3

طوبولوجيات ضعيفة فضاءات انعكاسية فضاءات قابلة للفصل فضاءات محدبة بانتظام.

1.3. تذكير حول الطوبولوجيا الأحسن التي تجعل عائلة من التطبيقات مستمرة

لنبدأ بتذكير حول الطوبولوجيا العامة. لتكن X مجموعة و لتكن $(Y_i)_{i\in I}$ عائلة من المجموعات الطوبولوجية. لكل $i \in I$ لدينا تطبيق $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$.

مسألة 1. ــ تزويد X بطوبولوجيا تجعل جميع التطبيقات $(\varphi_i)_{i\in I}$ مستمرة. إذا أمكن، إنشاء الطوبولوجيا $\mathcal{T}$ الأحسن، أي بأقل عدد من المجموعات المفتوحة [بمعنى آخر، الطوبولوجيا الأكثر " اقتصادا "] التي تجعل كل التطبيقات $(\varphi_i)_{i\in I}$ مستمرة.

نلاحظ أنه إذا كان X مزودا بالطوبولوجيا المتقطعة [بمعنى أن كل مجموعة جزئية لـ X هي مجموعة مفتوحة]، فإن كل φ_i تكون مستمرة؛ بطبيعة الحال فإن هذه الطوبولوجيا هي أبعد أن تكون " اقتصادية " ــ بل هي الأقل اقتصادا!

لتكن $\omega_i \subset Y_i$ مجموعة مفتوحة، إذن $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ هي بالضرورة مجموعة مفتوحة بالنسبة للطوبولوجيا $\mathcal{T}$. عندما تمثل ω_i عائلة مجموعات مفتوحة Y_i و i يمثل I ، فإن $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$

تشكل عائلة من المجموعات الجزئية لـ X ، هي بالضرورة مجموعات مفتوحة من الطوبولوجيا $\mathcal{T}$ ؛ نسمي هذه العائلة $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. الطوبولوجيا $\mathcal{T}$ هي الطوبولوجيا الأحسن التي تجعل $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ مجموعات مفتوحة. لهذا فإن ذلك يقودنا إلى المسألة التالية:

مسألة 2. ــ إنشاء العائلة $\mathcal{F}$ للمجموعات الجزئية لـ X ، الأكثر اقتصادا، و التي تكون مستقرة بالنسبة لـ $\bigcap_{\text{منته}}$ و $\bigcup_{\text{كيفي}}$ و بحيث أن $U_\lambda\in\mathcal{F}$ لجميع $\lambda\in\Lambda$. الجواب على المسألة 2 يأتي بالبناء التالي:

نأخذ في البداية التقاطعات المتهية أي $\bigcap_{\lambda\in\Gamma}$ ، $\Gamma\subset\Lambda$ ، Γ متهية. و هكذا نحصل على عائلة Φ مكونة من مجموعات جزئية لـ X ، مستقرة (stable) بالنسبة لـ $\bigcap_{\text{منته}}$. بعد هذا نأخذ العائلة $\mathcal{F}$ المكونة عن طريق أي اتحاد لعناصر من Φ . من الواضح أن العائلة Φ مستقرة بالنسبة لأي اتحاد؛ إلا أنه من غير البديهي أن العائلة $\mathcal{F}$ مستقرة بالنسبة لـ $\bigcap_{\text{منته}}$.

هذا هو موضوع الـ

توطئة 1.3. ــ **إن العائلة $\mathcal{F}$ مستقرة بالنسبة لـ $\bigcap_{\text{منته}}$.**

إثبات التوطئة 1.3 متروك للقارئ. إنه يمثل ترويحا ممتعا (!) مع نظرية المجموعات.

ملاحظة 1. ــ لا يمكننا عكس ترتيب العمليات خلال إنشاء $\mathcal{F}$. كان يمكن أن يكون طبيعيا أيضا البدء بالتفكير بـ $\bigcup_{\text{كيفي}}$ لمجموعات (U_λ) و بعد ذلك أخذ الـ $\bigcap_{\text{منته}}$.

العائلة المكونة بهذه الطريقة هي بطبيعة الحال مستقرة بالنسبة لـ $\bigcap_{\text{منته}}$ ، غير أنها غير مستقرة بالنسبة لـ $\bigcup_{\text{كيفي}}$. ينبغي مرة أخرى أخذ اتحادات كيفية.

لنلخص: نحصل على المجموعات المفتوحة للطوبولوجيا $\mathcal{T}$ عندما نأخذ أولا تقاطعات متهية لمجموعات على شكل $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ ، ω_i مجموعة مفتوحة في Y_i و بعد ذلك نأخذ اتحادات كيفية.

عند إعطاء نقطة $x \in X$ ، نحصل إذن على قاعدة جوارات لـ x بالنسبة للطوبولوجيا $\mathcal{T}$ عندما نأخذ المجموعات ذات الشكل $\bigcap_{\text{منته}} \varphi_i^{-1}(V_i)$ حيث إن V_i هو جوار لـ $\varphi_i(x)$ في Y_i .

فيما سيأتي سنزود X بالطوبولوجيا $\mathcal{T}$ ؛ لنذكر ببعض الخصائص الأولية لهذه الطوبولوجيا.

• **قضية** 1.3. **ـ لتكن** (x_n) **متتالية في** X .
إذن $x_n \longrightarrow x$ **إذا و فقط إذا** $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$ **لكل** $i \in I$.

إثبات. ـ إذا $x_n \longrightarrow x$ ، فإن $\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x)$ لكل $i \in I$ و ذلك لأن كل φ_i مستمر.
عكسيا، ليكن U جوارا لـ x . بناء على ما سبق فإنه يجوز لنا أن نعتبر أن U على الشكل $U = \bigcup_{i \in J} \varphi_i^{-1}(V_i)$ ، $J \subset I$ منته. لكل $i \in J$ يوجد عدد صحيح N_i بحيث $\varphi_i(x_n) \in V_i$ لكل $n \geqslant N_i$. ليكن $N = \max_{i \in J} N_i$. لدينا إذن $x_n \in U$ لكل $n \geqslant N$. $\square$

• **قضية** 2.3. **ـ ليكن** Z **فضاء طوبولوجيا و ليكن   تطبيقا من** Z **إلى** X .
إذن   مستمر إذا و فقط إذا $\varphi_i o$ **مستمر من** Z **إلى** Y_i **بالنسبة لكل** $i \in I$.

إثبات. ـ إذا كان   مستمرا، فإن $\varphi_i o$ يكون مستمرا أيضا لكل $i \in I$. عكسيا، لتكن U مجموعة مفتوحة في X ؛ لنبرهن على أن المجموعة $^{-1}(U)$ مفتوحة في Z . نعرف بأن U على الشكل $U = \bigcup_{\text{كيفي}} \bigcap_{\text{منته}} \varphi_i^{-1}(\omega_i)$ مع ω_i مجموعة مفتوحة في Y_i . يترتب على ذلك أن

$$^{-1}(U) = \bigcup_{\text{كيفي}} \bigcap_{\text{منته}} {}^{-1}[\varphi_i^{-1}(\omega_i)] = \bigcup_{\text{كيفي}} \bigcap_{\text{منته}} (\varphi_i o \ )^{-1}(\omega_i);$$

مجموعة مفتوحة في Z باعتبار أن $\varphi_i o$ مستمر. $\square$

2.3. تعريف و خصائص أولية للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$

ليكن E فضاء بناخ و لتكن $f \in E'$. نرمز بـ $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ للتطبيق المعرف بـ $\varphi_f(x) = < f, x >$. عندما تمسح f كل عناصر E' نحصل على عائلة $(\varphi_f)_{f\in E'}$ من التطبيقات من E إلى $\mathbb{R}$.

تعريف. ـ الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ على E هي الطوبولوجيا الأحسن على E التي تجعل جميع التطبيقات $(\varphi_f)_{f\in E'}$ مستمرة (بالمعنى الموجود في المقطع 1.3 مع $X = E$ ، $Y_i = \mathbb{R}$ و $I = E'$).

قضية 3.3. ـ **الطوبولوجيا الضعيفة** $\sigma(E,E')$ **مفصولة.**

<u>إثبات</u>. ـ ليكن $x_1, x_2 \in E$ مع $x_1 \neq x_2$. نبحث إنشاء مجموعتين مفتوحتين O_1 و O_2 بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ بحيث $x_1 \in O_1$ ، $x_2 \in O_2$ و $O_1 \frown O_2 = \emptyset$.
استنادا إلى مبرهنة هان - بناخ (الشكل الهندسي الثاني) يوجد فوق مستو مغلق يفصل $\{x_1\}$ و $\{x_2\}$ بشكل فعلي. إذن يوجد $f \in E'$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$< f, x_1 > < \alpha < < f, x_2 > .$$

نضع

$$O_1 = \{x \in E;\ < f, x > < \alpha\} = \varphi_f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$$
$$O_2 = \{x \in E;\ < f, x > > \alpha\} = \varphi_f^{-1}(]\alpha, +\infty[).$$

O_1 و O_2 مجموعتان مفتوحتان بالنسبة إلى $\sigma(E,E')$ و تحققان $x_1 \in O_1$ ، $x_2 \in O_2$ و $O_1 \frown O_2 = \emptyset$. $\square$

قضية 4.3. ـ **ليكن** $x_0 \in E$ **؛ نحصل على قاعدة جوارات لـ** x_0 **بالنسبة للطوبولوجيا** $\sigma(E,E')$ **إذا أخذنا جميع المجموعات ذات الشكل**

$$V = \{x \in E;\ |< f_i, x - x_0 >| < \epsilon \quad \forall i \in I\}$$

علما بأن I منته، $f_i \in E'$ و $\epsilon > 0$.

