# 10

# المسائل التطويرية: معادلة الحرارة و معادلة الأمواج



## 1.10. معادلة الحرارة: وجود، وحدانية و انتظام

**ترميز.** ـ لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة ذات حد $\Gamma$ . نضع

$$Q = \Omega \times ]0, +\infty[, \qquad \Sigma = \Gamma \times ]0, +\infty[;$$

$\Sigma$ هو الحد الجانبي للأسطوانة $Q$ .

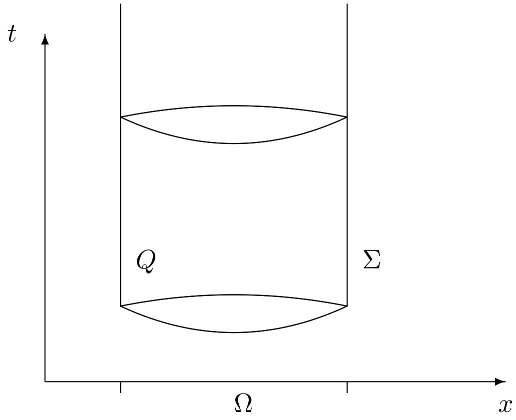
لنعتبر المسألة التالية: أوجد دالة $u(x,t) : \overline{\Omega} \times [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث

(1) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ على $Q$

(2) $\qquad u = 0$ على $\Sigma$

(3) $\qquad u(x,0) = u_0(x)$ على $\Omega$

حيث $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ يعني اللابلاسي Laplacian بالنسبة للمتغيرات الفضائية، $t$ هو المتغير الزمني و $u_0(x)$ هي دالة معطاة.




المعادلة (1) تسمى معادلة الحرارة لأنها نموذج لتوزع الحرارة $u$ على الحيز (مجموعة مفتوحة مترابطة) $\Omega$ في اللحظة $t$ . معادلة الحرارة بأشكالها المختلفة تتدخل في عديد من ظواهر الانتشار[1] diffusion (انظر التعليقات على هذا الفصل). و معادلة الحرارة هي أبسط مثال للمعادلات المكافئية[2] Parabolic equations .

المعادلة (2) تمثل الشروط الحدية لديريكليه؛ يمكن أن تعوض بشروط نيومان

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{على} \quad \Sigma \qquad (2')$$

( $n$ هو متجه الوحدة للناظم الخارجي على $\Gamma$ ) أو أحد الشروط الحدية الأخرى التي تم لقاؤها في الفصلين الثامن و التاسع. فالشرط (2) يدل على تثبيت الحد $\Gamma$ للحيز $\Omega$ على درجة حرارة معدومة ؛ أما الشرط $(2')$ فيدل على أن تدفق الحرارة خلال $\Gamma$ معدوم.

المعادلة (3) هي الشرط الابتدائي أو معطيات كوشي Cauchy data .

سوف نقوم بحل المسألة (1) (2) (3) معتبرين $u(x,t)$ دالة معرفة على المجال $[0,+\infty[$ و ذات قيم في فضاء $H$ ، حيث $H$ هو فضاء دوال مرتبطة بالمتغير $x$ فقط؛ مثلا $H = L^2(\Omega)$ أو $H = H_0^1(\Omega)$ ، إلخ. و هكذا، فإن الرمز $u(t)$ يعني عنصرا من $H$ ، أي الدالة $x \longmapsto u(x,t)$ لـ $t$ مثبتا. هذه الطريقة تمكننا من حل المسألة (1) (2) (3) بسهولة و ذلك بجمع مبرهنة هيل - يوشيدا و نتائج الفصلين الثامن و التاسع.

---

[1] انتشار الحرارة ليس سوى مثال من بين أمثلة كثيرة.

[2] للتعرف على التصنيف الكلاسيكي للمعادلات الجزئية إلى ثلاثة أقسام: إهليلجية elliptic ، زائدية hyperbolic و مكافئية parabolic ، انظر مثلا [1] Courant – Hilbert .

لضبط الأفكار، نفرض خلال كل هذا الفصل أن $\Omega$ من الصنف $C^\infty$ مع $\Gamma$ محدود (و لكن هذه الفرضية يمكن تخفيفها كثيرا إذا انصب اهتمامنا على الحلول الضعيفة).

---

• **مبرهنة** 1.10. ـ **نفرض أن** $u_0 \in L^2(\Omega)$ . **إذن توجد دالة وحيدة** $u(x,t)$ **تحقق** (1) (2) (3) **و**

$$u \in C([0,\infty[; L^2(\Omega)) \frown C(]0,\infty[; H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega)), \tag{4}$$

$$u \in C^1(]0,\infty[; L^2(\Omega)). \tag{5}$$

**بالإضافة إلى ذلك**

$$u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [\epsilon, \infty[) \qquad \forall \epsilon > 0.$$

**و أخيرا** $u \in L^2(0,\infty; H_0^1(\Omega))$ **و لدينا**[3]

$$\frac{1}{2}|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} dt = \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall T > 0.$$

---

إثبات. ـ لنطبق مبرهنة هيل - يوشيدا في الفضاء $H = L^2(\Omega)$ ( و لكن الاختيارات الأخرى ممكنة، انظر مبرهنة 2.10 ).
من أجل هذا الغرض لنعتبر المؤثر غير المحدود $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ المعرف كما يلي

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega) \\ Au = -\triangle u. \end{cases}$$

إنه لمن المهم أن نلاحظ أننا أدمجنا الشروط الحدية (2) في تعريف نطاق $A$ . سوف نتحقق أن $A$ مؤثر رتيب أعظمي و قرين ذاتي. عندها يمكننا تطبيق المبرهنة 7.6 و نستنتج وجود حل وحيد للمسألة (1) (2) (3) (4) (5) .

