1

مبرهنات هان - بناخ. مقدمة لنظرية الدوال المحدبة المرافقة

1.1. الشكل التحليلي لمبرهنة هان - بناخ: تمديد الداليات الخطية

ليكن E فضاء متجهيا على $\mathbb{R}$. نذكر بأن داليا خطيا هو تطبيق خطي معرف على E ، أو على فضاء جزئي متجهي من E و ذو قيمة في $\mathbb{R}$. النتيجة الأساسية للفقرة 1.1 تتعلق بتمديد دالي خطي معرف على فضاء جزئي متجهي من E إلى دالي خطي معرف على E بأكمله.

مبرهنة 1.1. (هان - بناخ، شكل تحليلي) ـ ليكن $p : E \to \mathbb{R}$ تطبيقا يحقق:

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E \quad \text{و} \quad \forall \lambda > 0 \text{ ،} \tag{1}$$

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E. \tag{2}$$

ليكن من جهة أخرى، $G \subset E$ فضاء جزئيا متجهيا و $g : G \to \mathbb{R}$ تطبيقا خطيا، يحقق

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in G. \tag{3}$$

إذن فإنه يوجد دالي خطي f معرف على E ، إمتداد لـ g ، أي أن:

$$g(x) = f(x) \qquad \forall x \in G$$

و بحيث

$$f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E. \tag{4}$$

إن إثبات المبرهنة 1.1 ، يستدعي توطئة زورن Zorn التي سنذكر بنصها. لنبدأ بتوضيح بعض المبادئ لنظرية المجموعات المرتبة.

لتكن P مجموعة مزودة بعلاقة ترتيب (جزئي) (partial order) يرمز له بـ $\leqslant$. نقول بأن مجموعة جزئية $Q \subset P$ مرتبة كليا إذا كان كل زوج a, b من Q يحقق (على الأقل) إحدى العلاقتين $a \leqslant b$ أو $b \leqslant a$.

لتكن $Q \subset P$ مجموعة جزئية من P ؛ نقول بأن $c \in P$ حد علوي (upper bound) لـ Q إذا كان لدينا لكل $a \in Q$ ، $a \leqslant c$.

نقول بأن $m \in P$ عنصر أعظمي (maximal) لـ P إذا، لكل $x \in P$ بحيث $m \leqslant x$ ، يكون لدينا بالضرورة $m = x$.

أخيرا، نقول بأن P إستقرائية (inductive) إذا كان لكل مجموعة جزئية مرتبة كليا من P ، حدا علويا.

توطئة 1.1. **(زورن) ـ كل مجموعة مرتبة، إستقرائية، غير خالية، تحتوي على عنصر أعظمي.**

يمكننا أن نجد إثباتا لتوطئة زورن (من خلال مسلمة الإختيار) (axiom of Choice) في N. Dunford – J. Schwartz [1] (Vol.1, Théorème 1.2.7) ، مع P. Dubreil M.L. Dubreil Jacotin [1] (chap.6) أو في Lang [1] .

ملاحظة 1. ـ ليس من الضروري بالنسبة لدارس التحليل معرفة إثبات توطئة زورن، و لكن من الأساسي فهم نصها و معرفة إستعمالها. لتوطئة زورن تطبيقات عديدة و مهمة في التحليل؛ و هي وسيلة لا غنى عنها في إثبات بعض نتائج الوجود.

<u>إثبات المبرهنة 1.1.</u> ـ لنعتبر المجموعة

$$P=\left\{ h \;\middle|\; \begin{array}{l} h : D(h)\subset E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{مع } D(h) \text{ فضاء جزئي متجهي من } E \text{ ، } h \text{ خطي،} \\ G\subset D(h) \text{ ، } h \text{ يمدد } g \quad \text{و} \quad h(x)\leqslant p(x) \quad \forall x\in D(h) \end{array} \right\}.$$

P مزودة بعلاقة الترتيب التالية:

$$(h_1 \leqslant h_2) \iff \big(\, D(h_1)\subset D(h_2) \quad \text{و} \quad h_2 \text{ يمدد } h_1 \,\big) .$$

من الواضح أن P مجموعة غير خالية بما أن $g\in P$. من ناحية أخرى، P استقرائية. بالفعل، لتكن $Q\subset P$ مجموعة جزئية مرتبة كليا؛ نكتب $Q=(h_i)_{i\in I}$. نعرف

$$D(h)=\cup_{i\in I} D(h_i) \quad \text{و} \quad h(x)=h_i(x) \quad \text{إذا} \quad x\in D(h_i) .$$

من الممكن التحقق من صحة هذا التعريف، بأن $h\in P$ و بأن h حد علوي لـ Q . يستنتج من توطئة زورن بأن P يحتوي على عنصر أعظمي يرمز له بـ f . لنبرهن على أن $D(f)=E$ - و هذا ما سينهي إثبات المبرهنة 1.1 . لنستدل بالتناقض و لنفرض بأن $D(f)\neq E$. ليكن $x_0\notin D(f)$ ؛ لنضع $D(h)=D(f)+\mathbb{R}x_0$ و لكل $x\in D(f)$ ، $h(x+tx_0)=f(x)+t\alpha$ $(t\in\mathbb{R})$ حيث أن α ثابت سيتم تعيينه فيما بعد حتى يكون لدينا $h\in P$. يجب إذن التأكد بأن

$$f(x)+t\alpha \leqslant p(x+tx_0) \quad \forall x\in D(f), \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

بفضل (1) ، يكفي التحقق من أن

$$\begin{cases} f(x)+\alpha \leqslant p(x+x_0) & \forall x\in D(f) \\ f(x)-\alpha \leqslant p(x-x_0) & \forall x\in D(f). \end{cases}$$

بعبارة أخرى، يجب اختيار α بحيث

$$\sup_{y\in D(f)} \{f(y)-p(y-x_0)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf_{x\in D(f)} \{p(x+x_0)-f(x)\}.$$

اختيار كهذا ممكن، مادام:

$$f(y)-p(y-x_0) \leqslant p(x+x_0)-f(x) \quad \forall x\in D(f), \quad \forall y\in D(f);$$

بالفعل، نلاحظ بأنه لدينا

$$f(x)+f(y) \leqslant p(x+y) \leqslant p(x+x_0)+p(y-x_0)$$

بفضل (2) .
نستخلص بأن f محدود من الأعلى بـ h و بأن $f \neq h$ ؛ و هذا يناقض أعظمية f . $\square$

نعطي الآن بعض التطبيقات البسيطة للمبرهنة 1.1 ، عندما يكون E فضاء متجهيا نظيميا (ف. م. ن) (normed vector space) نظيمه $\|.\|$.

