7

مبرهنة هيل - يوشيدا

1.7. تعاريف و خصائص أولية للمؤثرات الأعظمية الرتيبة

في كل ما سيأتي نرمز بـ H لفضاء هلبرت.

تعريف ٠ ـ ليكن $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا غير محدود. نقول بأن A رتيب[1] إذا

$$(Av, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in D(A),$$

A أعظمي رتيب إذا كان لدينا بالإضافة $R(I + A) = H$ أي

$\forall f \in H$ ، $\exists u \in D(A)$ **بحيث** $u + Au = f$.

قضية 1.7. ـ ليكن A مؤثرا أعظميا رتيبا. إذن

أ) $D(A)$ **كثيف في** H .

ب) A **مغلق.**

جـ) لكل $\lambda > 0$ ، $(I + \lambda A)$ **تقابلي من** $D(A)$ **على** H ،

$(I + \lambda A)^{-1}$ **مؤثر محدود و** $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant 1$.

إثبات.

[1] بعض الكتاب يقولون بأن A تراكمي accretive أو أن $-A$ تبددي dissipative .

أ) ليكن $f \in H$ بحيث $(f,v)=0$ لكل $v \in D(A)$ · لنتحقق بأن $f=0$ · بالفعل، يوجد $v_0 \in D(A)$ بحيث $v_0 + Av_0 = f$ · لدينا

$$0 = (f, v_0) = |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \geqslant |v_0|^2.$$

إذن $v_0 = 0$ و بالتالي $f=0$ ·

ب) نلاحظ بداية بأن لكل $f \in H$ يوجد $u \in D(A)$ وحيد بحيث $u + Au = f$ · إذ أنه إذا رمزنا بـ $\bar{u}$ لحل آخر فإنه يكون لدينا $(u-\bar{u}) + A(u-\bar{u}) = 0$ · بأخذنا الجداء السلمي مع $(u-\bar{u})$ و تطبيقنا لرتابة A فإننا نرى بأن $u - \bar{u} = 0$ · من جهة أخرى لدينا $|u|^2 + (Au, u) = (f, u)$ و بالتالي فإن $|u| \leqslant |f|$ · المؤثر $f \longmapsto u$ المرمز له بـ $(I+A)^{-1}$ هو إذن مؤثر خطي محدود من H إلى H و $\|(I+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant 1$ ·

لنبرهن بأن A مغلق.

لتكن (u_n) متتالية بحيث $u_n \in D(A)$ لكل n ، $u_n \longrightarrow u$ و $Au_n \longrightarrow f$ · يجب التحقق بأن $u \in D(A)$ و بأن $Au = f$ · لدينا $u_n + Au_n \longrightarrow u + f$ و بالتالي

$$u_n = (I+A)^{-1}(u_n + Au_n) \longrightarrow (I+A)^{-1}(u+f).$$

بالنتيجة فإن $u = (I+A)^{-1}(u+f)$ أي أن $u \in D(A)$ و $u + Au = u + f$ ·

جـ) لنفرض بأنه لـ $\lambda_0 > 0$ معين لدينا $R(I + \lambda_0 A) = H$ · سوف نبرهن على أنه لدينا $R(I + \lambda A) = H$ لكل $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2}$ ·

لنبدأ بملاحظة ـ تماما كما في ب) ـ بأنه لكل $f \in H$ يوجد $u \in D(A)$ وحيد بحيث $u + \lambda_0 Au = f$ ؛ يرمز للمؤثر $f \longmapsto u$ بـ $(I+\lambda_0 A)^{-1}$ و لدينا $\|(I+\lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant 1$ · نبحث حل المعادلة

$$u + \lambda Au = f \qquad \text{مع} \qquad \lambda > 0\,\cdot \tag{1}$$

نكتب (1) على الشكل

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) u$$

أو أيضا

$$u = (I+\lambda_0 A)^{-1}\Big[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) u\Big]. \tag{2}$$

نرى إذن بأنه إذا $\left|1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$ أي $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2}$ ، فإن (2) لديها حل و ذلك بفضل مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة.

لنختم· إذا كان A أعظميا رتيبا فإن $I+A$ يكون غامرا· استنادا لما سبق فإن $I+\lambda A$ غامر لكل $\frac{1}{2}<\lambda$ إذن أيضا لـ $\frac{1}{4}<\lambda$ ، إلخ· بالاستقراء نرى بأن $I+\lambda A$ غامر لكل $\lambda>0$ · $\square$

* **ملاحظة** 1. ـ إذا كان A أعظميا رتيبا، فإن λA يكون أعظميا رتيبا أيضا لكل $\lambda>0$ · في مقابل ذلك إذا كان A و B مؤثران أعظميان رتيبان فإن $A+B$ المعرف على $D(A)\frown D(B)$ لا يكون بالضرورة أعظميا رتيبا؛ انظر [EX] ·

تعاريف· ـ ليكن A مؤثرا أعظميا رتيبا· نضع، لكل $\lambda>0$ ،

$$\boxed{J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1} \qquad \text{و} \qquad A_\lambda=\frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)\ \cdot}$$

J_λ هي حالة resolvent A و A_λ هي منظمة يوشيدا Yosida لـ A ·

لنحفظ بأن $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)}\leqslant 1$ ·

قضية 2.7. **ـ ليكن A مؤثرا أعظميا رتيبا· لدينا**

أ$_1$) $A_\lambda v=A(J_\lambda v)$ $\quad \forall v\in H$ **و** $\forall\lambda>0$

أ$_2$) $A_\lambda v=J_\lambda(Av)$ $\quad \forall v\in D(A)$ **و** $\forall\lambda>0$

ب) $|A_\lambda v|\leqslant|Av|$ $\quad \forall v\in D(A)$ **و** $\forall\lambda>0$

جـ) $\lim\limits_{\lambda\to 0}J_\lambda v=v$ $\quad \forall v\in H$

د) $\lim\limits_{\lambda\to 0}A_\lambda v=Av$ $\quad \forall v\in D(A)$

هـ) $(A_\lambda v,v)\geqslant 0$ $\quad \forall v\in H$ ، $\forall\lambda>0$

و) $|A_\lambda v|\leqslant\frac{1}{\lambda}|v|$ $\quad \forall v\in H$ ، $\forall\lambda>0$ ·

