4

فضـاءات L^p

في كل ما سيأتي يرمز Ω إلى مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$ مزودة بقياس ليبيغ dx . نفترض إلمام القارئ بمبادئ الدوال القابلة للتكامل (أو الكمولة integrable)، الدوال القيوسة و المجموعات ذات القياس الصفري؛ انظر مثلا إلى Marle [1] ، Malliavin [1] ، Neveu [1] ، Rudin [2] ، Guichardet [1] ، Dieudonné [2] ، Kolmogorov – Fomin [1] ، Chae [1] ، Hewitt – Stromberg [1] ، Wheeden – Zygmund [1] إلخ. نرمز بـ $L^1(\Omega)$ لفضاء الدوال القابلة للتكامل على Ω ذات القيم في $\mathbb{R}$. نضع

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

عند انتفاء الغموض، سوف نستعمل L^1 بدل $L^1(\Omega)$ و كذلك $\int f$ عوض $\int_\Omega f(x)dx$. و كما هو المعتاد نسوي بين دالتين من L^1 متساويتين حـ. ت = حيثما كان تقريبا (= إلا على مجموعة ذات قياس صفري).

للفائدة، نذكر بـ ...

1.4. بعض نتائج المكاملة الواجب معرفتها جيدا

• **مبرهنة** 1.4 **(مبرهنة التقارب الرتيب لـ** Beppo Levi **). ــ لتكن** (f_n) **متتالية دوال تزايدية من** L^1 **بحيث** $\sup_n \int f_n < \infty$.
إذن $f_n(x)$ **تتقارب حـ. ت على** Ω **إلى نهاية منتهية نرمز لها بـ** $f(x)$ **؛ بالإضافة إلى ذلك** $f \in L^1$ **و** $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

• **مبرهنة** 2.4 **(مبرهنة التقارب المهيمن أو المرجح لليبيغ).ـ لتكن** (f_n) **متتالية دوال من** L^1 .

نفرض بأن

ا) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ **حـ.ت على** Ω ،

ب) **توجد دالة** $g \in L^1$ **بحيث لكل** n ، $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ **حـ.ت على** Ω [1].

إذن $f \in L^1(\Omega)$ **و** $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

توطئة 1.4 **(توطئة فاتو** Fatou **).ـ لتكن** (f_n) **متتالية دوال من** L^1 **بحيث**

لكل n ، $f_n(x) \geqslant 0$ **حـ.ت على** Ω ، (1)

$$\sup_n \int f_n < \infty . \tag{2}$$

لكل $x \in \Omega$ ، **نضع** $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$.

إذن $f \in L^1(\Omega)$ **و**

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n .$$

ترميز.ـ نرمز بـ $C_c(\Omega)$ إلى فضاء الدوال المستمرة على Ω ذات الحوامل المتراصة، أي أن

$C_c(\Omega) = \{ f \in C(\Omega)$ ؛ $f(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus K$ حيث $K \subset \Omega$ متراص $\}$.

مبرهنة 3.4 **(مبرهنة الكثافة).ـ الفضاء** $C_c(\Omega)$ **كثيف في** $L^1(\Omega)$ **؛ أي أن**

[1] نقول بأن g حد علوي كمول للدوال (f_n) .

$\forall f \in L^1(\Omega)$ **و** $\forall \epsilon > 0$ ، $\exists f_1 \in C_c(\Omega)$ **بحيث** $\|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon$.

لتكن $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ ، $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ مجموعتين مفتوحتين و لتكن $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس (قيوسة).

مبرهنة 4.4 **(** **تونيللي** Tonelli **).ـ لنفرض بأن**

$$\int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty \qquad \text{حـ. ت لكل} \qquad x \in \Omega_1$$

و بأن

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty.$$

إذن $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

مبرهنة 5.4 **(** **فوبيني** Fubini **).ـ لنفرض بأن** $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

إذن ، لكل $x \in \Omega_1$ **حـ. ت،**

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \qquad \text{و} \qquad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1) \,.$$

كذلك، لكل $y \in \Omega_2$ **حـ. ت،**

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \qquad \text{و} \qquad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2) \,.$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

2.4. تعريف و خصائص أولية لفضاءات L^p

تعريف. ـ ليكن $p \in \mathbb{R}$ مع $1 \leqslant p < \infty$ ؛ نضع

$$L^p(\Omega) = \{\ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f \text{ قيوسة و } |f|^p \in L^1(\Omega)\ \}.$$

نكتب

$$\|f\|_{L^p} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}.$$

سوف نتحقق فيما بعد بأن $\|\ \|_{L^p}$ نظيم.

تعريف. ـ نضع

$$L^\infty(\Omega) = \{\ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f \text{ قيوسة و يوجد ثابت } C \text{ بحيث } |f(x)| \leqslant C \text{ حـ.ت على } \Omega\ \}.$$

نكتب

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\ \{\ C\ ;\ |f(x)| \leqslant C \text{ حـ.ت على } \Omega\ \}.$$

سوف نتحقق فيما بعد بأن $\|\ \|_{L^\infty}$ نظيم.

ملاحظة 1. ـ إذا كانت $f \in L^\infty(\Omega)$ فإنه لدينا

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \quad \text{ حـ.ت على } \Omega.$$

بالفعل فإنه توجد متتالية C_n بحيث $C_n \longrightarrow \|f\|_{L^\infty}$ و لكل n ، $|f(x)| \leqslant C_n$ حـ.ت على Ω. إذن $|f(x)| \leqslant C_n$ لكل $x \in \Omega \setminus E_n$ مع E_n مجموعة ذات قياس صفري. نضع $E = \bigcup_n E_n$ بحيث أن E مجموعة ذات قياس صفري و لدينا $|f(x)| \leqslant C_n$ لكل n و لكل $x \in \Omega \setminus E$. بالتالي فإن $|f(x)| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ لكل $x \in \Omega \setminus E$.

تعريف. ـ ليكن $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ؛ نرمز بـ p' للأس المرافق لـ p أي $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

• **مبرهنة** 6.4 (**متباينة هولدر** Hölder's inequality). **ـ لتكن** $f \in L^p$ **و** $g \in L^{p'}$ **مع** $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
إذن $f.g \in L^1$ **و**

$$\boxed{\int |fg| \leqslant \|f\|_{L^p} \ \|g\|_{L^{p'}} \ .} \tag{3}$$

إثبات. ـ عندما يكون $p = 1$ أو $p = \infty$ ، فالنتيجة بديهية. لنفرض إذن بأن $1 < p < \infty$.
لنذكر بمتباينة يونغ Young's inequality[2]

$$ab \leqslant \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'} \qquad \forall a \geqslant 0, \qquad \forall b \geqslant 0; \tag{4}$$

البرهان على (4) بديهي: بما أن الدالة log مقعرة لأسفل على $]0,\infty[$ فإنه لدينا

$$log\Big(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\Big) \geqslant \frac{1}{p}log\, a^p + \frac{1}{p'}log\, b^{p'} = log\, ab.$$

بالتالي

$$|f(x)||g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{p'}|g(x)|^{p'} \qquad \text{ح. ت } x \in \Omega \ .$$

نستنتج بأن $fg \in L^1$ و أن

$$\int |fg| \leqslant \frac{1}{p}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{p'}\|g\|^{p'}_{L^{p'}}. \tag{5}$$

و بتعويض f بـ λf $(\lambda > 0)$ في (5) نحصل على:

$$\int |fg| \leqslant \frac{\lambda^{p-1}}{p}\|f\|^p_{L^p} + \frac{1}{\lambda p'}\|g\|^{p'}_{L^{p'}}. \tag{6}$$

نختار $\lambda = \|f\|^{-1}_{L^p}\|g\|^{p'/p}_{L^{p'}}$ (بطريقة نجعل بها الحد الأيمن من (6) أصغريا). نحصل إذن على (3) . □

[2] التي سنستعملها أحيانا أيضا على الشكل $ab \leqslant \epsilon a^p + C_\epsilon b^{p'}$ مع $C_\epsilon = \epsilon^{-\frac{1}{p-1}}$.

ملاحظة 2. ـ يجدر معرفة إحدى النتائج المفيدة جدا لمتباينة هولدر: لتكن الدوال $f_1, f_2, ..., f_k$ بحيث

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad 1 \leqslant i \leqslant k \quad \text{مع} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k} \leqslant 1 .$$

إذن الجداء $f = f_1 f_2 ... f_k$ ينتمي إلى $L^p(\Omega)$ و

$$\|f\|_{L^p} \leqslant \|f_1\|_{L^{p_1}} ... \|f_k\|_{L^{p_k}} .$$

و في الحالة الخاصة إذا كانت $f \in L^p(\Omega) \frown L^q(\Omega)$ مع $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ ، فإن $f \in L^r(\Omega)$ لكل $p \leqslant r \leqslant q$ و لدينا متباينة الاستكمال interpolation inequality

$$\|f\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{حيث إن} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1) ؛$$

انظر [EX] .

مبرهنة 7.4. ـ L^p **فضاء متجهي و** $\| \ \|_{L^p}$ **تشكل نظيما لكل** $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

إثبات. ـ الحالتان $p = 1$ و $p = \infty$ بديهيتان (استعمل الملاحظة 1).