إثبات. ـ من الواضح أن $V = \bigcap_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(]a_i-\epsilon, a_i+\epsilon[)$ مع $a_i =< f_i, x_0 >$ ، هي مجموعة مفتوحة بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$ و تحتوي على x_0 . عكسيا ليكن U جوارا لـ x_0 بالنسبة لـ $\sigma(E,E')$. نعرف (ارجع إلى 1.3) بأنه يوجد جوار W لـ x_0 ، $W \subset U$ بالشكل الآتي $W = \bigcap_{i\in I} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$ ، I منته، و ω_i جوار (في $\mathbb{R}$) لـ $a_i =< f_i, x_0 >$. إذن يوجد $\epsilon > 0$ بحيث $]a_i-\epsilon, a_i+\epsilon[\subset \omega_i$ لكل $i \in I$. بالتالي $x_0 \in V \subset W \subset U$. $\square$

ترميز. ـ إذا كانت لدينا متتالية (x_n) في E ، فإننا نرمز بـ $x_n \rightharpoonup x$ إلى تقارب x_n نحو x بالنسبة إلى الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$. لتفادي أي غموض فإننا سوف نوضح " $x_n \rightharpoonup x$ بضعف بالنسبة لـ $\sigma(E,E')$ " . في حالة أي التباس سوف نؤكد بأن " $x_n \longrightarrow x$ بقوة " لنعني أن $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

• **قضية** 5.3. ـ **لتكن** (x_n) **متتالية في** E . **لدينا**

(ا) [$x_n \rightharpoonup x$ **بالنسبة إلى** $\sigma(E,E')$] $\Longleftrightarrow$ [$\forall f \in E' \quad < f, x_n > \longrightarrow < f, x >$]

(ب) **إذا** $x_n \longrightarrow x$ **بقوة، فإن** $x_n \rightharpoonup x$ **بالنسبة إلى** $\sigma(E,E')$.

(جـ) **إذا** $x_n \rightharpoonup x$ **بضعف بالنسبة إلى** $\sigma(E,E')$ ، **فإن** $\|x_n\|$ **تكون محدودة مع** $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.

(د) **إذا** $x_n \rightharpoonup x$ **بضعف بالنسبة إلى** $\sigma(E,E')$ **و إذا** $f_n \longrightarrow f$ **بقوة في** E' (**بمعنى أن** $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$)**، فإن** $< f_n, x_n > \longrightarrow < f, x >$.

إثبات.

(ا) يستنتج من القضية 1.3 و من تعريف الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$.

(ب) يستنتج من (ا) نظرا لأن $| < f, x_n > - < f, x > | \leqslant \|f\| \|x_n - x\|$.

برهان (جـ). ـ نطبق اللازمة 3.2 ـ التي تترتب على مبرهنة بناخ - ستاينهاوس. يكفي إذن أن نتحقق من أنه لكل $f \in E'$ فإن المجموعة $(< f, x_n >)_n$ محدودة. بيد أنه لكل $f \in E'$ ، تتقارب المتتالية $< f, x_n >$ نحو $< f, x >$ (بشكل خاص فإنها محدودة). ليكن $f \in E'$ ؛ لدينا

$$| < f, x_n > | \leqslant \|f\| \|x_n\|$$

و عند النهاية

$$| < f, x > | \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\|.$$

و بالتالي (لازمة 4.1)

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} | < f, x > | \leqslant \liminf \|x_n\|.$$

برهان (د). ـ لدينا

$$\begin{aligned} | < f_n, x_n > - < f, x > | &\leqslant | < f_n - f, x_n > | + | < f, x_n - x > | \\ &\leqslant \|f_n - f\| \|x_n\| + | < f, x_n - x > |. \end{aligned}$$

نخلص إلى النتيجة بفضل (ا) و (جـ). □

قضية 6.3. ـ عندما يكون E ذا بعد منته فإن الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E, E')$ و الطوبولوجيا العادية تتساويان. بشكل خاص فإن متتالية (x_n) تتقارب بشكل ضعيف إذا و فقط إذا تقاربت بشكل قوي.

إثبات. ـ الطوبولوجيا الضعيفة لديها دائما عدد أقل من المجموعات المفتوحة مقارنة بالطوبولوجيا القوية. عكسيا يتوجب علينا أن نثبت بأن كل مجموعة مفتوحة قوية هي مجموعة مفتوحة ضعيفة. ليكن $x_0 \in E$ و ليكن U جوارا لـ x_0 بالنسبة للطوبولوجيا القوية. ينبغي إنشاء جوار V لـ x_0 بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E, E')$ بحيث إن $V \subset U$.
بعبارة أخرى، ينبغي إيجاد مجموعة متهية $(f_i)_{i \in I}$ في E' و $\epsilon > 0$ بحيث إن

$$V = \{x \in E;\ | < f_i, x - x_0 > | < \epsilon,\ \forall i \in I\} \subset U.$$

لنفرض بأن $B(x_0, r) \subset U$. نختار $e_1, e_2, ...e_n$ قاعدة لـ E مع $\|e_i\| = 1$ ، $\forall i$.
لكل $x \in E$ ، لدينا التحليل $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ؛ التطبيقات $x \longmapsto x_i$ تمثل n داليات خطية مستمرة في E مسماة f_i . لدينا إذن

$$\|x - x_0\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} | < f_i, x - x_0 > | < n\epsilon$$

بالنسبة لـ V ، $x \in V$. باختيارنا $\epsilon = \dfrac{r}{n}$ ، نحصل على $V \subset U$. $\square$

ملاحظة 2. ـ المجموعات المفتوحة (المغلقة على التوالي) بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ هي مجموعات مفتوحة (مغلقة على التوالي) بالنسبة للطوبولوجيا القوية. عندما يكون E ذا بعد لانهائي فإن الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ تكون أخشن من الطوبولوجيا القوية، بمعنى أنه توجد مجموعات مفتوحة (مغلقة على التوالي) بالنسبة للطوبولوجيا القوية غير مفتوحة (مغلقة على التوالي) بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة. فيما يلي مثالان:

مثال 1. ـ المجموعة $S = \{x \in E;\ \|x\| = 1\}$ ليست مغلقة بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ على الإطلاق. بشكل أدق لنبرهن على أنه

$$\overline{S}^{\sigma(E,E')} = \{x \in E;\ \|x\| \leqslant 1\} \tag{1}$$

[$\overline{S}^{\sigma(E,E')}$ تمثل إغلاقة S بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$].

ليكن $x_0 \in E$ بحيث $\|x_0\| < 1$. لنتحقق من أن $x_0 \in \overline{S}^{\sigma(E,E')}$. ليكن إذن V جوارا لـ x_0 بالنسبة لـ $\sigma(E,E')$ ؛ سوف نثبت بأن $V \frown S \neq \emptyset$. بإمكاننا أن نفترض بأن V هو على الشكل الآتي

$$V = \{x \in E;\ |< f_i, x - x_0 >| < \epsilon \quad \forall i = 1,2,...n\}$$

مع

$$\epsilon > 0 \qquad \text{و} \qquad f_1, f_2, ...f_n \in E' \ .$$

لنثبت $y_0 \in E$ ، $y_0 \neq 0$ بحيث

$$< f_i, y_0 >= 0 \qquad \forall i = 1,2,...n$$

[مثل هذا الـ y_0 موجود؛ و إلا فإن التطبيق $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ المعرف بـ

$$\varphi(z) = (< f_i, z >)_{1 \leqslant i \leqslant n}$$

سيكون متباينا و سيكون φ تشاكلا تقابليا من E إلى $\varphi(E)$ ـ مما يؤدي إلى $dim E \leqslant n$].

الدالة $g(t) = \|x_0 + t y_0\|$ مستمرة على $[0, +\infty[$ مع

$$g(0) < 1 \qquad \text{و} \qquad \lim_{t \to +\infty} g(t) = +\infty \ .$$

يوجد إذن $t_0>0$ بحيث $\|x_0+t_0y_0\|=1$ · بالتالي $x_0+t_0y_0\in V\frown S$[1]
لقد تم التحقق من أن

$$S\subset\{x\in E;\ \|x\|\leqslant 1\}\subset\overline{S}^{\sigma(E,E')}.$$

إذا علمنا بأن $\{x\in E;\ \|x\|\leqslant 1\}$ مغلقة بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$ ـ و هو ما يستنتج من المبرهنة 7.3 ـ فإننا نحصل على (1) ·

مثال 2. ـ المجموعة $U=\{x\in E;\ \|x\|<1\}$ غير مفتوحة مطلقا بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ · بشكل أدق سنتحقق من أن داخل U لـ $\sigma(E,E')$ فارغ· بالفعل لنفترض ـ بالتناقض ـ وجود $x_0\in U$ و جوار V لـ x_0 بالنسبة لـ $\sigma(E,E')$ بحيث $V\subset U$ · اعتمادا على ما سبق فإن V يحتوي على مستقيم يمر عبر x_0 ـ و هذا ما يتناقض مع $V\subset U$ ·

ملاحظة 3. ـ عندما يكون E ذا بعد لانهائي فإن الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ لا تكون ممترة، بمعنى أنه لا توجد أي دالة مترية (و بالتالي أي نظيم) معرفة على E و التي تسبغ الطوبولوجيا الضعيفة على E ؛ انظر [EX] · بيد أننا سوف نرى أنه إذا كان E' قابلا للفصل فإننا نستطيع إنشاء متري معرف على $B=\{x\in E;\ \|x\|\leqslant 1\}$ و الذي يسبغ طوبولوجيا نظيرة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ على B ؛ انظر مبرهنة $25.3'$ ·

* **ملاحظة** 4. ـ عندما يكون E ذا بعد لانهائي توجد عموما متتاليات تتقارب بضعف و لا تتقارب بقوة· مثلا إذا كان E' قابلا للفصل (انظر المقطع 6.3) ـ أو إذا كان E انعكاسيا (انظر المقطع 5.3) ـ نستطيع إنشاء متتالية (x_n) في E بحيث $\|x_n\|=1$ و $x_n\rightharpoonup 0$ بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$ ؛ انظر [EX] · مع ذلك توجد فضاءات بناخ ذات أبعاد غير متهية تكون فيها كل متتالية تتقارب بضعف، متقاربة بقوة· مثلا $E=l^1$ يملك هذه الخاصية ″ الصادمة ″ ؛ انظر [EX] · بيد أن هذه الفضاءات هي بالأحرى نادرة و ″ مرضية ″ · بالطبع هذا لا يناقض في بعد لانهائي مسألة الاختلاف الدائم بين الطوبولوجيا الضعيفة و الطوبولوجيا القوية (انظر ملاحظة 2)· [لنذكر بأن فضاءين متريين يملكان نفس المتتاليات المتقاربة، يملكان بالتالي نفس الطوبولوجيا· غير أنه يمكن لفضاءين

[1] التفسير الهندسي لهذا البناء هو كالتالي· في بعد لانهائي كل جوار V لـ x_0 بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$ يحتوي على مستقيم يمر عبر x_0 ـ بل يحتوي على فضاء تآلفي ″ هائل ″ يمر عبر x_0 ·

طوبولوجيين أن يملكا نفس المتتاليات المتقاربة دون أن يملكا بالضرورة نفس الطوبولوجيا].