<u>إثبات·</u>

أ$_1$) مكافئ لـ $v=(J_\lambda v)+\lambda A(J_\lambda v)$ ـ الذي هو ناتج عن تعريف J_λ ·

أ$_2$) لدينا

$$Av=\frac{1}{\lambda}[(I+\lambda A)v-v]=\frac{1}{\lambda}(I+\lambda A)(v-J_\lambda v)$$

و بالتالي فإن

$$J_\lambda A v = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v).$$

ب) تنتج عن **أ** $_2$) ·

جـ) لنفرض بداية بأن $v \in D(A)$ · إذن

$$|v - J_\lambda v| = \lambda |A_\lambda v| \leqslant \lambda |Av|$$ استنادا إلى **ب)** ·

إذن $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v$ ·

لنتجه إلى الحالة العامة· ليكن $v \in H$ و ليكن $\epsilon > 0$ · بما أن $\overline{D(A)} = H$ (قضية 1.7) فإنه يوجد $v_1 \in D(A)$ بحيث $|v - v_1| \leqslant \epsilon$ · لدينا

$$\begin{aligned} |J_\lambda v - v| &\leqslant |J_\lambda v - J_\lambda v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| + |v_1 - v| \\ &\leqslant 2|v - v_1| + |J_\lambda v_1 - v_1| \leqslant 2\epsilon + |J_\lambda v_1 - v_1|. \end{aligned}$$

بالنتيجة

$$\limsup_{\lambda \to 0} |J_\lambda v - v| \leqslant 2\epsilon, \qquad \forall \epsilon > 0$$

و بالتالي فإن

$$\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda v - v| = 0.$$

د) طبق **أ** $_2$) و **جـ)** ·

هـ) لدينا

$$\begin{aligned} (A_\lambda v, v) &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\ &= \lambda |A_\lambda v|^2 + (A(J_\lambda v), J_\lambda v). \end{aligned}$$

إذن

$$(A_\lambda v, v) \geqslant \lambda |A_\lambda v|^2 \geqslant 0. \tag{3}$$

و) تنتج عن (3) و عن متباينة كوشي - شفارتز· □

ملاحظة 2. ـ من الملائم أن نستخلص من القضية 2.7 بأن $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ هي عائلة من المؤثرات المحدودة التي " تقترب من " A عندما $\lambda \longrightarrow 0$. بالطبع فإن $\|A_\lambda\|_{\mathcal{L}(H)}$ " " تنفجر " عندما $\lambda \longrightarrow 0$.

2.7. حل مسألة التطور

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & \text{على} \quad [0,\infty[\\ u(0) = u_0 & \end{array}\right\}$$

وجود و وحدانية

لنبدأ بتذكير نتيجة كلاسيكية.

• **مبرهنة** 3.7 **(كوشي، ليبشتز، بيكارد). ـ ليكن** E **فضاء بناخ و ليكن** $F : E \longrightarrow E$ **تطبيقا بحيث**

$$\|Fu - Fv\| \leqslant L\|u - v\| \qquad \forall u, v \in E \quad (L \geqslant 0).$$

إذن لكل $u_0 \in E$ **، يوجد** $u \in C^1([0,\infty[; E)$ **وحيد بحيث**

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dt} = Fu & \text{على} \quad [0,\infty[\\ u(0) = u_0 & \text{(شرط ابتدائي).} \end{array}\right\} \tag{4}$$

<u>إثبات</u>. ـ **وجود**. إن حل (4) يكافئ إيجاد $u \in C([0,\infty[; E)$ بحيث

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds. \tag{5}$$

بإعطاء $k > 0$ ــ الذي سيتم تحديده لاحقا ــ نضع

$$X = \{u \in C([0, \infty[; E);\ \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt} \|u(t)\| < \infty\}.$$

نتحقق بيسر من الخصائص التالية :

1) X فضاء لبناخ بالنسبة للنظيم

$$\|u\|_X = \sup_{t \geqslant 0} e^{-kt} \|u(t)\|.$$

2) لكل $u \in X$ فإن الدالة

$$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds$$

تنتمي إلى X ·

3) $\|\Phi u - \Phi v\| \leqslant \dfrac{L}{k} \|u - v\|_X \qquad \forall u, v \in X$ ·

لـ $k > L$ ، تملك Φ نقطة ثابتة التي هي حل لـ (5) ·

وحدانية· ــ ليكن u و $\bar{u}$ حلان لـ (4) · بوضعنا

$$\varphi(t) = \|u(t) - \bar{u}(t)\|,$$

يكون لدينا، بفضل (5)

$$\varphi(t) \leqslant L \int_0^t \varphi(s)ds \qquad \forall t \geqslant 0.$$

إذن $\varphi \equiv 0$ · □

تقدم مبرهنة كوشي - ليبشتز - بيكارد خدمات جليلة في مجال دراسة المعادلات التفاضلية العادية، غير أنها تقريبا غير صالحة للاستعمال لحل معادلات تفاضلية جزئية· النتيجة الآتية هي، في المقابل، أداة شديدة الفاعلية لحل المعادلات التفاضلية الجزئية للتطور (انظر الفصل 10)·

• **مبرهنة** 4.7 **(هيل - يوشيدا** Hille – Yosida **)· ــ ليكن** A **مؤثرا أعظميا رتيبا في فضاء**

[2] الفضاء $D(A)$ مزود بنظيم البيان $|v| + |Av|$ أو بالنظيم الهلبرتي المكافئ $(|v|^2 + |Av|^2)^{1/2}$ ·

هلبرت H **. إذن لكل** $u_0 \in D(A)$ **توجد دالة**[2]

$$u \in C^1([0,+\infty[;H) \frown C([0,+\infty[;D(A))$$

وحيدة بحيث

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 & \textbf{على} \quad [0,+\infty[\\ u(0) = u_0 & \textbf{(شرط ابتدائي).} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه لدينا

$$|u(t)| \leqslant |u_0| \qquad \text{و} \qquad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leqslant |Au_0| \qquad \forall t \geqslant 0 \text{ .}$$

ملاحظة 3. ـ تكمن الفائدة الرئيسية من المبرهنة 4.7 في رد حل المسألة التطورية (6) إلى التحقق بأن A أعظمي رتيب، أي، إلى دراسة المعادلة المراوحة $u + \lambda Au = f$.