أ) $A$ مؤثر **رتيب** . لأنه إذا كان $u \in D(A)$ فإن

---

[3] لنوضح الترميز

$$|u(T)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u(x,T)|^2 dx, \qquad |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 dx.$$

$$(Au,u)_{L^2} = \int(-\Delta u)u = \int|\nabla u|^2 \geqslant 0.$$

ب) $A$ مؤثر **رتيب أعظمي** . يكفي لهذا أن نبين أن $R(I+A) = H = L^2$ . و لكن نحن نعرف أن لكل $f \in L^2$ يوجد $u \in H^2 \frown H_0^1$ حل وحيد للمعادلة $u - \Delta u = f$ ؛ هذا ينتج من المبرهنة 25.9 .

جـ) $A$ **قرين ذاتي** . فبفضل القضية 6.7 يكفي أن نتحقق أن $A$ متناظر. و لكن عندما $u, v \in D(A)$ فلدينا

$$(Au,v)_{L^2} = \int(-\Delta u)v = \int \nabla u \nabla v$$
$$(u,Av)_{L^2} = \int u(-\Delta v) = \int \nabla u \nabla v$$

مما يحصل منه أن $(Au,v) = (u,Av)$ .

و من جهة أخرى، نستنتج من المبرهنة 25.9 أن $D(A^l) \subset H^{2l}(\Omega)$ مع تباين مستمر؛ بصورة أدق لدينا

$$\{\ \Gamma \text{ على } \qquad u = \Delta u = ...\Delta^{l-1}u = 0 \qquad ؛\ u \in H^{2l}(\Omega)\ \} \ = \ D(A^l).$$

و نعرف ( مبرهنة 7.7 ) أن الحل $u$ للمسألة (1) (2) (3) ينتمي إلى

$$C^k(]0,+\infty[; D(A^l)), \qquad \forall k, \qquad \forall l$$

و إذن فإن $u \in C^k(]0,+\infty[; H^{2l}(\Omega))$ $\forall k$ ، $\forall l$ . و ينتج من ذلك ( بفضل اللازمة 15.9 ) أن

$$u \in C^k(]0,+\infty[; C^k(\overline{\Omega})), \qquad \forall k.$$

لنثبت (6) ؛ نضرب (1) بـ $u$ و نكامل على $\Omega \times ]0,T[$ . و هنا يجب الحذر لأن $u(t)$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و ليس على $[0,+\infty[$ . لنعتبر الدالة $\varphi(t) = \frac{1}{2}|u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$ ؛ $\varphi$ هي من الصنف $C^1$ على $]0,+\infty[$ ( حسب (5) ) و

$$\varphi'(t) = \Big(u(t), \frac{du}{dt}(t)\Big)_{L^2} = (u, \Delta u)_{L^2} = -\int_\Omega |\nabla u|^2.$$

و منه نستنتج أنه إذا كان $0 < \epsilon < T < \infty$ فإنه لدينا

$$\varphi(T) - \varphi(\epsilon) = \int_\epsilon^T \varphi'(t)dt = -\int_\epsilon^T |\nabla u(t)|^2 dt.$$

فعندما $\epsilon \longrightarrow 0$ ، فإن $\varphi(\epsilon) \longrightarrow \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega)}$ و بالتالي نحصل على (6) .

مقابل شروط إضافية فإن الدالة $u$ تصير أكثر انتظاما بجوار $t=0$ ( نذكر أنه حسب المبرهنة 1.10 لدينا دائما $u \in C^\infty(\overline{\Omega}\times[\epsilon,\infty[)$ $\forall \epsilon > 0$ ). $\square$

---

**مبرهنة** 2.10.

**أ) نفرض أن** $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ **، إذن حل المسألة** (1) (2) (3) **يحقق**

$$u \in C([0,\infty[; H_0^1(\Omega)) \frown L^2(0,\infty; H^2(\Omega))$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega)).$$

**بالإضافة إلى ذلك لدينا**

$$\int_0^T \left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2}|\nabla u(T)|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{2}|\nabla u_0|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{7}$$

**ب) نفرض أن** $u_0 \in H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega)$ **، إذن لدينا**

$$u \in C([0,\infty[; H^2(\Omega)) \frown L^2(0,\infty; H^3(\Omega))$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,\infty; H^1(\Omega)).$$

