} & u(1)=0 \end{array}\right\} \tag{27}$$

حيث $k \in \mathbb{R}$ معطى[12] .

إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (27) فإنه لدينا

$$\int_I u'v' + \int_I uv + ku(0)v(0) = \int_I fv \qquad \forall v \in H^1(I) \qquad \text{مع} \qquad v(1)=0 \text{ .}$$

يستحسن إذن تطبيق مبرهنة لاكس - ملغرام في الفضاء الهلبرتي

$$H = \{\, v \in H^1(I); \quad v(1)=0 \,\}.$$

مع الدالي الثنائي الخطية المستمر، المتناظر

$$a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv + ku(0)v(0).$$

هذا الدالي إهليلجي عندما يكون $k \geqslant 0$[13] .

[12] بشكل أعم يمكننا اعتبار الشروط الحدية

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = 0, \qquad \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = 0.$$

[13] إذا كان k سالبا و $|k|$ صغيرة بشكل كاف، يبقى الدالي $a(u,v)$ إهليلجي. بيد أن حسابا صريحا يبين أنه توجد قيمة سالبة k و دوال f بحيث (27) لا تقبل حلا (انظر [EX]).

مثال 7 **(شروط حدية دورية)** . ـ ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -u''+u=f & \text{على} & I=]0,1[\\ u(0)=u(1) \text{ ،} & & u'(0)=u'(1) \cdot \end{array}\right\} \tag{28}$$

إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (28) فإنه لدينا

$$\int_I u'v'+\int_I uv=\int_I fv \qquad \forall v\in H^1(I) \qquad \text{مع} \qquad v(0)=v(1) \cdot \tag{29}$$

من الملائم إذن تطبيق مبرهنة لاكس - ملغرام في الفضاء الهلبرتي

$$H=\{\,v\in H^1(I);\quad v(0)=v(1)\,\}.$$

مع الدالي الثنائي الخطية $a(u,v)=\int_I u'v'+\int_I uv$. عندما يكون $f\in L^2(I)$ نحصل على حل $u\in H^2(I)$ لـ (28) ؛ إضافة إلى ذلك، إذا كان $f\in C(\bar{I})$ ، فإن هذا الحل يكون كلاسيكيا.

مثال 8 **(مسائل حدية على $\mathbb{R}$)** . ـ ليكن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -u''+u=f & \text{على} & \mathbb{R} \\ u(x)\longrightarrow 0 & \text{عندما} & |x|\longrightarrow\infty \end{array}\right\} \tag{30}$$

مع $f\in L^2(\mathbb{R})$.

إن حلا كلاسيكيا لـ (30) هو دالة $u\in C^2(\mathbb{R})$ تحقق (30) بالمعنى المألوف؛ إن حلا ضعيفا لـ (30) هو دالة $u\in H^1(\mathbb{R})$ تحقق

$$\int_{\mathbb{R}} u'v'+\int_{\mathbb{R}} uv=\int_{\mathbb{R}} fv \qquad \forall v\in H^1(\mathbb{R}). \tag{31}$$

لنبرهن قبل كل شيء بأنه إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (30) فإن u يكون حلا ضعيفا لـ (30). بالفعل، لنتحقق في بداية الأمر من أن $u\in H^1(\mathbb{R})$. نختار متتالية (ζ_n) كما في إثبات المبرهنة 6.8 (الصيغة (4)). بضرب (30) بـ $(\zeta_n u)$ و بالمكاملة بالتجزئة نحصل على

$$\int_{\mathbb{R}} u'(\zeta_n u'+\zeta_n' u)+\int_{\mathbb{R}} \zeta_n u^2=\int_{\mathbb{R}} \zeta_n fu$$

و عليه

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_n(u'^2 + u^2) = \int_{\mathbb{R}} \zeta_n f u + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n'' u^2. \tag{32}$$

لكن

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n'' u^2 \leqslant \frac{C}{n^2}\int_{n<|x|<2n} u^2 \qquad \text{مع} \qquad C = \|\zeta''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

و $\frac{1}{n^2}\int_{n<|x|<2n} u^2 \longrightarrow 0$ عندما $n \longrightarrow \infty$ لأن $u(x) \longrightarrow 0$ عندما $|x| \longrightarrow \infty$. نستنتج بأن $u \in H^1(\mathbb{R})$ (لاحظ أن $\int_{\mathbb{R}} \zeta_n f u \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n u^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \zeta_n f^2$ ثم مر إلى النهاية في (32) عندما $n \longrightarrow \infty$) . أخيرا، إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (30) فإن

$$\int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv \qquad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R})$$

