6

مؤثرات متراصة. تحليل طيفي للمؤثرات القرينة الذاتية المتراصة

1.6. تعاريف. خصائص أولية. قرين

ليكن E و F فضاءي بناخ.

تعريف. ـ نقول بأن مؤثرا $T \in \mathcal{L}(E,F)$ متراص إذا كانت $T(B_E)$ متراصة نسبيا بالنسبة للطوبولوجيا القوية. نرمز بـ $\mathcal{K}(E,F)$ لمجموعة المؤثرات المتراصة و نضع $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E,E)$.

مبرهنة 1.6. ـ المجموعة $\mathcal{K}(E,F)$ هي فضاء جزئي متجهي مغلق في $\mathcal{L}(E,F)$ (بالنسبة للنظيم $\| \|_{\mathcal{L}(E,F)}$).

<u>إثبات.</u> ـ من الواضح بأن مجموع مؤثرين متراصين هو مؤثر متراص. لنفرض بأن

$(T_n) \in \mathcal{K}(E,F)$ ، $T \in \mathcal{L}(E,F)$ و $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$ · لنبرهن على أن $T \in \mathcal{K}(E,F)$ · بما أن F تام، يكفي التحقق بأن لكل $\epsilon > 0$ ، يمكن تغطية $T(B_E)$ بعدد منته من الكرات $B(f_i, \epsilon)$ في F · لنثبت n بحيث $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \frac{\epsilon}{2}$ · نظرا لأن $T_n(B_E)$ متراصة نسبيا، فإن $T_n(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \frac{\epsilon}{2})$ مع I منته· إذن $T(B_E) \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \epsilon)$ · □

تعريف· ــ نقول بأن مؤثرا $T \in \mathcal{L}(E,F)$ له رتبة منتهية إذا $dimR(T) < \infty$ ·

من الواضح بأن مؤثرا مستمرا برتبة منتهية متراص·

لازمة 2.6. ــ **لتكن** (T_n) **متتالية لمؤثرات مستمرة ذات رتب منتهية من** E **إلى** F **و ليكن** $T \in \mathcal{L}(E,F)$ **بحيث** $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$ · **إذن** $T \in \mathcal{K}(E,F)$ ·

---

* **ملاحظة** 1. ــ تتعلق " مسألة التقريب " (Banach, Grothendieck) الشهيرة بعكس اللازمة 2.6 · عند إعطاء مؤثر متراص، هل هناك متتالية (T_n) لمؤثرات برتب منتهية بحيث $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0$ ؟

في الغالب، الجواب هو بالنفي (Enflo [1]) ــ حتى بالنسبة لبعض الفضاءات الجزئية المغلقة في l^p ($1 < p < \infty$ ، $p \neq 2$)؛ انظر مثلا Lindenstrauss – Tzafriri [2] · غير أن الجواب هو بالإيجاب في حالات عديدة؛ مثلا إذا كان F فضاء لهلبرت· بالفعل ليكن $K = \overline{T(B_E)}$ · بإعطاء $\epsilon > 0$ ، نغطي K بـ $\bigcup_{i \in I} B(f_i, \epsilon)$ ، I منته· ليكن G الفضاء المتجهي المولد من الـ f_i و ليكن $T_\epsilon = P_G o T$ (T_ϵ لديه رتبة منتهية)· لنتحقق بأن $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < 2\epsilon$ ·

إذا $x \in B_E$ ، فإنه يوجد $i_0 \in I$ بحيث

$$\|Tx - f_{i_0}\| < \epsilon. \tag{1}$$

إذن

$$\|P_G o Tx - P_G f_{i_0}\| < \epsilon$$

بمعنى أنه

$$\|P_G o T x - f_{i_0}\| < \epsilon. \tag{2}$$

بالجمع بين (1) و (2) فإننا نحصل على

$$\|P_G o T x - T x\| < 2\epsilon \qquad \forall x \in B_E,$$

أي

$$\|T_\epsilon - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} < 2\epsilon.$$

[نبرهن بسهولة على أنه إذا كان F يملك قاعدة شاودر فإن الجواب يكون أيضا بالإيجاب].

نشير من جهة أخرى إلى تقنية جد مفيدة في التحليل غير الخطي ـ تمكن من تقريب تطبيق مستمر (خطي أو غير خطي) عن طريق تطبيقات غير خطية ذات رتب متهية.

ليكن X فضاء طوبولوجيا، F فضاء بناخ و $T : X \longrightarrow F$ تطبيقا مستمرا بحيث إن $T(X)$ متراصة نسبيا في F .

إذن لكل $\epsilon > 0$ ، يوجد تطبيق $T_\epsilon : X \longrightarrow F$ مستمر، برتبة متهية بحيث

$$\|T_\epsilon(x) - T(x)\| < \epsilon \qquad \forall x \in X. \tag{3}$$

بالفعل بما أن $K = \overline{T(X)}$ متراصة، يمكننا تغطية K بعدد منته من الكرات، $K \subset \bigcup_{i \in I} B(f_i, \frac{\epsilon}{2})$ ، مع I منته.

نضع

$$T_\epsilon(x) = \frac{\sum_{i \in I} q_i(x) f_i}{\sum_{i \in I} q_i(x)} \qquad \text{حيث إن} \qquad q_i(x) = \max\{\epsilon - \|Tx - f_i\|, 0\} \text{ ؛}$$

نبرهن بسهولة بأن T_ϵ تحقق (3) .