ترميز. ـ نرمز للثنوي (الطوبولوجي)[1] لـ E بـ E' ، أي فضاء الداليات الخطية المستمرة على E ؛ E' مزود بالنظيم الثنوي[2] :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}} f(x). \tag{5}$$

عندما يكون لدينا $f \in E'$ و $x \in E$ ، نكتب عموما $<f,x>$ عوضا عن $f(x)$ ؛ نقول بأن $<,>$ هو الجداء السلمي في الثنوية E', E .

• **لازمة** 2.1 . ـ **ليكن** G **فضاء متجهيا جزئيا من** E **و ليكن** $g: G \to \mathbb{R}$ **تطبيقا خطيا مستمرا، نظيمه**

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x\in G\\ \|x\|\leqslant 1}} g(x).$$

إذن فإنه يوجد $f \in E'$ **يمدد** g **بحيث**

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

إثبات. ـ طبق المبرهنة 1.1 مع $p(x) = \|g\|_{G'}\|x\|$. $\square$

[1] في الإصطلاح الأمريكي، يرمز للثنوي الطوبولوجي لـ E بـ E^* . حذار من الخلط!
[2] على العموم، نكتب ببساطة $\|f\|$ عوضا عن $\|f\|_{E'}$ إلا إذا كان هناك مجال للشبهة.

• **لازمة** 3.1. ــ **لكل** $x_0 \in E$ ، **يوجد** $f_0 \in E'$ **بحيث**

$$\|f_0\| = \|x_0\| \qquad \text{و} \qquad < f_0, x_0 >= \|x_0\|^2 \cdot$$

إثبات. ــ طبق اللازمة 2.1 مع $G = \mathbb{R}x_0$ و $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ بحيث يكون لدينا $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$ · □

ملاحظة 2. ــ العنصر f_0 في اللازمة 3.1 غير وحيد عموما (حاول إنشاء مثال أو انظر [EX]). لكن عندما يكون E' محدبا فعليا[3] ــ و هو كذلك مثلا في حالة ما إذا كان E فضاء لهلبرت (انظر فصل 5) أو إذا كان $E = L^p(\Omega)$ مع $1 < p < \infty$ (انظر فصل 4) ــ فإن f_0 يكون وحيدا. بشكل عام، لكل $x_0 \in E$ ، نكتب

$$F(x_0) = \{ f_0 \in E' \ ؛ \ \|f_0\| = \|x_0\| \quad \text{و} \quad < f_0, x_0 >= \|x_0\|^2 \ \} \cdot$$

إن التطبيق (المتعدد القيم) (set − valued function) $x_0 \longmapsto F(x_0)$ هو تطبيق الثنوية من E إلى E' ؛ نجد بعض خصائصه في [EX] ·

• **لازمة** 4.1. ــ **لكل** $x \in E$ ، **لدينا**

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} | < f, x > | = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} | < f, x > |. \tag{6}$$

إثبات. ــ لنفرض أن $x \neq 0$. من الواضح أن

$$\sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} | < f, x > | \leqslant \|x\|.$$

من جهة أخرى (لازمة 3.1)، نعرف أنه يوجد $f_0 \in E'$ بحيث $\|f_0\| = \|x\|$ و $< f_0, x >= \|x\|^2$. نضع $f_1 = \|x\|^{-1} f_0$ حتى يكون $\|f_1\| = 1$ و $< f_1, x >= \|x\|$ · □

[3] نقول بأن فضاء متجهيا نظيميا E محدب فعليا إذا $\forall x, y \in E$ مع $\|x\| = \|y\| = 1$ و $x \neq y$ لدينا $\|tx + (1-t)y\| < 1 \quad \forall t \in]0,1[$ ·

ملاحظة 3. ـ ينبغي أن نميز بين الصيغة (5) التي هي تعريف و الصيغة (6) التي هي نتيجة. بوجه عام الـ " sup " الذي يظهر في (5) ليس بـ " max " أي أنه غير محقق (انظر إلى مثال في [EX]). لكن هذا الـ " sup " محقق إذا كان E فضاء بناخ انعكاسيا (انظر فصل 3)؛ هناك مبرهنة صعبة لـ R.C. James تؤكد العكس: إذا كان E فضاء بناخ بحيث لكل $f \in E'$ ، يكون الـ " sup " في (5) **محققا**، فإن E انعكاسي (انظر مثلا Diestel [1] ، فصل 1 أو Holmes [1]).

2.1. الشكل الهندسي لمبرهنة هان - بناخ: فصل المجموعات المحدبة

لنبدأ ببعض المقدمات فيما يخص الفوق مستويات. في كل ما يلي يمثل E ف . م . ن.

تعريف. ـ نسمي فوق مستو (تآلفي) (affine hyperplane) كل مجموعة على الشكل

$$H = \{\, x \in E; \quad f(x) = \alpha \,\}$$

حيث f دالي خطي[4] على E ، غير منعدم تماما و $\alpha \in \mathbb{R}$. نقول بأن H هو فوق مستو ذو معادلة $[f = \alpha]$.

قضية 5.1. ـ يكون فوق مستو ذو المعادلة $[f = \alpha]$ مغلقا إذا و فقط إذا كان f مستمرا.