و بالكثافة $\forall v \in H^1(\mathbb{R})$ ؛ إذن u هو حل ضعيف لـ (30) .
للحصول على وجود و وحدانية حل ضعيف، يكفي تطبيق مبرهنة لاكس - ملغرام في فضاء هلبرت $H^1(\mathbb{R})$. نتحقق بسهولة بأن الحل الضعيف u ينتمي إلى $H^2(\mathbb{R})$ و إضافة إلى ذلك، إذا كان $f \in C(\mathbb{R})$ ، فإن $u \in C^2(\mathbb{R})$.

خلاصة : ليكن $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ فإنه يوجد حل كلاسيكي وحيد لـ (30) (و الذي ينتمي كذلك إلى $H^2(\mathbb{R})$).

ملاحظة 24. ـ لا يمكن دراسة المسألة

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{على} \quad \mathbb{R} \\ u(x) \longrightarrow 0 & \text{عندما} \quad |x| \longrightarrow \infty \end{cases}$$

بالطريقة السابقة لأن الدالي الثنائي الخطية $a(u,v) = \int_{\mathbb{R}} u'v'$ ليس إهليلجيا في $H^1(\mathbb{R})$.

ملاحظة 25. ـ بنفس الطريقة أعلاه يمكننا حل المسألة

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{على} \quad]0,\infty[\\ u(0) = 0 \quad \text{و} \quad u(x) \longrightarrow 0 & \text{عندما} \quad |x| \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

مع $f \in L^2(0,\infty)$ معطاة.

5.8. مبدأ النهاية العظمى

لتكن $I =]0,1[$ ؛ لدينا

• **مبرهنة 17.8. ـ لتكن** $f \in L^2(I)$ **و لتكن** $u \in H^2(I)$ **حل مسألة ديريكليه**

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{على} \quad I \\ u(0) = \alpha & \text{و} \quad u(1) = \beta \end{cases} \tag{33}$$

إذن لدينا[14]

$$\min\{\alpha, \beta, \inf_I f\} \leqslant u(x) \leqslant \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\} \qquad \forall x \in I. \tag{34}$$

<u>إثبات</u>. ـ (طريقة البتر لستامباكيا). لدينا

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \qquad \forall v \in H_0^1(I). \tag{35}$$

نحدد دالة $G \in C^1(\mathbb{R})$ بحيث

(أ) G متزايدة فعلا على $]0, +\infty[$

(ب) $G(t) = 0$ لـ $t \in]-\infty, 0]$.

ليكن $K = \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\}$ ؛ نفرض أن $K < \infty$. لنبين بأن $u \leqslant K$ حـ.ت على I .
لتكن $v = G(u-K)$ ؛ نعلم بأن $v \in H^1$ ، بل إنه لدينا أيضا $v \in H_0^1$ و ذلك لأن

$$u(0) - K = \alpha - K \leqslant 0 \qquad \text{و} \qquad u(1) - K = \beta - K \leqslant 0 \ .$$

بتعويض v في (35) نحصل على

$$\int_I u'^2 G'(u-K) + \int_I uG(u-K) = \int_I fG(u-K)$$

أي

---

[14] يرمز $\sup f$ و $\inf f$ إلى supess لـ f (من المحتمل أنه $= +\infty$) و إلى infess لـ f (من المحتمل أنه $= -\infty$). نذكر بأن $\operatorname{supess} f = \inf \{ C$ ؛ $f(x) \leqslant C$ حـ.ت $\}$ و $\operatorname{infess} f = -\operatorname{supess}(-f)$.

$$\int_I u'^2 G'(u-K) + \int_I (u-K)G(u-K) = \int_I (f-K)G(u-K).$$

غير أن $(f-K) \leqslant 0$ و $G(u-K) \geqslant 0$ ، بالتالي نستنتج بأن

$$\int_I (u-K)G(u-K) \leqslant 0$$

و بما أن $tG(t) \geqslant 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ ، تستلزم المتراجحة السابقة بأن $(u-K)G(u-K) = 0$ حـ. ت. بالتالي $u \leqslant K$ حـ. ت. تنهي إثبات (34) بتعويض u بـ $-u$. $\square$

ملاحظة 26. ـ عندما تكون $f \in C(\bar{I})$ ، فإن $u \in C^2(\bar{I})$ و يمكننا إثبات (34) بطريقة مختلفة. لتكن $x_0 \in \bar{I}$ النقطة التي تدرك عندها u نهايتها العظمى على $\bar{I}$. إذا كانت $x_0 = 0$ أو $x_0 = 1$ فإنه لدينا $u \leqslant K$. إذا كان غير ذلك فإن $0 < x_0 < 1$ و بالتالي $u'(x_0) = 0$ ، $u''(x_0) \leqslant 0$ ؛ نستنتج بناء على المعادلة (33) بأن

$$u(x_0) = f(x_0) + u''(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant K.$$

لهذه الطريقة ميزة إمكانية التعميم إلى مسائل شتورم - ليوفيل العامة.