لنفرض بأن $1 < p < \infty$ و لتكن $f, g \in L^p$. لدينا

$$|f(x) + g(x)|^p \leqslant (|f(x)| + |g(x)|)^p \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p).$$

بالتالي $f + g \in L^p$. من جهة أخرى لدينا

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1}|f + g| \leqslant \int |f + g|^{p-1}|f| + \int |f + g|^{p-1}|g|.$$

بيد أن $|f + g|^{p-1} \in L^{p'}$ و بفضل متباينة هولدر نحصل على

$$\|f + g\|_{L^p}^p \leqslant \|f + g\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f + g\|_{L^p}^{p-1}\|g\|_{L^p}$$

أي أن

$$\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

□

• **مبرهنة** 8.4 (**فيشر - رايز** Fischer – Riesz). ـ L^p **فضاء بناخ لكل** $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

إثبات.

1) لنفرض أولا بأن $p = \infty$. لتكن (f_n) متتالية كوشي في L^∞ . بإعطاء عدد طبيعي $k \geqslant 1$ فإنه يوجد N_k بحيث

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k} \qquad \text{لـ} \qquad m,n \geqslant N_k \cdot$$

إذن توجد مجموعة E_k ذات قياس صفري بحيث

$$(7) \qquad |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \setminus E_k, \qquad \forall m,n \geqslant N_k.$$

أخيرا، بوضع $E = \bigcup_k E_k$ (E مجموعة ذات قياس صفري)، نلاحظ بأن لكل $x \in \Omega \setminus E$ ، فإن المتتالية $f_n(x)$ لكوشي (في $\mathbb{R}$). لتكن $f(x)$ $f_n(x) \longrightarrow$ لـ $x \in \Omega \setminus E$. بأخذ $m \longrightarrow \infty$ في (7) نحصل على

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \setminus E, \qquad \forall n \geqslant N_k.$$

إذن $f \in L^\infty$ و $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k}$ $\forall n \geqslant N_k$. بالتالي $\|f - f_n\|_{L^\infty} \longrightarrow 0$.

2) لنفرض الآن أن $1 \leqslant p < \infty$. لتكن (f_n) متتالية كوشي في L^p . للحصول على النتيجة يكفي أن نبين بأن متتالية جزئية تتقارب في L^p .

نستخرج متتالية جزئية (f_{n_k}) بحيث

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geqslant 1$$

[و ذلك كالآتي: يوجد n_1 بحيث $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2}$ لكل $m,n \geqslant n_1$ ؛ و بعدها نأخذ $n_2 \geqslant n_1$ بحيث $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^2}$ لكل $m,n \geqslant n_2$ ، إلخ.]. سنبين بأن (f_{n_k}) متقاربة في L^p . لتسهيل التدوين، نكتب f_k عوض f_{n_k} ، بحيث يكون لدينا

$$(8) \qquad \|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geqslant 1.$$

بوضع

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

نحصل على

$$\|g_n\|_{L^p} \leqslant 1.$$

نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب بأن $g_n(x)$ تتقارب حـ. ت على Ω نحو نهاية متهية نرمز لها بـ $g(x)$ مع $g \in L^p$. من جهة أخرى، لدينا لكل $m \geqslant n \geqslant 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + ...|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant g(x) - g_{n-1}(x).$$

بالتالي فإنه حـ. ت على Ω ، $(f_n(x))$ هي متتالية كوشي تتقارب نحو نهاية يرمز لها بـ $f(x)$. لدينا حـ. ت على Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant g(x) \qquad \text{لـ} \qquad n \geqslant 2 \cdot \tag{9}$$

نستنتج بأن $f \in L^p$. أخيرا $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$ ؛ بالفعل لدينا $|f_n(x) - f(x)|^p \longrightarrow 0$ حـ. ت و $|f_n(x) - f(x)|^p \leqslant g^p(x)$ حد علوي كمول. نختم بفضل مبرهنة ليبيغ. □

مبرهنة 9.4. **ـ لتكن** (f_n) **متتالية من** L^p **و** $f \in L^p$ **بحيث** $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$.
إذن توجد متتالية جزئية مستخرجة (f_{n_k}) **بحيث**
(ا) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ **حـ. ت على** Ω
(ب) $|f_{n_k}(x)| \leqslant h(x)$ $\forall k$ **و حـ. ت على** Ω **، مع** $h \in L^p$.

إثبات. ـ النتيجة بديهية بالنسبة لـ $p = \infty$. لنفرض إذن بأن $1 \leqslant p < \infty$. بما أن (f_n) متتالية كوشي، يمكن إعادة إثبات المبرهنة 8.4 و استخراج متتالية جزئية (f_{n_k}) تحقق (8) . بالمتابعة، كما هو في إثبات المبرهنة 8.4 ، نرى بأن $f_{n_k}(x)$ تتقارب حـ. ت نحو نهاية يرمز لها بـ $f^*(x)$ [3] . بالإضافة، لدينا بفضل (9)

$$|f^*(x) - f_{n_k}(x)| \leqslant g(x) \qquad \forall k \text{ ،} \qquad \text{حـ. ت على } \Omega \text{ ،} \qquad \text{مع } g \in L^p \cdot$$

نستنتج بأن $f^* \in L^p$ و بأن $f_{n_k} \longrightarrow f^*$ في L^p (استنادا لمبرهنة ليبيغ). بالتالي $f = f^*$ حـ. ت و منه نستنتج (ا). للحصول على (ب) يكفي أن نأخذ $h = f^* + g$. □

3.4. انعكاسية. قابلية للفصل. ثنوي L^p

سوف نميز دراسة ثلاث حالات:

(ا) $1 < p < \infty$

(ب) $p = 1$

(جـ) $p = \infty.$

[3] يجب ابتداء التفريق بين f و f^* : نعرف بأن $f_n \longrightarrow f$ في L^p و بأن $f_{n_k}(x) \longrightarrow f^*(x)$ حـ. ت على Ω .

ا. دراسة L^p لـ $1 < p < \infty$.

إنها أفضل الحالات حيث إن L^p انعكاسي، قابل للفصل و ثنوي L^p يتطابق مع $L^{p'}$.

• **مبرهنة** 10.4. ـ L^p **انعكاسي لـ** $1 < p < \infty$.

يقسم البرهان إلى ثلاث مراحل.

المرحلة الأولى (متباينة Clarkson **الأولى).** ـ ليكن $2 \leqslant p < \infty$ ؛ لدينا

$$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{L^p}^p + \Big\|\frac{f-g}{2}\Big\|_{L^p}^p \leqslant \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \qquad \forall f, g \in L^p. \tag{10}$$

إثبات. ـ بالطبع فإنه يكفي أن نبرهن بأن

$$\Big|\frac{a+b}{2}\Big|^p + \Big|\frac{a-b}{2}\Big|^p \leqslant \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

لدينا

$$\alpha^p + \beta^p \leqslant (\alpha^2 + \beta^2)^{p/2} \qquad \forall \alpha, \beta \geqslant 0$$

(عد إلى الحالة حيث $\beta = 1$ و لاحظ بأن الدالة $(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ متزايدة على $[0, \infty[$). بأخذ $\alpha = \Big|\frac{a+b}{2}\Big|$ و $\beta = \Big|\frac{a-b}{2}\Big|$ نحصل على

$$\Big|\frac{a+b}{2}\Big|^p + \Big|\frac{a-b}{2}\Big|^p \leqslant \Big(\Big|\frac{a+b}{2}\Big|^2 + \Big|\frac{a-b}{2}\Big|^2\Big)^{p/2} = \Big(\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}\Big)^{p/2} \leqslant \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p.$$

[هذه المتباينة الأخيرة ناتجة عن خاصية التحديب للدالة $x \longmapsto |x|^{p/2}$ لأن $p \geqslant 2$]. □

المرحلة الثانية. ـ L^p محدب بانتظام، و بالتالي انعكاسي لـ $2 \leqslant p < \infty$.

بالفعل، ليكن $\epsilon > 0$ ثابتا. نفرض أن

$\|f\|_{L^p} \leqslant 1$ ، $\|g\|_{L^p} \leqslant 1$ و $\|f-g\|_{L^p} > \epsilon$.

نستنتج من (10) بأن

$\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{L^p}^p < 1 - \Big(\frac{\epsilon}{2}\Big)^p$ و منه $\Big\|\frac{f+g}{2}\Big\|_{L^p} < 1 - \delta$

مع

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} > 0.$$

إذن L^p محدب بانتظام، و بالتالي انعكاسي بفضل المبرهنة 29.3 . □

المرحلة الثالثة. ـ L^p انعكاسي لـ $1 < p \leqslant 2$.

إثبات. ـ ليكن $1 < p \leqslant 2$. نعتبر المؤثر $T : L^p \longrightarrow (L^{p'})'$ المعرف كالآتي:

ليكن $u \in L^p$ مثبتا؛ التطبيق $f \in L^{p'} \longmapsto \int uf$ دالي خطي مستمر على $L^{p'}$ ، نرمز له بـ Tu بحيث

$$< Tu, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^{p'}.$$

لدينا (بناء على متباينة هولدر)

$$| < Tu, f > | \leqslant \|u\|_{L^p} \|f\|_{L^{p'}}$$

و بالتالي

$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} \leqslant \|u\|_{L^p}. \tag{11}$$

من جهة أخرى، نضع

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2} u(x) \qquad (f_0(x) = 0 \quad \text{إذا} \quad u(x) = 0).$$

لدينا $f_0 \in L^{p'}$ ، $\|f_0\|_{L^{p'}} = \|u\|_{L^p}^{p-1}$ و $< Tu, f_0 >= \|u\|_{L^p}^p$.