إثبات. ـ من الواضح أنه إذا كان f مستمرا فإن H مغلق. عكسيا، لنفرض بأن H مغلق. إن المتممة (complement) C^H لـ H مفتوحة و غير خالية (بما أن $f \not\equiv 0$). ليكن $x_0 \in C^H$ و لنفرض (تثبيتا للأفكار) بأن $f(x_0) < \alpha$. ليكن $r > 0$ بحيث $B(x_0, r) \subset C^H$ حيث

[4] ليس ضروريا أن يكون مستمرا (عندما يكون بعد E غير منته، توجد داليات خطية غير مستمرة؛ انظر [EX]).

$$B(x_0,r)=\{\, x\in E;\ \|x-x_0\|<r \,\}.$$

لدينا

$$f(x)<\alpha \qquad \forall x\in B(x_0,r). \tag{7}$$

بالفعل لنفرض بأن $f(x_1)>\alpha$ لعنصر ما $x_1\in B(x_0,r)$. القطعة المستقيمة

$$\{\, x_t=(1-t)x_0+tx_1;\ t\in[0,1] \,\}$$

محتواة في $B(x_0,r)$. إذن $f(x_t)\neq\alpha$ $\forall t\in[0,1]$ ؛ إلى جانب هذا فإن $f(x_t)=\alpha$ لـ $t=\dfrac{f(x_1)-\alpha}{f(x_1)-f(x_0)}$ ، مما يؤدي إلى تناقض. إذن (7) مبرهن عليها. نستنتج من (7) بأن

$$f(x_0+rz)<\alpha \qquad \forall z\in B(0,1).$$

بالتالي f مستمر و $\|f\|\leqslant\dfrac{1}{r}(\alpha-f(x_0))$. $\square$

تعريف. ــ ليكن $A\subset E$ و $B\subset E$. نقول بأن الفوق مستو H ذو المعادلة $[f=\alpha]$ يفصل A و B بمعنى واسع إذا كان

$$\boxed{f(x)\leqslant\alpha \quad \forall x\in A \quad \text{و} \quad f(x)\geqslant\alpha \quad \forall x\in B\ .}$$

نقول بأن H يفصل A و B فعليا إذا وجد $\epsilon>0$ بحيث

$$\boxed{f(x)\leqslant\alpha-\epsilon \quad \forall x\in A \quad \text{و} \quad f(x)\geqslant\alpha+\epsilon \quad \forall x\in B\ .}$$

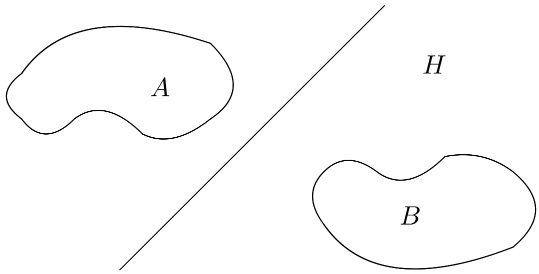
هندسيا يعني الفصل بأن A و B تقعان على الجانبين المختلفين لـ H .

أخيرا نذكر بأن مجموعة $A\subset E$ محدبة (convex) إذا

$$tx+(1-t)y\in A \qquad \forall x,y\in A\ ، \quad \forall t\in[0,1]\ .$$

• **مبرهنة** 6.1. **(هان - بناخ، الشكل الهندسي الأول) ــ لتكن** $A\subset E$ **و** $B\subset E$ **مجموعتين محدبتين، غير خاليتين و غير متقاطعتين (أي** $A\cap B=\emptyset$ **). نفرض بأن** A **مفتوحة. إذن يوجد فوق مستو مغلق يفصل** A **و** B **بمعنى واسع.**

يعتمد إثبات المبرهنة 6.1 على التوطئتين التاليتين



توطئة 2.1. **(معيار محدب)** (gauge of a convex) **ـ لتكن** $C \subset E$ **محدبة مفتوحة مع** $0 \in C$. **لكل** $x \in E$ **نضع:**

$$p(x) = \inf\{\, \alpha > 0; \quad \alpha^{-1}x \in C \,\} \tag{8}$$

(نقول بأن p **معيار** C **). إذن** p **تحقق** (1) ، (2) **و**

يوجد M **بحيث** $\quad 0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \quad$ ، $\forall x \in E$ (9)

$$C = \{\, x \in E;\ p(x) < 1 \,\}. \tag{10}$$

إثبات التوطئة 2.1. ـ ليكن $r > 0$ بحيث $B(0,r) \subset C$ ؛ من الواضح أن

$$p(x) \leqslant \frac{1}{r}\|x\| \qquad \forall x \in E \ .$$

إذن (9) **محققة.**
الخاصية (1) بديهية.

لنثبت (10) . لنفرض أولا بأن $x \in C$ ؛ بما أن C مفتوحة، $(1+\epsilon)x \in C$ لـ $\epsilon > 0$ صغير بما فيه الكفاية. إذن $p(x) \leqslant \frac{1}{1+\epsilon} < 1$. عكسيا، إذا كان $p(x) < 1$ فإنه يوجد $0 < \alpha < 1$ **بحيث** $\alpha^{-1}x \in C$ و لذلك $x = \alpha(\alpha^{-1}x) + (1-\alpha)0 \in C$.

لنثبت (2) . ليكن $x,y\in E$ و ليكن $\epsilon>0$. نعلم من (1) و (10) بأن $\dfrac{x}{p(x)+\epsilon}\in C$ و $\dfrac{y}{p(y)+\epsilon}\in C$. إذن $\dfrac{(1-t)y}{p(y)+\epsilon}+\dfrac{tx}{p(x)+\epsilon}\in C$ لكل $t\in[0,1]$. و بالخصوص لـ $t=\dfrac{p(x)+\epsilon}{p(x)+p(y)+2\epsilon}$ نحصل على $\dfrac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon}\in C$. نستنتج، بفضل (1) و (10) بأن $p(x+y)<p(x)+p(y)+2\epsilon \quad \forall\epsilon>0$. ثم نستنبط (2) . $\square$

توطئة 3.1. ــ **لتكن** $C\subset E$ **محدبة مفتوحة غير خالية و ليكن** $x_0\in E$ **مع** $x_0\notin C$. **فإنه يوجد** $f\in E'$ **بحيث** $f(x)<f(x_0)\ \ \forall x\in C$. **و بالخصوص فإن الفوق مستو ذو المعادلة** $[f=f(x_0)]$ **يفصل** $\{x_0\}$ **و** C **بمعنى واسع.**

إثبات التوطئة 3.1. ــ باستعمال الانسحاب يمكننا دائما الافتراض بأن $0\in C$ و إدخال معيار C (توطئة 2.1) الذي نرمز له بـ p . نعتبر $G=\mathbb{R}x_0$ و الدالي الخطي g المعرف على G بـ

$$g(tx_0)=t \quad ، \qquad t\in\mathbb{R}\ .$$

من الواضح أن

$$g(x)\leqslant p(x) \qquad \forall x\in G$$

(خذ $x=tx_0$ و ميز الحالتين $t>0$ و $t\leqslant 0$). بفضل المبرهنة 1.1 ، يوجد دالي خطي f على E ، يمدد g ، و بحيث

$$f(x)\leqslant p(x) \qquad \forall x\in E\ .$$

بالخصوص لدينا $f(x_0)=1$ و f مستمر بفضل (9) . من جانب آخر، نستنتج من (10) بأن $f(x)<1$ لكل $x\in C$. $\square$