**جـ) نفرض أن** $u_0 \in H^k(\Omega)$ $\forall k$ **و تحقق علاقات التوافق** Compatibility

$$u_0 = \Delta u_0 = \dots = \Delta^j u_0 = 0 \quad \text{على } \Gamma \quad \forall j \text{ طبيعي،} \tag{8}$$

**إذن** $u \in C^\infty(\overline{\Omega}\times[0,\infty[)$ .

---

إثبات. ـ **أ)** نختار $H_1 = H_0^1(\Omega)$ مزودا بالجداء السلمي

$$(u,v)_{H_1} = \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv.$$

في الفضاء $H_1$ نعتبر المؤثر غير المحدود $A_1 : D(A_1) \subset H_1 \longrightarrow H_1$ المعرف بالآتي

$$\begin{cases} D(A_1) = \{u \in H^3(\Omega) \frown H_0^1(\Omega); \quad \Delta u \in H_0^1(\Omega)\} \\ A_1 u = -\Delta u. \end{cases}$$

لنتحقق أن $A_1$ رتيب أعظمي و قرين ذاتي:

1) $A_1$ **رتيب.** لأنه إذا كانت $u \in D(A_1)$ فإن

$$(A_1u,u)_{H_1} = \int \nabla(-\Delta u)\nabla u + \int(-\Delta u)u = \int |\Delta u|^2 + \int |\nabla u|^2 \geqslant 0.$$

2) $A_1$ **رتيب أعظمي.** نعرف ( من المبرهنة 25.9 ) أنه لكل $f \in H^1(\Omega)$ يوجد $u \in H^3(\Omega) \frown H_0^1(\Omega)$ وحيد حل للمعادلة $u - \Delta u = f$ .
و إذا كان بالإضافة إلى ذلك $f \in H_0^1(\Omega)$ فإن (من المعادلة)

$\Delta u \in H_0^1(\Omega)$ و بالتالي $u \in D(A_1)$ .

3) $A_1$ **متناظر.** إذا كان $u, v \in D(A_1)$ فإن

$$\begin{aligned}(A_1u,v)_{H_1} &= \int \nabla(-\Delta u)\nabla v + \int(-\Delta u)v \\ &= \int \Delta u \Delta v + \int \nabla u \nabla v = (u, A_1v)_{H_1}.\end{aligned}$$

بتطبيق المبرهنة 7.7 نرى أنه إذا كان $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ فإنه يوجد حل $u$ للمسألة (1) (2) (3) (و الذي يطابق الحل الذي وجد بالمبرهنة 1.10 بفضل الوحدانية) بحيث

$$u \in C([0,\infty[; H_0^1(\Omega)).$$

و في الأخير، نضع $\varphi(t) = \frac{1}{2}|\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)}$ . الدالة $\varphi$ من الصنف $C^\infty$ على $]0,\infty[$ و

$$\varphi'(t) = (\nabla u(t), \nabla \frac{du}{dt}(t))_{L^2} = (-\Delta u(t), \frac{du}{dt}(t))_{L^2} = -\Big|\frac{du}{dt}(t)\Big|^2_{L^2}.$$

و منه ينتج أنه إذا كان $0 < \epsilon < T < \infty$ ، فإن

$$\varphi(T) - \varphi(\epsilon) + \int_\epsilon^T \Big|\frac{du}{dt}(t)\Big|^2_{L^2} dt = 0$$

و نستنتج (7) و ذلك بأخذ $\epsilon$ إلى 0 .

**ب)** نقوم الآن بتحليل في الفضاء هلبرت $H_2 = H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega)$ مزودا بالجداء السلمي

$$(u,v)_{H_2} = (\Delta u, \Delta v)_{L^2} + (u,v)_{L^2}.$$

في $H_2$ نعتبر المؤثر غير المحدود $A_2 : D(A_2) \subset H_2 \longrightarrow H_2$ المعرف بالآتي

$$\begin{cases} D(A_2) = \{u \in H^4(\Omega); \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta u \in H_0^1(\Omega)\} \\ A_2u = -\Delta u. \end{cases}$$

يمكننا التحقق بسهولة أن $A_2$ رتيب أعظمي و قرين ذاتي في $H_2$[4] . لنطبق إذن المبرهنة 7.7 على المؤثر $A_2$ في $H_2$ . و في الأخير، نضع $\varphi(t) = \frac{1}{2}|\Delta u(t)|^2_{L^2}$ ؛ الدالة $\varphi$ من الصنف $C^\infty$ على $]0,\infty[$ و لدينا

$$\varphi'(t) = (\Delta u(t), \Delta \frac{du}{dt}(t))_{L^2} = (\Delta u(t), \Delta^2 u(t))_{L^2} = -|\nabla \Delta u(t)|^2_{L^2}.$$

و منه، فإن لكل $0 < \epsilon < T < \infty$

$$\frac{1}{2}|\Delta u(T)|^2_{L^2} - \frac{1}{2}|\Delta u(\epsilon)|^2_{L^2} + \int_\epsilon^T |\nabla \Delta u(t)|^2_{L^2} dt = 0.$$

و في النهاية، عندما يؤول $\epsilon$ إلى $0$ ، نرى أن $u \in L^2(0,\infty; H^3(\Omega))$ و (بفضل المعادلة) فإن $\frac{du}{dt} \in L^2(0,\infty; H^1(\Omega))$ .