إذن

$$\|Tu\|_{(L^{p'})'} \geqslant \frac{< Tu, f_0 >}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p}. \tag{12}$$

بمقارنة (11) و (12) نحصل على $\|Tu\|_{(L^{p'})'} = \|u\|_{L^p}$. نستنتج بأن T تقايس من L^p إلى فضاء جزئي مغلق (لأن L^p كامل) من $(L^{p'})'$. لكن $L^{p'}$ انعكاسي (المرحلة الثانية) و عليه (لازمة 18.3) فإن $(L^{p'})'$ انعكاسي. بالتالي (قضية 17.3) فإن $T(L^p)$ انعكاسي و كذلك L^p . □

ملاحظة 3. ـ نثبت أيضا بأن L^p محدب بانتظام في حالة $1 < p \leqslant 2$. نستعمل لهذا الغرض متباينة Clarkson الثانية الصالحة لـ $1 < p \leqslant 2$:

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_{L^p}^{p'} \leqslant \left[\frac{1}{2}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{2}\|g\|_{L^p}^p\right]^{1/(p-1)}.$$

هذه المتباينة صعبة الإثبات إلى حد ما مقارنة بمتباينة Clarkson الأولى؛ انظر مثلا [EX] أو Hewitt – Stromberg [1] ، و لمقارنة مختلفة قليلا، انظر Diestel [1] ، Morawetz [1] و [EX] .

• **مبرهنة** 11.4 (**مبرهنة التمثيل لرايز**). ـ **ليكن** $1 < p < \infty$ **و ليكن** $\varphi \in (L^p)'$. **إذن يوجد** $u \in L^{p'}$ **وحيد بحيث**

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^p.$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

• **ملاحظة** 4. ـ المبرهنة 11.4 هامة جدا. فهي تبين بأن أي دالي خطي مستمر على L^p مع $1 < p < \infty$ ، يمكن تمثيله بواسطة دالة من $L^{p'}$. التطبيق $u \longmapsto \varphi$ هو مؤثر خطي متقايس و غامر، يمكننا من مطابقة ثنوي L^p مع الفضاء $L^{p'}$. فيما يلي سنستعمل بشكل منتظم المطابقة

$$(L^p)' = L^{p'}.$$

إثبات. ـ نعرف المؤثر $T : L^{p'} \longrightarrow (L^p)'$ بـ

$$< Tu, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^p$$

و عليه نحصل على

$$\|Tu\|_{(L^p)'} = \|u\|_{L^{p'}} \qquad \forall u \in L^{p'}$$

(اعمل بالطريقة المتبعة في المرحلة الثالثة من إثبات المبرهنة 10.4). يجب علينا أن نتحقق بأن T غامر. نضع $E = T(L^{p'})$. بما أن E فضاء جزئي مغلق، يبقى لنا أن نبين أن E كثيف في $(L^p)'$. ليكن $h \in (L^p)''$ [$= L^p$ لأن L^p انعكاسي] بحيث $< Tu, h >= 0$ لكل $u \in L^{p'}$ ؛ لنتحقق بأن $h = 0$. لدينا

$$\int uh = < Tu, h >= 0 \qquad \forall u \in L^{p'}.$$

نستنتج بأن $h = 0$ باختيار $u = |h|^{p-2}h$. $\square$

مبرهنة 12.4 (**كثافة**). ـ **الفضاء** $C_c(\Omega)$ **كثيف في** $L^p(\Omega)$ **لـ** $1 \leqslant p < \infty$.

لنبدأ بتعريف و توطئة·

تعريف· ـ ليكن $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ؛ نقول بأن دالة $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ تنتمي إلى $L^p_{loc}(\Omega)$ إذا $f\mathbf{1}_K \in L^p(\Omega)$ لكل متراص $K \subset \Omega$ ·

توطئة 2.4. ـ **لتكن** $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ **بحيث**

$$\int fu = 0 \qquad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{13}$$

إذن $f = 0$ **حـ· ت على** Ω ·

إثبات التوطئة 2.4 · ـ نعمل على مرحلتين:

1) لنفرض إضافة أنه لدينا $f \in L^1(\Omega)$ و $|\Omega| < \infty$[4] ·
لـ $\epsilon > 0$ معطى، يوجد $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث $\|f - f_1\|_{L^1} < \epsilon$ · بحسب (13) لدينا

$$\Big| \int f_1 u \Big| \leqslant \epsilon \|u\|_{L^\infty} \qquad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{14}$$

ليكن

$$K_1 = \{x \in \Omega, \quad f_1(x) \geqslant \epsilon\}$$
$$K_2 = \{x \in \Omega, \quad f_1(x) \leqslant -\epsilon\}.$$

بما أن K_1 و K_2 متراصان منفصلان، فإنه يمكننا بفضل مبرهنة Tietze – Urysohn (انظر Dieudonné [1] ، L. Schwartz [2] أو Yosida [1]) إنشاء دالة $u_0 \in C_c(\Omega)$ بحيث

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{lll} +1 & \text{إذا} & x \in K_1 \\ -1 & \text{إذا} & x \in K_2 \end{array} \right.$$

و

$$|u_0(x)| \leqslant 1 \qquad \text{لكل} \qquad x \in \Omega \ \cdot$$

بوضع $K = K_1 \cup K_2$ ، نحصل على

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega \setminus K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

إذن، بفضل (14)

---

[4] لتكن $A \subset \Omega$ قيوسة، نرمز بـ $|A|$ لقياس A ؛ من المحتمل أن يكون $|A|$ لانهائيا·

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \leqslant \epsilon + \int_{\Omega\setminus K} |f_1 u_0| \leqslant \epsilon + \int_{\Omega\setminus K} |f_1|.$$

بالتالي

$$\int_\Omega |f_1| = \int_K |f_1| + \int_{\Omega\setminus K} |f_1| \leqslant \epsilon + 2\int_{\Omega\setminus K} |f_1| \leqslant \epsilon + 2\epsilon|\Omega|$$

ذلك لأن

$|f_1| \leqslant \epsilon$ على $\Omega \setminus K$.

إذن

$$\|f\|_{L^1} \leqslant \|f - f_1\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1} \leqslant 2\epsilon + 2\epsilon|\Omega|.$$

و حيث إن هذه المتباينة محققة لكل $\epsilon > 0$ ، نستنتج بأن $f = 0$ حـ. ت على Ω .

2) لنتطرق الآن إلى الحالة العامة. نكتب $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ حيث إن Ω_n مجموعة مفتوحة، $\overline{\Omega}_n$ متراص، $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ [خذ مثلا $\Omega_n = \{ x \in \Omega$ ؛ $dist(x, C^\Omega) > \frac{1}{n}$ و $|x| < n \}$]. بتطبيق ما سبق على Ω_n و $f_{|\Omega_n}$ ، نرى أن $f = 0$ حـ. ت على Ω_n و نستنتج بأن $f = 0$ حـ. ت على Ω . □

إثبات المبرهنة 12.4 . ـ نعرف مسبقا بأن $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^1(\Omega)$. لنفرض إذن بأن $1 < p < \infty$. لإثبات أن $C_c(\Omega)$ كثيف في $L^p(\Omega)$ ، يكفي أن نتحقق أنه إذا كان $h \in L^{p'}(\Omega)$ بحيث $\int hu = 0$ لكل $u \in C_c(\Omega)$ ، فإن $h = 0$. لكن $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ بما أن $\int |h\mathbf{1}_K| \leqslant \|h\|_{L^{p'}} |K|^{1/p} < \infty$ و يمكننا إذن تطبيق التوطئة 2.4 لنستنتج بأن $h = 0$ حـ. ت. □

مبرهنة 13.4. ـ $L^p(\Omega)$ **قابل للفصل لكل** $1 \leqslant p < \infty$.

إثبات. ـ لنرمز بـ $(R_i)_{i\in I}$ إلى العائلة (القابلة للعد) المؤلفة من المجموعات R ذات الشكل $R = \prod_{k=1}^N]a_k, b_k[$ مع $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ و $R \subset \Omega$.

نرمز بـ E إلى الفضاء المتجهي المعرف على $\mathbb{Q}$ و المولد بالدوال $\mathbf{1}_{R_i}$ (أي التوافيق الخطية المتهية ذات المعاملات المنطقة من الدوال $\mathbf{1}_{R_i}$)؛ و ذلك حتى يكون E قابلا للعد. لنبين أن E كثيف في $L^p(\Omega)$. ليكن $f \in L^p(\Omega)$ و $\epsilon > 0$ مثبتين. ليكن $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث إن $\|f - f_1\|_{L^p} < \epsilon$ (مبرهنة 12.4). لتكن Ω' مجموعة مفتوحة و محدودة بحيث $Suppf_1 \subset \Omega' \subset \Omega$. بما أن $f_1 \in C_c(\Omega')$ ، يمكننا بسهولة إنشاء دالة $f_2 \in E$ بحيث $Suppf_2 \subset \Omega'$ و $|f_2(x) - f_1(x)| \leqslant \frac{\epsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$ حـ. ت على Ω' (نبدأ بتغطية $Suppf_1$ بعدد منته من المجموعات R_i بحيث إن مدى تردد f_1 على R_i يكون أقل من أو يساوي $\frac{\epsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$). ينتج عن ذلك أن $\|f_2 - f_1\|_{L^p} \leqslant \epsilon$ و بالتالي $\|f - f_2\|_{L^p} < 2\epsilon$). $\square$

ملاحظة 5. ـ لإثبات المبرهنة 13.4 كان بالإمكان أيضا استعمال مسألة إذا كان K فضاء متريا متراصا فإن $C(K)$ قابل للفصل (انظر مثلا (7.4.4) [1] Dieudonné).