3.3. طوبولوجيا ضعيفة، مجموعات محدبة، و مؤثرات خطية

كل مجموعة مغلقة بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E,E')$ هي مغلقة أيضا بالنسبة للطوبولوجيا القوية. لقد مر بنا (ملاحظة 2) بأن العكس غير صحيح في بعد لانهائي. بيد أننا سنثبت تطابق هاتين الفكرتين بالنسبة للمجموعات المحدبة.

• **مبرهنة** 7.3. **ـ لتكن** $C \subset E$ **مجموعة محدبة. إذن** C **ضعيفة الإغلاق بالنسبة لـ** $\sigma(E,E')$ **إذا و فقط إذا كانت قوية الإغلاق.**

إثبات. ـ لنفترض بأن C قوية الإغلاق و لنثبت بأنها ضعيفة الإغلاق. لنتحقق من أن C^C مفتوحة بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$. ليكن إذن $x_0 \notin C$. استنادا إلى مبرهنة هان ـ بناخ فإنه يوجد فوق مستو مغلق يفصل بشكل فعلي $\{x_0\}$ و C . إذن يوجد $f \in E'$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$< f, x_0 > < \alpha << f, y > \qquad \forall y \in C.$$

لنضع

$$V = \{x \in E;\ \ < f, x > < \alpha\};$$

بحيث إن $x_0 \in V$ ، $V \cap C = \emptyset$ (يعني $V \subset C^C$) و V مفتوحة بالنسبة لـ $\sigma(E,E')$.

□

ملاحظة 5. ـ يبين الإثبات السابق تطابق كل مجموعة محدبة مغلقة مع تقاطع أنصاف الفضاءات المغلقة التي تضمها. من جهة أخرى، تقتضي المبرهنة 7.3 أنه إذا كانت (x_n) متتالية تتقارب بضعف نحو x ، فإنه توجد متتالية توافيق محدبة من x_n تتقارب بقوة نحو x (مبرهنة Mazur)؛ انظر [EX] .

• **لازمة** 8.3. **ـ لتكن** $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, \infty]$ **دالة محدبة، ن. م. س (بالنسبة للطوبولوجيا القوية). إذن فإن** φ **ن. م. س بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة** $\sigma(E, E')$.
بشكل خاص إذا $x_n \rightharpoonup x$ **لـ** $\sigma(E, E')$ **، فإن**

$$\varphi(x) \leqslant \liminf \varphi(x_n).$$

إثبات. ـ يكفي أن نتحقق بأنه لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ المجموعة

$$A = \{x \in E;\ \varphi(x) \leqslant \lambda\}$$

مغلقة بالنسبة لـ $\sigma(E, E')$. بيد أن A محدبة (بما أن φ محدبة) و A مغلقة بقوة (بما أن φ ن . م . س بالنسبة للطوبولوجيا القوية). استنادا للمبرهنة 7.3 فإن المجموعة A هي مغلقة أيضا بالنسبة لـ $\sigma(E, E')$. $\square$

ملاحظة 6. ـ نجد من جديد، بالخصوص، أنه إذا $x_n \rightharpoonup x$ بالنسبة لـ $\sigma(E, E')$ فإن $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$. بالفعل فإن الدالة $\varphi(x) = \|x\|$ محدبة و مستمرة بالنسبة للطوبولوجيا القوية، و إذن بالأحرى φ ن. م. س بالنسبة للطوبولوجيا القوية ـ و عليه فإن φ ن. م. س بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E, E')$.

مبرهنة 9.3. **ـ ليكن** E **و** F **فضاءين لبناخ. ليكن** T **مؤثرا خطيا مستمرا من** E **إلى** F .
إذن T **مستمر من** E **ضعيف** $\sigma(E, E')$ **إلى** F **ضعيف** $\sigma(F, F')$ **و العكس صحيح.**

إثبات. ـ استنادا إلى القضية 2.3 فإنه يكفي التحقق بأن التطبيق $x \longmapsto < f, Tx >$ مستمر من E ضعيف $\sigma(E, E')$ إلى $\mathbb{R}$ و ذلك لكل $f \in F'$. بيد أن التطبيق $x \longmapsto < f, Tx >$ هو دالي خطي مستمر على E . بالتالي فهو مستمر أيضا بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E, E')$.

عكسيا لنفترض بأن T خطي مستمر من E ضعيف إلى F ضعيف. إذن $G(T)$ مغلق في $E \times F$ بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E \times F, E' \times F')$ و بالتالي فإن $G(T)$ مغلق في $E \times F$ بالنسبة للطوبولوجيا القوية. نستنتج بواسطة مبرهنة البيان المغلق (مبرهنة 7.2) بأن T مستمر من E (قوي) إلى F (قوي). نفس الاستدلال يبرهن على أنه إذا كان T خطيا مستمرا من E (قوي) إلى F (ضعيف)، فإن T يكون مستمرا من E (قوي) إلى F (قوي). □

ملاحظة 7. ـ تلعب الفرضية " T خطي " في المبرهنة 9.3 دورا رئيسيا في الإثبات. إن تطبيقا غير خطي و مستمرا من E (قوي) إلى F (قوي) ليس، في الغالب ، مستمرا من $\sigma(E, E')$ إلى $\sigma(F, F')$ ؛ انظر [EX] .

4.3. الطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(E', E)$

ليكن E فضاء بناخ، ليكن E' ثنويه (مزودا بالنظيم الثنوي $\|f\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leqslant 1}} |< f, x >|$) و ليكن E'' ثنوي E' مزودا بالنظيم

$$\|\xi\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} |< \xi, f >|.$$

لدينا تباين قانوني $J : E \longrightarrow E''$ معرف كالآتي: ليكن $x \in E$ مثبتا، يشكل التطبيق $f \longmapsto < f, x >$ من E' إلى $\mathbb{R}$ تطبيقا خطيا على E' ، يعني عنصرا من E'' يرمز إليه بـ Jx [2] . لدينا إذن،

$$< Jx, f >_{E'', E'} = < f, x >_{E', E} \qquad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'.$$

من الواضح أن J خطي و بأن J يشكل تقايسا بمعنى $\|Jx\|_{E''} = \|x\|_E$ لكل $x \in E$ ؛ بالفعل

$$\|Jx\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |< Jx, f >| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |< f, x >| = \|x\|$$

[2] نرجو بالخصوص عدم الخلط مع التطبيق الثنوي $F : E \longrightarrow E'$ ، الذي تم إدخاله في الملاحظة 2.1 ، و الذي هو، في الغالب ، غير خطي (باستثناء الحالة الهلبرتية).

(استنادا إلى اللازمة 4.1). يمكن أن يحدث بأن لا يكون J غامرا[3] ، انظر مثلا [EX] . عن طريق J يمكننا أن نطابق E مع فضاء جزئي لـ E'' .
لحد الآن عرفت على الفضاء E' طوبولوجيتان:

أ) الطوبولوجيا القوية (المرتبطة بنظيم E')،
ب) الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(E', E'')$ (المقدمة في المقطع 3.3).

سنقوم الآن بتعريف طوبولوجيا ثالثة على E' : الطوبولوجيا الضعيفة * و التي نشير إليها بـ $\sigma(E', E)$[4] . لكل $x \in E$ نعتبر التطبيق $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرف بـ $f \longmapsto \varphi_x(f) = < f, x >$. عندما x يمسح E نحصل على عائلة من التطبيقات $(\varphi_x)_{x \in E}$ من E' في $\mathbb{R}$.

تعريف. ـ الطوبولوجيا الضعيفة * المدونة أيضا بـ $\sigma(E', E)$ هي الطوبولوجيا الأحسن على E' التي تجعل جميع التطبيقات $(\varphi_x)_{x \in E}$ مستمرة.

بما أن $E \subset E''$ ، فمن الواضح أن الطوبولوجيا $\sigma(E', E)$ أحسن من الطوبولوجيا $\sigma(E', E'')$. بعبارة أخرى فإن الطوبولوجيا $\sigma(E', E)$ تحتوي عددا أقل من المجموعات المفتوحة (المغلقة على التوالي) مقارنة بالطوبولوجيا $\sigma(E', E'')$ [التي بدورها تحتوي على عدد أقل من المجموعات المفتوحة (المغلقة على التوالي) مقارنة بالطوبولوجيا القوية].

ملاحظة 8. ـ ربما يتساءل القارىء عن سبب هذا الإصرار على إفقار الطوبولوجيات. السبب هو الآتي: عندما تحتوي طوبولوجيا ما على عدد أقل من المجموعات المفتوحة فإنها على العكس تحتوي على عدد أكبر من المجموعات المتراصة. سنرى، مثلا، بأن كرة الوحدة في E' تملك الخاصية المميزة بأنها متراصة بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة * $\sigma(E', E)$. بيد أن المجموعات المتراصة تلعب دورا رئيسيا عند الحاجة لإثبات مبرهنات وجودية. من هنا تأتي أهمية هذه الطوبولوجيا.

[3] عندما يكون J غامرا فإننا نقول بأن E انعكاسي، انظر المقطع 5.3 .
[4] الاصطلاح ضعيف نجميا هو ترجمة للاصطلاح الإنجليزي weak* ؛ النجمة تذكرنا بأننا نشتغل على الثنوي المشار إليه بـ E^* في المراجع الأمريكية.