جـ) لنعتبر في $H = L^2(\Omega)$ المؤثر $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ المعطى بالآتي

$$\begin{cases} D(A) = H^2(\Omega) \frown H^1_0(\Omega) \\ Au = -\Delta u. \end{cases}$$

نعرف ( المبرهنة 5.7 ) أنه إذا كان $u_0 \in D(A^k)$ ، $k \geqslant 2$ ، فإن

$$u \in C^{k-j}([0,\infty[; D(A^j)) \qquad \forall j = 0, 1, ...k.$$

و لكن الفرضية (8) تعبر تماما عن كون $u_0 \in D(A^k)$ لكل $k \geqslant 1$ . و نتيجة من ذلك لدينا

$$u \in C^{k-j}([0,\infty[; D(A^j)) \qquad \forall k \geqslant 1, \qquad \forall j = 0, 1, ...k.$$

و منه فإن $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty[)$ ( كما هو الحال في إثبات المبرهنة 1.10 ). $\square$

• **ملاحظة** 1. ـ المبرهنة 1.10 تبين أن معادلة الحرارة لها فعل انتظامي قوي على المعطى الابتدائي $u_0$ . نلاحظ أن الحل $u(x,t)$ هو من الصنف $C^\infty$ في $x$ و ذلك لكل $t > 0$ و لو كان $u_0$ غير مستمر. و ينتج منه بالخصوص أن معادلة الحرارة غير قابلة للعكس. فعموما لا نستطيع حل المسألة

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{على} \qquad \Omega \times ]0,T[ \tag{9}$$

[4] بصفة عامة إذا كان $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ رتيبا أعظميا و قرينا ذاتيا فإننا نستطيع تعريف الفضاء لهلبرت $\widetilde{H} = D(A)$ المزود بالجداء السلمي $(u,v)_{\widetilde{H}} = (Au, Av) + (u,v)$ . إذن فالمؤثر $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \subset \widetilde{H} \longrightarrow \widetilde{H}$ المعرف بـ $D(\widetilde{A}) = D(A^2)$ و $\widetilde{A} = A$ هو رتيب أعظمي و قرين ذاتي في $\widetilde{H}$ .

$$u = 0 \qquad \text{على} \qquad \Gamma\times]0,T[ \tag{10}$$

مع معطى نهائي

$$u(x,T) = u_T(x) \qquad \text{على} \qquad \Omega \,\cdot \tag{11}$$

في هذه الحالة يجب لزاما أن يكون

$$u_T \in C^\infty(\overline{\Omega}) \qquad \text{مع} \qquad \Delta^j u_T = 0 \quad \text{على } \Gamma \text{ ،} \qquad \forall j \geqslant 0 \,\cdot$$

و حتى هذا لا يكفي لحل المسألة الرجعية (9) (10) (11) ·
يجب عدم الخلط بين المسألة (9) (10) (11) و المسألة ($9'$) (10) (11) حيث

$$-\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \qquad \text{على} \qquad \Omega\times]0,T[ \tag{9'}$$

و التي تقبل دائما حلا وحيدا لكل $u_T \in L^2(\Omega)$ ( أجري التغيير $t$ إلى $T-t$ و طبق المبرهنة 1.10 )·

**ملاحظة** 2. ـ مقابل بعض التغييرات، فإن النتائج السابقة تبقى صالحة لمسألة كوشي مع شروط نيومان ( انظر [EX] )·

**ملاحظة** 3. ـ عندما تكون $\Omega$ محدودة فإن المسألة (1) (2) (3) يمكن حلها بواسطة التحليل على قاعدة هلبرتية لـ $L^2(\Omega)$ · لهذا الغرض، إنه لمن المناسب اختيار قاعدة $e_i(x))_{i\geqslant 1}$ لـ $L^2(\Omega)$ مكونة من الدوال الذاتية للمؤثر $-\Delta$ مع شروط ديريكليه ( انظر المقطع 8.9 )، أي

$$-\Delta e_i = \lambda_i e_i \quad \text{على } \Omega \text{ ،} \qquad e_i = 0 \quad \text{على } \Gamma \,\cdot$$

نبحث عن حل للمسألة (1) (2) (3) من الشكل[5]

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) e_i(x). \tag{12}$$

[5] لأسباب واضحة هذه الطريقة تسمى أيضا بطريقة " فصل المتغيرات " (أو طريقة فورييه)·

نرى مباشرة أنه لدينا

$$a_i'(t) + \lambda_i a_i(t) = 0 \quad \text{؛} \qquad \text{و منه} \qquad a_i(t) = a_i(0)e^{-\lambda_i t}$$

و الثوابت $a_i(0)$ تتعين من العلاقة

$$u_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)e_i(x). \tag{13}$$

و بمعنى آخر نقول إن حل (1) (2) (3) يعطى بـ

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(0)e^{-\lambda_i t}e_i(x), \tag{14}$$

حيث $a_i(0)$ هي مركبات $u_0$ في القاعدة $(e_i)$ . بخصوص دراسة تقارب السلسلة (14) ( و دراسة انتظام $u$ من خلال (14) )، يمكن الرجوع مثلا إلى Raviart – Thomas [1] أو Weinberger [1] . لاحظ التشابه بين هذه الطريقة و التقنية المستعملة عادة لحل نظم المعادلات التفاضلية الخطية

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + M\vec{u} = 0$$

حيث إن $M$ مصفوفة متناظرة (أو قابلة للقطرنة، إلخ). واضح أن الصعوبة في المسألة (1) (2) (3) تكمن في كوننا هنا يجب أن نحل نظاما ذا بعد لانهائي.