ب. دراسة L^1 .

• **مبرهنة** 14.4. ـ **ليكن** $\varphi \in (L^1)'$. **إذن يوجد** $u \in L^\infty$ **وحيد بحيث**

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^1.$$

بالإضافة إلى ذلك فإنه لدينا

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}.$$

• **ملاحظة** 6. ـ تؤكد المبرهنة 14.4 بأن أي دالي خطي مستمر على L^1 يمثل بواسطة دالة من L^∞ . التطبيق $u \longmapsto \varphi$ هو تقايس غامر، يمكننا من مطابقة $(L^1)'$ و L^∞ . فيما يلي سنستعمل بشكل منتظم المطابقة

$$(L^1)' = L^\infty.$$

إثبات. ـ لنبدأ بإثبات وجود u . نختار دالة $w \in L^2(\Omega)$ بحيث أنه لكل متراص $K \subset \Omega$ ، $w \geqslant \epsilon_K > 0$ حـ. ت على K [من الواضح وجود دالة كهذه: خذ مثلا $w(x) = \alpha_n$ لـ $x \in \Omega$ ، $n \leqslant |x| < n+1$ ، و قم بتعديل الثوابت $\alpha_n > 0$ بحيث أن $w \in L^2(\Omega)$]. التطبيق $f \in L^2 \longmapsto < \varphi, wf >$ هو دالي خطي مستمر على L^2 .

و بحسب المبرهنة 11.4 (مطبقة لـ $p=2$) فإنه يوجد $v \in L^2$ بحيث

$$< \varphi, wf >= \int vf \qquad \forall f \in L^2. \tag{15}$$

لنضع $u(x) = \dfrac{v(x)}{w(x)}$ ؛ التي هي معرفة بما أن $w(x) > 0$ لكل $x \in \Omega$ و u قيوسة.
لنثبت أن $u \in L^\infty$ و أن $\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'}$. بحسب (15) لدينا

$$\Big| \int vf \Big| \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \|wf\|_{L^1} \qquad \forall f \in L^2. \tag{16}$$

ليكن $C > \|\varphi\|_{(L^1)'}$. لنبين بأن قياس المجموعة
$$A = \{x \in \Omega; \quad |u(x)| > C\}$$
صفري (و بالتالي فإن $u \in L^\infty$ و أن $\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'}$). لنستدل بالتناقض. إذا كان قياس A غير صفري فإنه توجد مجموعة $\widetilde{A} \subset A$ قيوسة بحيث أن $0 < |\widetilde{A}| < \infty$. لنستعمل في (16) الدالة

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{إذا} \quad x \in \widetilde{A} \quad \text{و} \quad u(x) > 0 \\ -1 & \text{إذا} \quad x \in \widetilde{A} \quad \text{و} \quad u(x) < 0 \\ 0 & \text{إذا} \quad x \in \Omega \setminus \widetilde{A}. \end{cases}$$

نحصل على $\displaystyle\int_{\widetilde{A}} w |u| w \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \int_{\widetilde{A}} w$ ، و بالتالي $\displaystyle C \int_{\widetilde{A}} w \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'} \int_{\widetilde{A}} w$ ، مما يؤدي إلى تناقض بما أن $\displaystyle\int_{\widetilde{A}} w > 0$.

لنلخص: لقد أنشأنا دالة $u \in L^\infty(\Omega)$ بحيث $\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|\varphi\|_{(L^1)'}$ و كذلك

$$< \varphi, wf > = \int uwf \qquad \forall f \in L^2. \tag{17}$$

و هذا يستلزم

$$< \varphi, g > = \int ug \qquad \forall g \in C_c(\Omega). \tag{18}$$

بالفعل إذا $g \in C_c(\Omega)$ فإن $f = \dfrac{g}{w} \in L^2$ (بما أن $w \geqslant \epsilon > 0$ على $Suppg$) و عليه يمكن تعويض f في (17) . و حيث أن $C_c(\Omega)$ كثيف في L^1 ، يمكن الاستنتاج من (18) أن

$$< \varphi, g > = \int ug \qquad \forall g \in L^1.$$

أخيرا، لدينا

$$|<\varphi, g>| \leqslant \int |ug| \leqslant \|u\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1} \qquad \forall g \in L^1$$

و منه أن $\|\varphi\|_{(L^1)'} \leqslant \|u\|_{L^\infty}$. مما ينتج $\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'}$. أما وحدانية الدالة u فهي نتيجة مباشرة للتوطئة 2.4 . □

• **ملاحظة** 7. ـ L^1 فضاء غير انعكاسي. بالفعل، لنفرض (تثبيتا للأفكار) أن $0 \in \Omega$. لنعتبر المتتالية $f_n = \alpha_n \mathbf{1}_{B(0,\frac{1}{n})}$ حيث العدد الطبيعي n كبير بما فيه الكفاية حتى يكون لدينا $B(0,\dfrac{1}{n}) \subset \Omega$ و $\alpha_n = \left|B(0,\dfrac{1}{n})\right|^{-1}$ بحيث إن $\|f_n\|_{L^1} = 1$. لو كان L^1 انعكاسيا، لوجدت متتالية جزئية (f_{n_k}) و دالة $f \in L^1$ بحيث $f_{n_k} \rightharpoonup f$ للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(L^1, L^\infty)$. إذن

$$\int f_{n_k}\varphi \longrightarrow \int f\varphi \qquad \forall \varphi \in L^\infty. \tag{19}$$

عندما تكون $\varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\})$ نرى بأن $\int f_{n_k}\varphi = 0$ لـ k كبير بما فيه الكفاية. و منه ينتج من (19) بأن

$$\int f\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c(\Omega \setminus \{0\}).$$

لنطبق التوطئة 2.4 في المجموعة المفتوحة $\Omega \setminus \{0\}$ على الدالة f (المقصورة على $\Omega \setminus \{0\}$) فنحصل على أن $f = 0$ حـ. ت على $\Omega \setminus \{0\}$. إذن $f = 0$ حـ. ت على Ω . من جهة أخرى، إذا أخذنا $\varphi \equiv 1$ في (19) نصل إلى $\int f = 1$ ـ مما يؤدي إلى تناقض.

جـ. دراسة L^∞ .

لقد رأينا (مبرهنة 14.4) بأن $L^\infty = (L^1)'$. من هذا فإن الفضاء L^∞ يمتلك بعض الخواص " الحسنة " . من بينها:

• (1) كرة الوحدة المغلقة B_{L^∞} متراصة للطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(L^\infty, L^1)$ (مبرهنة 15.3).

• (2) إذا كانت (f_n) متتالية محدودة في L^∞ ، يمكننا استخراج متتالية جزئية متقاربة في L^∞ للطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(L^\infty, L^1)$ (مبرهنة 25.3 و مبرهنة 13.4).

غير أن L^∞ ليس انعكاسيا (و إلا فإن L^1 سيكون انعكاسيا نتيجة للازمة 18.3 علما بأن L^1 ليس كذلك).

ثنوي L^∞ يحوي L^1 (بما أن $(L^1)' = L^\infty$) و هو أكبر منه فعليا؛ توجد داليات خطية مستمرة φ على L^∞ ليست من النوع

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^\infty \qquad \text{مع} \qquad u \in L^1 \cdot$$

لننشئ مثالا " واقعيا " . لنفرض أن $0 \in \Omega$ و لتكن $\varphi_0 : C_c(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $\varphi_0(f) = f(0)$ لـ $f \in C_c(\Omega)$. بحيث تكون φ_0 داليا خطيا و مستمرا على $C_c(\Omega)$ للنظيم $\| \ \|_{L^\infty}$. حسب مبرهنة هان - بناخ، يتمدد φ_0 إلى دالي خطي و مستمر على L^∞ نرمز له بـ φ . لدينا

$$< \varphi, f >= f(0) \qquad \forall f \in C_c(\Omega). \tag{20}$$

لنبين أنه لا توجد دالة $u \in L^1$ بحيث

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^\infty.$$

بالفعل لو أن هذه الدالة u وجدت لأصبح لدينا

$$\int uf = 0 \qquad \forall f \in C_c(\Omega \setminus \{0\}).$$

اعتمادا على التوطئة 2.4 (مطبقة على $\Omega \setminus \{0\}$) نحصل على $u = 0$ حـ. ت على $\Omega \setminus \{0\}$ مما يستلزم $u = 0$ حـ. ت على Ω . بالتالي

$$< \varphi, f >= 0 \qquad \forall f \in L^\infty$$

ـ و هذا يناقض (20) . $\square$

* **ملاحظة** 8. ـ إذا كان ثنوي L^∞ لا يتطابق مع L^1 ، فيمكننا التساؤل إلى ماذا " يشبه $(L^\infty)'$ " . من أجل هذا الغرض، نعتبر $L^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ كـ C^* جبر بناخ تبديلي (انظر مثلا Rudin [1]). بحسب مبرهنة Gelfand ، فإن $L^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ متشاكل تقابليا و متقايس مع $C(K;\mathbb{C})$ (حيث إن K فضاء طوبولوجي متراص، و بصورة أدق هو طيف جبر L^∞). نتيجة لذلك فإن $(L^\infty(\Omega;\mathbb{C}))'$ يتطابق مع فضاء قياسات (رادون Radon) على K (بقيم في $\mathbb{C}$) [و $(L^\infty(\Omega;\mathbb{R}))'$ يتطابق مع فضاء قياسات (رادون) على K بقيم في $\mathbb{R}$]. لمزيد من التفاصيل، انظر Rudin [1] أو Yosida [1] ، صفحة 118 .