من جملة ما، تمكن هذه الطريقة من إثبات، مبرهنة النقطة الثابتة لشاودر انطلاقا من مبرهنة النقطة الثابتة لـ Brouwer ؛ انظر [EX] . مؤخرا استعملت هذه التقنية أيضا بنجاح ـ و بشكل مذهل ـ من طرف Lomonosov للبرهان على وجود فضاءات جزئية لا متغيرة بالنسبة لبعض المؤثرات الخطية؛ انظر مثلا [1] Akhiezer – Glazman .

قضية 3.6. **ـ ليكن** E ، F **و** G **ثلاث فضاءات بناخ. إذا** $T \in \mathcal{L}(E,F)$ **و** $S \in \mathcal{K}(F,G)$ **[** $T \in \mathcal{K}(E,F)$ **و** $S \in \mathcal{L}(F,G)$ **على التوالي]، فإن** $SoT \in \mathcal{K}(E,G)$.

إثبات بديهي.

مبرهنة 4.6 **(شاودر). ـ إذا كان** $T \in \mathcal{K}(E,F)$ ، **فإن** $T^* \in \mathcal{K}(F',E')$ **و العكس صحيح.**

إثبات. ـ لنبرهن بأن $T^*(B_{F'})$ متراصة نسبيا في E' . لتكن (v_n) متتالية من $B_{F'}$ ؛ لنثبت بأنه يمكننا استخراج متتالية جزئية بحيث $T^*(v_{n_k})$ تتقارب. ليكن $K = \overline{T(B_E)}$ (متريا متراصا) و لتكن $\mathcal{H} \subset C(K)$ معرفة بـ

$$\mathcal{H} = \{\varphi_n :\ x \in K \longmapsto < v_n, x >;\ n = 1, 2, ...\}.$$

إن فرضيات مبرهنة أسكولي (مبرهنة 24.4) محققة مما يمكننا من استخراج متتالية جزئية نرمز لها بـ φ_{n_k} و التي تتقارب في $C(K)$ إلى دالة $\varphi \in C(K)$. بشكل خاص

$$\sup_{u \in B_E} |< v_{n_k}, Tu > -\varphi(Tu)| \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

إذن

$$\sup_{u \in B_E} |< v_{n_k}, Tu > - < v_{n_l}, Tu >| \underset{k,l \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

أي أنه $\|T^* v_{n_k} - T^* v_{n_l}\|_{E'} \underset{k,l \to \infty}{\longrightarrow} 0$. بالتالي فإن $T^* v_{n_k}$ تتقارب في E' .

عكسيا، لنفرض بأن $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$. بناء على ما سبق فإن $T^{**} \in \mathcal{K}(E'', F'')$ و بالخصوص $T^{**}(B_E)$ متراصة نسبيا في E'' . بيد أن $T(B_E) = T^{**}(B_E)$ و E مغلق في E'' . بالتالي فإن $T(B_E)$ متراصة نسبيا في E . □

ملاحظة 2. ـ ليكن E و F فضاءين لبناخ و ليكن $T \in \mathcal{K}(E,F)$ ٠ لكل متتالية (u_n) من E تتقارب بضعف نحو u ، فإن (Tu_n) تتقارب بقوة إلى Tu ؛ انظر [EX] ٠ العكس صحيح أيضا إذا كان E انعكاسيا؛ انظر [EX] ٠

2.6. نظرية رايز - فريدهولم

لنبدأ ببعض النتائج التمهيدية٠

توطئة 1.6 **(توطئة رايز** Riesz **)٠ ـ ليكن** E **ف٠ م٠ ن و ليكن** $M \subset E$ **فضاء جزئيا مغلقا بحيث** $M \neq E$ ٠ **إذن**

$\forall \epsilon > 0$ $\quad \exists u \in E$ $\quad$ **بحيث** $\quad \|u\| = 1$ $\quad$ **و** $\quad dist(u, M) \geqslant 1 - \epsilon$ ٠

<u>إثبات</u>٠ ـ ليكن $v \in E$ ، مع $v \notin M$ ٠ بما أن M مغلق، فإن $d = dist(v, M) > 0$ ٠ نختار $m_0 \in M$ بحيث

$$d \leqslant \|v - m_0\| \leqslant \frac{d}{1-\epsilon}.$$

إذن فإن

$$u = \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|}$$

يجيب على هذا السؤال٠
بالفعل، إذا $m \in M$ فإنه لدينا

$$\|u - m\| = \left\| \frac{v - m_0}{\|v - m_0\|} - m \right\| \geqslant 1 - \epsilon$$

بما أن

$$m_0 + \|v - m_0\| m \in M.$$

□

ملاحظة 3. ــ إذا $dimM < \infty$ (أو عموما إذا كان M انعكاسيا) يمكننا اختيار $\epsilon = 0$ في التوطئة 1.6 ؛ لكن ليس في الحالة العامة (انظر [EX]).