إثبات. ـ نقسمه إلى 6 مراحل.

المرحلة الأولى: وحدانية. ـ ليكن u و $\bar{u}$ حلين لـ (6) . لدينا

$$\left(\frac{d}{dt}(u-\bar{u}), u-\bar{u}\right) = -(A(u-\bar{u}), u-\bar{u}) \leqslant 0.$$

بيد أن[3]

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-\bar{u}(t)|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t)-\bar{u}(t)), u(t)-\bar{u}(t)\right).$$

إذن فالدالة $t \longmapsto |u(t)-\bar{u}(t)|$ تناقصية على $[0,+\infty[$. بما أن $|u(0)-\bar{u}(0)| = 0$ نستنتج بأن

$$|u(t)-\bar{u}(t)| = 0 \qquad \forall t \geqslant 0.$$

لإثبات وجود u ، نعوض A بمنظمته يوشيدا A_λ ، نثبت عدة تقديرات غير مرتبطة بـ λ ثم ننتقل إلى التقارب عندما $\lambda \longrightarrow 0$.

---

[3] من المهم تذكر بأنه إذا كانت $\varphi \in C^1([0,+\infty[;H)$ فإن

$$|\varphi|^2 \in C^1([0,+\infty[;\mathbb{R}) \qquad \text{و} \qquad \frac{d}{dt}|\varphi|^2 = 2\left(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi\right) \text{ .}$$

ليكن u_λ حل المسألة

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{du_\lambda}{dt}+A_\lambda u_\lambda=0 & \text{على} \quad [0,+\infty[\\ u_\lambda(0)=u_0\in D(A). & \end{array}\right\} \qquad (7)$$

لاحظ بأن u_λ موجودة بفضل تطبيق مبرهنة كوشي - ليبشتز - بيكارد مع $F=-A_\lambda$ ·

المرحلة الثانية. ــ لدينا التقدير

$$\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|=|A_\lambda u_\lambda(t)|\leqslant|Au_0| \qquad \forall t\geqslant 0, \qquad \forall\lambda>0. \qquad (8)$$

هذه المتباينة هي نتيجة مباشرة لـ

توطئة 1.7. **ــ لتكن** $w\in C^1([0,+\infty[;H)$ **دالة تحقق**

$$\frac{dw}{dt}+A_\lambda w=0 \qquad \textbf{على} \qquad [0,+\infty[\cdot \qquad (9)$$

إذن فالدالتان $t\longmapsto|w(t)|$ **و** $t\longmapsto\left|\dfrac{dw}{dt}(t)\right|=|A_\lambda w(t)|$ **تناقصيتان على** $[0,+\infty[$ ·

<u>إثبات.</u> ــ لدينا $(\dfrac{dw}{dt},w)+(A_\lambda w,w)=0$ ·

بيد أن (القضية 2.7 هـ) $(A_\lambda w,w)\geqslant 0$ و بالتالي $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}|w|^2\leqslant 0$ ·

من جهة أخرى، بما أن A_λ مؤثر خطي **محدود**، فإنه يستنتج من (9) بأن w C^∞ و بأن

$$\frac{d}{dt}(\frac{dw}{dt})+A_\lambda(\frac{dw}{dt})=0.$$

نطبق إذن ما سبق على $\dfrac{dw}{dt}$ ·

المرحلة الثالثة. ــ سنبرهن بأنه، لكل $t\geqslant 0$ ، فإن $u_\lambda(t)$ تتقارب، عندما $\lambda\longrightarrow 0$ ، إلى نهاية يرمز لها بـ $u(t)$ ؛ بالإضافة إلى ذلك فإن هذا التقارب منتظم بالنسبة لـ t على أي فترة $[0,T]$ ·

بالفعل ليكن $\lambda, \mu > 0$. لدينا

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

و بالتالي

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0. \tag{10}$$

غير أن

$$\begin{cases} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) \\ = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) \\ = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) \\ \qquad\qquad +(A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ \geqslant (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu). \end{cases} \tag{11}$$

نستنتج إذن من (8) ، (10) و (11) بأن

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leqslant 2(\lambda+\mu)|Au_0|^2$$

و بالمكاملة

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leqslant 4(\lambda+\mu)t|Au_0|^2$$

أي

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leqslant 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}|Au_0|. \tag{12}$$

يستخلص بأنه، لكل $t \geqslant 0$ ، فإن $(u_\lambda(t))$ هي لكوشي، و إذن فهي تتقارب لما $\lambda \longrightarrow 0$ نحو نهاية يرمز لها بـ $u(t)$. عند إنتقالنا إلى النهاية في (12) لما $\mu \longrightarrow 0$ نحصل على

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leqslant 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|.$$

بالنتيجة فإن التقارب منتظم بالنسبة لـ t على أي فترة محدودة $[0,T]$ و $u \in C([0,+\infty[; H)$.

المرحلة الرابعة. ـ نفترض زيادة على ذلك بأن $u_0 \in D(A^2)$ أي أن $u_0 \in D(A)$ و $Au_0 \in D(A)$. إذن $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ تتقارب لما $\lambda \longrightarrow 0$ ، لكل $t \geqslant 0$ و بانتظام بالنسبة لـ t على أي فترة محدودة $[0,T]$.

بالفعل لنضع $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$ بحيث إنه $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$.
بسلوكنا نفس طريقة المرحلة الثالثة نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leqslant (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda|A_\lambda v_\lambda| + \mu|A_\mu v_\mu|). \tag{13}$$

غير أنه استنادا للتوطئة 1.7 ، فإنه لدينا

$$|A_\lambda v_\lambda| \leqslant |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0|, \tag{14}$$

و على النحو ذاته

$$|A_\mu v_\mu| \leqslant |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|. \tag{15}$$

في الأخير بما أن $Au_0 \in D(A)$ فإنه يأتي

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0,$$

و بذلك

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leqslant |A^2 u_0|, \qquad |A_\mu A_\mu u_0| \leqslant |A^2 u_0|. \tag{16}$$

باستعمال (13) ، (14) ، (15) و (16) مجتمعة نحصل على

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leqslant 2(\lambda + \mu)|A^2 u_0|^2.$$

نستخلص كما في المرحلة الثالثة بأن $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ تتقارب عندما $\lambda \longrightarrow 0$ لكل $t \geqslant 0$ و بانتظام بالنسبة لـ t على أي فترة محدودة.