**ملاحظة** 4. ـ علاقات التوافق (8) ليست مفاجأة. فهي شروط لازمة لكي يكون الحل $u$ للمسألة (1) (2) (3) ينتمي إلى $C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty[)$ ( الفرضية $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ و $u_0 = 0$ على $\Gamma$ وحدها لا تكفي !). في الحقيقة، لنفرض أن $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty[)$ تحقق (1) (2) (3) ؛ لدينا

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \ldots = 0 \qquad \forall j \qquad \text{على } \Gamma \times ]0,\infty[$$

و بالاستمرار نصل إلى

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = 0 \qquad \forall j \qquad \text{على } \Gamma \times [0,\infty[ \; . \tag{15}$$

و من جهة أخرى لدينا

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \qquad \text{على } Q$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = \Delta^2 u \qquad \text{على } Q$$
$$\vdots$$
$$\forall j \qquad \frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \qquad \text{على } Q$$

و بالاستمرار نحصل على

$$\frac{\partial^j u}{\partial t^j} = \Delta^j u \qquad \forall j \qquad \text{على } [0,\infty[ \times \overline{\Omega} \cdot \qquad (16)$$

و نستنتج (8) بمقارنة (15) و (16) على $\Gamma \times \{0\}$ ·

**ملاحظة** 5. ـ إنه مفهوم، أننا يمكننا الحصول على ما لانهاية من نتائج الانتظام لـ $u$ بجوار $t = 0$ ، مقابل فرضيات وسطى بين ب) و جـ) للمبرهنة 2.10 ·

## 2.10. مبدأ النهاية العظمى

النتيجة الأساسية هي الآتي:

---

• **مبرهنة** 3.10. ـ **ليكن** $u_0 \in L^2(\Omega)$ **و ليكن** $u$ **حلا للمسألة** (1) (2) (3) · **إذن لدينا**

$$\min\{0, \inf_\Omega u_0\} \leqslant u(x,t) \leqslant \max\{0, \sup_\Omega u_0\} \qquad \forall (x,t) \in Q.$$

---

إثبات· ـ نستعمل طريقة البتر لستامباكيا· ليكن

$$K = \max\{0, \sup_\Omega u_0\} < +\infty \quad \text{فرضا}\cdot$$

لنثبت دالة $G$ كما في إثبات المبرهنة 27.9 و نضع

$$H(s)=\int_0^s G(\sigma)d\sigma, \qquad s\in\mathbb{R}.$$

و أخيرا، نعرف الدالة

$$\varphi(t)=\int_\Omega H(u(x,t)-K)dx.$$

يمكن البرهان بسهولة أن لـ $\varphi$ الخواص الآتية:

$$\varphi\in C([0,\infty[;\mathbb{R}) \text{ ، } \varphi(0)=0 \text{ ، } \varphi\geqslant 0 \text{ على } [0,\infty[ \tag{17}$$

$$\varphi\in C^1(]0,\infty[;\mathbb{R}) \tag{18}$$

و

$$\begin{aligned}\varphi'(t)=\int_\Omega G(u(x,t)-K)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)dx &= \int_\Omega G(u(x,t)-K)\Delta u(x,t)dx\\ &= -\int_\Omega G'(u(x,t)-K)|\nabla u(x,t)|^2dx\leqslant 0\end{aligned}$$

لأن $G(u(x,t)-K)\in H_0^1(\Omega)$ لكل $t>0$ .
و منه نحصل على أن $\varphi'\leqslant 0$ على $]0,\infty[$ و نتيجة من ذلك أن $\varphi\equiv 0$ . إذن، لكل $t>0$ ،
$u(x,t)\leqslant K$ حـ.ت على $\Omega$ . □

---

• **لازمة** 4.10. ـ **ليكن** $u_0\in L^2(\Omega)$ **و ليكن** $u$ **حل المسألة** (1) (2) (3) .
(1) **إذا كان** $u_0\geqslant 0$ **حـ.ت على** $\Omega$ **، فإن** $u\geqslant 0$ **على** $Q$ .
(2) **إذا كان** $u_0\in L^\infty(\Omega)$ **، فإن** $u\in L^\infty(Q)$ **و**

$$\|u\|_{L^\infty(Q)}\leqslant\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{19}$$

---

---

**لازمة** 5.10. ـ **ليكن** $u_0\in C(\overline{\Omega})\cap L^2(\Omega)$ **بحيث إن** $u_0=0$ **على** $\Gamma$[6] .

[6] إذا كانت $\Omega$ غير محدودة فيجب إضافة الفرضية $u_0(x)\longrightarrow 0$ عندما $|x|\longrightarrow\infty$ .