• **مبرهنة** 5.6 **(رايز). ــ ليكن E ف. م. ن بحيث B_E تكون متراصة. إذن E ذو بعد منته.**

إثبات. ــ لنبرهن بالتناقض. إذا كان بعد E غير منته، فإنه توجد متتالية (E_n) من فضاءات جزئية بأبعاد متهية بحيث $E_{n-1} \subsetneqq E_n$. استنادا إلى التوطئة 1.6 ، يمكننا إنشاء متتالية (u_n) مع $u_n \in E$ ، $\|u_n\| = 1$ و $dist(u_n, E_{n-1}) \geqslant \dfrac{1}{2}$. بشكل خاص $\|u_n - u_m\| \geqslant \dfrac{1}{2}$ لـ $m < n$. إذن فإن المتتالية (u_n) لا تملك أية متتالية جزئية متقاربة ــ و هذا ضد الفرضية " B_E متراصة " . □

• **مبرهنة** 6.6 **(بديلة فريدهولم** Fredholm alternative **). ــ ليكن** $T \in \mathcal{K}(E)$. **إذن**

ا) $N(I-T)$ **ذو بعد منته،**

ب) $R(I-T)$ **مغلق، و بشكل أدق**

$$R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$$

جـ) $R(I-T) = E \iff N(I-T) = \{0\}$

د) $dimN(I-T) = dimN(I-T^*)$.

ملاحظة 4. ــ تتعلق بديلة فريدهولم بحل المعادلة $u - Tu = f$. إنها تعبر بأن:

إما أن لكل $f \in E$ لدى المعادلة $u - Tu = f$ حل وحيد،

أو إما أن المعادلة المتجانسة $u - Tu = 0$ لديها n حلا غير مرتبطين خطيا، و في هذه الحالة، فإن المعادلة غير المتجانسة $u - Tu = f$ تكون قابلة للحل إذا و فقط إذا كانت f تحقق n شرطا تعامديا (أي أن $f \in N(I-T^*)^{\perp}$).

ملاحظة 5. ـ إن الخاصية جـ) مألوفة في البعد المنته. إذا $dimE < \infty$ ، فإن مؤثرا خطيا من E إلى نفسه يكون متباينا إذا و فقط إذا كان غامرا. أما في حالة البعد اللانهائي فإن مؤثرا محدودا يمكن أن يكون متباينا دون أن يكون غامرا و العكس صحيح: على سبيل المثال الانزياح يمينا (يسارا على التوالي)[1] في l^2 . إذن فإن النتيجة جـ) تعبر عن خاصية جديرة بالملاحظة للمؤثرات على الشكل $I-T$ مع $T \in \mathcal{K}(E)$.

إثبات.

أ) ليكن $E_1 = N(I-T)$. إذن $B_{E_1} \subset T(B_E)$ و بالتالي B_{E_1} متراصة. استنادا إلى المبرهنة 5.6 ، فإن E_1 ذو بعد منته.

ب) ليكن $f_n = u_n - Tu_n \longrightarrow f$. ينبغي البرهنة على أن $f \in R(I-T)$. لنضع $d_n = dist(u_n, N(I-T))$. بما أن بعد $N(I-T)$ منته فإنه يوجد $v_n \in N(I-T)$ بحيث إن $d_n = \|u_n - v_n\|$. لدينا

$$f_n = (u_n - v_n) - T(u_n - v_n). \tag{4}$$

لنبرهن على أن $\|u_n - v_n\|$ تظل محدودة. لنبرهن بالتناقض و لنفرض بأنه توجد متتالية جزئية بحيث $\|u_{n_k} - v_{n_k}\| \longrightarrow \infty$. بوضعنا $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{\|u_n - v_n\|}$ ، نحصل بفضل (4) على $w_{n_k} - Tw_{n_k} \longrightarrow 0$. باستخراج متتالية جزئية (يرمز إليها أيضا بـ (w_{n_k}) للتبسيط) فإنه يمكننا افتراض بأن $Tw_{n_k} \longrightarrow z$. إذن $w_{n_k} \longrightarrow z$ و $z \in N(I-T)$. من جهة أخرى

$$dist(w_n, N(I-T)) = \frac{dist(u_n, N(I-T))}{\|u_n - v_n\|} = 1$$

(بما أن $v_n \in N(I-T)$). عند التقارب نحصل على $dist(z, N(I-T)) = 1$ ـ الذي هو غير معقول. بالتالي فإن $\|u_n - v_n\|$ تظل محدودة و بما أن T متراص فإنه يمكن استخراج متتالية جزئية بحيث $T(u_{n_k} - v_{n_k}) \longrightarrow l$.

نستنتج من (4) بأن $u_{n_k} - v_{n_k} \longrightarrow f + l$ ؛ بوضعنا $g = f + l$ يكون لدينا $g - Tg = f$ أي أن $f \in R(I-T)$. إذن فقد برهنا بأن مدى المؤثر $I-T$ مغلق. يمكننا إذن تطبيق المبرهنة 18.2 ؛ لدينا

$$R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp} \qquad \text{و} \qquad R(I-T^*) = N(I-T)^{\perp} \cdot$$

[1] انظر ملاحظة 6 أسفل.

جـ) لنبرهن بداية الاقتضاء $\Longleftarrow$.
لنبرهن بالتناقض و لنفرض بأن

$$E_1 = R(I-T) \neq E.$$

E_1 فضاء لبناخ و $T(E_1) \subset E_1$. إذن $T_{|_{E_1}} \in \mathcal{K}(E_1)$ و $E_2 = (I-T)(E_1)$ فضاء جزئي مغلق في E_1 . بالإضافة إلى ذلك $E_2 \neq E_1$ (لأن $(I-T)$ متباين). بوضعنا $E_n = (I-T)^n(E)$ فإننا نحصل هكذا على متتالية تناقصية فعلا من فضاءات جزئية مغلقة. استنادا إلى توطئة رايز فإنه توجد متتالية (u_n) بحيث إن $u_n \in E_n$ ، $\|u_n\| = 1$ و $dist(u_n, E_{n+1}) \geqslant \frac{1}{2}$. لدينا

$$Tu_n - Tu_m = -(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + (u_n - u_m).$$

نلاحظ بأنه إذا كان $n > m$ ، فإن $E_{n+1} \subset E_n \subset E_{m+1} \subset E_m$ و بالتالي

$$-(u_n - Tu_n) + (u_m - Tu_m) + u_n \in E_{m+1}.$$

إذن $\|Tu_n - Tu_m\| \geqslant \frac{1}{2}$ ـ و هو غير معقول بما أن T متراص. إذن $R(I-T) = E$.