إثبات المبرهنة 6.1. ــ نضع $C=A-B$ بحيث أن المجموعة C محدبة (التحقق من ذلك سهل)، C مفتوحة (لاحظ بأن $C=\bigcup_{y\in B}(A-y)$) و $0\notin C$ (بما أن $A\cap B=\emptyset$). بناء على التوطئة 3.1 يوجد $f\in E'$ بحيث

$$f(z)<0 \qquad \forall z\in C$$

أي

$$f(x) < f(y) \qquad \forall x \in A \text{ ، } \forall y \in B \text{ .}$$

لنثبت $\alpha \in \mathbb{R}$ مع

$$\sup_{x\in A} f(x) \leqslant \alpha \leqslant \inf_{y\in B} f(y)$$

و نستنتج أن الفوق مستو ذو المعادلة $[f = \alpha]$ يفصل A و B بمعنى واسع. □

• مبرهنة 7.1. **(هان - بناخ، الشكل الهندسي الثاني) ــ لتكن $A \subset E$ و $B \subset E$ مجموعتين محدبتين، غير خاليتين و غير متقاطعتين. نفرض بأن A مغلقة و B متراصة. إذن يوجد فوق مستو مغلق يفصل A و B فعليا.**

إثبات. ــ لـ $\epsilon > 0$ ، نضع $A_\epsilon = A + B(0,\epsilon)$ و $B_\epsilon = B + B(0,\epsilon)$ بحيث تكون A_ϵ و B_ϵ محدبتين، مفتوحتين و غير خاليتين. إضافة لذلك، لـ $\epsilon > 0$ صغير بما فيه الكفاية، تكون A_ϵ و B_ϵ غير متقاطعتين (و إلا استطعنا إيجاد متتاليات $\epsilon_n \to 0$ ، $x_n \in A$ ، $y_n \in B$ بحيث $\|x_n - y_n\| < 2\epsilon_n$ ؛ نستطيع بعد ذلك استخراج متتالية جزئية $y_{n_k} \to y \in A \cap B$). بمقتضى المبرهنة 6.1 فإنه يوجد فوق مستو مغلق معادلته $[f = \alpha]$ يفصل A_ϵ و B_ϵ بمعنى واسع. لدينا إذن

$$f(x+\epsilon z) \leqslant \alpha \leqslant f(y+\epsilon z) \qquad \forall x \in A \text{ ، } \forall y \in B \text{ ، } \forall z \in B(0,1) \text{ .}$$

يستخلص من ذلك أن

$$f(x) + \epsilon\|f\| \leqslant \alpha \leqslant f(y) - \epsilon\|f\| \qquad \forall x \in A \text{ ، } \forall y \in B \text{ .}$$

نستنتج بأن الفوق مستو $[f = \alpha]$ يفصل A و B فعليا بما أن $\|f\| \neq 0$. □

ملاحظة 4. ــ لتكن $A \subset E$ و $B \subset E$ مجموعتين محدبتين، غير خاليتين و غير متقاطعين. بدون فرضيات إضافية، لا يمكننا دائما فصل A و B بمعنى واسع بواسطة فوق مستو مغلق. حتى إنه يمكننا بناء مثال لـ A و B محدبتين مغلقتين، غير خاليتين، غير متقاطعتين و حيث لا يوجد أي فوق مستو مغلق يفصل A و B بمعنى واسع؛ انظر [EX] . لكن إذا كان بعد الفضاء E منته فإنه يمكننا دائما فصل محدبتين A و B غير خاليتين، غير متقاطعتين (بدون فرضيات إضافية !)؛ انظر [EX] .

لنشر أخيرا إلى لازمة جد مفيدة عندما يتعلق الأمر بإثبات أن فضاء متجهيا جزئيا كثيف.

• **لازمة** 8.1. ــ **ليكن** $F \subset E$ **فضاء متجهيا جزئيا بحيث** $\overline{F} \neq E$. **إذن يوجد** $f \in E'$ ، $f \neq 0$ **بحيث**

$$< f, x >= 0 \qquad \forall x \in F \; .$$

<u>إثبات.</u> ــ ليكن $x_0 \in E$ ، $x_0 \notin \overline{F}$. نطبق المبرهنة 7.1 مع $A = \overline{F}$ و $B = \{x_0\}$. يوجد إذن $f \in E'$ ، $f \neq 0$ بحيث إن الفوق مستو ذو المعادلة $[f = \alpha]$ يفصل $\overline{F}$ و $\{x_0\}$ فعليا. لدينا

$$< f, x > < \alpha < < f, x_0 > \qquad \forall x \in F \; .$$

نستنتج من هذا بأن $< f, x >= 0$ $\forall x \in F$ ، بما أن $\lambda < f, x > < \alpha$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

• **ملاحظة** 5. ــ نطبق غالبا اللازمة 8.1 للبرهان على أن فضاء جزئيا $F \subset E$ كثيف. نعتبر داليا خطيا و مستمرا f على E بحيث $f = 0$ على F ثم نبرهن بأن f منعدم تماما على E .

3.1. مقدمة لنظرية الدوال المحدبة المرافقة

لنبدأ ببعض التمهيدات حول الدوال نصف مستمرة سفليا و الدوال المحدبة.
في هذا المقطع، نعتبر دوالا φ معرفة على مجموعة E و بقيم في $]-\infty, +\infty]$ ؛ يمكن إذن لـ φ أخذ القيمة $+\infty$ ، (لكن القيمة $-\infty$ مقصاة).
نرمز بـ $D(\varphi)$ لنطاق (domain) φ أي المجموعة

$$\boxed{D(\varphi) = \{\, x \in E; \quad \varphi(x) < +\infty \,\}.}$$

---

[5] نؤكد على أن $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ و إذن λ لا تأخذ هنا القيمة $+\infty$.

ترميز. ـ البيان الفوقي (epigraph) لـ φ هو المجموعة[5]

$$\boxed{\operatorname{epi}\varphi = \{\, [x,\lambda] \in E \times \mathbb{R}; \quad \varphi(x) \leqslant \lambda \,\}.}$$

لنفرض الآن بأن E فضاء طوبولوجي. نذكر بـ

تعريف. ـ يقال بأن دالة $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ نصف مستمرة سفليا (ن . م . س) (lower semi − continuous) إذا كانت المجموعة $[\varphi \leqslant \lambda] = \{x \in E;\ \varphi(x) \leqslant \lambda\}$ مغلقة لكل $\lambda \in \mathbb{R}$.