المرحلة الخامسة. ــ يوجد حل لـ (6) إذا افترضنا أيضا بأن $u_0 \in D(A^2)$.
بالفعل، بناء على ما سبق، نعلم بأنه لكل $T < \infty$:

$$\left.\begin{array}{llll} u_\lambda(t) \longrightarrow u(t)\text{،} & \text{لما} & \lambda \longrightarrow 0\text{،} & \text{بانتظام على} \quad [0,T]\text{،} \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \quad \text{تتقارب} & \text{لما} & \lambda \longrightarrow 0\text{،} & \text{بانتظام على} \quad [0,T]. \end{array}\right\}$$

يستنتج بأن $u \in C^1([0,\infty[;H)$ و بأن $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \longrightarrow \frac{du}{dt}(t)$ ، لما $\lambda \longrightarrow 0$ ، بانتظام على $[0,T]$. نكتب (7) على الشكل

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0. \tag{17}$$

نلاحظ بأن $J_\lambda u_\lambda(t) \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} u(t)$ ، نظرا لأن

$$\begin{aligned}|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &\leqslant |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)|\\ &\leqslant |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \underset{\lambda\to 0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

بتطبيقنا لنتيجة أن بيان A مغلق نستنتج من (17) بأن $u(t) \in D(A)$ ، $\forall t \geqslant 0$ و بأن

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0.$$

أخيرا بما أن $u \in C^1([0,\infty[; H)$ ، فإن الدالة $t \longmapsto Au(t)$ مستمرة من $[0,\infty[$ إلى H و بذلك فإن $u \in C([0,\infty[; D(A))$.

بالنتيجة، لقد حصلنا على حل لـ (6) يحقق $|u(t)| \leqslant |u_0|$ ، $\forall t \geqslant 0$ و $\left|\frac{du}{dt}(t)\right| \leqslant |Au_0|$ ، $\forall t \geqslant 0$.

حتى نختم سنحتاج إلى الـ

توطئة 2.7 ـ **ليكن** $u_0 \in D(A)$. **إذن**

$\forall \epsilon > 0$ ، $\exists \bar{u}_0 \in D(A^2)$ **بحيث** $|u_0 - \bar{u}_0| < \epsilon$ **و** $|Au_0 - A\bar{u}_0| < \epsilon$.

بعبارة أخرى فإن $D(A^2)$ كثيف في $D(A)$ (بالنسبة لنظيم البيان).

<u>إثبات التوطئة 2.7 .</u> ـ ليكن $\bar{u}_0 = J_\lambda u_0$ ، بحيث إن $\bar{u}_0 \in D(A)$ و $\bar{u}_0 + \lambda A\bar{u}_0 = u_0$. إذن $A\bar{u}_0 \in D(A)$ ، أي أنه $\bar{u}_0 \in D(A^2)$.

من جهة أخرى، نعرف (انظر قضية 2.7) بأن

$$A\bar{u}_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda A u_0,$$

و

$$\lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \qquad \lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda A u_0 - Au_0| = 0.$$

نختار إذن $\lambda > 0$ صغيرا بما يكفي و نحصل على النتيجة المرجوة. $\square$

المرحلة السادسة : الخاتمة. ـ ليكن $u_0 \in D(A)$. بفضل التوطئة السابقة توجد متتالية $(u_{0n}) \in D(A^2)$ بحيث $u_{0n} \longrightarrow u_0$ و $Au_{0n} \longrightarrow Au_0$. استنادا إلى المرحلة الخامسة نعرف بأنه يوجد حل u_n للمسألة

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{على} \quad [0,\infty[\\ &u_n(0) = u_{0n}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

بالإضافة لدينا

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqslant |u_{0n} - u_{0m}| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
$$\left|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right| \leqslant |Au_{0n} - Au_{0m}| \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

بالنتيجة

$$u_n(t) \longrightarrow u(t) \quad \text{بانتظام على} \quad [0,\infty[$$
$$\frac{du_n}{dt}(t) \longrightarrow \frac{du}{dt}(t) \quad \text{بانتظام على} \quad [0,\infty[\text{ ،}$$

مع $u \in C^1([0,\infty[;H)$. عند انتقالنا للنهاية في (18) ، و بفضل كون A مغلقا، فإننا نرى بأن $u \in C([0,\infty[;D(A))$ و بأن u يحقق (6) . $\square$

ملاحظة 4. ـ ليكن u_λ حل المسألة (7) .

أ) لنفرض بأن $u_0 \in D(A)$. نعرف (بناء على المرحلة الثالثة) بأنه، لما $\lambda \longrightarrow 0$ ، فإن $u_\lambda(t)$ تتقارب، لكل $t \geqslant 0$ ، نحو نهاية يرمز لها بـ $u(t)$. يمكننا أن نثبت (انظر [EX]) بأن $u \in C^1([0,\infty[;H) \cap C([0,\infty[;D(A))$ و بأن u تحقق (6) .

ب) لنفرض بأن $u_0 \in H$. يمكن أن نثبت (انظر [EX]) بأنه لما $\lambda \longrightarrow 0$ ، فإن $u_\lambda(t)$ تتقارب، لكل $t \geqslant 0$ ، نحو نهاية يرمز لها بـ $u(t)$. غير أنه يمكن أن يحدث بأن $u(t) \notin D(A)$ $\forall t > 0$ و بأن $u(t)$ غير قابلة للاشتقاق في أية نقطة من $]0,\infty[$ (انظر مثالا في [EX]). إذن، فبالأحرى لا يمكن لـ $u(t)$ أن تكون حلا " كلاسيكيا " لـ (6) . في الحقيقة، في هذه الحالة، فإن المسألة (6) لا تملك أي حل بالمعنى الكلاسيكي. مع ذلك فإننا نعتبر $u(t)$ كحل " معمم " لـ (6) . غير أننا سنرى لاحقا (راجع المقطع 4.7) بأنه إذا كان

A قرينا ذاتيا فإن $u(t)$ يكون حلا " كلاسيكيا " لـ (6) لكل $u_0 \in H$ ، حتى إذا كان $u_0 \notin D(A)$.