عكسيا، لنفرض بأن $R(I-T) = E$. إذن (لازمة 17.2) $N(I-T^*) = R(I-T)^{\perp} = \{0\}$. بما أن $T^* \in \mathcal{K}(E')$ فإنه يمكننا تطبيق ما سبق على T^* و استنتاج أن $R(I-T^*) = E'$. بيد أن (لازمة 17.2)، $N(I-T) = R(I-T^*)^{\perp} = \{0\}$.

د) ليكن $d = dimN(I-T)$ ، $d^* = dimN(I-T^*)$. في البداية سنبرهن على أن $d^* \leqslant d$. لنبرهن بالتناقض بافتراض أن $d < d^*$. بما أن بعد $N(I-T)$ منته فإنه لديه مكمل طوبولوجي في E (انظر المقطع 4.2 ، مثال 1)؛ يوجد إذن إسقاط مستمر P من E على $N(I-T)$.

من جهة أخرى فإن $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$ لديه بعد مصاحب منته d^* و بالتالي فإن $R(I-T)$ لديه (في E) مكمل طوبولوجي، نرمز إليه بـ F ، ببعد يساوي d^* (انظر المقطع 4.2 ، مثال 2). بما أن $d < d^*$ ، فإنه يوجد تطبيق خطي $\Lambda : N(I-T) \longrightarrow F$ متباين و غير غامر. لنضع $S = T + (\Lambda o P)$ ، إذن $S \in \mathcal{K}(E)$ نظرا لأن رتبة $\Lambda o P$ متنهية.
لنبرهن على أن $N(I-S) = \{0\}$ ؛ بالفعل إذا

$$0 = u - Su = (u - Tu) - (\Lambda o P u),$$

فإن

$$u - Tu = 0 \qquad \text{و} \qquad \Lambda o P u = 0 \text{ ،}$$

أي أن $u \in N(I-T)$ و $\Lambda u = 0$ ؛ إذن $u = 0$ ·
بتطبيق جـ) على المؤثر S نرى أن $R(I-S) = E$ · هذا غير معقول لأنه يوجد $f \in F$ ، $f \notin R(\Lambda)$ ؛ بحيث إن المعادلة $u - Su = f$ ليس لها حل·
بالتالي فقد برهننا على أن $d^* \leqslant d$ · بتطبيق هذه النتيجة على T^* نرى أن

$$dimN(I-T^{**}) \leqslant dimN(I-T^*) \leqslant dimN(I-T).$$

بيد أن $N(I-T) \supset N(I-T^{**})$ ـ و هو ما يمكننا من أن نستخلص بأن $d = d^*$ · □

3.6. طيف مؤثر متراص

تعاريف· ـ ليكن $T \in \mathcal{L}(E)$ ·
المجموعة الحالة هي

$$\rho(T) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \text{ ؛ } (T-\lambda I) \text{ متقابل من } E \text{ على } E \} \text{ ·}$$

الطيف $\sigma(T)$ هو متمم المجموعة الحالة، $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$ ·
نقول بأن λ قيمة ذاتية ـ و نكتب $\lambda \in VP(T)$ ـ إذا

$$N(T - \lambda I) \neq 0;$$

$N(T-\lambda I)$ هو الفضاء الذاتي المرتبط بـ λ ·

من المهم تذكر أنه إذا $\lambda \in \rho(T)$ فإن $(T-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ (راجع اللازمة 6.2)·

ملاحظة 6. ـ من الواضح بأن $VP(T) \subset \sigma(T)$ · في الغالب يكون الاحتواء فعليا[2] : يمكن أن توجد λ بحيث

$$N(T-\lambda I) = \{0\} \qquad \text{و} \qquad R(T-\lambda I) \neq E$$

[2] بالطبع، إلا إذا كانت $dimE < \infty$ ، لأنه إذن $VP(T) = \sigma(T)$ ·

(تنتمي مثل هذه λ إلى الطيف و لكنها ليست قيمة ذاتية). لنأخذ على سبيل المثال في $E = l^2$ ، $Tu = (0, u_1, u_2, ...)$ حيث $u = (u_1, u_2, ...)$ (أي أن T هو الانزياح يمينا). إذن $0 \in \sigma(T)$ و $0 \notin VP(T)$.