قضية 10.3. **ـ الطوبولوجيا الضعيفة** $*$ $\sigma(E', E)$ **فصولة.**

إثبات. ـ ليكن f_1 و f_2 في E' بحيث $f_1 \neq f_2$. يوجد إذن $x \in E$ بحيث $< f_1, x > \neq < f_2, x >$ (هنا لا نستعمل مبرهنة هان ـ بناخ، و إنما تعريف $f_1 \neq f_2$). لنفرض، تثبيتا للأفكار، بأن $< f_1, x > < < f_2, x >$ ؛ لندخل α بحيث

$$< f_1, x > < \alpha < < f_2, x > .$$

لنضع

$$\begin{aligned} O_1 &= \{f \in E'; \quad < f, x > < \alpha\} = \varphi_x^{-1}(]-\infty, \alpha[) \\ O_2 &= \{f \in E'; \quad < f, x > > \alpha\} = \varphi_x^{-1}(]\alpha, +\infty[). \end{aligned}$$

O_1 و O_2 مجموعتان مفتوحتان ـ بالنسبة لـ $\sigma(E', E)$ ـ تحققان $f_1 \in O_1$ ، $f_2 \in O_2$ و $O_1 \frown O_2 = \emptyset$. $\square$

قضية 11.3. **ـ نحصل على قاعدة جوارات لنقطة** $f_0 \in E'$ **بالنسبة للطوبولوجيا** $\sigma(E', E)$ **إذا أخذنا جميع المجموعات ذات الشكل**

$$V = \{f \in E'; \quad | < f - f_0, x_i > | < \epsilon \quad \forall i \in I\}$$

علما بأن I **منته،** $x_i \in E$ **و** $\epsilon > 0$.

إثبات. ـ نتبنى إثبات القضية 4.3 . $\square$

ترميز. ـ إذا كانت لدينا متتالية (f_n) من E' ، فإننا نرمز بـ $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ إلى تقارب f_n نحو f بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة $*$ $\sigma(E', E)$. لتفادي أي غموض فإننا غالبا ما سنوضح " $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ لـ $\sigma(E', E)$ " ، " $f_n \rightharpoonup f$ لـ $\sigma(E', E'')$ " و " $f_n \longrightarrow f$ بقوة " .

• **قضية** 3.12. **ـ لتكن** (f_n) **متتالية من** E' **. لدينا**

(ا) **[** $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ **لـ** $\sigma(E',E)$ **]** $\iff$ **[** $\forall x \in E \qquad <f_n,x> \longrightarrow <f,x>$ **]**

(ب) **إذا** $f_n \longrightarrow f$ **بقوة، فإن** $f_n \rightharpoonup f$ **لـ** $\sigma(E',E'')$.

إذا $f_n \rightharpoonup f$ **لـ** $\sigma(E',E'')$ **، فإن** $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ **لـ** $\sigma(E',E)$.

(جـ) **إذا** $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ **لـ** $\sigma(E',E)$ **، فإن** $\|f_n\|$ **تكون محدودة مع** $\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|$.

(د) **إذا** $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ **لـ** $\sigma(E',E)$ **و إذا** $x_n \longrightarrow x$ **بقوة في** E **، فإن** $<f_n,x_n> \longrightarrow <f,x>$.

إثبات. ـ أعد نفس خطوات إثبات القضية 3.5 . $\square$

ملاحظة 9. ـ إذا $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ لـ $\sigma(E',E)$ (أو حتى لو كان $f_n \rightharpoonup f$ لـ $\sigma(E',E'')$) و إذا $x_n \rightharpoonup x$ لـ $\sigma(E,E')$ ، فلا يمكن أن نستنتج بأن $<f_n,x_n> \longrightarrow <f,x>$ (حاول أن تكون مثالا في فضاء لهلبرت).

ملاحظة 10. ـ عندما يكون E ذا بعد منته فإن الطوبولوجيات الثلاثة (قوية، $\sigma(E',E'')$ ، $\sigma(E',E)$) تكون متطابقة؛ بالفعل فإن J يكون إذن تطبيقا غامرا من E على E'' باعتبار أن $dimE = dimE' = dimE''$ و عليه نستنتج بأن $\sigma(E',E) = \sigma(E',E'')$.

$*$ **قضية** 3.13. **ـ ليكن** $\varphi : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ **تطبيقا خطيا مستمرا بالنسبة للطوبولوجيا** $\sigma(E',E)$ **. إذن يوجد** $x \in E$ **بحيث**

$$\varphi(f) = <f,x> \qquad \forall f \in E'.$$

يحتاج الإثبات إلى توطئة جبرية مفيدة جدا.

توطئة 2.3. ـ **ليكن** X **فضاء متجهيا و لتكن** $\varphi, \varphi_1, \varphi_2...\varphi_n$ **داليات خطية على** X **بحيث**

$$[\ \varphi_i(\nu) = 0 \qquad \forall i = 1, 2, ...n\ ] \implies [\ \varphi(\nu) = 0\ ]. \tag{2}$$

إذن يوجد $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$ **بحيث** $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i$.

إثبات التوطئة 2.3 . ـ لنعتبر التطبيق $F : X \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ المعرف بـ

$$F(u) = [\varphi(u), \varphi_1(u), \varphi_2(u), ...\varphi_n(u)].$$

نستنتج من الفرضية (2) بأن $a = [1, 0, 0, ...0]$ لا ينتمي إلى $R(F)$. يمكننا إذن فصل $\{a\}$ و $R(F)$ فعليا بواسطة فوق مستو في $\mathbb{R}^{n+1}$ ، بمعنى وجود $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\lambda \ < \ \alpha \ < \ \lambda \varphi(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(u) \qquad \forall u \in X.$$

بالتالي، لدينا

$$\lambda \varphi(u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(u) = 0 \qquad \forall u \in X$$

و $\lambda < 0$ (بالتالي $\lambda \neq 0$). $\square$

إثبات القضية 13.3 . ـ بما أن φ مستمر لـ $\sigma(E', E)$ ، يوجد جوار V لـ 0 بالنسبة لـ $\sigma(E', E)$ بحيث

$$|\varphi(f)| < 1 \qquad \forall f \in V.$$

يمكننا أن نفترض بأن V على شاكلة

$$V = \{f \in E';\ | < f, x_i > | \ < \ \epsilon \quad \forall i = 1, 2...n\}$$

مع $x_i \in E$ و $\epsilon > 0$. بشكل خاص إذا $< f, x_i >= 0$ $\forall i = 1, 2, ...n$ ، فإن $\varphi(f) = 0$. عند تطبيق التوطئة 2.3 نرى بأن

$$\varphi(f) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < f, x_i > = < f, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i > \qquad \forall f \in E'.$$

□

---

* **لازمة** 14.3. **ـ ليكن H فوق مستو في E' مغلقا بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E', E)$ · إذن H هو بالشكل الآتي**

$$H = \{f \in E';\ < f, x > = \alpha\}$$

لعنصر $x \in E$ ، $x \neq 0$ **و عنصر** $\alpha \in \mathbb{R}$ ·

إثبات. ـ المجموعة H هي بالشكل

$$H = \{f \in E';\ \varphi(f) = \alpha\}$$

حيث φ تطبيق خطي من E' إلى $\mathbb{R}$ ، $\varphi \not\equiv 0$ · ليكن $f_0 \notin H$ و ليكن V جوارا لـ f_0 بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E', E)$ بحيث $V \subset C^H$ · يمكننا افتراض أن

$$V = \{f \in E';\ | < f - f_0, x_i > | < \epsilon \quad \forall i = 1, 2, ...n\}.$$

بفضل تحدب V فإنه لدينا
إما

$$\varphi(f) < \alpha \qquad \forall f \in V \tag{3}$$

أو

$$\varphi(f) > \alpha \qquad \forall f \in V. \tag{3'}$$

نستنتج من (3) بأن

$$\varphi(g) < \alpha - \varphi(f_0) \qquad \forall g \in W = V - f_0,$$

و بما أن $-W = W$ نحصل على

$$|\varphi(g)| \leqslant |\alpha - \varphi(f_0)| \qquad \forall g \in W. \tag{4}$$

نصل إلى نفس النتيجة تحت الفرضية $(3')$. يستخلص من (4) بأن φ مستمر عند 0 للطوبولوجيا $\sigma(E',E)$ (بما أن W جوار لـ 0). يمكننا إذن تطبيق القضية 13.3 : يوجد $x \in E$ بحيث

$$\varphi(f) = \langle f, x \rangle \qquad \forall f \in E'.$$

□

ملاحظة 11. ـ عندما لا يكون J غامرا من E إلى E'' (بمعنى $E \neq E''$) إذن تكون الطوبولوجيا $\sigma(E',E)$ أحسن بشكل فعلي من الطوبولوجيا $\sigma(E',E'')$. لا بل توجد محدبات مغلقة لـ $\sigma(E',E'')$ و غير مغلقة لـ $\sigma(E',E)$. على سبيل المثال إذا كان $\xi \in E''$ و $\xi \notin J(E)$ ، فإن

$$H = \{f \in E';\ \ \langle \xi, f \rangle = 0\}$$

هو فوق مستو مغلق لـ $\sigma(E',E'')$ ، لكنه غير مغلق لـ $\sigma(E',E)$ (انظر اللازمة 14.3).
لنتذكر أنه يوجد نوعان من المحدبات المغلقة في E' :

ا) المحدبات المغلقة بقوة [أو المغلقة لـ $\sigma(E',E'')$ ـ هذان الأمران سيان بموجب المبرهنة 7.3]،
ب) المحدبات المغلقة لـ $\sigma(E',E)$.

• **مبرهنة** 15.3 (Banach – Alaoglu – Bourbaki). ـ **المجموعة** $B_{E'} = \{f \in E';\ \|f\| \leqslant 1\}$ **متراصة بالنسبة للطوبولوجيا الضعيفة** * $\sigma(E',E)$.

ملاحظة 12. ـ سنرى لاحقا (مبرهنة 5.6) بأن كرة الوحدة المغلقة لفضاء نظيمي ذي بعد لانهائي لا يمكن أن تكون متراصة أبدا بالنسبة للطوبولوجيا القوية. من هنا إذن نفهم الأهمية الأساسية للطوبولوجيا $\sigma(E',E)$ و للمبرهنة 15.3 .