سوف نستعمل بعض الخصائص الأولية للدوال ن . م . س (انظر Choquet [1] أو Dixmier [1]):

(ا) إذا كانت φ ن . م . س، فإن $\operatorname{epi}\varphi$ يكون مغلقا في $E \times \mathbb{R}$ ؛ و العكس صحيح.

(ب) إذا كانت φ ن . م . س، فإنه لكل $x \in E$ و لكل $\epsilon > 0$ يوجد جوار (neighbourhood) V لـ x بحيث

$$\varphi(y) \geqslant \varphi(x) - \epsilon \qquad \forall y \in V \text{ ؛}$$

و العكس صحيح.

يستنتج من ذلك بالخصوص أنه إذا كانت φ ن . م . س و إذا كانت $x_n \to x$ ، فإن

$$\boxed{\liminf \varphi(x_n) \geqslant \varphi(x).}$$

(جـ) إذا كانت φ_1 و φ_2 ن . م . س، فإن $\varphi_1 + \varphi_2$ تكون ن . م . س.

(د) إذا كانت عائلة دوال $(\varphi_i)_{i\in I}$ ن . م . س، فإن الغلاف العلوي (upper − envelope) لـ (φ_i) يكون ن . م . س أي الدالة المعرفة بـ

$$\varphi(x) = \sup_{i\in I} \varphi_i(x)$$

ن . م . س.

(هـ) إذا كان E متراصا و إذا كانت φ ن . م . س، فإن φ تصيب حدها الأدنى lower − bound على E .

لنفرض الآن بأن E فضاء متجهي. نذكر بـ

تعريف. ـ يقال بأن دالة $\varphi : E \to]-\infty, +\infty]$ محدبة إذا

$$\boxed{\varphi(tx+(1-t)y) \leqslant t\varphi(x)+(1-t)\varphi(y) \qquad \forall x,y\in E \text{ ، } \qquad \forall t\in]0,1[\text{ .}}$$

سوف نستعمل بعض الخصائص الأولية للدوال المحدبة :

(ا) إذا كانت φ دالة محدبة، فإن $\text{epi}\varphi$ مجموعة محدبة في $E\times\mathbb{R}$ ؛ و العكس صحيح.

(ب) إذا كانت φ دالة محدبة، فإن المجموعة $[\varphi\leqslant\lambda]$ محدبة لكل $\lambda\in\mathbb{R}$ ؛ و لكن العكس غير صحيح.

(جـ) إذا كانت φ_1 و φ_2 دالتين محدبتين، فإن $\varphi_1+\varphi_2$ محدبة.

(د) إذا كانت $(\varphi_i)_{i\in I}$ عائلة من الدوال المحدبة، فإن الغلاف العلوي لـ (φ_i) محدب.

في كل ما يلي نفرض بأن E ف . م . ن.

تعريف. ـ لتكن $\varphi: E\to]-\infty,+\infty]$ دالة بحيث $\varphi\not\equiv+\infty$ (أي $D(\varphi)\neq\emptyset$). نعرف الدالة $\varphi^*: E'\to]-\infty,+\infty]$ ، المرافقة conjugate لـ φ بـ

$$\boxed{\varphi^*(f) = \sup_{x\in E}\{<f,x> - \varphi(x)\} \qquad (f\in E') \text{ .}}$$

نلاحظ بأن φ^* دالة محدبة ن . م . س على E' . إذ لكل $x\in E$ مثبت، فإن الدالة $f\mapsto <f,x>-\varphi(x)$ محدبة و مستمرة، إذن ن . م . س. نستنتج بأن الغلاف العلوي لهذه الدوال (عندما يمسح x المجموعة الدليلية E index set) محدب و ن . م . س.

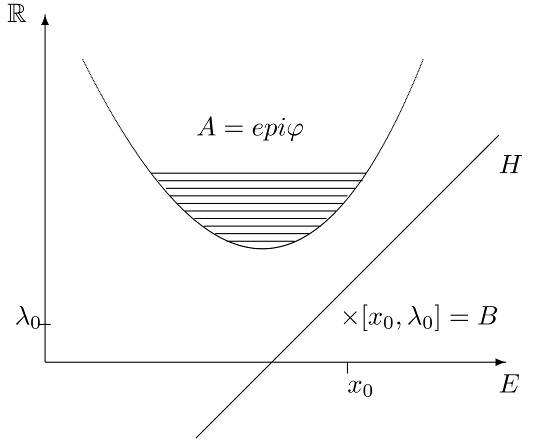
قضية 9.1. ـ **لنفرض بأن φ محدبة، ن . م . س و** $\varphi\not\equiv+\infty$. **إذن** $\varphi^*\not\equiv+\infty$.

إثبات. ـ ليكن $x_0\in D(\varphi)$ و ليكن $\lambda_0<\varphi(x_0)$. نطبق المبرهنة 7.1 (هان - بناخ، الشكل الهندسي الثاني) في الفضاء $E\times\mathbb{R}$ مع $A=\text{epi}\varphi$ و $B=\{[x_0,\lambda_0]\}$.

يوجد إذن فوق مستو H مغلق في $E\times\mathbb{R}$ معادلته $[\phi=\alpha]$ و الذي يفصل A و B فعليا.