لنستخلص بعض النتائج المباشرة للمبرهنة 17.8 :

• **لازمة** 18.8. ـ **لتكن** u **حلا لـ** (33)

(1) **إذا** $u \geqslant 0$ **على** ∂I **و إذا** $f \geqslant 0$ **على** I ، **فإن** $u \geqslant 0$ **على** I .

(2) **إذا** $u = 0$ **على** ∂I **و إذا** $f \in L^\infty(I)$ ، **فإن** $\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(I)}$.

(3) **إذا** $f = 0$ **على** I ، **فإن** $\|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\partial I)}$.

لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة لشرط نيومان:

قضية 19.8. ــ **لتكن** $f \in L^2(I)$ **و لتكن** $u \in H^2(I)$ **حل المسألة**

$$\left.\begin{array}{ll} -u'' + u = f & \text{على} \quad I \\ u'(0) = u'(1) = 0 \cdot & \end{array}\right\}$$

إذن

$$\inf_I f \leqslant u(x) \leqslant \sup_I f \qquad \forall x \in \bar{I}. \tag{36}$$

إثبات. ــ لدينا

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv \qquad \forall v \in H^1(I). \tag{37}$$

ندخل في (37) $v = G(u-K)$ حيث $K = \sup\limits_I f$ · بعد ذلك نتبع نفس الطريقة كما في إثبات المبرهنة 17.8 · □

ملاحظة 27. ــ إذا $f \in C(\bar{I})$ ، فإن $u \in C^2(\bar{I})$ و يمكننا إثبات (36) كما في الملاحظة 26. لاحظ أنه إذا أدركت u نهايتها العظمى على ∂I ، مثلا في 0 ، فإن $u'' \leqslant 0$ (مدد u انعكاسيا عن يسار 0).

ملاحظة 28. ــ لنفرض أن $I = \mathbb{R}$ · لتكن $f \in L^2(\mathbb{R})$ و لتكن $u \in H^2(I)$ حل

$$-u'' + u = f \qquad \text{على} \quad \mathbb{R} \cdot$$

إذن

$$\inf_{\mathbb{R}} f \leqslant u(x) \leqslant \sup_{\mathbb{R}} f \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(انظر مثلا [EX]).

6.8. دوال ذاتية و تحليل طيفي

لتكن $I =]0,1[$ · لدينا

• **مبرهنة** 20.8. **ـ لتكن** $p \in C^1(\bar{I})$ **مع** $p \geqslant \alpha > 0$ **على** I **و** $q \in C(\bar{I})$ · **إذن توجد متتالية أعداد حقيقية** $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ **و قاعدة هلبرتية** $(e_n)_{n\geqslant 1}$ **لـ** $L^2(I)$ **بحيث** $e_n \in C^2(\bar{I})$ **و**

$$\left.\begin{array}{r} -(pe_n')' + qe_n = \lambda e_n \\ \cdot\ e_n(0) = e_n(1) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{على} \quad I \tag{38}$$

بالإضافة إلى ذلك فإن $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ **عندما** $n \longrightarrow \infty$ ·

نقول بأن الـ (λ_n) هي القيم الذاتية eigenvalues للمؤثر التفاضلي $Au = -(pu')' + qu$ مع شرط ديريكليه و أن الـ (e_n) هي الدوال الذاتية المرافقة·

إثبات· ـ يمكننا بكل الأحوال الافتراض بأن $q \geqslant 0$ ، و إلا اخترنا ثابتا C بحيث $q + C \geqslant 0$ و هذا يؤدي إلى تعويض λ_n بـ $\lambda_n + C$ في المعادلة (38) · لكل $f \in L^2(I)$ ، توجد إذن $u \in H^2(I) \frown H_0^1(I)$ وحيدة و محققة لـ

$$\left.\begin{array}{r} -(pu')' + qu = f \\ .u(0) = u(1) = 0 \end{array}\right\} \quad \text{على} \quad I \tag{39}$$