<u>إثبات</u>. ـ نعتبر فضاء الجداء $Y = \mathbb{R}^E$ ؛ نرمز لعناصر Y بـ $\omega = (\omega_x)_{x\in E}$ مع $\omega_x \in \mathbb{R}$. الفضاء Y مزود بالطوبولوجيا الجدائية (انظر مثلا Dixmier [1] أو L. Schwartz [2]) بمعنى الطوبولوجيا الأحسن على Y التي تجعل التطبيقات $\omega \longmapsto \omega_x$ مستمرة (عندما x يمسح E). فيما يلي سنزود E' بشكل منتظم بالطوبولوجيا $\sigma(E',E)$. نعتبر التطبيق $\Phi : E' \longrightarrow Y$ المعرف بـ $\Phi(f) = (\langle f, x \rangle)_{x\in E}$. من الواضح أن Φ مستمر من E' إلى

Y (لاحظ بأن التطبيق $f \longmapsto (\Phi(f))_x =< f, x >$ مستمر لكل $x \in E$ مثبت ثم استعمل القضية 2.3). لنثبت بأن Φ هو تشاكل من E' على $\Phi(E')$. من الواضح بأن Φ متباين؛ لنتحقق من استمرارية Φ^{-1} . يكفي (بحسب القضية 2.3) أن نثبت أن لكل $x \in E$ مثبت، فإن التطبيق $\omega \longmapsto < \Phi^{-1}(\omega), x >$ مستمر على $\Phi(E')$ ؛ الشيء الذي هو بديهي نظرا إلى أن $< \Phi^{-1}(\omega), x >= \omega_x$.

من جهة أخرى من الواضح أن $\Phi(B_{E'}) = K$ حيث

$$K = \{\omega \in Y; \quad |\omega_x| \leqslant \|x\|,\ \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y,\ \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x \quad \forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in E\}.$$

يكفي إذن أن نثبت بأن K متراص في Y لكي نستنتج بأن $B_{E'}$ متراصة في E' .

بيد أن $K = K_1 \frown K_2$ مع

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\omega \in Y; \quad |\omega_x| \leqslant \|x\| \quad \forall x \in E\} \\ K_2 &= \{\omega \in Y; \quad \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \quad \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in E\}. \end{aligned}$$

المجموعة $K_1 = \prod_{x \in E} [-\|x\|, +\|x\|]$ متراصة (كجداء لفترات متراصة ـ لنذكر بأن جداء فضاءات متراصة متراص، انظر مثلا [1] Dixmier ، [2] L. Schwartz). أخيرا فإن K_2 مغلق؛ بالفعل، لكل $\lambda \in \mathbb{R}$ ، $x, y \in E$ مثبتة فإن المجموعات

$$\begin{aligned} A_{x,y} &= \{\omega \in Y; \quad \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\} \\ B_{\lambda,x} &= \{\omega \in Y; \quad \omega_{\lambda x} - \lambda\omega_x = 0\} \end{aligned}$$

مغلقة (نظرا لأن التطبيقات $\omega \longmapsto \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y$ و $\omega \longmapsto \omega_{\lambda x} - \lambda\omega_x$ مستمرة) و

$$K_2 = \Big(\bigcap_{x,y \in E} A_{x,y} \Big) \frown \Big(\bigcap_{\substack{x \in E \\ \lambda \in \mathbb{R}}} B_{\lambda,x} \Big).$$

□

5.3. فضاءات انعكاسية

تعريف. ـ ليكن E فضاء بناخ و ليكن J التباين القانوني من E إلى E'' (انظر المقطع

4.3). نقول بأن E انعكاسي إذا $J(E) = E''$.

عندما يكون E انعكاسيا فإننا نعتبر ضمنيا بأن E و E'' متطابقان (بواسطة التشاكل التقابلي J).

* **ملاحظة** 13. ــ من الأساسي استعمال J في التعريف السابق. يمكن إنشاء (انظر James [1]) مثال مدهش لفضاء غير انعكاسي E لأجله يوجد تقايس غامر من E إلى E''.

تعرض النتيجة التالية تمييزا مهما للفضاءات الانعكاسية.

• **مبرهنة** 16.3 (Kakutani) . ــ **ليكن** E **فضاء بناخ. إذن** E **انعكاسي إذا و فقط إذا كانت**

$$B_E = \{x \in E;\ \|x\| \leqslant 1\}$$

متراصة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$.

إثبات. ــ لنفرض بدءا بأن E انعكاسي. إذن $J(B_E) = B_{E''}$. من جهة أخرى (مبرهنة 15.3) فإن $B_{E''}$ متراصة للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$. يكفي إذن التحقق من أن J^{-1} مستمر من E'' مزودا بـ $\sigma(E'', E')$ إلى E مزودا بـ $\sigma(E, E')$.
يبقى أن نثبت (انظر القضية 2.3) بأن التطبيق $\xi \longmapsto < f, J^{-1}\xi >$ مستمر على E'' مزودا بـ $\sigma(E'', E')$ و ذلك لكل $f \in E'$ مثبت. بيد أن $< f, J^{-1}\xi > = < \xi, f >$ و التطبيق $\xi \longmapsto < \xi, f >$ مستمر على E'' مزودا بـ $\sigma(E'', E')$.
لإثبات العكس سنحتاج إلى توطئتين:

توطئة 3.3 (Helly) . ــ **ليكن** E **فضاء بناخ،** $f_1, f_2, ... f_n \in E'$ **و** $\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n \in \mathbb{R}$ **مثبتة.**
الخاصيتان التاليتان متكافئتان:
(ا) $\forall \epsilon > 0\ \exists x_\epsilon \in E$ **بحيث** $\|x_\epsilon\| \leqslant 1$ **و**

$$| < f_i, x_\epsilon > - \alpha_i | < \epsilon \qquad \forall i = 1, 2, ... n,$$

(ب) $\forall \beta_1, \beta_2, ...\beta_n \in \mathbb{R} \qquad \Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\Big| \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\|$ ·

<u>إثبات.</u>

(ا) $\Longleftarrow$ **(ب):** لنثبت $\beta_1, \beta_2, ...\beta_n$ و لنضع $S = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$ · يستنتج من (ا) بأن

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i < f_i, x_\epsilon > - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\Big| < \epsilon S$$

و إذن

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\Big| \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\| \|x_\epsilon\| + \epsilon S \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\| + \epsilon S, \qquad \forall \epsilon > 0.$$

من هنا نحصل على (ب).

(ب) $\Longleftarrow$ **(ا):** لنضع $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ و لنعتبر التطبيق $\overrightarrow{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ المعرف بـ $\overrightarrow{\varphi}(x) = (< f_1, x >, < f_2, x >, ... < f_n, x >)$ · تعبر الخاصية (ا) عن أن $\overrightarrow{\alpha} \in \overline{\varphi(B_E)}$ · لنستدل بالتناقض و لنفرض بأن $\overrightarrow{\alpha} \notin \overline{\varphi(B_E)}$ · يمكننا إذن فصل $\{\overrightarrow{\alpha}\}$ و $\overline{\varphi(B_E)}$ فعليا في $\mathbb{R}^n$ مما يعني وجود $\overrightarrow{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ...\beta_n) \in \mathbb{R}^n$ و وجود $\gamma \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\overrightarrow{\varphi}(x).\overrightarrow{\beta} \ < \gamma < \ \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{\beta} \qquad \forall x \in B_E.$$

بالتالي

$$\Big| < \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i, x > \Big| \leqslant \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \qquad \forall x \in B_E$$

بمعنى:

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\Big\| \leqslant \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

و هو ما يتناقض مع (ب). □

توطئة 4.3 (Goldstine) · **ـ ليكن** E **فضاء بناخ. إذن** $J(B_E)$ **كثيفة في** $B_{E''}$

للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$.

إثبات. ـ ليكن $\xi \in B_{E''}$ و ليكن V جوارا لـ ξ بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$. نبحث إثبات أن $J(B_E) \frown V \neq \emptyset$. يمكننا أن نفترض بأن V على الشكل

$$V = \{\eta \in E''; \ | < \eta - \xi, f_i > | < \epsilon, \quad \forall i = 1, 2, ...n\}.$$

يتعلق الأمر إذن بإيجاد $x \in B_E$ بحيث

$$| < f_i, x > - < \xi, f_i > | < \epsilon, \qquad \forall i = 1, 2, ...n.$$

لنضع $\alpha_i =< \xi, f_i >$ و لنلاحظ بأن $\forall \beta_1, \beta_2, ...\beta_n \in \mathbb{R}$ لدينا

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\Big| = \Big| < \xi, \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i > \Big| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \Big\|$$

(نظرا لأن $\|\xi\| \leqslant 1$). استنادا إلى التوطئة 3.3 ، يوجد $x_\epsilon \in B_E$ بحيث $| < f_i, x_\epsilon > - \alpha_i| < \epsilon$ $\forall i = 1, 2, ...n$ بمعنى أن $J(x_\epsilon) \in J(B_E) \frown V$. $\square$

ملاحظة 14. ـ نلاحظ بأن $J(B_E)$ مغلقة في $B_{E''}$ للطوبولوجيا القوية (استعمل حقيقة أن B_E تام و بأن J تقايس). إذن، في الغالب، $J(B_E)$ ليست كثيفة في $B_{E''}$ بالنسبة للطوبولوجيا القوية ـ ما عدا بطبيعة الحال إذا كان E انعكاسيا، و حيث يكون لدينا $J(B_E) = B_{E''}$.

ملاحظة 15. ـ نجد في [EX] إثباتا مباشرا للتوطئة 4.3 مبنيا على تطبيق لمبرهنة هان - بناخ في E'' .

ملاحظة 16. ـ بطبيعة الحال، كل الفضاءات ذات الأبعاد المتناهية انعكاسية.

نهاية إثبات المبرهنة 16.3 . ـ لنفرض الآن بأن B_E متراصة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$. بداية نلاحظ بأن $J : E \longrightarrow E''$ مستمر بالنسبة للطوبولوجيتين القويتين و بالتالي (مبرهنة 9.3) J مستمر أيضا بالنسبة للطوبولوجيتين الضعيفتين $\sigma(E, E') \longrightarrow \sigma(E'', E''')$. بالأحرى J مستمر بالنسبة للطوبولوجيتين $\sigma(E, E') \longrightarrow \sigma(E'', E')$. بناء عليه فإن $J(B_E)$ متراصة بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$. بما أن $J(B_E)$ كثيفة في $B_{E''}$ بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$ (توطئة 4.3)، نستخلص بأن

$J(B_E) = B_{E''}$ و بالتالي $J(E) = E''$.

□

نشير الآن لبعض الخاصيات الأولية للفضاءات الانعكاسية.