قضية 7.6. **ـ الطيف** $\sigma(T)$ **هو مجموعة متراصة و**

$$\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|].$$

إثبات. ـ ليكن $\lambda \in \mathbb{R}$ مع $|\lambda| > \|T\|$ ؛ لنبرهن بأن $T - \lambda I$ تقابلي ـ و هو ما سيثبت بأن $\sigma(T) \subset [-\|T\|, +\|T\|]$. بإعطاء $f \in E$ فإن المعادلة $Tu - \lambda u = f$ تملك حلا وحيدا لأنها تكتب $u = \frac{1}{\lambda}(Tu - f)$ و يمكن تطبيق مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة عليها.
لنثبت الآن بأن $\rho(T)$ مفتوحة. ليكن $\lambda_0 \in \rho(T)$. بإعطاء $\lambda \in \mathbb{R}$ (قريب من λ_0) و $f \in E$ نبحث حل

$$Tu - \lambda u = f. \tag{5}$$

بيد أن (5) تكتب $Tu - \lambda_0 u = f + (\lambda - \lambda_0)u$ أي

$$u = (T - \lambda_0 I)^{-1}[f + (\lambda - \lambda_0)u]. \tag{6}$$

بتطبيق مبرهنة بناخ للنقطة الثابتة من جديد نرى بأن (6) تملك حلا وحيدا إذا

$$|\lambda - \lambda_0| \; \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\| < 1.$$

□

• **مبرهنة** 8.6. **ـ ليكن** $T \in \mathcal{K}(E)$ **مع** $dim E = \infty$.
إذن لدينا
أ) $0 \in \sigma(T)$ ،
ب) $\sigma(T) \setminus \{0\} = VP(T) \setminus \{0\}$ ،
جـ) **إحدى الحالات التالية:**

ـ **إما أن** $\sigma(T)=\{0\}$ ،
ـ **إما أن** $\sigma(T)\setminus\{0\}$ **منته،**
ـ **إما أن** $\sigma(T)\setminus\{0\}$ **هي متتالية تتقارب نحو** 0 .

إثبات.
أ) لنفرض بأن $0\notin\sigma(T)$. إذن T متقابل و $I=ToT^{-1}$ متراص. إذن B_E متراصة و $dimE<\infty$ (راجع المبرهنة 5.6).

ب) ليكن $\lambda\in\sigma(T)$ ، $\lambda\neq 0$. لنثبت بأن $\lambda\in VP(T)$. لنبرهن بالتناقض و لنفرض بأن $N(T-\lambda I)=\{0\}$. إذن استنادا إلى المبرهنة 6.6 **جـ)** ، نعرف بأن $R(T-\lambda I)=E$ و بالتالي $\lambda\in\rho(T)$ ـ و هذا غير معقول. □

بالنسبة لبقية الإثبات سنحتاج إلى

توطئة 2.6. ـ **لتكن** $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ **متتالية من أعداد حقيقية مختلفة بحيث**

$$\lambda_n\longrightarrow\lambda$$

و

$$\lambda_n\in\sigma(T)\setminus\{0\}\qquad\forall n.$$

إذن $\lambda=0$.

بعبارة أخرى، كل النقط في $\sigma(T)\setminus\{0\}$ منعزلة.

إثبات. ـ نعرف بأن $\lambda_n\in VP(T)$ ؛ ليكن $e_n\neq 0$ بحيث $(T-\lambda_n I)e_n=0$. ليكن E_n الفضاء المتجهي المولد من $[e_1,e_2,...,e_n]$. لنبرهن بأن $E_n\subsetneqq E_{n+1}$ لكل n . يكفي أن نتحقق بأنه، لكل n ، المتجهات $e_1,e_2,...,e_n$ غير مرتبطة خطيا. لنبرهن بالاستقراء على n . لنفرض بأن النتيجة صحيحة على المستوى n و لنفرض بأن $e_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. إذن

$$Te_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i e_i=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_{n+1}e_i.$$

بالتالي $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_{n+1}) = 0$ لكل $i = 1, 2, ...n$ و إذن $\alpha_i = 0$ لكل $i = 1, 2, ...n$ ـ و هذا غير معقول. إذن $E_n \subsetneqq E_{n+1}$ لكل n .

من جهة أخرى، من الواضح أن $(T - \lambda_n I)E_n \subset E_{n-1}$. بتطبيقنا لتوطئة رايز، نكون متتالية $(u_n)_{n\geqslant 1}$ بحيث $u_n \in E_n$ ، $\|u_n\| = 1$ و $dist(u_n, E_{n-1}) \geqslant \dfrac{1}{2}$ لكل $n \geqslant 2$.

ليكن $2 \leqslant m < n$ بحيث

$$E_{m-1} \subset E_m \subset E_{n-1} \subset E_n.$$

لدينا

$$\Big\|\frac{Tu_n}{\lambda_n} - \frac{Tu_m}{\lambda_m}\Big\| = \Big\|\frac{(Tu_n - \lambda_n u_n)}{\lambda_n} - \frac{(Tu_m - \lambda_m u_m)}{\lambda_m} + u_n - u_m\Big\| \geqslant dist(u_n, E_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

إذا $\lambda_n \longrightarrow \lambda \neq 0$ نحصل على تناقض نظرا لأن لدى (Tu_n) متتالية جزئية متقاربة.