لاحظ أن التطبيق $x\in E\mapsto\phi([x,0])$ دالي خطي مستمر على E ، إذن $\phi([x,0]) = <f,x>$ لعنصر ما $f\in E'$. بوضعنا $k=\phi([0,1])$ ، يكون لدينا

$$\phi([x,\lambda]) = <f,x> + k\lambda \qquad \text{لكل} \qquad [x,\lambda]\in E\times\mathbb{R} \text{ .}$$



بكتابة أن $\alpha < \phi$ على A و $\alpha > \phi$ على B ، نحصل على:

$$\forall [x, \lambda] \in \text{epi}\varphi \qquad < f, x > + k\lambda > \alpha$$

و

$$< f, x_0 > + k\lambda_0 < \alpha.$$

لدينا بشكل خاص

$$\forall x \in D(\varphi) \qquad < f, x > + k\varphi(x) > \alpha \tag{11}$$

إذن

$$< f, x_0 > + k\varphi(x_0) > \alpha > < f, x_0 > + k\lambda_0.$$

نستخلص بأن $k > 0$ ، نستنتج من (11) بأن

$$\forall x \in D(\varphi) \qquad < -\frac{1}{k} f, x > - \varphi(x) < -\frac{\alpha}{k}$$

و بالتالي $\varphi^*\Big(-\frac{1}{k}f\Big) < +\infty$. $\square$

نعرف الآن الدالة $\varphi^{**} : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ ، عندما تكون $\varphi^* \not\equiv +\infty$ ، بـ

$$\boxed{\varphi^{**}(x) = \sup_{f \in E'} \{ < f, x > - \varphi^*(f) \}.}$$

• **مبرهنة** 10.1. (Fenchel – Moreau) ــ **لنفرض بأن** φ **محدبة، ن · م · س و** $\varphi \not\equiv +\infty$ ·
إذن $\varphi = \varphi^{**}$ ·

إثبات· ــ ننجز الإثبات على مرحلتين:

المرحلة الأولى· نفرض زيادة على ذلك بأن $\varphi \geqslant 0$ · أولا، من الواضح أن $\varphi^{**} \leqslant \varphi$ ؛ بالفعل بناء على تعريف φ^* لدينا

$$< f, x > \leqslant \varphi(x) + \varphi^*(f) \qquad \text{،}\ \forall x \in E \qquad \forall f \in E' \cdot$$

للبرهنة على أن $\varphi = \varphi^{**}$ نستدل بالتناقض و نفرض أنه يوجد $x_0 \in E$ بحيث

$$\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0).$$

من المحتمل أن يكون لدينا $\varphi(x_0) = +\infty$ ، و لكن لدينا دائما $\varphi^{**}(x_0) < +\infty$ · نطبق المبرهنة 7.1 (هان - بناخ، الشكل الهندسي الثاني) في الفضاء $E \times \mathbb{R}$ مع $A = \text{epi}\varphi$ و $B = \{[x_0, \varphi^{**}(x_0)]\}$ · يوجد إذن ــ كما في إثبات القضية 9.1 ــ $f \in E'$ ، $k \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث

$$(12) \qquad < f, x > + k\lambda > \alpha \qquad \text{،}\ \forall [x, \lambda] \in \text{epi}\varphi$$

$$(13) \qquad < f, x_0 > + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha.$$

يستنتج عن ذلك بأن $k \geqslant 0$ · (اختر في (12) ، $x \in D(\varphi)$ و $\lambda = n \longrightarrow \infty$)· [هنا لا نستطيع الاستنتاج بأن $k > 0$ كما في إثبات القضية 9.1 ؛ من الممكن أن يكون لدينا $k = 0$ ، فنحصل على فوق مستو H " عمودي " في $E \times \mathbb{R}$]· ليكن $\epsilon > 0$ ؛ بما أن $\varphi \geqslant 0$ لدينا بفضل (12) :

$$< f, x > + (k + \epsilon)\varphi(x) \geqslant \alpha \qquad \text{،}\ \forall x \in D(\varphi) \cdot$$

نستخلص بأن $\varphi^*\Big(-\dfrac{f}{k+\epsilon}\Big) \leqslant -\dfrac{\alpha}{k+\epsilon}$ ؛ بناء على تعريف $\varphi^{**}(x_0)$ نتنهي إلى

$$\varphi^{**}(x_0) \geqslant < -\frac{f}{k+\epsilon}, x_0 > - \varphi^*\Big(-\frac{f}{k+\epsilon}\Big) \geqslant < -\frac{f}{k+\epsilon}, x_0 > + \frac{\alpha}{k+\epsilon}.$$

بالتالي

$$< f, x_0 > +(k+\epsilon)\varphi^{**}(x_0) \;\geqslant\; \alpha \qquad \forall\epsilon > 0 \text{ ،}$$

و هذا يناقض (13) ·

المرحلة الثانية· الحالة العامة· ليكن $f_0 \in D(\varphi^*)$ ($D(\varphi^*) \neq \emptyset$ استنادا إلى القضية 9.1)· حتى نرجع الأمر إلى الحالة السابقة، نعين الدالة

$$\overline{\varphi}(x) \;=\; \varphi(x) - < f_0, x > +\varphi^*(f_0)$$

بحيث تكون $\overline{\varphi}$ محدبة، ن · م · س، $\overline{\varphi} \not\equiv +\infty$ و $\overline{\varphi} \geqslant 0$ · بفضل المرحلة الأولى نعلم بأن $\overline{\varphi} = (\overline{\varphi})^{**}$ · لنحسب الآن $(\overline{\varphi})^*$ و $(\overline{\varphi})^{**}$ · لدينا

$$(\overline{\varphi})^*(f) \;=\; \varphi^*(f+f_0) \;-\; \varphi^*(f_0)$$

و

$$(\overline{\varphi})^{**}(x) \;=\; \varphi^{**}(x) - < f_0, x > +\varphi^*(f_0).$$

إذن $\varphi = \varphi^{**}$ · $\square$

مثال · ـ لنأخذ $\varphi(x) = \|x\|$ · نتحقق بسهولة بأن

$$\varphi^*(f) = \begin{cases} 0 & \text{إذا } \|f\| \leqslant 1 \\ +\infty & \text{إذا } \|f\| > 1. \end{cases}$$

إذن

$$\varphi^{**}(x) = \sup_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} < f, x >.$$

بكتابة المساواة $\varphi = \varphi^{**}$ نحصل ثانية (جزئيا) على اللازمة 4.1 ·

نختم هذا الفصل بخاصية أخرى للدوال المرافقة·

---

* **مبرهنة 11.1.** (Fenchel – Rockafellar) **ـ لتكن φ و   دالتين محدبتين· نفرض بأنه يوجد $x_0 \in E$ بحيث $\varphi(x_0) < +\infty$ ، $(x_0) < +\infty$ و φ مستمرة عند x_0 · لدينا إذن**

$$\inf_{x \in E}\{\varphi(x) + \;\;(x)\} = \sup_{f \in E'}\{-\varphi^*(-f) - \;\;^*(f)\} = \max_{f \in E'}\{-\varphi^*(-f) - \;\;^*(f)\}.$$

إثبات المبرهنة 11.1 يستعمل الـ

توطئة 4.1. ــ **لتكن** $C \subset E$ **مجموعة محدبة؛ إذن** $\mathrm{Int}C$ **محدب**[6] .
إذا كان بالإضافة إلى ذلك $\mathrm{Int}C \neq \emptyset$ ، **فإنه لدينا**

$$\overline{C} = \overline{\mathrm{Int}C}.$$

بالنسبة لإثبات التوطئة 4.1 ، انظر مثلا إلى [2] L. Schwartz ، [1] Bourbaki أو [EX] .