* **ملاحظة** 5 (أنصاف زمر انكماشات). ــ ليكن $t \geqslant 0$ ؛ نعتبر التطبيق الخطي $S_A(t) : u_0 \longmapsto u(t)$ من $D(A)$ إلى $D(A)$ حيث إن $u(t)$ هو حل (6) المحصول عليه من المبرهنة 4.7 . نظرا لأن $|S_A(t)u_0| \leqslant |u_0|$ ، فإنه يمكننا تمديد $S_A(t)$ باستمرارية و بكثافة إلى مؤثر خطي مستمر من H و إليه. نرمز أيضا لهذا التمديد بـ $S_A(t)$ [4] . نتحقق بسهولة من أن $S_A(t)$ يمتلك الخصائص التالية :

أ) لكل $t \geqslant 0$ ، $S_A(t) : H \longrightarrow H$ هو مؤثر خطي مستمر و $\|S_A(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant 1$

ب)

$$\begin{cases} S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) o S_A(t_2) & \forall t_1 \geqslant 0, \quad \forall t_2 \geqslant 0 \\ S_A(0) = I. \end{cases}$$

جـ) $\lim\limits_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ t \geqslant 0}} |S_A(t)u_0 - u_0| = 0 \qquad \forall u_0 \in H$.

إن عائلة $\{S_A(t)\}_{t \geqslant 0}$ لمؤثرات من $\mathcal{L}(H)$ معرفة لكل قيمة للوسيط $t \geqslant 0$ و التي تحقق أ)، ب)، جـ)، هي حسب التعريف، نصف زمرة مستمرة انكماشات.

يبرهن (هيل - يوشيدا) بأنه عكسيا، بإعطاء نصف زمرة مستمرة انكماشات $S(t)$ ، فإنه يوجد مؤثر A أعظمي رتيب و وحيد بحيث $S(t) = S_A(t)$ لكل $t \geqslant 0$.

هكذا فإننا نقيم تطابقا تقابليا بين المؤثرات الأعظمية الرتيبة و أنصاف زمر الانكماشات المستمرة.

بالنسبة للبراهين، انظر مثلا [EX] و المراجع الواردة في التعاليق على الفصل 7 .

• **ملاحظة** .6 ــ ليكن A مؤثرا أعظميا رتيبا و ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$. إن حل المعادلة

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \quad \text{على} \quad [0, +\infty[\\[2mm] u(0) = u_0 \end{array}\right\}$$

يمكن إرجاعه ببساطة إلى حل (6) بفضل الأداة الكلاسيكية الآتية. نضع

---

[4] يمكن على حد سواء أن نعرف $S_A(t)$ كونها التطبيق $u_0 \in H \longmapsto u(t) \in H$ الوارد في الملاحظة 4 .

$$v = e^{\lambda t}u(t).$$

إذن v تحقق

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0 & \text{على} \quad [0,+\infty[\\ .v(0) = u_0 & \end{array}\right.$$

3.7. انتظام

سنقوم الآن بإكمال نتيجة المبرهنة 4.7 بإثبات أن الحل u لـ (6) هو أكثر انتظاما[5] و ذلك لقاء فرضيات إضافية على القيمة الابتدائية u_0 ·
لهذا الغرض، نعرف بالاستقراء الفضاء

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1}); \quad Av \in D(A^{k-1})\}$$ ، k عدد طبيعي $\geqslant 2$ ·

نتحقق بيسر بأن $D(A^k)$ هو فضاء هلبرت بالنسبة للجداء السلمي

$$(u,v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k}(A^j u, A^j v);$$

النظيم المقابل هو

$$|v|_{D(A^k)} = \Big(\sum_{j=0}^{k}|A^j u|^2\Big)^{1/2}.$$

مبرهنة 5.7. **ـ لنفرض بأن** $u_0 \in D(A^k)$ **مع** $k \geqslant 2$ · **إذن فإن الحل** u **للمسألة** (6) **الحاصل عليه من المبرهنة** 4.7 **يحقق إضافة إلى ذلك**

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty[; D(A^j)) \quad \text{لـ} \quad j = 0,1,...k$$ ·

---

[5] نذكر بأن خلاصة المبرهنة 4.7 تبين فقط بأن $u \in C^1([0,+\infty[; H)$ ·

إثبات. ــ لنبدأ بافتراض أن $k = 2$.

نعتبر الفضاء الهلبرتي $H_1 = D(A)$ مزودا بالجداء السلمي $(u, v)_{D(A)}$. نتحقق بيسر بأن المؤثر $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \longrightarrow H_1$ المعرف بـ

$$\left.\begin{array}{ll} D(A_1) = D(A^2) & \\ A_1 u = Au & \text{لـ} \quad u \in D(A_1) \end{array}\right\}$$

هو أعظمي رتيب في H_1 . بتطبيقنا للمبرهنة 4.7 على المؤثر A_1 في الفضاء H_1 نرى بأنه توجد دالة

$$u \in C^1([0, +\infty[; H_1) \frown C([0, +\infty[; D(A_1))$$

بحيث

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{du}{dt} + A_1 u = 0 & \text{على} \quad [0, +\infty[\\ u(0) = u_0. & \end{array}\right\}$$

بالخصوص u تحقق (6) ؛ و بفضل الوحدانية فإن الأمر يتعلق إذن بحل (6) . يتبقى فقط التحقق بأن $u \in C^2([0, +\infty[; H)$. نظرا لأن

$$A \in \mathcal{L}(H_1, H) \quad \text{و لأن} \quad u \in C^1([0, +\infty[; H_1) \text{ ،}$$

فإنه يستنتج بأن $Au \in C^1([0, +\infty[; H)$ و بأن

$$\frac{d}{dt}(Au) = A(\frac{du}{dt}). \tag{19}$$

بتطبيقنا لـ (6) نرى بأن $\dfrac{du}{dt} \in C^1([0, +\infty[; H)$ ، أي أن $u \in C^2([0, +\infty[; H)$ و بأن

$$\frac{d}{dt}(\frac{du}{dt}) + A(\frac{du}{dt}) = 0 \quad \text{على} \quad [0, +\infty[\text{ .} \tag{20}$$

لننتقل الآن إلى الحالة العامة $k \geqslant 3$. نبرهن بالاستقراء على k :

لنسلم بالنتيجة حتى المرتبة $k - 1$ و لنفرض بأن $u_0 \in D(A^k)$. استنادا لما سبق نعرف مسبقا بأن الحل u لـ (6) ينتمي إلى $C^2([0, +\infty[; H) \frown C^1([0, +\infty[; D(A))$ و بأن u يحقق (20) .