<u>إثبات المبرهنة 8.6 جـ)</u>. ـ لكل عدد طبيعي $n \geqslant 1$ ، المجموعة

$$\sigma(T) \frown \{\lambda \in \mathbb{R};\ |\lambda| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

خالية أو متهية (إذا احتوت عددا لانهائيا من النقط المختلفة، ستكون لدينا نقطة نهاية ـ نظرا لأن $\sigma(T)$ متراصة ـ و نحصل على تناقض مع التوطئة 2.6). إذا احتوت $\sigma(T) \setminus \{0\}$ على عدد لانهائي من النقط المختلفة فإنه يمكن ترتيبها في متتالية تتقارب نحو 0 . □

ملاحظة 7. ـ بإعطاء متتالية (α_n) تتقارب نحو 0 فإنه يمكن تكوين مؤثر متراص T بحيث $\sigma(T) = (\alpha_n) \cup \{0\}$. يكفي أن نعتبر في $E = l^2$ المؤثر $T : u = (u_n) \longmapsto Tu = (\alpha_n u_n)$. لاحظ بأن T متراص لوجود متتالية (T_n) من المؤثرات ذات الرتب المتهية بحيث $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$. في هذا المثال يمكن أيضا أن نرى بأن 0 يمكن أن ينتمي، أو لا ينتمي، إلى $VP(T)$ ؛ بالإضافة إلى ذلك، إذا $0 \in VP(T)$ فإنه يمكن أن يحدث بأن الفضاء الذاتي المتعلق به، أي $N(T)$ ، يكون ذا بعد لانهائي.

4.6. تحليل طيفي للمؤثرات القرينة الذاتية المتراصة

نفترض فيما يأتي بأن $E = H$ هو فضاء لهلبرت و بأن $T \in \mathcal{L}(H)$. بمطابقة H و H' يمكن اعتبار $T^* \in \mathcal{L}(H)$.

تعريف. ـ نقول بأن مؤثرا $T \in \mathcal{L}(H)$ هو قرين ذاتي إذا $T^* = T$ ، بمعنى أنه

$$\boxed{(Tu, v) = (u, Tv) \qquad \forall u, v \in H.}$$

قضية 9.6. **ـ ليكن** $T \in \mathcal{L}(H)$ **مؤثرا قرينا ذاتيا. نضع**

$$m = \inf_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Tu, u) \qquad \text{و} \qquad M = \sup_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Tu, u) \cdot$$

إذن $\sigma(T) \subset [m, M]$ ، $m \in \sigma(T)$ **و** $M \in \sigma(T)$.

إثبات. ـ ليكن $\lambda > M$ ؛ لنبرهن على أن $\lambda \in \rho(T)$. لدينا

$$(Tu, u) \leqslant M|u|^2 \qquad \forall u \in H,$$

و بالتالي

$$(\lambda u - Tu, u) \geqslant (\lambda - M)|u|^2 = \alpha|u|^2 \qquad \forall u \in H \text{ ، } \qquad \text{مع} \qquad \alpha > 0 \cdot$$

بتطبيق مبرهنة لاكس - ملغرام نرى بأن $\lambda I - T$ متقابل.

لنبرهن على أن $M \in \sigma(T)$. إن الدالي $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$ ثنائي الخطية، متناظر و

$$a(v, v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in H.$$

بتطبيق متباينة كوشي - شفارتز على التطبيق $a(u, v)$ يأتي

$$|(Mu - Tu, v)| \leqslant (Mu - Tu, u)^{1/2}(Mv - Tv, v)^{1/2} \qquad \forall u, v \in H.$$

و منه يستنتج بشكل خاص أن

$$|Mu - Tu| \leqslant C(Mu - Tu, u)^{1/2} \qquad \forall u \in H. \tag{7}$$

لتكن (u_n) متتالية بحيث $|u_n| = 1$ و $M \longrightarrow (Tu_n, u_n)$ ⋅ بفضل (7) نرى بأن $|Mu_n - Tu_n| \longrightarrow 0$ ، و إذن $M \in \sigma(T)$ (لأنه إذا كانت $M \in \rho(T)$ ، فإن $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \longrightarrow 0$)⋅

نحصل على خصائص m باستبدال T بـ $-T$ ⋅ □

لازمة 10.6. ــ **ليكن** $T \in \mathcal{L}(H)$ **مؤثرا قرينا ذاتيا بحيث إن** $\sigma(T) = \{0\}$ ⋅ **إذن** $T = 0$ ⋅

<u>إثبات</u>⋅ ــ استنادا إلى القضية 9.6 نعرف بأن

$$(Tu, u) = 0 \qquad \forall u \in H.$$

بالتالي فإن

$$2(Tu, v) = (T(u+v), u+v) - (Tu, u) - (Tv, v) = 0 \qquad \forall u, v \in H.$$

إذن $T = 0$ ⋅ □

إن النتيجة الآتية أساسية؛ إذ تبين بأن مؤثرا قرينا ذاتيا متراصا هو قطري في قاعدة ملائمة يتم اختيارها⋅

• **مبرهنة** 11.6. ــ **نفترض بأن** H **قابل للفصل⋅ ليكن** T **مؤثرا قرينا ذاتيا متراصا⋅ إذن** H **لديه قاعدة هلبرتية مكونة من متجهات ذاتية لـ** T ⋅

<u>إثبات</u>⋅ ــ لتكن $(\lambda_n)_{n \geqslant 1}$ متتالية القيم الذاتية المختلفة لـ T ، باستثناء 0 ؛ نعرف $\lambda_0 = 0$ ⋅ نضع $E_0 = N(T)$ و $E_n = N(T - \lambda_n I)$ ؛ نذكر بأن

$$0 \leqslant dim E_0 \leqslant \infty \qquad \text{و بأن} \qquad 0 < dim E_n < \infty \; ⋅$$

لنبرهن ابتداء بأن H مجموع هلبرتي لـ $(E_n)_{n\geqslant 0}$:

(1) كل زوج من $(E_n)_{n\geqslant 0}$ متعامد. بالفعل إذا $u \in E_m$ و $v \in E_n$ مع $m \neq n$ فإنه

$$Tu = \lambda_m u, \qquad Tv = \lambda_n v$$

و

$$(Tu, v) = \lambda_m(u, v) = (u, Tv) = \lambda_n(u, v).$$

إذن

$$(u, v) = 0.$$

(2) ليكن F الفضاء المتجهي المولد من الـ $(E_n)_{n\geqslant 0}$. لنتحقق من أن F كثيف في H .
من الواضح بأن $T(F) \subset F$. يترتب على ذلك بأن $T(F^\perp) \subset F^\perp$ ؛ بالفعل إذا $u \in F^\perp$ و $v \in F$ ، فإن $(Tu, v) = (u, Tv) = 0$. المؤثر $T_0 = T_{|_{F^\perp}}$ هو قرين ذاتي و متراص. من جهة أخرى $\sigma(T_0) = \{0\}$ ؛ إذ أنه إذا

$$\lambda \in \sigma(T_0) \setminus \{0\} \text{ ، } \qquad \text{فإن} \qquad \lambda \in VP(T_0)$$

و إذن يوجد $u \in F^\perp$ ، $u \neq 0$ بحيث إنه $T_0 u = \lambda u$. بالتالي فإن λ هي إحدى القيم الذاتية λ_n لـ T و $u \in F^\perp \cap E_n$. إذن $u = 0$ ، الذي هو غير معقول.
يستنتج من اللازمة 10.6 بأن $T_0 = 0$ ؛ بالتالي

$$F^\perp \subset N(T) \subset F \qquad \text{و} \qquad F^\perp = \{0\} \text{ .}$$

إذن F كثيف في H .

في الأخير نختار في كل E_n قاعدة هلبرتية. اتحاد هاته القواعد يشكل قاعدة هلبرتية لـ H مكونة من متجهات ذاتية لـ T . $\square$

ملاحظة 8. ـ ليكن T مؤثرا قرينا ذاتيا متراصا. بناء على ما سبق يمكن كتابة كل $u \in H$ على الشكل

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \qquad \text{مع} \qquad u_n \in E_n$$

بحيث إنه $Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n u_n$. نعرف

$$T_k u = \sum_{n=1}^{k} \lambda_n u_n.$$

من الواضح بأن T_k هو مؤثر برتبة متهية و بأن

$$\|T_k - T\| \leqslant \sup_{n\geqslant k+1} |\lambda_n| \longrightarrow 0 \qquad \text{عندما} \qquad k \longrightarrow \infty \cdot$$

هكذا نتوصل من جديد إلى مسألة أن T هو تقارب لمتتالية مؤثرات (T_k) برتب متهية. نذكر بأنه في فضاء لهلبرت كل مؤثر متراص ـ غير قرين ذاتي بالضرورة ـ هو تقارب لمتتالية مؤثرات برتب متهية (انظر الملاحظة 1).

تعاليق حول الفصل السادس

* 1) مؤثرات فريدهولم

تعتبر المبرهنة 6.6 خطوة أولى نحو نظرية مؤثرات فريدهولم. ليكن E و F فضاءي بناخ.
نقول بأن مؤثرا $A \in \mathcal{L}(E,F)$ هو لفريدهولم [3] ـ نكتب $A \in Fred(E,F)$ ـ إذا

(1) $N(A)$ ذو بعد منته.

(2) $R(A)$ مغلق و بعده المصاحب منته[4]

يعرف دليل A بـ $Ind(A) = dimN(A) - codimR(A)$.

على سبيل المثال، $A = I - T$ حيث $T \in \mathcal{K}(E)$ هو مؤثر لفريدهولم بدليل يساوي 0 (انظر المبرهنة 6.6).

الخصائص الأساسية لمؤثرات فريدهولم هي كالآتي:

أ) المجموعة $Fred(E,F)$ مفتوحة في $\mathcal{L}(E,F)$ و التطبيق $A \longmapsto IndA$ مستمر ـ إذن ثابت ـ على كل مركبة مترابطة لـ $Fred(E,F)$.

ب) كل مؤثر $A \in Fred(E,F)$ هو عكوس قياسا على مؤثرات برتب متهية، أي أنه يوجد

$B \in \mathcal{L}(F,E)$ بحيث رتبتا $(AoB - I_F)$ و $(BoA - I_E)$ متهيتان.

عكسيا إذا $A \in \mathcal{L}(E,F)$ و إذا وجد $B \in \mathcal{L}(E,F)$ بحيث

[3] نقول أيضا بأن A مؤثر بدليل.