ملاحظة 9. ـ الفضاء L^∞ غير قابل للفصل. لإثبات هذا الأمر، من الملائم استعمال الـ

توطئة 3.4 ـ **ليكن** E **فضاء بناخ. لنفرض أنه توجد عائلة** $(O_i)_{i\in I}$ **بحيث**

(ا) **لكل** $i \in I$ ، O_i **مجموعة مفتوحة غير خالية من** E .

(ب) $O_i \frown O_j = \emptyset$ **إذا كان** $i \neq j$.

(جـ) I **غير قابل للعد.**

إذن E **غير قابل للفصل.**

إثبات التوطئة 3.4 . ـ لنبرهن بالتناقض و نفرض بأن E قابل للفصل. لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية كثيفة في E . لكل $i \in I$ ، $O_i \frown \{u_n,\ n\in\mathbb{N}\} \neq \emptyset$ و نختار $n(i)$ بحيث $u_{n(i)} \in O_i$.
التطبيق $i \longmapsto n(i)$ متباين؛ إذ أن $n(i) = n(j)$ يستلزم $u_{n(i)} = u_{n(j)} \in O_i \frown O_j$ و منه $i = j$. بالتالي فإن I قابل للعد ـ و هو ما يناقض (جـ). □

لنبين الآن أن L^∞ غير قابل للفصل. لكل $a \in \Omega$ ، نثبت $r_a < dist(a, C^\Omega)$ ؛ نضع $u_a = \mathbf{1}_{B(a,r_a)}$ و

$$O_a = \{f \in L^\infty;\ \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}.$$

نتحقق بدون عناء بأن العائلة $(O_a)_{a\in\Omega}$ تستوفي (ا)، (ب) و (جـ).

يلخص الجدول الآتي الخواص الأساسية لفضاءات L^p التي التقيناها في المقطع 3.4 .

الفضاء	انعكاسي	قابل للفصل	الفضاء الثنوي
L^p $1 < p < \infty$	نعم	نعم	$L^{p'}$
L^1	لا	نعم	L^∞
L^∞	لا	لا	يحوي L^1 فعليا

4.4. الملفوف و التنظيم

في هذه الفقرة نأخذ $\Omega = \mathbb{R}^N$ ماعدا في القضية 17.4 و اللازمة 23.4 ·

• **مبرهنة** 15.4 · ـ **لتكن** $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ **و** $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ·
إذن لـ $x \in \mathbb{R}^N$ **حـ· ت، الدالة** $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ **كمولة (قابلة للتكامل) على** $\mathbb{R}^N$ ·
نضع

$$\boxed{(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.}$$

إذن $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ **و**

$$\boxed{\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.}$$

إثبات· ـ النتيجة بديهية إذا $p = \infty$ · لنفرض أولا أن $p = 1$ و لتكن

$$F(x,y) = f(x-y)g(y).$$

لـ $y \in \mathbb{R}^N$ حـ· ت، لدينا

$$\int |F(x,y)|dx = |g(y)| \int |f(x-y)|dx = \|f\|_{L^1}|g(y)| < \infty$$

و

$$\int dy \int |F(x,y)|dx = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1} < \infty.$$

بتطبيق مبرهنة تونيللي (مبرهنة 4.4) نرى بأن $F \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ · بفضل مبرهنة فوبيني (مبرهنة 5.4) نحصل على

$$\int |F(x,y)|dy < \infty \qquad \text{حـ· ت} \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

و

$$\int dx \int |F(x,y)|dy \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

يتطابق هذا تماما مع استنتاج المبرهنة 15.4 .

لنفرض الآن بأن $1 < p < \infty$. مما سبق نعرف أنه لـ $x \in \mathbb{R}^N$ حـ. ت مثبت، فإن الدالة $y \longmapsto |f(x-y)||g(y)|^p$ كمولة على $\mathbb{R}^N$ ؛ أي

$$|f(x-y)|^{1/p}|g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}^N).$$

بما أن $|f(x-y)|^{1/p'} \in L^{p'}_y$ ، فإننا نستنتج من متباينة هولدر أن

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|.|f(x-y)|^{1/p'} \in L^1_y$$

و

$$\int |f(x-y)||g(y)|dy \leqslant \Big(\int |f(x-y)||g(y)|^p dy\Big)^{1/p} \|f\|_{L^1}^{1/p'}$$

أي أن

$$|(f*g)(x)|^p \leqslant (|f| * |g|^p)(x).\|f\|_{L^1}^{p/p'}.$$

بتطبيق نتيجة الحالة $p = 1$ ، نرى بأن

$$f*g \in L^p \qquad \text{و} \qquad \|f*g\|_{L^p}^p \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}^p\|f\|_{L^1}^{p/p'}$$

أي أن

$$\|f*g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

□

ترميز. ـ بإعطاء دالة f ، نضع $\check{f}(x) = f(-x)$.

قضية 16.4 . ـ **لتكن** $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ، $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ **و** $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$.
إذن لدينا

$$\int (f*g)h = \int g(\check{f}*h).$$

إثبات. ـ الدالة $F(x,y) = f(x-y)g(y)h(x)$ تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ و ذلك لأن

$$\int |h(x)| \Big(\int |f(x-y)||g(y)|dy \Big) dx < \infty$$

نتيجة للمبرهنة 15.4 و لمتباينة هولدر.
بالتالي

$$\int (f*g)(x)h(x)dx = \int dx \int F(x,y)dy = \int dy \int F(x,y)dx = \int g(y)(\check{f}*h)(y)dy.$$

$\square$

الحوامل في الملفوف

إن مفهوم الحامل لدالة مستمرة جد معروف و هو المجموعة المتممة لأكبر مجموعة مفتوحة تكون عليها الدالة f معدومة (أو بمعنى آخر هو إغلاقة المجموعة $\{x;\ f(x) \neq 0\}$). عند تعاملنا مع الدوال القيوسة يجب أن نكون حذرين ـ لأن هذه الدوال معرفة حيثما تقريبا ـ و عليه فإن التعريف السابق لا يكون صالحا [يمكن الاقتناع بذلك باعتبار الدالة $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$]. التعريف الصائب لهذه الحالة هو التالي:

قضية 17.4 **و تعريف الحامل. ـ لتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **مجموعة مفتوحة و لتكن** f **دالة معرفة على** Ω **و بقيم في** $\mathbb{R}$ **. نعتبر عائلة جميع المجموعات المفتوحة** $(\omega_i)_{i\in I}$ ، $\omega_i \subset \Omega$ **بحيث لكل** $i \in I$ ، $f = 0$ **حـ.ت على** ω_i **. نضع** $\omega = \bigcup_{i\in I} \omega_i$.

إذن $f = 0$ **حـ.ت على** ω .

بالتعريف فإن $Supp f = \Omega \setminus \omega$.

ملاحظة 10.

ا) إذا كانت f_1 و f_2 دالتين بحيث $f_1 = f_2$ حـ.ت على Ω فإن $Supp f_1 = Supp f_2$. يمكننا إذن التحدث عن حامل دالة $f \in L^p$ (دون توضيح أي ممثل نختاره في صنف التكافؤ).

ب) إذا كانت f مستمرة على Ω ، نتحقق بيسر بأن هذا التعريف يتطابق مع التعريف العادي.

إثبات. ـ ليس واضحا أن $f=0$ حـ. ت على ω نظرا لأن العائلة I ليست قابلة للعد. و لكن يمكننا الوصول إلى حالة قابلية العد بالطريقة التالية:
لتكن (K_n) متتالية متراصات بحيث $\omega = \bigcup_n K_n$

[خذ مثلا $K_n = \{ x \in \omega$ ؛ $dist(x, \mathbb{R}^N \setminus \omega) \geqslant \frac{1}{n}$ و $|x| \leqslant n \}$].

بعد ذلك، لكل n ، يغطى K_n بعدد منته من الـ ω_i ، ليكن $K_n \subset \bigcup_{i \in I_n} \omega_i$ مع $I_n \subset I$ منته. بوضع $J = \bigcup_n I_n$ (J قابل للعد) لدينا $\omega = \bigcup_{i \in J} \omega_i$.
بما أن $f=0$ حـ. ت على ω_i ، نستنتج بأن $f=0$ حـ. ت على ω . □

• **قضية** 18.4. ـ **لتكن** $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ **و** $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$. **إذن**

$$\boxed{Supp(f * g) \subset \overline{Suppf + Suppg}}$$

إثبات. ـ ليكن $x \in \mathbb{R}^N$ مثبتا بحيث تكون الدالة $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ كمولة (انظر المبرهنة 15.4). لدينا

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)g(y)dy = \int_{(x - Suppf) \frown Supp\, g} f(x-y)g(y)dy.$$

إذا كان $x \notin Suppf + Supp\, g$ ، فإن $(x - Suppf) \frown Supp\, g = \emptyset$ و $(f*g)(x) = 0$. إذن

$(f*g)(x) = 0$ حـ. ت على $C^{(Suppf + Supp\, g)}$

و بالخصوص

$(f*g)(x) = 0$ حـ. ت على $Int\, C^{(Suppf + Supp\, g)}$.