• **قضية** 17.3. **ـ ليكن** E **فضاء بناخ انعكاسيا و ليكن** $M \subset E$ **فضاء متجهيا جزئيا مغلقا.**
إذن M **ـ مزود بالنظيم المستخلص من** E **ـ انعكاسي.**

إثبات. ـ بداية نلاحظ بأن لدينا طوبولوجيتين ضعيفتين على M :

ا) الطوبولوجيا $\sigma(M, M')$.

ب) أثر الطوبولوجيا $\sigma(E, E')$ على M .

يمكن بسهولة أن نتحقق (عن طريق " التعامل " مع اقتصارات و توسيعات لأشكال خطية) بأن هاتين الطوبولوجيتين متطابقتان.

يجب إثبات (استنادا للمبرهنة 16.3) بأن B_M متراصة للطوبولوجيا $\sigma(M, M')$. بيد أن B_E متراصة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$ و M مغلق للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$ (مبرهنة 7.3).
بالتالي تكون B_M متراصة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$ ، و كذلك أيضا للطوبولوجيا $\sigma(M, M')$.

□

لازمة 18.3. **ـ ليكن** E **فضاء بناخ.**
إذن يكون E **انعكاسيا إذا و فقط إذا كان** E' **انعكاسيا.**

إثبات. ـ E **انعكاسي** $\Longrightarrow$ E' **انعكاسي**: نعلم (مبرهنة 15.3) بأن $B_{E'}$ متراصة لـ $\sigma(E', E)$. من جهة أخرى لدينا $\sigma(E', E) = \sigma(E', E'')$ نظرا لأن E انعكاسي. بالتالي فإن $B_{E'}$ متراصة لـ $\sigma(E', E'')$ ، و إذن E' انعكاسي (مبرهنة 16.3).

E' **انعكاسي** $\Longleftarrow$ E **انعكاسي:** نعلم (من المرحلة السابقة) بأن E'' انعكاسي. بما أن $J(E)$ فضاء جزئي مغلق في E'' ، يستخلص من ذلك بأن $J(E)$ انعكاسي. بالتالي E انعكاسي[5] . $\square$

• **لازمة** 19.3. **ـ ليكن** E **فضاء بناخ انعكاسيا. لتكن** $K \subset E$ **مجموعة جزئية محدبة، مغلقة و محدودة. إذن** K **مجموعة متراصة بالنسبة للطوبولوجيا** $\sigma(E, E')$.

إثبات. ـ إن K مجموعة مغلقة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$ (مبرهنة 7.3). من جهة أخرى يوجد ثابت m بحيث $K \subset mB_E$ ، و mB_E متراصة لـ $\sigma(E, E')$ (مبرهنة 16.3). $\square$

• **لازمة** 20.3. **ـ ليكن** E **فضاء بناخ انعكاسيا، و لتكن** $A \subset E$ **محدبة مغلقة، غير خالية و** $\varphi : A \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ **دالة محدبة، ن. م. س،** $\varphi \not\equiv +\infty$ **بحيث**

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \to \infty}} \varphi(x) = +\infty \qquad \text{(لا فرضية إذا كانت } A \text{ محدودة).} \tag{5}$$

إذن فإن φ **تدرك نهايتها الصغرى في** A **، بمعنى أنه يوجد** $x_0 \in A$ **بحيث** $\varphi(x_0) = \min_A \varphi$.

إثبات. ـ ليكن $a \in A$ بحيث $\lambda_0 = \varphi(a) < +\infty$. نعتبر المجموعة

$$\widetilde{A} = \{x \in A;\ \varphi(x) \leqslant \lambda_0\}.$$

إن $\widetilde{A}$ محدبة، مغلقة و محدودة (استنادا إلى (5))، و لذلك فهي متراصة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$. من جهة أخرى فإن φ ن. م. س بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$ (لازمة 8.3). بالتالي φ تدرك نهايتها الصغرى في $\widetilde{A}$: يوجد $x_0 \in \widetilde{A}$ بحيث

$$\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) \qquad \forall x \in \widetilde{A}.$$

[5] يكون بديهيا في حالة إذا كان E و F فضاءين لبناخ و إذا كان T تقايسا غامرا من E إلى F . إذن (E انعكاسي) $\Longleftrightarrow$ (F انعكاسي). هذا ليس متناقضا مع الملاحظة 13 !

إذا $x \in A \setminus \tilde{A}$ يكون لدينا $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(a) \leqslant \varphi(x)$ و بذلك، فإنه في الواقع

$$\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) \qquad \forall x \in A.$$

□

ملاحظة 17. ـ تشرح اللازمة 20.3 الدور الرئيسي الذي تلعبه الفضاءات الانعكاسية و الدوال المحدبة في حساب التغيرات، التحكم الأمثل، إلخ.

مبرهنة 21.3. ـ **ليكن** E **و** F **فضاءي بناخ انعكاسيين. ليكن** $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ **مؤثرا خطيا غير محدود، مغلقا مع** $\overline{D(A)} = E$.

إذن فإن $D(A^*)$ **كثيف في** F' .

يمكننا هذا من إدخال $A^{**} : D(A^{**}) \subset E'' \longrightarrow F''$ **و اعتبار** A^{**} **كمؤثر غير محدود من** E **إلى** F .

إذن

$$\boxed{A^{**} = A.}$$

<u>إثبات.</u>

1) $D(A^*)$ **كثيف في** F' . ليكن φ داليا خطيا مستمرا على F' ، مساويا للصفر في $D(A^*)$. نود إثبات (لازمة 8.1) بأن $\varphi \equiv 0$. بما أن F انعكاسي، يمكننا افتراض أن $\varphi \in F$ و بأن

$$< w, \varphi >= 0 \qquad \forall w \in D(A^*). \tag{6}$$

إذا $\varphi \neq 0$ ، فإن $[0, \varphi] \notin G(A)$ في $E \times F$. نفصل إذن فعليا $[0, \varphi]$ و $G(A)$ بواسطة فوق مستو مغلق في $E \times F$ ، بمعنى أنه يوجد $[f, v] \in E' \times F'$ بحيث

$$< f, u > + < v, Au > < \alpha < < v, \varphi > \qquad \forall u \in D(A).$$

نستنتج، بشكل خاص، بأن

$$< f, u > + < v, Au >= 0 \qquad \forall u \in D(A).$$

و

$$< v, \varphi > \neq 0.$$

إذن $v \in D(A^*)$ و نحصل على تناقض باختيار $w = v$ في (6) ·
بالتالي $\varphi = 0$ و $D(A^*)$ كثيف في F' ·

2) $A^{**} = A$ ·
نستعمل العلاقات

$$J[G(A^*)] = G(A)^\perp$$
$$J[G(A^{**})] = G(A^*)^\perp$$

(انظر الباب 6.2)[6] ؛ بالتالي نحصل على

$$G(A^{**}) = G(A)^{\perp\perp} = G(A)$$

لكون A مغلقا· □

6.3. فضاءات قابلة للفصل

تعريف· ــ نقول بأن فضاء متريا قابل للفصل أو فصول إذا وجدت مجموعة جزئية $D \subset E$ قابلة للعد و كثيفة·

قضية 22.3. ــ ليكن E فضاء متريا قابلا للفصل و لتكن F مجموعة جزئية في E · إذن F قابل للفصل أيضا·

إثبات· ــ لتكن (u_n) متتالية قابلة للعد و كثيفة في E · لتكن (r_m) متتالية من أعداد حقيقية إيجابية مع $r_m \to 0$ · نختار (عشوائيا) $a_{m,n} \in B(u_n, r_m) \frown F$ إذا كانت هذه المجموعة غير خالية· من الواضح بأن المتتالية $(a_{m,n})$ تشكل مجموعة قابلة للعد و كثيفة في F. □

[6] هنا يرمز J إلى التطبيق $[v, f] \longmapsto [-f, v]$ ؛ الذي لا علاقة له بالتباين القانوني من E إلى E'' !

مبرهنة 23.3. ـ **ليكن E فضاء بناخ بحيث يكون E' قابلا للفصل.**
إذن E قابل للفصل.

ملاحظة 18. ـ العكس غير صحيح. توجد فضاءات بناخية E قابلة للفصل بحيث E' غير قابل للفصل؛ على سبيل المثال $E = L^1(\Omega)$ (انظر الفصل 4).

<u>إثبات</u>. ـ نشير بـ $(f_n)_{n\geqslant 1}$ إلى متتالية قابلة للعد و كثيفة في E' . بما أن

$$\|f_n\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}} < f_n, x >,$$

فإنه يوجد $x_n \in E$ بحيث

$$\|x_n\| = 1 \qquad \text{و} \qquad < f_n, x_n > \geqslant \frac{1}{2}\|f_n\| \cdot$$

نرمز بـ L_0 إلى الفضاء المتجهي على $\mathbb{Q}$ المولد من $(x_n)_{n\geqslant 1}$ ، بمعنى أن L_0 هو المجموعة المكونة من جميع التوافيق الخطية المتهية لعناصر $(x_n)_{n\geqslant 1}$ بمعاملات في $\mathbb{Q}$. نلاحظ بأن L_0 قابل للعد؛ بالفعل، لكل n ، $\Lambda_n =$ الفضاء المتجهي على $\mathbb{Q}$ المولد من $\{x_1, x_2, ... x_n\}$ على علاقة تقابلية مع مجموعة جزئية لـ $\mathbb{Q}^n$ و $L_0 = \bigcup_{n\geqslant 1} \Lambda_n$. ليكن L الفضاء المتجهي على $\mathbb{R}$ المولد من $(x_n)_{n\geqslant 1}$. من الواضح بأن L_0 مجموعة جزئية كثيفة في L . لنتحقق من أن L كثيف في E (بالتالي سينتج عن ذلك بأن L_0 كثيف في E و إذن بأن E قابل للفصل). ليكن $f \in E'$ بحيث $< f, x >= 0$ لكل $x \in L$ ؛ لنثبت (لازمة 8.1) بأن $f = 0$. لـ $\epsilon > 0$ معطى، يوجد n بحيث $\|f - f_n\| < \epsilon$ ؛ لدينا

$$\frac{1}{2}\|f_n\| \ \leqslant < f_n, x_n > = < f_n - f, x_n > + < f, x_n > \leqslant \ \epsilon$$

(نظرا لأن $< f, x_n >= 0$). إذن $\|f\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n\| < 3\epsilon$. بالتالي $f = 0$. $\square$

لازمة 24.3. ـ **ليكن E فضاء بناخ.**

إذن (E انعكاسي و قابل للفصل) $\iff$ (E' انعكاسي و قابل للفصل).