لنضع

$$v = \frac{du}{dt}$$

نحصل على

$$\left.\begin{array}{r} v \in C^1([0,+\infty[;H) \frown C([0,+\infty[;D(A)), \\ [0,+\infty[\quad \text{على} \quad \dfrac{dv}{dt}+Av=0 \\ .v(0)=-Au_0 \end{array}\right\}$$

بعبارة أخرى، فإن v هو حل (6) الذي يقابل القيمة الابتدائية $v_0=-Au_0$ · بما أن $v_0 \in D(A^{k-1})$ فإننا نعرف، بناء على فرضية الاستقراء بأن

$$v \in C^{k-1-j}([0,+\infty[;D(A^j)) \qquad \text{لـ} \qquad j=0,1,...k-1 \text{ ،} \tag{21}$$

أي

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty[;D(A^j)) \qquad \text{لـ} \qquad j=0,1,...k-1 \ \cdot$$

يبقى فقط أن نتحقق بأن

$$u \in C([0,+\infty[;D(A^k)). \tag{22}$$

بتطبيقنا لـ (21) مع $j=k-1$ ، نحصل على

$$\frac{du}{dt} \in C([0,+\infty[;D(A^{k-1})). \tag{23}$$

نستنتج من (23) و من المعادلة (6) بأن

$$Au \in C([0,+\infty[;D(A^{k-1}))$$

أي (22) · □

4.7. حالة القرين الذاتي

ليكن $A: D(A) \subset H \longrightarrow H$ مؤثرا خطيا غير محدود مع $\overline{D(A)}=H$ · إذا طبقنا التماثل $H'=H$ فإنه يمكننا اعتبار A^* كمؤثر غير محدود في H ·

تعريف. ـ نقول بأن

A **متناظر** إذا

$$(Au, v) = (u, Av) \qquad \forall u, v \in D(A);$$

A **قرين ذاتي** إذا

$$A^* = A$$

و هو ما يفترض بأن $D(A^*) = D(A)$.

ملاحظة 7. ـ عندما يكون $A \in \mathcal{L}(H)$ ، فإنه لا داعي للتفريق بين مؤثر متناظر و مؤثر قرين ذاتي. إلا أنه إذا كان A غير محدود فإن التفريق بين " متناظر " و " قرين ذاتي " يكون دقيقا. من الواضح بأن مؤثرا قرينا ذاتيا هو متناظر. العكس غير صحيح : A متناظر إذا و فقط إذا $A \subset A^*$ ـ و هو ما يفترض ضمنيا بأن $D(A) \subset D(A^*)$ و $A^* = A$ على $D(A)$. عندما يكون A متناظرا، يمكن أن يحدث بأن يكون $A \subsetneqq A^*$ (انظر [EX]).
توضح النتيجة الآتية بأنه عندما يكون A أعظميا رتيبا، فإنه

(A متناظر) $\Longleftrightarrow$ (A قرين ذاتي).

قضية 6.7. ـ **ليكن** A **مؤثرا أعظميا رتيبا، متناظرا.**
إذن A **قرين ذاتي.**

إثبات. ـ ليكن $J_1 = (I + A)^{-1}$. لنثبت بداية بأن J_1 قرين ذاتي. يكفي أن نتحقق ـ نظرا لأن $J_1 \in \mathcal{L}(H)$ ـ بأن

$$(J_1 u, v) = (u, J_1 v) \qquad \forall u, v \in H. \tag{24}$$

نضع $u_1 = J_1 u$ ، $v_1 = J_1 v$ بحيث إن

$$u_1 + Au_1 = u$$
$$v_1 + Av_1 = v.$$

بما أن $(u_1, Av_1) = (Au_1, v_1)$ فإنه يستنتج بأن $(u_1, v) = (u, v_1)$ أي (24) .
ليكن $u \in D(A^*)$ و لنضع $f = u + A^* u$. لدينا

$$\forall v \in D(A) \qquad (f, v) = (u, v + Av)$$

أي

$$\cdot\ \forall w \in H \qquad (f, J_1 w) = (u, w)$$

بالنتيجة فإن $u = J_1 f$ و بذلك $u \in D(A)$ · الخلاصة: $D(A^*) = D(A)$ · $\square$

ملاحظة 8. ـ ينبغي الاحتياط كثيرا. إذا كان A مؤثرا رتيبا، و لو متناظرا، فإن A^* لا يكون بالضرورة رتيبا؛ انظر [EX] · بالمقابل يبرهن على التكافؤات التالية (انظر [EX]) :

A أعظمي رتيب

$\Longleftrightarrow$ A^* أعظمي رتيب

$\Longleftrightarrow$ A مغلق، $D(A)$ كثيف، A و A^* رتيبان.

• **مبرهنة** 7.7. ـ **ليكن** A **مؤثرا أعظميا رتيبا، قرينا ذاتيا. إذن لكل** $u_0 \in H$ [6] **توجد دالة**

$$u \in C([0, +\infty[; H) \frown C^1(]0, +\infty[; H) \frown C(]0, +\infty[; D(A))$$

وحيدة بحيث

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} + Au = 0 \quad \textbf{على} \quad]0, +\infty[\\ .u(0) = u_0 \end{array}\right\}$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه لدينا

$$|u(t)| \leqslant |u_0| \qquad \text{و} \qquad \left|\frac{du}{dt}(t)\right| = |Au(t)| \leqslant \frac{1}{t}|u_0| \qquad \forall t > 0$$

$$u \in C^k(]0, +\infty[; D(A^l)) \qquad \textbf{لكل } k, l \textbf{ عددين طبيعيين.} \tag{25}$$

إثبات.