**إذن حل المسألة** $(1)$ $(2)$ $(3)$ **ينتمي إلى** $C(\overline{Q})$ ·

---

إثبات اللازمة 5.10. ـ لتكن $(u_{0n})$ متتالية دوال من $C_c^\infty(\Omega)$ بحيث إن $u_{0n} \longrightarrow u_0$ في $L^\infty(\Omega)$ و في $L^2(\Omega)$ ( لوجود مثل هذه المتتالية، انظر مثلا [EX] ). حسب المبرهنة 2.10 ، الحل $u_n$ للمسألة $(1)$ $(2)$ $(3)$ المتعلق بالمعطى الأول $u_{0n}$ ينتمي إلى $C^\infty(\overline{Q})$ · و من جهة أخرى ( انظر المبرهنة 7.7 ) نعرف أن

$$|u_n(t) - u(t)|_{L^2(\Omega)} \leqslant |u_{0n} - u_0|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall t \geqslant 0.$$

و أخيرا بفضل $(19)$ لدينا

$$\|u_n - u_m\|_{L^\infty(Q)} \leqslant \|u_{0n} - u_{0m}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

و نتيجة لذلك فإن المتتالية $(u_n)$ تتقارب إلى $u$ بانتظام على $\overline{Q}$ ، و منه أن $u \in C(\overline{Q})$ · $\square$

بإمكاننا معالجة مبدأ النهاية العظمى بوجهة نظر مختلفة. لتثبيت الأفكار، لنفرض هنا أن $\Omega$ محدودة. لتكن $u(x,t)$ دالة تحقق[7]

(20) $\qquad u \in C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ مع $T > 0$

(21) $u$ دالة من الصنف $C^1$ بالنسبة للمتغير $t$
و من الصنف $C^2$ بالنسبة للمتغير $x$ على $\Omega \times ]0,T[$

(22) $\qquad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u \leqslant 0$ على $\Omega \times ]0,T[$ ·

---

**مبرهنة** 6.10. ـ **لنقم الشروط** $(20)$ $(21)$ **و** $(22)$ · **إذن**

$$\max_{\overline{\Omega} \times [0,T]} u = \max_P u \tag{23}$$

**حيث** $P = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\Gamma \times [0,T])$ **هي الحدود المكافئية للإسطوانة** $\Omega \times ]0,T[$ ·

---

[7] لاحظ أننا لا نعطي شروط حدية و لا ابتدائية.

إثبات. ــ لنضع $v(x,t)=u(x,t)+\epsilon|x|^2$ مع $\epsilon>0$ بحيث

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v\leqslant -2\epsilon N<0 \qquad \text{على } \Omega\times]0,T[\ . \tag{24}$$

لنبين أن $\max\limits_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v=\max\limits_{P} v$ . لنبرهن بالتناقض و ذلك بفرض أن

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v=v(x_0,t_0) \qquad \text{مع} \qquad (x_0,t_0)\in\overline{\Omega}\times[0,T] \qquad \text{و} \qquad (x_0,t_0)\notin P\ .$$

حيث إن $x_0\in\Omega$ و $0<t_0\leqslant T$ ، لدينا

$$\Delta v(x_0,t_0)\leqslant 0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)\geqslant 0 \tag{26}$$

( لدينا $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)=0$ إذا كان $t_0<T$ و $\frac{\partial v}{\partial t}(x_0,t_0)\geqslant 0$ إذا كان $t_0=T$ )[8] . و بجمع (25) و (26) نحصل على $\left(\frac{\partial v}{\partial t}-\Delta v\right)(x_0,t_0)\geqslant 0$ ، و هذا يناقض (24) . و نتيجة لذلك فإن

$$\max_{\overline{\Omega}\times[0,T]} v=\max_{P} v\leqslant\max_{P} u+\epsilon C \qquad \text{حيث} \qquad C=\sup_{x\in\Omega}|x|^2\ .$$

بما أن $u\leqslant v$ فمنه $\max\limits_{\overline{\Omega}\times[0,T]} u\leqslant\max\limits_{P} u+\epsilon C$ $\forall\epsilon>0$ ؛ و منه نصل إلى (23) . $\square$

## 3.10. معادلة الأمواج

لتكن $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة ذات حد $\Gamma$ . كما سبق نضع $Q=\Omega\times]0,+\infty[$ و $\Sigma=\Gamma\times]0,+\infty[$ . لنعتبر المسألة التالية: أوجد دالة $u(x,t):\overline{\Omega}\times[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ بحيث

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0 \qquad \text{على} \qquad Q \tag{27}$$

[8] حتى نكون أدق يجب العمل في $\Omega\times]0,T'[$ بحيث $T'<T$ . بعد ذلك نجعل $T'$ يؤول إلى $T$ .

$$u = 0 \quad \text{على} \quad \Sigma \tag{28}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{على} \quad \Omega \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x) \quad \text{على} \quad \Omega \tag{30}$$

حيث $\Delta = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ يعني اللابلاسي Laplacian بالنسبة للمتغيرات الفضائية، $t$ هو المتغير الزمني و $u_0$ ، $v_0$ هما دالتان معطاتان.