و منه فإن $Supp(f*g) \subset \overline{Suppf + Supp\, g}$. □

• **ملاحظة** 11. ـ بطبيعة الحال إذا كانت كل من f و g ذات حامل متراص، فإن $f*g$ تكون ذات حامل متراص. و على العموم إذا كان حامل إحداهما فقط متراصا، فإن $f*g$ لا تكون ذات حامل متراص.

قضية 19.4. ـ **لتكن** $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ **و** $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. **إذن**

$$f * g \in C(\mathbb{R}^N).$$

إثبات. ـ ننبه أولا أنه لكل $x \in \mathbb{R}^N$ ، فإن الدالة $y \longmapsto f(x-y)g(y)$ كمولة على $\mathbb{R}^N$ و بالتالي فإن $(f*g)(x)$ معرفة لكل $x \in \mathbb{R}^N$.
لتكن $x_n \longrightarrow x$ و لنضع

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$$
$$F(y) = f(x-y)g(y)$$

حتى يكون $F_n(y) \longrightarrow F(y)$ حـ. ت على $\mathbb{R}^N$. من جهة أخرى، ليكن K متراصا مثبتا بحيث أن $(x_n - Suppf) \subset K$ لكل n . إذن $f(x_n - y) = 0$ لـ $y \notin K$ و بالتالي فإن $|F_n(y)| \leqslant \|f\|_{L^\infty} \mathbf{1}_K(y)|g(y)|$ ، حد علوي كمول. نستنتج من مبرهنة ليبيغ أن

$$(f*g)(x_n) = \int F_n(y)dy \longrightarrow \int F(y)dy = (f*g)(x).$$

□

ترميز. ـ يرمز $C^k(\Omega)$ إلى فضاء الدوال القابلة للاشتقاق المستمر على Ω إلى المرتبة k

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$$
$$C^k_c(\Omega) = C^k(\Omega) \frown C_c(\Omega)$$
$$C^\infty_c(\Omega) = C^\infty(\Omega) \frown C_c(\Omega)$$

(تستعمل بعض المراجع الرمز $\mathcal{D}(\Omega)$ أو $C^\infty_0(\Omega)$ عوضا عن $C^\infty_c(\Omega)$).

• **قضية** 20.4. ـ **لتكن** $f \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$ **و** $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ (k **عدد طبيعي**). **إذن**[5]

$$f * g \in C^k(\mathbb{R}^N) \qquad \text{و} \qquad D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g \cdot$$

بالخصوص، إذا كانت $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ **و** $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ **، فإن** $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

إثبات. ـ باستعمال الاستقراء نعود مباشرة إلى الحالة $k = 1$.

ليكن $x \in \mathbb{R}^N$ مثبتا؛ لنبين أن $f * g$ قابلة للاشتقاق عند x و بأن[6]

$$\nabla(f*g)(x) = (\nabla f * g)(x).$$

ليكن $h \in \mathbb{R}^N$ مع $|h| < 1$ (h مقدر لأن يؤول إلى 0). لدينا

$$\begin{aligned}&|f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y)| \\ &\qquad = \Big| \int_0^1 [h\nabla f(x+sh-y) - h\nabla f(x-y)]ds \Big| \leqslant |h|\epsilon(|h|) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^N\end{aligned}$$

مع $\epsilon(|h|) \longrightarrow 0$ عندما $|h| \longrightarrow 0$ (بما أن ∇f مستمر بانتظام على $\mathbb{R}^N$).

ليكن K متراصا مثبتا كبيرا بقدر كاف بحيث أن $x + B(0,1) - Suppf \subset K$. لدينا

$$f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y) = 0 \qquad \forall y \notin K, \qquad \forall h \in B(0,1)$$

و منه

$$|f(x+h-y) - f(x-y) - h\nabla f(x-y)| \leqslant |h|\epsilon(|h|)\mathbf{1}_K(y) \ \forall y \in \mathbb{R}^N, \, \forall h \in B(0,1).$$

مما ينتج عنه

---

[5] يرمز D^α هنا إلى أي مشتق من المشتقات الجزئية

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}} f \qquad \text{مع} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N \leqslant k.$$

[6]

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_N}\Big).$$

$$|(f*g)(x+h)-(f*g)(x)-h(\nabla f*g)(x)| \leqslant |h|\epsilon(|h|)\int_K |g(y)|dy.$$

و عليه فإن $f*g$ قابلة للاشتقاق عند x و $\nabla(f*g)(x)=(\nabla f*g)(x)$ · $\square$

المتتاليات المنظمة

تعريف. ـ نسمي متتالية منظمة (أو تنظيمية) Mollifiers كل متتالية $(\rho_n)_{n\geqslant 1}$ من الدوال بحيث

$$\rho_n\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ ، } Supp\rho_n\subset B(0,\frac{1}{n}) \text{ ، } \int\rho_n=1 \text{ ، } \rho_n(x)\geqslant 0 \text{ على } \mathbb{R}^N \cdot$$

من هنا فصاعدا، سوف نستعمل بشكل منتظم الرمز (ρ_n) للإشارة إلى متتالية منظمة.
نلاحظ بأنه توجد متتاليات منظمة. إذ يكفي أن نثبت دالة $\rho\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ مع $Supp\rho\subset B(0,1)$ ، $\rho\geqslant 0$ على $\mathbb{R}^N$ و $\int\rho>0$ ؛ لنأخذ مثلا

$$\rho(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{إذا } |x|<1 \\ 0 & \text{إذا } |x|\geqslant 1. \end{cases}$$

ثم نعتبر $\rho_n(x)=Cn^N\rho(nx)$ مع $C=\left(\int\rho\right)^{-1}$ ·

قضية 4.21. **ـ لتكن** $f\in C(\mathbb{R}^N)$ **؛ إذن** $\rho_n*f\longrightarrow f$ **بانتظام على كل متراص من** $\mathbb{R}^N$ ·

<u>إثبات</u>. ـ ليكن $K\subset\mathbb{R}^N$ متراصا مثبتا. لكل $\epsilon>0$ ، يوجد $\delta>0$ (متعلق بـ K و ϵ) بحيث

$$|f(x-y)-f(x)|<\epsilon \qquad \forall x\in K, \qquad \forall y\in B(0,\delta).$$

لدينا

$$(\rho_n*f)(x)-f(x)=\int[f(x-y)-f(x)]\rho_n(y)dy=\int_{B(0,\frac{1}{n})}[f(x-y)-f(x)]\rho_n(y)dy$$

و إذن لـ $n > \frac{1}{\delta}$ و $x \in K$ ،

$$|(\rho_n * f)(x) - f(x)| \leqslant \epsilon \int \rho_n = \epsilon.$$

$\square$

• **مبرهنة** 22.4. ـ **لتكن** $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$ ، **إذن** $\rho_n * f \longrightarrow f$ **في** $L^p(\mathbb{R}^N)$.

إثبات. ـ ليكن $\epsilon > 0$ و لتكن $f_1 \in C_c(\mathbb{R}^N)$ مثبتة بحيث أن $\|f - f_1\|_{L^p} < \epsilon$ (انظر المبرهنة 12.4). بحسب القضية 21.4 ، نعرف بأن $\rho_n * f_1 \longrightarrow f_1$ بانتظام على كل متراص. من جهة أخرى لدينا (انظر القضية 18.4)

$$Supp(\rho_n * f_1) \subset \overline{B(0, \frac{1}{n})} + Supp f_1 \subset K \text{ ،} \qquad K \text{ متراص مثبت.}$$

بالتالي، نستنتج بأن

$$\|\rho_n * f_1 - f_1\|_{L^p} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

في الأخير نكتب

$$\rho_n * f - f = [\rho_n * (f - f_1)] + [\rho_n * f_1 - f_1] + [f_1 - f];$$

و منه نصل إلى

$$\|\rho_n * f - f\|_{L^p} \leqslant 2\|f - f_1\|_{L^p} + \|\rho_n * f_1 - f_1\|_{L^p}$$

(اعتمادا على المبرهنة 15.4).

لدينا إذن

$$\limsup_{n \to \infty} \|\rho_n * f - f\|_{L^p} \leqslant 2\epsilon \qquad \forall \epsilon > 0$$

أي

$$\lim_{n \to \infty} \|\rho_n * f - f\|_{L^p} = 0.$$

$\square$

• **لازمة** 23.4. ـ **لتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **مجموعة مفتوحة كيفية.**
إذن $C_c^\infty(\Omega)$ **كثيف في** $L^p(\Omega)$ **لـ** $1 \leqslant p < \infty$.

إثبات.[7] ـ لتكن $f \in L^p(\Omega)$ ، $\epsilon > 0$ و $f_1 \in C_c(\Omega)$ بحيث

$$\|f - f_1\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon.$$

نعتبر الدالة $\overline{f}_1$ المعرفة بالآتي

$$\overline{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{إذا} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{إذا} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

بحيث أن $\overline{f}_1 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ و (مبرهنة 22.4) $\|\rho_n * \overline{f}_1 - \overline{f}_1\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$. من جهة أخرى

$$Supp(\rho_n * \overline{f}_1) \subset B(0, \frac{1}{n}) + Supp f_1 \subset \Omega$$ لـ n كبير بما فيه الكفاية.