[6] نلح على الإختلاف ما بين المبرهنة 4.7 و المبرهنة 7.7 : هنا $u_0 \in H$ (بدلا من $u_0 \in D(A)$). الخلاصة أضعف، نظرا لاحتمال أن " $\frac{du}{dt}(t)$ تنفجر " لما $t \longrightarrow 0$ ·

وحدانية. ليكن u و $\bar{u}$ حلين. بتطبيقنا لرتابة A نرى بأن الدالة $\varphi(t) = |u(t) - \bar{u}(t)|^2$ تناقصية على $]0, +\infty[$. من جهة أخرى فإنها مستمرة على $[0, +\infty[$ و $\varphi(0) = 0$. إذن $\varphi \equiv 0$.

وجود.

المرحلة الأولى. لنفرض بداية بأن $u_0 \in D(A^2)$ و لتكن u حل (6) الحاصل عليه من المبرهنة 4.7 . سوف نثبت التقدير

$$|\frac{du}{dt}(t)| \leqslant \frac{1}{t}|u_0| \qquad \forall t > 0. \tag{26}$$

نلاحظ بأن

$$J_\lambda^* = J_\lambda \qquad \text{و} \qquad A_\lambda^* = A_\lambda \qquad \forall \lambda > 0$$

(انظر إثبات القضية 6.7).
لنستعد التقريب المستعمل في إثبات المبرهنة 4.7 :

$$\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{على} \quad [0, \infty[\text{ ،} \qquad u_\lambda(0) = u_0 \text{ .} \tag{27}$$

بضربنا سلميا (27) بـ u_λ و بالمكاملة على $[0, T]$ نحصل على

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt = \frac{1}{2}|u_0|^2. \tag{28}$$

بأخذنا بعد ذلك الجداء السلمي لـ (27) مع $t\dfrac{du_\lambda}{dt}(t)$ و بالمكاملة على $[0, T]$ نحصل على

$$\int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt + \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t))tdt = 0. \tag{29}$$

لكن

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) = (A_\lambda \frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda) + (A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt}) = 2(A_\lambda u_\lambda, \frac{du_\lambda}{dt})$$

نظرا لأن $A_\lambda^* = A_\lambda$.
بالنتيجة، عند المكاملة بالتجزئة، نجد

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_0^T (A_\lambda u_\lambda(t), \frac{du_\lambda}{dt}(t))tdt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)]tdt \\ &= \frac{1}{2}(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T))T - \frac{1}{2}\int_0^T (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda)dt. \end{aligned} \right.$$

من جهة أخرى، بما أن الدالة $\left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right| \longmapsto t$ تناقصية (توطئة 1.7) فإنه لدينا

$$(31) \qquad \int_0^T \left|\frac{du_\lambda}{dt}(t)\right|^2 tdt \geqslant \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \frac{T^2}{2}.$$

بالتوفيق ما بين (28) ، (29) ، (30) و (31) نصل إلى

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + T(A_\lambda u_\lambda(T), u_\lambda(T)) + T^2\left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right|^2 \leqslant \frac{1}{2}|u_0|^2;$$

و منه نستنتج، بالخصوص، بأن

$$(32) \qquad \left|\frac{du_\lambda}{dt}(T)\right| \leqslant \frac{1}{T}|u_0| \qquad \forall T > 0.$$

نختم إثبات (26) بانتقالنا إلى النهاية في (32) عندما $\lambda \longrightarrow 0$ (لاحظ بأن $\frac{du_\lambda}{dt} \longrightarrow \frac{du}{dt}$ بفضل المرحلة الخامسة من إثبات المبرهنة 4.7).

المرحلة الثانية. نفترض الآن بأن $u_0 \in H$. لتكن (u_{0n}) متتالية في $D(A)$ بحيث إن $u_{0n} \longrightarrow u_0$. لتكن u_n حل المعادلة

$$\left. \begin{aligned} &\frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{على} \quad [0, +\infty[\\ &u_n(0) = u_{0n}. \end{aligned} \right\}$$

نعرف (مبرهنة 4.7) بأن

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leqslant |u_{0n} - u_{0m}| \qquad \forall m, n, \qquad \forall t \geqslant 0$$

و (المرحلة الأولى) بأن

$$\left|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)\right| \leqslant \frac{1}{t}|u_{0n} - u_{0m}| \qquad \forall m, n, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

نستنتج بأن $u_n(t)$ تتقارب نحو نهاية $u(t)$ بانتظام على $[0, +\infty[$ و بأن $\frac{du_n}{dt}$ تتقارب نحو $\frac{du}{dt}$ بانتظام على أي فترة $[\delta, +\infty[$ مع $\delta > 0$. بالتالي

$$u \in C([0,+\infty[;H) \frown C^1(]0,+\infty[;H).$$

نستخلص بسهولة بأن $u(t) \in D(A)$ لكل $t > 0$ و بأنها تحقق المعادلة $\frac{du}{dt} + Au = 0$ على $]0,+\infty[$ (استعمل كون أن A مغلق).

إثبات (25) . ــ سنثبت بالاستقراء على $k \geqslant 2$ بأن

$$u \in C^{k-j}(]0,+\infty[;D(A^j)) \qquad \forall j = 0,1,...,k. \tag{33}$$

لنسلم إذن بأن (33) صحيحة حتى المرتبة $k-1$ ؛ بالتالي ينتج عن ذلك بالخصوص أن

$$u \in C(]0,+\infty[;D(A^{k-1})). \tag{34}$$

لإقامة (33) عند المرتبة k ، يكفي (بفضل المبرهنة 5.7) بأن نتحقق بأن

$$u \in C(]0,+\infty[;D(A^k)). \tag{35}$$

في فضاء هلبرت $\widetilde{H} = D(A^{k-1})$ ، نعتبر المؤثر $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \subset \widetilde{H} \longrightarrow \widetilde{H}$ المعرف بـ

$$\begin{cases} D(\widetilde{A}) = D(A^k) \\ \widetilde{A} = A. \end{cases}$$

نتحقق بيسر بأن $\widetilde{A}$ أعظمي رتيب و متناظر (إذن قرين ذاتي) في $\widetilde{H}$.