المعادلة (27) تسمى معادلة الأمواج. المؤثر $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ يرمز له تارة بالرمز $\Box$ ؛ إنه الـ D'Alembertien . معادلة الأمواج هي مثال نموذجي للمعادلات الزائدية.

عندما يكون $N = 1$ ، $\Omega = ]0,1[$ ، فالمعادلة (27) تعطي نموذجا للاهتزازات الصغيرة[9] لوتر غير خاضع لأي تأثير خارجي. لكل $t \geqslant 0$ ، منحنى الدالة $x \in \Omega \longmapsto u(x,t)$ يتطابق مع وضعية الوتر في اللحظة $t$ . عندما $N = 2$ ، فالمعادلة (27) تعطي نموذجا للاهتزازات الصغيرة للوحة مطاطة. لكل $t \geqslant 0$ ، منحنى الدالة $x \in \Omega \longmapsto u(x,t)$ يتطابق مع وضعية اللوحة في اللحظة $t$ . و بصفة عامة، المعادلة (27) تمثل نموذجا لانتقال موجة (صوتية، كهرومغناطيسية، إلخ) في وسط مطاط متجانس $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ .

المعادلة (28) هي الشروط الحدية لديريكليه؛ يمكن أن تعوض بشروط نيومان أو أي شرط من الشروط التي رأيناها في الفصلين الثامن و التاسع. الشرط $u = 0$ على $\Sigma$ يعني أن الوتر (أو اللوحة، إلخ) مثبت على الحد $\Gamma$ ؛ و شرط نيومان يعني أن الوتر حر في نهايته.

المعادلتان (29) و (30) تترجمان الحالة الابتدائية للجملة system ؛ فهي معطيات كوشي؛ الوضعية الابتدائية (و نقول أيضا الانتقال الابتدائي) قد وصفت بـ $u_0(x)$ بينما وصفت السرعة الإبتدائية بـ $v_0(x)$ .

و لتثبيت الأفكار، نفرض في كل ما يلي أن $\Omega$ من الصنف $C^\infty$ و أن $\Gamma$ محدود.

---

• **مبرهنة** 7.10 **(الوجود و الوحدانية). ـ نفرض أن** $u_0 \in H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega)$ **و أن**

[9] المعادلة التامة هي معادلة غير خطية و هي صعبة الحل؛ المعادلة (27) تمثل صيغة خطية Linearization بجوار وضعية توازن.

$v_0 \in H_0^1(\Omega)$ ، **إذن يوجد حل وحيد للمسألة** (27) (28) (29) (30) **بحيث**

$$u \in C([0,\infty[; H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega)) \frown C^1([0,\infty[; H_0^1(\Omega)) \frown C^2([0,\infty[; L^2(\Omega)). \tag{31}$$

**بالإضافة إلى ذلك لدينا**[10]

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = |v_0|^2_{L^2(\Omega)} + |\nabla u_0|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{32}$$

---

**ملاحظة** 6. ـ العلاقة (32) هي قانون المحافظة Conservation law و الذي يعبر عن أن الطاقة تبقى ثابتة خلال الزمن.

لنضف هنا نتيجة انتظام:

---

**مبرهنة** 8.10 **(انتظام). ـ نفرض أن المعطيات الأولية تحقق**

$$u_0 \in H^k(\Omega), \qquad v_0 \in H^k(\Omega) \qquad \forall k$$

**و كذلك علاقات التوافق**

$u_0 = \Delta u_0 = \dots = \Delta^j u_0 = \dots = 0$ **على** $\Gamma$ $\forall j$ **طبيعي**

$v_0 = \Delta v_0 = \dots = \Delta^j v_0 = \dots = 0$ **على** $\Gamma$ $\forall j$ **طبيعي.**

**إذن حل المسألة** (27) (28) (29) (30) **ينتمي إلى** $C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty[)$ ·

---

إثبات المبرهنة 7.10 . ـ كما هو في المقطع 1.10 ، نعتبر $u(x,t)$ كدالة معرفة على $[0,\infty[$ و ذات قيم في فضاء متجهي؛ و بمعنى أدق فإن لكل $t \geqslant 0$ مثبت $u(t)$ يعني التطبيق $x \longmapsto u(x,t)$ . لنكتب المعادلة (27) على شكل نظام من الرتبة الأولى[11] :

[10] لنوضح الترميز

$$\left|\frac{\partial u}{\partial t}(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx, \qquad |\nabla u(t)|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,t)\right|^2 dx.$$

[11] هذه هي الطريقة المعتادة و التي تتكون من كتابة معادلة تفاضلية من الدرجة $k$ في $t$ على شكل جملة معادلات من الرتبة الأولى.