لتكن $u_n = (\rho_n * \overline{f}_1)_{|\Omega}$. إذن، لـ n كبير بما فيه الكفاية، $u_n \in C_c(\Omega)$ و بالإضافة إلى ذلك فإن $\|u_n - f_1\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$.
إذن، لـ n كبير بما فيه الكفاية، $\|u_n - f\|_{L^p(\Omega)} < 2\epsilon$. $\square$

5.4. معيار التراص القوي في L^p

إنه من المهم أن نعرف متى تكون عائلة دوال من الفضاء $L^p(\Omega)$ متراصة نسبيا في $L^p(\Omega)$ بالنسبة للطوبولوجيا القوية. نذكر أولا بمبرهنة أسكولي التي تجيب على نفس السؤال في $C(K)$ حيث K فضاء متري متراص.

[7] أدخلت طريقة التنظيم بالملفوف من طرف Leray و Friedrichs .

• **مبرهنة** 24.4 (**أسكولي**). ـ **ليكن** K **فضاء متريا متراصا و لتكن** $\mathcal{K}$ **مجموعة جزئية محدودة من** $C(K)$.
نفرض بأن $\mathcal{K}$ **متساوية الاستمرار بانتظام؛ أي**

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textbf{بحيث} \quad d(x_1, x_2) < \delta \Longrightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon \quad \forall f \in \mathcal{K} \cdot \qquad (21)$$

إذن $\mathcal{K}$ **متراصة نسبيا في** $C(K)$.

بالنسبة لإثبات مبرهنة أسكولي، انظر مثلا Dixmier [1] ، Choquet [1] ، Dieudonné [1] ، Yosida [1] . المبرهنة الآتية (و لازمتها) هما " نسختا L^p " لمبرهنة أسكولي.

ترميز.

1) نضع $(\tau_h f)(x) = f(x+h)$ (إنسحاب f بـ h).

2) لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة؛ نقول بأن مجموعة مفتوحة ω محتواة بقوة في Ω و نكتب $\omega \subset\subset \Omega$ إذا $\overline{\omega} \subset \Omega$ [8] و إذا كان $\overline{\omega}$ متراصا.

• **مبرهنة** 25.4. (M.Riesz – Fréchet – Kolmogorov) ـ **لتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **مجموعة مفتوحة و لتكن** $\omega \subset \Omega$.
لتكن $\mathcal{F}$ **مجموعة جزئية من** $L^p(\Omega)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$. **نفرض بأن**

$$\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \delta < d(\omega, C^{\Omega}) \quad \textbf{بحيث} \\ \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad \textbf{مع} \quad |h| < \delta \quad \textbf{و} \quad \forall f \in \mathcal{F}. \end{array} \qquad (22)$$

إذن[9] $\mathcal{F}_{|_\omega}$ **متراصة نسبيا في** $L^p(\omega)$.

---

[8] $\overline{\omega}$ ترمز إلى إغلاقة ω في $\mathbb{R}^N$.

[9] لاحظ أنه إذا $x \in \omega$ و $|h| < \delta < d(\omega, C^{\Omega})$ فإن $x + h \in \Omega$ و بالتالي فإن $f(x+h)$ معرفة. الفرضية (22) هي شرط تساوي استمرارية " مكاملة " ؛ يمكن مقارنتها بـ (21) .

إثبات. ــ يمكننا دائما الافتراض بأن Ω محدودة. لـ $f \in \mathcal{F}$ نضع

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{إذا} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{إذا} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

نضع

$$\overline{\mathcal{F}} = \{\overline{f};\ f \in \mathcal{F}\}$$

بحيث إن $\overline{\mathcal{F}}$ تكون محدودة في $L^p(\mathbb{R}^N)$ و في $L^1(\mathbb{R}^N)$. نتبع ثلاث خطوات

ا) لدينا

$$\|\rho_n * \overline{f} - \overline{f}\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \qquad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}} \qquad \text{و} \qquad \forall n > \frac{1}{\delta} \cdot$$

ذلك لأن

$$\begin{aligned} |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|\rho_n(y)dy \\ &\leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y)dy \Big)^{1/p} \end{aligned}$$

و منه

$$|(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p \leqslant \int_{B(0,\frac{1}{n})} |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p \rho_n(y)dy.$$

إذن

$$\int_\omega |(\rho_n * \overline{f})(x) - \overline{f}(x)|^p dx \leqslant \int_{B(0,\frac{1}{n})} \rho_n(y)dy \int_\omega |\overline{f}(x-y) - \overline{f}(x)|^p dx < \epsilon^p$$

لـ $n > \frac{1}{\delta}$ (بحسب (22)).

ب) العائلة $\mathcal{H} = (\rho_n * \overline{\mathcal{F}})_{|\overline{\omega}}$ تحقق، لكل n ، فرضيات مبرهنة أسكولي. بالفعل لدينا بداية

$$\|\rho_n * \overline{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|\rho_n\|_{L^\infty} \|\overline{f}\|_{L^1} \leqslant C \qquad \forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}.$$

من جهة أخرى، لدينا $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ ، $\forall \overline{f} \in \overline{\mathcal{F}}$[10]

10 $\|\rho_n\|_{Lip} = \sup_{z_1 \neq z_2} \frac{|\rho_n(z_1) - \rho_n(z_2)|}{|z_1 - z_2|}$

$$|(\rho_n * \overline{f})(x_1) - (\rho_n * \overline{f})(x_2)| \leqslant |x_1 - x_2| \|\rho_n\|_{Lip} \|\overline{f}\|_{L^1} \leqslant C|x_1 - x_2|.$$

و عليه فإن $\mathcal{H}$ متراصة نسبيا في $C(\overline{\omega})$ و بالأحرى في $L^p(\omega)$.

جـ) خلاصة البرهان. بإعطاء $\epsilon > 0$ ، نثبت $n > \frac{1}{\delta}$ بحيث

$$\|(\rho_n * \overline{f}) - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

بما أن $\mathcal{H}$ متراص نسبيا في $L^p(\omega)$ ، يمكننا تغطية $\mathcal{H}$ بعدد منته من الكرات نصف قطرها ϵ (في $L^p(\omega)$). الكرات المقابلة ذات النصف قطر 2ϵ تغطي إذن $\mathcal{F}_{|\omega}$. بالتالي $\mathcal{F}_{|\omega}$ متراصة نسبيا في $L^p(\omega)$. $\square$

• **لازمة** 26.4. **ـ لتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **مجموعة مفتوحة و لتكن** $\mathcal{F}$ **مجموعة جزئية محدودة من** $L^p(\Omega)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$.
نفرض بأن

$$\left.\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \quad \forall \omega \subset\subset \Omega \quad \exists \delta > 0 \quad \delta < d(\omega, C^\Omega) \quad \text{بحيث} \\ \|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \epsilon \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \quad \text{مع} \quad |h| < \delta \quad \text{و} \quad \forall f \in \mathcal{F} \end{array}\right\} \tag{23}$$

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \omega \subset\subset \Omega \qquad \text{بحيث} \qquad \|f\|_{L^p(\Omega \backslash \omega)} < \epsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F} \tag{24}$$

إذن $\mathcal{F}$ **متراصة نسبيا في** $L^p(\Omega)$.

إثبات. ـ لـ $\epsilon > 0$ معطى، نثبت $\omega \subset\subset \Omega$ بحيث

$$\|f\|_{L^p(\Omega \backslash \omega)} < \epsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}.$$

بحسب المبرهنة 25.4 نعرف أن $\mathcal{F}_{|\omega}$ متراصة نسبيا في $L^p(\omega)$. يمكننا إذن تغطية $\mathcal{F}_{|\omega}$ بعدد منته من الكرات نصف قطرها ϵ في $L^p(\omega)$. ليكن

$$\mathcal{F}_{|\omega} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(g_i, \epsilon) \qquad \text{مع} \qquad g_i \in L^p(\omega)$$

(هذه الكرات مقررة في $L^p(\omega)$). نضع

$$\widetilde{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & x \in \omega \\ 0 & x \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

نتحقق بسهولة بأن $\mathcal{F} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(\widetilde{g}_i, 2\epsilon)$ (هذه الكرات مقررة في $L^p(\Omega)$). $\square$

ملاحظة 12. ـ عكس اللازمة 26.4 صحيح. (انظر مثلا [EX]).

ملاحظة 13. ـ لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة جزئية محدودة من $L^p(\mathbb{R}^N)$ مع $1 \leqslant p < \infty$ تحقق

$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ بحيث $\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \epsilon \quad \forall h$ مع $|h| < \delta$ و $\forall f \in \mathcal{F}$.

عموما لا يمكن الاستنتاج بأن $\mathcal{F}$ متراصة نسبيا في $L^p(\mathbb{R}^N)$ ؛ فقط يمكن القول بأن $\mathcal{F}_{|\omega}$ متراصة نسبيا في $L^p(\omega)$ لكل مجموعة مفتوحة ω محدودة في $\mathbb{R}^N$. (انظر مثلا في [EX]).

لننه بتطبيق آخر بسيط (لكن مفيد !) للمبرهنة 25.4 .

لازمة 27.4. **ـ لتكن** $G \in L^1(\mathbb{R}^N)$ **دالة مثبتة و لتكن**

$$\mathcal{F} = G * \mathcal{B}$$

حيث $\mathcal{B}$ **ترمز إلى مجموعة محدودة من** $L^p(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$.
إذن $\mathcal{F}_{|\omega}$ **متراصة نسبيا في** $L^p(\omega)$ **لكل مجموعة مفتوحة محدودة** ω **من** $\mathbb{R}^N$.