نرمز بـ T للمؤثر $u \longmapsto f$ المعتبر كمؤثر من $L^2(I)$ في $L^2(I)$[15] ·

لنتحقق بأن T مؤثر قرين ذاتي و متراص· لدينا، بفضل (39) ،

$$\int_I pu'^2 + \int_I qu^2 = \int_I fu$$

و بالتالي فإن $\alpha\|u'\|_{L^2}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$ · نستنتج بأن $\|u\|_{H^1} \leqslant C\|f\|_{L^2}$ (حيث C ثابت متعلق بـ α فقط)، و الذي يمكن أن يكتب

[15] يمكننا كذلك أن ننظر إلى T كمؤثر من H_0^1 في H_0^1 (انظر المقطع 8.9)·

$$\|Tf\|_{H^1} \leqslant C\|f\|_{L^2}.$$

بما أن التباين من $H^1(I)$ في $L^2(I)$ متراص (لأن I محدود)، نستنتج بأن T مؤثر متراص من $L^2(I)$ في $L^2(I)$. لنبرهن على أن

$$\int_I (Tf)g = \int_I f(Tg) \qquad \forall f, g \in L^2(I).$$

بالفعل، نضع $u = Tf$ و $v = Tg$ ؛ فيكون

$$-(pu')' + qu = f \tag{40}$$

$$-(pv')' + qv = g. \tag{41}$$

بضرب (40) بـ v و (41) بـ u و بالمكاملة فإنه يكون لدينا

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv = \int_I gu.$$

نلاحظ أخيرا بأن

$$\int_I (Tf)f = \int_I uf = \int_I (pu'^2 + qu^2) \geqslant 0 \qquad \forall f \in L^2(I) \tag{42}$$

و من ناحية أخرى $N(T) = \{0\}$ بما أنه إذا كان $Tf = u = 0$ فإن $f = 0$.
حسب المبرهنة 11.6 ، فإن $L^2(I)$ يملك قاعدة هلبرتية $(e_n)_{n\geqslant 1}$ مكونة من متجهات ذاتية (eigenvectors) لـ T ، المرافقة للقيم الذاتية $(\mu_n)_{n\geqslant 1}$. لدينا $\mu_n > 0$ (بالفعل، فحسب (42) فإن $\mu_n \geqslant 0$ و $\mu_n \neq 0$ بما أن $N(T) = \{0\}$) و نعلم أن $\mu_n \longrightarrow 0$.
بكتابة $Te_n = \mu_n e_n$ ، نرى بأن

$$-(pe_n')' + qe_n = \lambda_n e_n \qquad \text{حيث} \qquad \lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \cdot$$

أخيرا، نلاحظ بأن $e_n \in C^2(\bar{I})$ نظرا لأن $f = \lambda_n e_n \in C(\bar{I})$
(في الواقع إذا $p, q \in C^\infty(\bar{I})$ ، فإن $e_n \in C^\infty(\bar{I})$). $\square$

مثال . ـ إذا $p \equiv 1$ و $q \equiv 0$ نحصل على

$$e_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x) \qquad \text{و} \qquad \lambda_n = n^2\pi^2 \text{ ،} \qquad n = 1, 2 \ldots \cdot$$

ملاحظة 29. ــ بالنسبة لنفس المؤثر التفاضلي، تخضع القيم الذاتية و الدوال الذاتية للشروط الحدية. يمكننا كتمرين إيجاد القيم الذاتية للمؤثر $Au=-u''$ مع الشروط الحدية كما في الأمثلة 3 ، 5 ، 6 و 7 .

ملاحظة 30. ــ لقد تدخل افتراض " I محدودة " بشكل حاسم لإثبات تراص المؤثر T . على العموم، فإن نتيجة المبرهنة 20.8 تكون غير صحيحة عندما تكون I غير محدودة[16] ؛ و عليه فإننا نواجه الظاهرة الجد مهمة للطيف المستمر Continuous Spectrum ، انظر Reed – Simon [1] . يمكننا، كتمرين، إيجاد القيم الذاتية و الطيف للمؤثر $T: f \longmapsto u$ حيث إن $u\in H^2(\mathbb{R})$ هي حل المعادلة $-u''+u=f$ على $\mathbb{R}$ (T مؤثر محدود، قرين ذاتي من $L^2(\mathbb{R})$ في $L^2(\mathbb{R})$ ، و لكنه غير متراص)؛ انظر [EX] .