إثبات. ـ نعلم مسبقا (لازمة 18.3 و مبرهنة 23.3) بأن (E' انعكاسي و قابل للفصل) $\Longleftarrow$ (E انعكاسي و قابل للفصل). عكسيا، إذا كان E انعكاسيا و قابلا للفصل، فإن $E'' = J(E)$ يكون انعكاسيا و قابلا للفصل؛ إذن E' انعكاسي و قابل للفصل. □

إن خاصيات الفصل مرتبطة عن كثب بمترية الطوبولوجيات الضعيفة.

مبرهنة 25.3. ـ ليكن E فضاء بناخ قابلا للفصل. إذن $B_{E'}$ *ممترة* بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E', E)$[7] **. عكسيا، إذا كانت $B_{E'}$ *ممترة* لـ $\sigma(E', E)$ فإن E يكون قابلا للفصل.**

ملاحظة 19. ـ إن الفضاء E' ككل لا يمكن أن يكون ممترا لـ $\sigma(E', E)$ ـ إلا في حالة البعد المنته. انظر [EX] .

إثبات. ـ لتكن $(x_n)_{n \geqslant 1}$ مجموعة جزئية قابلة للعد و كثيفة في B_E (خذ D قابلة للعد و كثيفة في E ثم اعتبر $D \cap B_E$). لـ $f, g \in B_{E'}$ نعرف

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |< f - g, x_n >|.$$

من الواضح بأن d مترية. لنثبت بأن الطوبولوجيا المستمدة من d متطابقة في $B_{E'}$ مع $\sigma(E', E)$.

ا) ليكن $f_0 \in B_{E'}$ و ليكن V جوارا لـ f_0 بالنسبة لـ $\sigma(E', E)$. لنثبت بأنه يوجد $r > 0$ بحيث

$$U = \{f \in B_{E'};\ d(f, f_0) < r\} \subset V.$$

يمكننا افتراض أن V بالشكل الآتي

---

[7] بمعنى وجود دالة مترية معرفة على $B_{E'}$ بحيث تكون الطوبولوجيا المستمدة منها متطابقة في $B_{E'}$ مع $\sigma(E', E)$.

$$V=\{f\in B_{E'};\ |<f-f_0,y_i>|<\epsilon \quad \forall i=1,2,...k\}$$

مع، بدون أي انتقاص للشمولية، $\|y_i\|\leqslant 1$ لكل $i=1,2,...k$ ·

نظرا لأن المتتالية $(x_n)_{n\geqslant 1}$ كثيفة في B_E ، لكل i ، يمكننا أن نجد عددا صحيحا n_i بحيث $\|y_i-x_{n_i}\|<\dfrac{\epsilon}{4}$ · لنحدد $r>0$ بحيث $2^{n_i}r<\dfrac{\epsilon}{2}$ لكل $i=1,2,...k$ ؛ و لنثبت بأن $U\subset V$ ·

بالفعل، إذا $d(f,f_0)<r$ ، فإن

$$\frac{1}{2^{n_i}}|<f-f_0,x_{n_i}>|<r \quad \forall i=1,2,...k$$

و إذن

$$|<f-f_0,y_i>| = |<f-f_0,y_i-x_{n_i}> + <f-f_0,x_{n_i}>| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}$$
$$\forall i=1,2,...k.$$

بالتالي $f\in V$ ·

ب) ليكن $f_0\in B_{E'}$ · لنحدد $r>0$ و لنثبت وجود جوار V لـ f_0 لـ $\sigma(E',E)$ في $B_{E'}$ بحيث

$$V\subset U=\{f\in B_{E'};\ d(f,f_0)<r\}.$$

سنأخذ V على الشكل الآتي

$$V=\{f\in B_{E'};\ |<f-f_0,x_i>|<\epsilon \quad \forall i=1,2,...k\}.$$

نحدد الآن k و ϵ حتى يكون $V\subset U$ · إذا $f\in V$ ، فإن

$$d(f,f_0)=\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}|<f-f_0,x_n>|+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}|<f-f_0,x_n>|$$
$$<\epsilon+2\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\epsilon+\frac{1}{2^{k-1}}.$$

نختار إذن $\epsilon<\dfrac{r}{2}$ و k كبيرا بما يكفي لنحصل على $\dfrac{1}{2^{k-1}}<\dfrac{r}{2}$ ·

$*$ **عكسيا،** لنفترض بأن، $B_{E'}$ ممترة لـ $\sigma(E',E)$ و لنثبت بأن E قابل للفصل· ليكن $U_n=\{f\in B_{E'};\ d(f,0)<\dfrac{1}{n}\}$ و ليكن V_n جوارا لـ 0 لـ $\sigma(E',E)$ بحيث $V_n\subset U_n$ ·
يمكننا أن نفترض بأن V_n على الشكل الآتي

$$V_n = \{f \in B_{E'};\ |< f, x >| < \epsilon_n, \quad \forall x \in \phi_n\}$$

حيث $\phi_n \subset E$ هي مجموعة جزئية متهية. نلاحظ بأن $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n$ قابلة للعد. من جهة أخرى

$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\}$ و إذن $(< f, x >= 0 \quad \forall x \in D) \Longleftarrow (f = 0)$.

نستخلص بأن الفضاء المتجهي المولد من D كثيف في E ؛ بالتالي فإن E قابل للفصل. □

" بالتناظر " لدينا الآتي:

---

* **مبرهنة** $3.25'$. **ــ ليكن E فضاء بناخ بحيث E' يكون قابلا للفصل. إذن B_E ممترة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$.**
و العكس صحيح.

لإثبات الاقتضاء (E' قابل للفصل) $\Longleftarrow$ (B_E ممترة للطوبولوجيا $\sigma(E, E')$) يمكننا إعادة إثبات المبرهنة 25.3 كلمة بكلمة مع تبديل دوري E و E' . أما العكس فهو أصعب بكثير؛ انظر مثلا Dunford – Schwartz [1] أو [EX] .

• **لازمة** 26.3. **ــ ليكن E فضاء بناخ قابلا للفصل و لتكن (f_n) متتالية محدودة في E' . إذن توجد متتالية جزئية (f_{n_k}) متقاربة بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E', E)$.**

إثبات. ــ لنفرض، تثبيتا للأفكار، بأن $\|f_n\| \leqslant 1$ لكل n . إن المجموعة $B_{E'}$ متراصة و ممترة للطوبولوجيا $\sigma(E', E)$ (المبرهنتان 15.3 و 25.3). بالتالي نحصل على النتيجة. □

• **مبرهنة** 27.3. **ـ ليكن E فضاء بناخ انعكاسيا و لتكن (x_n) متتالية محدودة في E . إذن توجد متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$.**

إثبات. ـ ليكن M_0 الفضاء المتجهي المولد من الـ (x_n) و ليكن $M = \overline{M}_0$. إن M فضاء قابل للفصل (انظر إثبات المبرهنة 23.3). بالإضافة إلى ذلك فإن M انعكاسي (استنادا للقضية 17.3). نستخلص بأن B_M مجموعة ممترة و متراصة للطوبولوجيا $\sigma(M,M')$. بالفعل، إن M' قابل للفصل (لازمة 24.3) و بالتالي فإن $B_{M''}$ ($= B_M$) ممترة لـ $\sigma(M'',M')$ ($= \sigma(M,M')$) بفضل المبرهنة 25.3 . يمكننا إذن استخراج متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة للطوبولوجيا $\sigma(M,M')$. نستنتج بأن (x_{n_k}) متقاربة أيضا للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$ (بتقييد الداليات الخطية المستمرة على E إلى M). □

ملاحظة 20. ـ إن عكس المبرهنة 27.3 صحيح أيضا. بشكل أدق لدينا التالي

---

* **مبرهنة** 28.3 (Eberlein–Šmulian) . **ـ ليكن E فضاء بناخ بحيث كل متتالية محدودة (x_n) لديها متتالية جزئية (x_{n_k}) متقاربة للطوبولوجيا $\sigma(E,E')$. إذن E انعكاسي.**

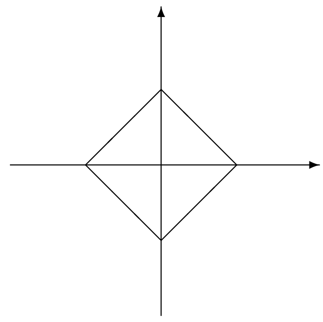
إن الإثبات بالغ الصعوبة؛ انظر مثلا Holmes [1] ، Yosida [1] ، Dunford – Schwartz [1] ، Diestel [2] أو [EX] . لكي نبين الفائدة من المبرهنة 28.3 نذكر بالآتي :

(ا) أي فضاء طوبولوجي (عام) تملك فيه كل متتالية، متتالية جزئية متقاربة ليس بالضرورة متراصا.

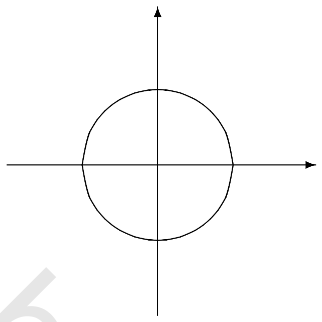
(ب) في فضاء طوبولوجي متراص قد توجد متتاليات ليس لها أي متتاليات جزئية متقاربة.

(جـ) في فضاء متري

(متراص) $\Longleftrightarrow$ (كل متتالية لديها متتالية جزئية متقاربة) .



كرة الوحدة في E لـ $\|\ \|_1$



كرة الوحدة في E لـ $\|\ \|_2$

توجد بالفعل أمثلة لفضاءات بناخ E و لمتتاليات محدودة (f_n) في E' ليس لديها أية متتالية جزئية متقاربة للطوبولوجيا $\sigma(E',E)$ ؛ انظر [EX] . بالطبع مثل هذه الفضاءات لا هي انعكاسية و لا هي قابلة للفصل؛ في هذه الحالة فإن المجموعة $B_{E'}$ مزودة بالطوبولوجيا $\sigma(E',E)$ متراصة و غير ممترة.