إثبات المبرهنة 11.1. ــ نضع

$$a = \inf_{x\in E} \{\varphi(x) + \quad (x)\}$$
$$b = \sup_{f\in E'} \{-\varphi^*(-f) - \quad {}^*(f)\}.$$

نتحقق بسهولة بأن $b \leqslant a$. من جانب آخر، لدينا إما $a \in \mathbb{R}$ أو $a = -\infty$. إذا كان $a = -\infty$ ، فإن استنتاج المبرهنة 11.1 بديهي. لنفرض إذن بأن $a \in \mathbb{R}$. نكتب

$$C = \mathrm{epi}\varphi.$$

من الواضح أن $\mathrm{Int}C \neq \emptyset$ (بما أن φ مستمرة عند x_0). سوف نطبق الآن مبرهنة هان - بناخ، الشكل الهندسي الأول، مع $A = \mathrm{Int}C$ و

$$B = \{\, [x, \lambda] \in E \times \mathbb{R}; \qquad \lambda \leqslant a - \quad (x)\,\}.$$

A و B محدبتان، غير خاليتين؛ لنتحقق بأنهما غير متقاطعتين: إذا كان $[x, \lambda] \in A$ فإنه لدينا

$$\lambda > \varphi(x) \geqslant a - \quad (x)$$

(من خلال تعريف a)، إذن $[x, \lambda] \notin B$. بالتالي، يوجد فوق مستو مغلق H يفصل A و B بمعنى واسع. إذن، H يفصل أيضا $\bar{A}$ و B بمعنى واسع. لكن، $\bar{A} = \overline{C}$ بموجب التوطئة 4.1 . من ثم، يوجد $f \in E'$ ، $k \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث أن الفوق مستو ذو المعادلة $[\phi = \alpha]$ في $E \times \mathbb{R}$ ، حيث

---

[6] يرمز لداخل مجموعة C بـ $\mathrm{Int}C$.

$$\phi([x,\lambda]) = < f, x > + k\lambda,$$

يفصل C و B بمعنى واسع. لدينا إذن

$$(14) \qquad \forall [x,\lambda] \in C \qquad < f, x > + k\lambda \geqslant \alpha$$

$$(15) \qquad \cdot \ \forall [x,\lambda] \in B \qquad < f, x > + k\lambda \leqslant \alpha$$

باختيارنا $x = x_0$ و $\lambda \to +\infty$ في (14) ، نرى أن $k \geqslant 0$. لنبرهن أن

$$(16) \qquad k > 0.$$

لنذكر أولا بأن $\phi \neq 0$ و الذي يكتب $\|f\| + |k| \neq 0$. لنستدل بالتناقض و لنفرض أن $k = 0$. سيكون لدينا (بناء على (14) و (15))

$$\forall x \in D(\varphi) \qquad < f, x > \geqslant \alpha$$
$$\cdot \ \forall x \in D(\ ) \qquad < f, x > \leqslant \alpha$$

لكن $B(x_0, \epsilon_0) \subset D(\varphi)$ لـ $\epsilon_0 > 0$ صغير بما فيه الكفاية و بالتالي

$$\cdot \ \forall z \in B(0,1) \qquad < f, x_0 + \epsilon_0 z > \geqslant \alpha$$

يستخلص من ذلك بأن $< f, x_0 > \geqslant \alpha + \epsilon_0 \|f\|$. من ناحية أخرى لدينا

$$\cdot \ x_0 \in D(\ ) \qquad \text{بما أن} \qquad < f, x_0 > \leqslant \alpha$$

إذن $f = 0$ ـ الذي هو غير معقول (لأن $k = 0$). لقد برهنا إذن على (16) .
نستنتج من (14) و (15) بأن

$$\varphi^*\Big(-\frac{f}{k}\Big) \leqslant -\frac{\alpha}{k}$$
$${}^*\Big(\frac{f}{k}\Big) \leqslant \frac{\alpha}{k} - a$$

و بالتالي

$$-\varphi^*\Big(-\frac{f}{k}\Big) - {}^*\Big(\frac{f}{k}\Big) \geqslant a.$$

بما أنه لدينا من جانب آخر (من خلال تعريف b)

$$-\varphi^*\Big(-\frac{f}{k}\Big) - \quad ^*\Big(\frac{f}{k}\Big) \leqslant b.$$

نستخلص بأن

$$a = b = -\varphi^*\Big(-\frac{f}{k}\Big) - \quad ^*\Big(\frac{f}{k}\Big).$$

□

مثال . ـ لتكن $K \subset E$ محدبة مغلقة غير خالية. نضع

$$I_K(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{إذا} & x \in K \\ +\infty & \text{إذا} & x \notin K. \end{array} \right.$$

تسمى I_K الدالة المبينة indicator function لـ K . **لاحظ أن** I_K محدبة، ن . م . س و $I_K \not\equiv +\infty$. تسمى الدالة المرافقة I_K^* بدالة الحامل support function لـ K . لنبرهن على أن لكل $x_0 \in E$ لدينا:

$$dist(x_0, K) = \inf_{x \in K} \|x - x_0\| = \max_{\substack{f \in E' \\ \|f\| \leqslant 1}} \{< f, x_0 > - I_K^*(f)\}. \qquad (17)$$

بالفعل لدينا $\inf_{x \in K} \|x - x_0\| = \inf_{x \in E} \{\varphi(x) + \quad (x)\}$ مع

$$\varphi(x) = \|x - x_0\| \qquad \text{و} \qquad (x) = I_K(x) \quad .$$

نطبق المبرهنة 11.1 .

ملاحظة 6. ـ يمكن للمساواة (17) إعطاء معلومات مفيدة في الحالات التي يكون فيها $\inf_{x \in K} \|x - x_0\|$ غير مدرك؛ انظر إلى مثال في [EX] .