<u>إثبات</u>. ـ من الواضح أن $\mathcal{F}$ محدودة في $L^p(\mathbb{R}^N)$. من جهة أخرى إذا كانت $f = G * u$ مع $u \in \mathcal{B}$ فإن

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|(\tau_h G - G) * u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|\tau_h G - G\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

نصل إلى النتيجة بفضل الـ

توطئة 4.4. **ـ لتكن** $G \in L^q(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \leqslant q < \infty$. **إذن**

$$\lim_{h\to 0}\|\tau_h G - G\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

إثبات. ـ ليكن $\epsilon > 0$ معطى و لتكن

$$G_1 \in C_c(\mathbb{R}^N) \qquad \text{بحيث} \qquad \|G - G_1\|_{L^q} < \epsilon \cdot$$

لدينا

$$\begin{aligned}\|\tau_h G - G\|_{L^q} &\leqslant \|\tau_h G - \tau_h G_1\|_{L^q} + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q} + \|G_1 - G\|_{L^q}\\ &\leqslant 2\epsilon + \|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q}.\end{aligned}$$

من جهة أخرى، من البديهي أن $\lim_{h\to 0}\|\tau_h G_1 - G_1\|_{L^q} = 0$ و منه إذن

$$\limsup_{h\to 0}\|\tau_h G - G\|_{L^q} \leqslant 2\epsilon.$$

□

تعاليق حول الفصل الرابع

1) لقد قمنا في المقطع 1.4 بالتذكير ببعض المبادئ الأساسية لنظرية المكاملة. من بين النتائج المفيدة التي لم يتم ذكرها، نسرد، من بينها الـ

---

* **مبرهنة** 28.4 Egorov . **ـ نفرض بأن** $|\Omega| < \infty$. **لتكن** (f_n) **متتالية دوال قيوسة من** Ω **إلى** $\mathbb{R}$ **بحيث إن**

$$f_n(x) \longrightarrow f(x) \qquad \text{حـ. ت على } \Omega \qquad (\text{مع } |f(x)| < \infty \text{ حـ. ت }).$$

إذن

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists A \subset \Omega \text{ قيوسة} \qquad \text{بحيث}$$

$$|\Omega \setminus A| < \epsilon \qquad \text{و} \qquad f_n \longrightarrow f \text{ بإنتظام على } A \cdot$$

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا Malliavin [1] ، Marle [1] ، Yosida [1] ، Chae [1] ، Friedman [3] ، Dieudonné [2] ، Hewitt – Stromberg [1] ، Wheeden – Zygmund [1] .

2) فضاء القياسات على Ω . مجموعات ضعيفة التراص في L^1 .

لقد رأينا أن المجموعات المحدودة في $L^p(\Omega)$ متراصة نسبيا للطوبولوجيا $\sigma(L^p, L^{p'})$ لما يكون $1 < p \leqslant \infty$. لكن $L^1(\Omega)$ غير انعكاسي و حتى يمكننا إثبات أن $L^1(\Omega)$ ليس فضاء ثنويا. يستنتج من هذا بأن المجموعات المحدودة في $L^1(\Omega)$ لا تملك أية خاصية للتراص ضمن أي طوبولوجيا ضعيفة. و " لتجاوز هذا العائق " يمكن إغمار $L^1(\Omega)$ في فضاء أكبر: الفضاء $M(\Omega)$ لقياسات رادون على Ω .

من أجل هذا الغرض، نعتبر الفضاء $E = C_c(\Omega)$ مزودا بالنظيم $\|u\| = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$. نرمز إلى فضائه الثنوي E' بـ $M(\Omega)$. سوف نطابق $L^1(\Omega)$ مع فضاء جزئي لـ $M(\Omega)$. من أجل هذا نعرف التطبيق $T : L^1(\Omega) \longrightarrow M(\Omega)$ كالآتي:

لـ $f \in L^1(\Omega)$ معطاة، فإن التطبيق $u \in C_c(\Omega) \longmapsto \int fu$ هو شكل خطي مستمر على $C_c(\Omega)$ نرمز له بـ Tf ؛ بحيث أن

$$< Tf, u >_{E',E} = \int fu.$$

نتحقق بسهولة بأن T تطبيق خطي من $L^1(\Omega)$ في $M(\Omega)$ و بأن

$$\|Tf\|_{M(\Omega)} = \sup_{\substack{u\in C_c(\Omega)\\ \|u\|\leqslant 1}} \int fu = \|f\|_{L^1(\Omega)} \qquad \text{(انظر [EX])؛}$$

بمعنى آخر، T هو تقايس من $L^1(\Omega)$ إلى $M(\Omega)$. بفضل T يمكننا مطابقة $L^1(\Omega)$ بفضاء جزئي لـ $M(\Omega)$. المجموعات المحدودة في $L^1(\Omega)$ تكون متراصة نسبيا في $M(\Omega)$ بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(M, C_c)$. كذلك، نرى بأنه إذا كانت (f_n) متتالية محدودة من $L^1(\Omega)$ فإنه توجد متتالية جزئية مستخرجة (f_{n_k}) تتقارب إلى قياس μ للطوبولوجيا $\sigma(M, C_c)$ ، أي

$$\int f_{n_k} u \longrightarrow < \mu, u > \qquad \forall u \in C_c(\Omega).$$

أخيرا نشير إلى المسألة العويصة الآتية: ما هي المجموعات من $L^1(\Omega)$ المتراصة نسبيا للطوبولوجيا $\sigma(L^1, L^\infty)$ ؟
الجواب يعطى بالـ

*** مبرهنة** 29.4 (Dunford – Pettis). **ـ لتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **مجموعة مفتوحة محدودة (للتبسيط). لتكن** $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ **مجموعة جزئية محدودة.**
إذن $\mathcal{F}$ **متراصة نسبيا للطوبولوجيا** $\sigma(L^1, L^\infty)$ **إذا و فقط إذا كان لدينا**

$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists \delta > 0$ بحيث

$\int_A |f| < \epsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}$ و $\forall A \subset \Omega$ مع $|A| < \delta$.

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا Dunford – Schwartz [1] ، Beauzamy [1] ، Neveu [1] ، Dellacherie – Meyer [1] (الفصل الأول) أو [EX] .

3) دوال ذات قيم متجهية

لتكن Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$ و ليكن E فضاء بناخ. نعرف $L^p(\Omega; E)$ كفضاء للدوال المعرفة على Ω ، بقيم في E ، القيوسة بمعنى يجب توضيحه، بحيث $\int_\Omega \|f(x)\|^p dx < \infty$ (مع التغيير الاعتيادي لـ $p = \infty$). إن معظم الخصائص التي رأيناها في المقطعين 2.4 و 3.4 تبقى صحيحة شريطة إضافة فرضيات ملائمة على E (E قابل للفصل أو انعكاسي). على سبيل المثال إذا كان E انعكاسيا و $1 < p < \infty$ فإن $L^p(\Omega; E)$ انعكاسي و ثنويه يتطابق مع $L^{p'}(\Omega; E')$ (انظر مثلا Edwards [1] ، L. Schwartz [5] و Marle [1] إذا كان E فضاء هلبرت). هذه الفضاءات تلعب دورا هاما في نظرية معادلات التطور Evolution equations (في هذه الحالة فإن Ω يكون مجالا من $\mathbb{R}$).

4) نظرية الاستكمال Interpolation Theory

لنعرض نتيجة مثيرة تمثل نقطة البداية لهذه النظرية.

* **مبرهنة** 30.4 (M.Riesz – Thorin, Marcinkiewicz). **ـ لتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **مجموعة محدودة (للتبسيط). ليكن** $T : L^1(\Omega) \longrightarrow L^1(\Omega)$ **مؤثرا خطيا و مستمرا. نفرض بأن** $T : L^\infty(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$. **إذن** $T : L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ **لكل** $1 < p < \infty$.

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا Dunford – Schwartz [1] ، Stein – Weiss [1] ، Bergh – Löfström [1] ، Reed – Simon [1] (الجزء الثاني) و [EX] . لقد طورت نظرية الاستكمال من طرف Lions ، Peetre ، Calderon ، Stein و غيرهم. تعد وسيلة جد مفيدة في التحليل، و خاصة في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية، انظر مثلا Lions – Magenes [1] .

5) متباينة يونغ

* **مبرهنة** 31.4 (**يونغ**). **ـ لتكن** $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ **و** $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ **مع**

$$1 \leqslant p \leqslant \infty \qquad 1 \leqslant q \leqslant \infty \qquad \text{و} \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqslant 0 .$$

إذن

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^N) \qquad \text{و} \qquad \|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} .$$

بالنسبة للبرهان، انظر مثلا [EX] .

6) إن مفهوم الملفوف ـ معمما إلى التوزيعات (انظر L. Schwartz [1]) ـ يلعب دورا أساسيا في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية. مرد هذا، من بين ذلك، إلى إمكانية التعبير عن حل المعادلة $P(D)u = f$ (حيث إن $P(D)$ مؤثر تفاضلي بمعاملات ثابتة) على الشكل $u = E * f$ ، حيث إن E هو الحل الأساسي (fundamental solution) لـ $P(D)$ (مبرهنة Malgrange – Ehrenpreis)؛ انظر التعليق 2 ب من الفصل الأول.