بتطبيقنا للمرحلة الأولى من المبرهنة 7.7 في $\widetilde{H}$ على المؤثر $\widetilde{A}$ يتبين بأنه، لكل $v_0 \in \widetilde{H}$ ، يوجد حل وحيد للمسألة

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dv}{dt} + Av = 0 \quad \text{على} \quad]0,+\infty[\\ v(0) = v_0 \end{array}\right\} \tag{36}$$

مع

$$v \in C([0,+\infty[;\widetilde{H}) \frown C^1(]0,+\infty[;\widetilde{H}) \frown C(]0,+\infty[;D(\widetilde{A})).$$

باختيارنا لـ $v_0 = u(\epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ ($v_0 \in \widetilde{H}$ بفضل (34)) نرى بأن $u \in C(]\epsilon,+\infty[;D(A^k))$. بالتالي نحصل على (35) . $\square$

تعاليق حول الفصل السابع

1) مبرهنة هيل - يوشيدا في فضاءات بناخ

تمتد مبرهنة هيل - يوشيدا إلى فضاءات بناخ على الشكل التالي.
ليكن E فضاء بناخ و ليكن $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ مؤثرا خطيا غير محدود. نقول بأن A m - تراكمي إذا كان $\overline{D(A)} = E$ و إذا كان، لكل $\lambda > 0$ ، $I + \lambda A$ تقابليا من $D(A)$ على E مع $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant 1$.

مبرهنة 8.7 **(هيل - يوشيدا). ـ ليكن A مؤثرا m - تراكميا في E .**
إذن لكل $u_0 \in D(A)$ توجد دالة

$$u \in C^1([0, +\infty[; E) \frown C([0, +\infty[; D(A))$$

وحيدة بحيث إنه

$$\left.\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{على} \quad [0, +\infty[\\ &u(0) = u_0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

بالإضافة إلى ذلك، فإنه لدينا

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\| \quad \text{و} \quad \|\frac{du}{dt}(t)\| = \|Au(t)\| \leqslant \|Au_0\| \qquad \forall t \geqslant 0 \cdot$$

يرمز للمؤثر $u_0 \longmapsto u(t)$ ، موسعا باستمرارية على E ، بـ $S_A(t)$ ؛ $S_A(t)$ هو نصف زمرة مستمرة من انكماشات على E .
عكسيا، بإعطاء نصف زمرة مستمرة من انكماشات $S(t)$ ، فإنه يوجد مؤثر A m - تراكمي وحيد، بحيث إن $S(t) = S_A(t)$ لكل $t \geqslant 0$.

بالنسبة للإثبات، انظر مثلا J.Goldstein [1] ، Yosida [1] ، Schechter [1] ، Reed – Simon [1] ، الجزء الثاني، Tanabe [1] ، Pazy [1] ، Dunford – Schwartz [1] ، الجزء الأول، Friedman [2] ، Davies [1] ، Balakrishnan [1] و [EX] . تحتوي هذه المراجع على توسعات وافرة فيما يخص نظرية أنصاف الزمر.

2) صيغة أسية

توجد عدة طرق تسلسلية تمكن من حل المسألة (37) · نذكر على الخصوص الـ

مبرهنة 9.7. ـ **نفرض أن** A m **- تراكمي· إذن لكل** $u_0 \in D(A)$ **فإن** u **حل** (37) **معطى بالصيغة الأسية**

$$u(t) = \lim_{n \to \infty} \left[(I + \frac{t}{n} A)^{-1} \right]^n u_0. \tag{38}$$

انظر مثلا Yosida [1] و Pazy [1] ·

نلاحظ بأن الصيغة (38) تتوافق بالضبط بأسلوب التحليل العددي مع تقارب ترسيمة تقطيعية ضمنية بالنسبة لـ t للمعادلة (37) (انظر Raviart – Thomas [1])· إذ أنه لتحديد حل (37) نثبت $t > 0$ و نقسم الفترة $[0, t]$ إلى n فترات متساوية طولها $\Delta t = \dfrac{t}{n}$ ؛ نحل على التوالي المعادلات

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} + A u_{j+1} = 0, \qquad j = 0, 1, ...n-1,$$

انطلاقا من u_0 · بعبارة أخرى فإن

$$u_n = (I + \Delta t\, A)^{-n} u_0 = \Big(I + \frac{t}{n} A \Big)^{-n} u_0.$$

عندما $n \longrightarrow \infty$ (أي $\Delta t \longrightarrow 0$) فإنه من " الطبيعي " أن تتقارب u_n إلى $u(t)$ ·

3) إن المبرهنة 7.7 خطوة أولى نحو نظرية أنصاف الزمر التحليلية؛ انظر في هذا الصدد إلى Yosida [1] ، Kato [1] ، Reed – Simon [1] ، Friedman [2] ، Pazy [1] ، Tanabe [1] ·

4) معادلات بطرف ثان· معادلات غير خطية·

لنعتبر المسألة

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{du}{dt}(t)+Au(t)=f(t) \quad \text{على} \quad [0,T] \\ .u(0)=u_0\end{array}\right\} \tag{39}$$

لدينا النتيجة الآتية

مبرهنة 10.7. ـ **نفترض بأن** A m **- تراكمي. إذن لكل** $u_0 \in D(A)$ **و لكل** $f \in C^1([0,T];E)$ **توجد دالة**

$$u \in C^1([0,T];E) \frown C([0,T];D(A))$$

كحل وحيد لـ (39) **. بالإضافة إلى ذلك فإن** u **معطاة بالصيغة**

$$u(t)=S_A(t)u_0+\int_0^t S_A(t-s)f(s)ds, \tag{40}$$

حيث أن $S_A(t)$ **تمثل نصف الزمرة التي تم إدخالها في** 1) .

سنتذكر بأنه إذا كانت $f \in L^1(0,T;E)$ فإن الصيغة (40) ـ التي يبقى لها معنى ـ يمكن أن تعتبر كحل معمم لـ (39) . بالنسبة لهذه المسائل انظر Kato [1] ، Pazy [1] ، Martin [1] ، Tanabe [1] .

خلال التطبيقات، نجد الكثير من المعادلات " النصف خطية " التي على الشكل

$$\frac{du}{dt}+Au=F(u)$$

حيث إن F مؤثر غير خطي من X إلى X ؛ انظر مثلا Martin [1] ، Brézis [2] و تعليقات الفصل 10 .

في نفس التوجه نشير إلى أن أغلب نتائج الفصل 7 لديها صيغة غير خطية، بمعنى أن $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ مؤثر غير خطي؛ انظر Brézis [1] ، Barbu [1] ، Bénilan – Crandall – Pazy [1] .