7.3. فضاءات محدبة بانتظام

تعريف. ـ نقول بأن فضاء بناخ E محدب بانتظام إذا $\forall\epsilon>0$ ، $\exists\delta>0$ بحيث

$$\left(\ x,y\in E\ ،\ \|x\|\leqslant 1\ ،\ \|y\|\leqslant 1 \text{ و } \|x-y\|>\epsilon\ \right) \implies \left(\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1-\delta\right).$$

نلاحظ بأن هذا التعريف يستعمل خاصية هندسية لكرة الوحدة (التي ينبغي أن تكون " مستديرة بشدة ") و بأنها غير مستقرة في حالة الانتقال إلى نظيم متكافئ.

مثال 1. ـ نأخذ $E=\mathbb{R}^2$. النظيم $\|x\|_2=(|x_1|^2+|x_2|^2)^{\frac{1}{2}}$ محدب بانتظام بينما النظيم $\|x\|_1=|x_1|+|x_2|$ ليس محدبا بانتظام.
يمكننا الاقتناع " بالنظر " إلى صورتي كرتي الوحدة[8] :

[8] على سبيل التمرين قم أيضا بالاستدلال عن طريق ϵ و δ !

مثال 2. ـ سوف نرى فيما بعد (انظر الفصلين 4 و 5) بأن كل فضاءات هلبرت هي محدبة بانتظام، كذلك الأمر بالنسبة للفضاءات $L^p(\Omega)$ لـ $1 < p < \infty$. على العكس فإن $L^1(\Omega)$ ، $L^\infty(\Omega)$ و $C(K)$ (K متراص) ليسوا محدبين بانتظام.

• **مبرهنة** 29.3 (Milman – Pettis). ـ **كل فضاء بناخ محدب بانتظام هو انعكاسي.**

ملاحظة 21. ـ من المفاجئ أن تؤدي خاصية ذات طابع هندسي (تحديب بانتظام) إلى خاصية ذات طابع طوبولوجي (انعكاسية). التحديب بانتظام غالبا ما يكون وسيلة ملائمة لإثبات بأن فضاء ما انعكاسي [لكن هذه الطريقة لا تنجح دائما: توجد فضاءات انعكاسية لا تملك أي نظيم متكافئ محدب بانتظام].

إثبات. ـ ليكن $\xi \in E''$ مع $\|\xi\| = 1$. نود إثبات أن $\xi \in J(B_E)$. بما أن $J(B_E)$ مغلقة بقوة في E'' ، فإنه يكفي إثبات

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists x \in B_E \qquad \text{بحيث} \qquad \|\xi - J(x)\| < \epsilon \ .$$

ليكن إذن $\epsilon > 0$ مثبتا و ليكن $\delta > 0$ مطابقا لتعريف التحديب بانتظام. نختار $f \in E'$ مع $\|f\| = 1$ بحيث

$$< \xi, f > \ > \ 1 - \frac{\delta}{2} \tag{6}$$

(و الذي هو ممكن بما أن $\|\xi\| = 1$).
نضع

$$V = \{\eta \in E'';\ | < \eta - \xi, f > | < \frac{\delta}{2}\}$$

بحيث يكون V جوارا لـ ξ بالنسبة للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$. استنادا إلى التوطئة 4.3 نعلم بأن $V \cap J(B_E) \neq \emptyset$. لنحدد $x \in B_E$ بحيث $J(x) \in V$.
لنثبت بأن $\xi \in J(x) + \epsilon B_{E''}$ ـ و هو ما سيكمل الإثبات. لنبرهن بالتناقض و لنفرض بأن $W = C^{(J(x)+\epsilon B_{E''})} \ni \xi$. نلاحظ بأن W هو أيضا جوار لـ ξ للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$ (بما أن $B_{E''}$ مغلقة للطوبولوجيا $\sigma(E'', E')$). عندما نطبق التوطئة 4.3 من جديد نحصل على $(V \cap W) \cap J(B_E) \neq \emptyset$ ، بمعنى أنه يوجد $\hat{x} \in B_E$ بحيث $J(\hat{x}) \in V \cap W$.
لدينا إذن (بما أن $J(x), J(\hat{x}) \in V$)

$$|< f, x > - < \xi, f >| < \frac{\delta}{2}$$
$$|< f, \hat{x} > - < \xi, f >| < \frac{\delta}{2}$$

لذلك، بعد الجمع نحصل على

$$2 < \xi, f > \leqslant < f, x + \hat{x} > + \delta \leqslant \|x + \hat{x}\| + \delta$$

و بناء على (6) ، $\left\|\frac{x+\hat{x}}{2}\right\| \geqslant 1 - \delta$. بالتالي (تحديب بانتظام) $\|x - \hat{x}\| \leqslant \epsilon$. أخيرا $\|x - \hat{x}\| > \epsilon$ نظرا لأن $J(\hat{x}) \in W$ ـ هذا مستحيل. □

لنكمل بخاصية مفيدة للفضاءات المحدبة بانتظام.

قضية 30.3. ـ **ليكن** E **فضاء بناخ محدبا بانتظام. لتكن** (x_n) **متتالية في** E **بحيث** $x_n \rightharpoonup x$ **للطوبولوجيا الضعيفة** $\sigma(E, E')$ **و**

$$\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|.$$

إذن $x_n \longrightarrow x$ **بقوة.**

إثبات. ـ بإمكاننا افتراض بأن $x \neq 0$ (و إلا فالنتيجة تكون بديهية). ليكن

$$\lambda_n = \max\{\|x_n\|, \|x\|\}$$

بحيث أن $\lambda_n \longrightarrow \|x\|$. نضع

$$y_n = \lambda_n^{-1} x_n \qquad \text{و} \qquad y = \|x\|^{-1} x \ .$$

إذن $y_n \rightharpoonup y$ لـ $\sigma(E, E')$. نستنتج بأن $\|y\| \leqslant \liminf \left\|\frac{y_n + y}{2}\right\|$ (انظر القضية 5.3 (جـ)).

من جهة أخرى $\|y\| = 1$ ، $\|y_n\| \leqslant 1$ و إذن في الحقيقة $\left\|\frac{y_n + y}{2}\right\| \longrightarrow 1$. يستنتج من التحديب بانتظام بأن $\|y_n - y\| \longrightarrow 0$. بالتالي $x_n \longrightarrow x$ بقوة. □

تعاليق حول الفصل الثالث

1) إن الطوبولوجيات $\sigma(E,E')$ ، $\sigma(E',E'')$ و $\sigma(E',E)$ هي طوبولوجيات محدبة محليا و قابلة للفصل (م. م. ف). تتمتع بالتالي بالخصائص العامة لـ ف. م. م. ف. من بينها مبرهنة هان - بناخ (الشكل الهندسي)، و مبرهنة Krein – Milman ، إلخ... تظل سارية المفعول؛ انظر Bourbaki [1] و [EX] .

2) هناك نتائج أخرى للطوبولوجيات الضعيفة تستحق الذكر. على سبيل المثال، الـ

---

* **مبرهنة** 31.3 (Banach – Dieudonné–Krein–Šmulian) . **ــ ليكن** E **فضاء بناخ و لتكن** $C \subset E'$ **محدبة. نفترض بأن**

$\forall n$ ، $C \frown (nB_{E'})$ **مغلقة للطوبولوجيا** $\sigma(E',E)$.

إذن C **مغلقة للطوبولوجيا** $\sigma(E',E)$.

القارئ المهتم يمكنه أن يجد الإثبات في Bourbaki [1] ، Larsen [1] ، Holmes [1] ، Dunford – Schwartz [1] ، Schaefer [1] و كتمرين في [EX] . تحتوي المراجع المذكورة أيضا على عدة خصائص أخرى متعلقة بمبرهنة Eberlein–Šmulian .

3) عرفت نظرية الفضاءات المتجهية على علاقة ثنوية، التي تعم الثنوية $< E, E' >$ ، أوقات مجدها خلال السنوات 1940 – 1950 . نقول بأن فضاءين X و Y على علاقة ثنوية إذا وجد دالي ثنائي الخطية $< , >$ على $X \times Y$ يفصل العناصر (بمعنى أنه $\forall x \neq 0$ ، $\exists y$ بحيث $< x, y > \neq 0$ و $\forall y \neq 0$ ، $\exists x$ بحيث $< x, y > \neq 0$). يمكن تعريف عدد كبير من الطوبولوجيات المحدبة محليا على X (على التوالي Y). من بين الأكثر شيوعا، إضافة إلى الطوبولوجيا الضعيفة $\sigma(X,Y)$ ، هناك طوبولوجيات Mackey $\tau(X,Y)$ ، الطوبولوجيا القوية $\beta(X,Y)$ إلخ. تلعب هذه الطوبولوجيات دورا مهما عند الاشتغال على فضاءات غير نظيمية، على سبيل المثال الفضاءات التي تدخل في نظرية التوزيع. بالنسبة لنظرية الفضاءات

المتجهية على علاقة ثنوية يمكن الرجوع إلى Bourbaki [1] ، Schaefer [1] ، Köthe [1] ، Treves [1] ، Kelly – Namioka [1] ، Edwards [1] .

4) إن الخصائص المتعلقة بالقابلية للفصل، بالانعكاسية و بالتحديب بانتظام هي أيضا مرتبطة بشكل وثيق بخصائص تفاضل الدالة $x \longrightarrow \|x\|$ (انظر Diestel [1] ، Beauzamy [1] و [EX]). إن مسألة وجود نظيم مكافئ يملك خصائص هندسية جيدة لهو موضوع تعرض للدراسة بكثرة؛ على سبيل المثال، كيف يمكن تمييز الفضاءات البناخية التي تمتلك نظيما مكافئا محدبا بانتظام؟[9] .
لقد عرفت هندسة الفضاءات البناخية تطورا مثيرا منذ حوالي عشرين عاما، بفضل أعمال، على سبيل الذكر كل من James ، Dvoretsky ، Grothendieck ، Lindenstrauss ، Pelczynski ، Enflo ، Johnson ، Rosenthal ، L. Schwartz و تلاميذه (Pisier ، Maurey ، Beauzamy ...)، إلخ. بهذا الصدد يمكن الرجوع إلى Beauzamy [1] ، Diestel [1] و [2] ، Lindenstrauss – Tzafriri [2] و L. Schwartz [4] .

[9] تسمى هذه الفضاءات فوق انعكاسية، انظر Diestel [1] و Beauzamy [1] .