تعطي نظرية السطوح الأصغرية minimal surface مجالا جد تثقيفيا حيث المسألة الأولية primal problem ليس لها حل (أي أن $\inf_{x \in E} \{\varphi(x) + \quad (x)\}$ غير مدرك) بالمقابل فإن المسألة الثنوية dual problem (أي $\max_{f \in E'} \{-\varphi^*(-f) - \quad ^*(f)\}$) لديها حل؛ انظر Ekeland – Temam [1] .

تعاليق حول الفصل الأول

1) تعميم و صيغ أخرى لنظريات هان - بناخ.

يتعمم الشكل الهندسي الأول لنظرية هان - بناخ إلى الفضاءات الطوبولوجية العامة. يتعمم الشكل الهندسي الثاني إلى الفضاءات المحدبة محليا locally convex spaces ـ و هي فضاءات تلعب دورا هاما، من بين ذلك في نظرية التوزيع (انظر [1] L. Schwartz). يمكن للقارئ المهتم أن يطلع على [1] N. Bourbaki ، [1] Kelly – Namioka ، [2] G. Choquet (جزء 2) و [1] Taylor – Lay .

2) تطبيقات لمبرهنتي هان - بناخ.

هي عديدة و متنوعة. نشير إلى البعض منها:

ا) مبرهنة Krein – Milman

لنذكر أولا ببعض التعاريف. ليكن E ف . م . ن و ليكن $A \subset E$. الغلاف المحدب المغلق convex – envelope لـ A - الذي نرمز له بـ $\overline{\text{conv}}A$ - هو أصغر مجموعة محدبة مغلقة تحتوي A . لتكن $K \subset E$ مجموعة محدبة. نقول عن نقطة $x \in K$ بأنها قصوى extremal إذا كان

$$\cdot \left(x_0 = x_1 = x \right) \Longleftarrow \left(x_0, x_1 \in K \quad \text{و} \quad t \in]0,1[\quad \text{مع} \quad x = (1-t)x_0 + tx_1 \right)$$

• **مبرهنة** 12.1. (Krein – Milman) **ـ لتكن** $K \subset E$ **مجموعة محدبة متراصة. إذن** K **تتطابق مع الغلاف المحدب المغلق لنقاطه القصوى.**

لمبرهنة Krein – Milman ، في حد ذاتها، عدة تطبيقات و توسيعات (مبرهنة Choquet

للتمثيل التكاملي، مبرهنة Bochner ، مبرهنة Bernstein ، إلخ.). حول هذا الموضوع، اطلع على Bourbaki [1] ، Choquet [2] (جزء 2)، Phelps [1] ، Dunford – Schwartz [1] جزء 1 ، Rudin [1] ، Larsen [1] ، Kelley – Namioka [1] ، Edwards [1] ، Dellacherie – Meyer [1] (فصل 10)، Taylor – Lay [1] ، Diestel [2] و [EX] .

ب) في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية (Partial differential equation)

نذكر بشكل خاص، وجود حل أولي لكل مؤثر تفاضلي $P(D)$ ، معاملاته ثابتة، غير منعدمة تماما (مبرهنة Malgrange – Ehrenpreis)؛ انظر مثلا Hörmander [1] ، Yosida [1] ، Rudin [1] ، Treves [2] ، Reed – Simon [1] (جزء 2). في نفس الاتجاه، نورد إثباتا لوجود دالة غرين (Green's function) للابلاسي (Laplacian) بطريقة Garabedian و Lax ؛ انظر Garabedian [1] .

3) الدوال المحدبة.

لقد تطورت كثيرا نظرية الدوال المحدبة و المسائل في الثنوية منذ حوالي ثلاثين سنة؛ انظر Moreau [1] ، Rockafellar [1] ، Ekeland – Temam [1] . من بين التطبيقات نورد ما يلي:

ا) نظرية المباراة Game Theory ، الاقتصاد Economy ، الاستمثال Optimization ، البرمجة المحدبة Convex programming ؛ انظر Aubin [1], [2] ، Karlin [1] ، Balakrishnan [1] ، Barbu – Precupanu [1] ، Moulin – Fogelman [1] ، Stoer – Witzgall [1] .

ب) الميكانيكا؛ انظر Moreau [2] ، Duvaut – Lions [1] ، Germain [1] ، مقال Temam – Strang [1] ، و تعاليق Germain التي تتبع هذا المقال. لاحظ كذلك استعمال الثنوية في مسألة تدخل في نظرية البلازما (انظر Damlamian [1] و المراجع المذكورة فيه).

ج) نظرية المؤثرات الرتيبة Monotone Operators ، و أنصاف الزمر semi – groups غير الخطية nonlinear ، انظر Brézis [1] .

د) المسائل التغيراتية ذات العلاقة بالبحث عن حلول دورية periodic solutions للمنظومات الهاملتونية Hamiltonian system و معادلات الأوتار المهتزة غير الخطية، انظر

الأعمال الحديثة لـ Clarke ، Ekeland ، Lasry ، Brézis ، Coron ، Nirenberg (نورد مثلا Clarke – Ekeland [1] ، Brézis – Coron – Nirenberg [1] و المراجع المذكورة في هذه المقالات).

4) **تمديد مؤثرات خطية مستمرة.** ـ ليكن E و F فضاءي بناخ. ليكن $G \subset E$ فضاء جزئيا متجهيا مغلقا و ليكن $g : G \to F$ مؤثرا خطيا Linear Operator مستمرا. يمكن أن نتساءل حول ما إذا كان يوجد مؤثر خطي مستمر $f : E \to F$ يمدد g . لاحظ أن اللازمة 2.1 تحل المشكلة فقط عندما يكون $F = \mathbb{R}$. يكون الجواب بالإيجاب في بعض الحالات:

ا) إذا كان $\dim F < \infty$ ، يمكننا اختيار قاعدة base في F و تطبيق اللازمة 2.1 على كل إحداثية component لـ g .

ب) إذا كان G يتوفر على مكمل طوبولوجي(انظر فصل 2)؛ و هو الحال مثلا إذا كان $\dim G < \infty$ أو $\mathrm{codim} G < \infty$ ، أو إذا كان E فضاء لهلبرت.

الجواب سالب في أغلب الأحيان، حتى إذا كان E و F فضاءين إنعكاسيين (أنظر [EX]).

طبعا، يمكن كذلك أن نتساءل عن معرفة متى يوجد امتداد f لـ g بحيث $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|g\|_{\mathcal{L}(G,F)}$. هذه مسألة صعبة.