[4] نبرهن على أنه إذا كان $A \in \mathcal{L}(E,F)$ بحيث بعد $N(A)$ منته و $R(A)$ ذو بعد مصاحب منته (أي أن $R(A)$ لديه مكمل جبري بعده منته) فإن $R(A)$ يكون مغلقا؛ انظر [EX] .

$$AoB - I_F \in \mathcal{K}(F) \quad \text{و} \quad BoA - I_E \in \mathcal{K}(E) \text{ ،}$$

فإن $A \in Fred(E,F)$ ·

جـ) إذا $A \in Fred(E,F)$ و إذا $T \in \mathcal{K}(E,F)$ فإن

$$A+T \in Fred(E,F) \quad \text{و} \quad Ind(A+T) = IndA \text{ ·}$$

د) إذا $A \in Fred(E,F)$ و $B \in Fred(F,G)$ فإن

$$BoA \in Fred(E,G) \quad \text{و} \quad Ind(BoA) = Ind(A) + Ind(B) \text{ ·}$$

انظر بشأن هذه المسائل إلى Kato [1] ، Schechter [1] ، Lang [1] أو [EX] ·

2) مؤثرات هلبرت - شمدت

ليكن H فضاء هلبرت قابلا للفصل· نقول بأن T مؤثر لهلبرت - شمدت Hilbert – Schmidt إذا وجدت قاعدة (e_n) في H بحيث $\|T\|_{HS}^2 = \sum |Te_n|^2 < \infty$ ·
يمكن التحقق من أن التعريف غير مرتبط باختيار القاعدة و بأنه يعرف نظيما؛ بالإضافة فإن T متراص·
تشكل مؤثرات هلبرت - شمدت فضاء جزئيا مهما في $\mathcal{K}(H)$ ـ بالخصوص بسبب الـ

مبرهنة 12.6. **ـ ليكن** $H = L^2(\Omega)$ **و** $K(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ · **إذن فإن المؤثر**

$$u \longmapsto (Ku)(x) = \int_\Omega K(x,y)u(y)dy$$

هو مؤثر لهلبرت - شمدت·
عكسيا فإن أي مؤثر لهلبرت - شمدت على $L^2(\Omega)$ **يمكن تمثيله بشكل وحيد بواسطة دالة** $K(x,y) \in L^2(\Omega \times \Omega)$ ·

بشأن هذه المسألة، انظر Balakrishnan [1] ، Dunford – Schwartz [1] ، الجزء 2 ، L. Schwartz [3] أو [EX] ·

3) تعدد

ليكن $T \in \mathcal{K}(E)$ و لتكن $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$. يبرهن على أن المتتالية $N((T-\lambda I)^k)$ ، $k = 1, 2, ...$ تزايدية فعلا إلى رتبة ما متهية p و بأنها تستقر بعد ذلك (انظر مثلا Dieudonné [1] ، Kreyszig [1] أو [EX]). نقول بأن p هو مرتبة λ . يسمى بعد $N(T-\lambda I)$ بالتعدد الهندسي للقيمة الذاتية λ و يسمى بعد $N((T-\lambda I)^p)$ بالتعدد الجبري؛ نتحقق من أنهما متساويان إذا كان E فضاء هلبرت و T قرينا ذاتيا (انظر [EX]).

4) تحليل طيفي

ليكن H فضاء هلبرت. ليكن T مؤثرا قرينا ذاتيا (أو بشكل أعم ناظميا أي $T^*T = TT^*$) غير متراص، و ربما غير محدود. إن الحل الطيفي هو تقنية تعمم التحليل الطيفي للمقطع 4.6 . من بين الأمور التي تمكننا منها، تعريف حساب دالي، أي إعطاء معنى لـ $f(T)$ لكل دالة f مستمرة. إن التحليل الطيفي موضوع واسع جدا مع تطبيقات و تشعبات عديدة. لعرض أولي انظر Rudin [1] ، Kreyszig [1] ، Friedman [3] ، Yosida [1] ، Huet [1] . بالنسبة لعرض أشمل انظر Reed – Simon [1] ، Kato [1] ، Dunford – Schwartz [1] ، الجزء 2 ، Akhiezer – Glazman [1] ، Taylor – Lay [1] و Schechter [2] .

5) مبدأ تصغير الأعظمي

إن صيغ min – max لـ Courant – Fischer لتصغير الأعظمي، تعطي مواصفات مفيدة للقيم الذاتية لمؤثر قرين ذاتي متراص؛ انظر مثلا Courant – Hilbert [1] ، Raviart – Thomas [1] أو [EX] . يحتوي كراس Weinberger [2] على عدة توسعات بخصوص هذا الموضوع.

6) مبرهنة Krein – Rutman

للنتيجة الآتية تطبيقات مفيدة في مجال الدراسة الطيفية للمؤثرات الإهليلجية ذات المرتبة

الثانية (انظر الفصل 9).

---

* **مبرهنة** 13.6 (Krein – Rutman). ــ **ليكن** E **فضاء بناخ و ليكن** C **مخروطا محدبا رأسه** 0 (**بمعنى** $\lambda x + \mu y \in C$ ، $\forall\ \lambda \geqslant 0$ ، $\mu \geqslant 0$ ، $x \in C$ ، $y \in C$). **نفرض بأن** C **مغلق،** $Int(C) \neq \emptyset$ **و** $C \frown (-C) = \{0\}$. **ليكن** $T \in \mathcal{K}(E)$ **بحيث** $T(C \setminus \{0\}) \subset Int(C)$. **إذن يوجد** $u \in Int(C)$ **و يوجد** $\lambda > 0$ **بحيث** $Tu = \lambda u$ ؛ **بالإضافة إلى ذلك فإن** λ **هي القيمة الذاتية الوحيدة المتعلقة بمتجه ذاتي لـ** T **في** C (**بمعنى أن** $T\nu = \mu\nu$ **مع** $\nu \in C$ ، $\nu \neq 0$ **يؤدي إلى** $\mu = \lambda$). **أخيرا**

$$\lambda = \max\{|\mu|;\ \mu \in \sigma(T)\}$$

و التعددية (الهندسية و الجبرية) لـ λ **تساوي** 1 .

انظر [1] Schaefer و [EX] .