تعاليق حول الفصل الثامن

1) بعض المتباينات

نشير إلى بعض المتباينات المهمة المتعلقة بنظم صوبوليف.

ا) متباينة Poincaré – Wirtinger

لتكن I فترة معطاة. بإعطاء $u\in L^1(I)$ ، نضع $\bar{u}=\frac{1}{|I|}\int_I u$ (متوسط u على I). لدينا

$$\|u-\bar{u}\|_{L^\infty}\leqslant \|u'\|_{L^1}\qquad \forall u\in W^{1,1}(I)$$

(انظر [EX]).

ب) متباينة Hardy

16 في بعض الحالات تبقى نتيجة المبرهنة 20.8 صحيحة (انظر [EX]).

لتكن $I=]0,1[$ و لتكن $u \in W_0^{1,p}(I)$ مع $1<p<\infty$ · إذن $\frac{u(x)}{x(1-x)} \in L^p(I)$ و زيادة على ذلك فإن

$$\left\|\frac{u(x)}{x(1-x)}\right\|_{L^p} \leqslant C_p\|u'\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

(انظر [EX])·

جـ) متباينات الاستكمال Interpolation لـ Gagliardo – Nirenberg

لتكن I فترة محدودة· ليكن $1 \leqslant r \leqslant \infty$ و $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ · إذن يوجد ثابت C بحيث

$$\|u\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{L^q}^{1-a}\,\|u\|_{W^{1,r}}^{a} \qquad \forall u \in W^{1,r}(I) \tag{43}$$

حيث $0 \leqslant a \leqslant 1$ معرف بـ $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}=a\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}+1\Big)$ ؛ انظر [EX] ·
نستنتج بالخصوص من المتباينة (43) بأنه إذا كان $p<\infty$ (أو إذا كان $p=\infty$ و $r>1$)، فإن

$$\left.\begin{array}{ll} \forall \epsilon>0 \text{ ، } & \exists C_\epsilon \quad \text{بحيث} \\ \|u\|_{L^p} \leqslant \epsilon\|u\|_{W^{1,r}}+C_\epsilon\|u\|_{L^q} & \forall u \in W^{1,r}(I) \text{ ·} \end{array}\right\} \tag{44}$$

(يمكننا كذلك إثبات (44) بطريقة التراص Compactness method ؛ انظر [EX])·
نجد متباينات أخرى أكثر شمولية في Nirenberg [1] (انظر كذلك Friedman [2] أو [BT])· من بين ذلك، نلاحظ المتباينة

$$\|u'\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{W^{2,r}}^{1/2}\,\|u\|_{L^q}^{1/2} \qquad \forall u \in W^{2,r}(I)$$

حيث إن p هو الوسط التوافقي harmonic – mean لـ q و r ، أي أن: $\frac{1}{p}=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\Big)$ ·

2) مؤثرات هلبرت - شمدت

لتكن I فترة محدودة· نبرهن بأن المؤثر $f \longmapsto u$ الذي يرفق لكل $f \in L^2(I)$ الحل الوحيد للمسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -(pu')'+qu=f & \text{على} & I \\ u(0)=u(1)=0 & & \end{array}\right\}$$

(مع $0 < \alpha \leqslant p$ و $0 \leqslant q$)
هو مؤثر لهلبرت - شمدت من $L^2(I)$ في $L^2(I)$ ؛ انظر [EX] .

3) خصائص طيفية

نعرف العديد من الخصائص الطيفية لمؤثر شتورم - ليوفيل $Au = -(pu')' + qu$ مع شرط ديريكليه على $]0,1[$. من بينها نعرف:

ا) تعدد multiplicity كل قيمة ذاتية هو 1 : نقول كذلك بأن كل قيمة ذاتية بسيطة،

ب) إذا نظمنا القيم الذاتية (λ_n) في ترتيب متزايد، فإن الدالة الذاتية $e_n(x)$ المرافقة لـ λ_n تملك بالضبط $(n-1)$ جذرا على $]0,1[$ ؛ و بالخصوص فإن للدالة الذاتية الأولى $e_1(x)$ إشارة ثابتة على $]0,1[$.

جـ) يتقارب الكسر $\frac{\lambda_n}{n^2}$ عندما $n \to \infty$ نحو نهاية > 0 .

حول هذه القضايا، يمكننا مراجعة Weinberger [1] ، Protter – Weinberger [1] ، Coddington – Levinson [1] ، Hartman [1] و Agmon [1] .