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - v = 0 & \text{على } Q \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{على } Q \end{array}\right\} \qquad (33)$$

و نضع $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ حتى يصبح (33)

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \qquad (34)$$

مع

$$AU = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \end{pmatrix}. \qquad (35)$$

لنطبق نظرية هيل - يوشيدا في الفضاء $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ المزود بالجداء السلمي

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 dx + \int_\Omega u_1 u_2 dx + \int_\Omega v_1 v_2 dx$$

حيث

$$U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \qquad \text{و} \qquad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

لنعتبر المؤثر غير المحدود $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ المعرف بـ (35) مع

$$D(A) = (H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega).$$

لاحظ أن الشروط الحدية (28) قد أدمجت في الفضاء $H$ . لاحظ أيضا أنه بفضل (28) لدينا تلقائيا $v = \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ على $\Sigma$ .

لنتحقق أن $A + I$ رتيب أعظمي في $H$ .

(1) $A + I$ **رتيب** ؛ و ذلك إذا كان $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$ فإنه لدينا

$$\begin{aligned} (AU, U)_H + |U|_H^2 &= -\int \nabla u \nabla v - \int uv + \int (-\Delta u) v + \int u^2 + \int |\nabla u|^2 + \int v^2 \\ &= -\int uv + \int u^2 + \int v^2 + \int |\nabla u|^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

(2) $A+I$ **رتيب أعظمي**. يكفي لهذا البرهنة بأن $A+2I$ غامر. ليعطى $F=\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}\in H$ ، يجب إذن حل المعادلة $AU+2U=F$ ، أي النظام

$$\left.\begin{array}{ll} -v+2u=f & \text{على } \Omega \\ -\Delta u+2v=g & \text{على } \Omega \end{array}\right\} \qquad (36)$$

بحيث إن

$u\in H^2(\Omega)\frown H_0^1(\Omega)$ ، و $v\in H_0^1(\Omega)$ .

لنصل من (36) إلى

$$-\Delta u+4u=2f+g. \qquad (37)$$

و لكن (37) تقبل حلا وحيدا $u\in H^2(\Omega)\frown H_0^1(\Omega)$ ( انظر المبرهنة 25.9 ). و بعدها نحصل على $v\in H_0^1(\Omega)$ و ذلك بوضع $v=2u-f$ ؛ و هذا يحل (36) .

بتطبيق مبرهنة هيل - يوشيدا ( مبرهنة 4.7 ) و الملاحظة 7.7 نرى أنه يوجد حل وحيد للمسألة

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dU}{dt}+AU=0 & \text{على } [0,\infty[ \\ U(0)=U_0 \text{ ،} & \end{array}\right\} \qquad (38)$$

مع

$$U\in C^1([0,\infty[;H)\frown C([0,\infty[;D(A)) \qquad (39)$$

بما أن $U_0=\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\in D(A)$ . و بترجمة (39) نحصل على (31) .

لإثبات (32) يكفي أن نضرب (27) بـ $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ و نكامل على $\Omega$ . لاحظ أنه لدينا

$$\int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial t}dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx$$

و

$$\int_\Omega(-\Delta u)\frac{\partial u}{\partial t}dx=\int_\Omega \nabla u\frac{\partial}{\partial t}(\nabla u)dx=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

□

**ملاحظة** 7. ـ عندما تكون $\Omega$ محدودة، يمكننا استعمال الجداء السلمي $\int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2$ على $H_0^1(\Omega)$ ( انظر اللازمة 19.9 ) و على $H = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ يمكن استعمال

$$(U_1, U_2) = \int_\Omega \nabla u_1 \nabla u_2 + \int_\Omega v_1 v_2 \quad \text{حيث} \quad U_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad U_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

مع هذا الجداء السلمي لدينا

$$(AU, U) = -\int_\Omega \nabla v \nabla u + \int_\Omega (-\Delta u) v = 0 \qquad \forall U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A).$$

يمكن التحقق بسهولة ( انظر [EX] ) أنه

1) $A$ و $-A$ رتيبان أعظميان.

2) $A^* = -A$ .

إذن، نستطيع حل المسألة

$$\frac{dU}{dt} - AU = 0 \qquad \text{على} \qquad [0, +\infty[ \text{ ،} \qquad U(0) = U_0$$

و أيضا[12]

$$\frac{dU}{dt} + AU = 0 \qquad \text{على} \qquad ]-\infty, 0] \text{ ،} \qquad U(0) = U_0 \text{ .}$$

و نحصل أخيرا على أن (32) تكتب بالشكل

$$|U(t)|_H = |U_0|_H \qquad \forall t \in \mathbb{R};$$

نقول إن العائلة $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ هي زمرة تقايسات على $H$ .

• **ملاحظة** 8. ـ إن معادلة الأمواج ليس لها أي تأثير على تنظيم أو زيادة ملوسة المعطيات الابتدائية ـ على عكس معادلة الحرارة. و للاقتناع يمكن اعتبار الحالة $\Omega = \mathbb{R}$ . فالمسألة (27) (28) (29) (30) تقبل حلا صريحا سهلا جدا:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} v_0(s)ds. \tag{40}$$

و في الحالة الخاصة $v_0 = 0$ ، لدينا

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)].$$

[12] بمعنى آخر نقول أن الزمن له خاصية عكسية؛ لاحظ الاختلاف مع معادلة الحرارة.

إنه واضح أن $u$ ليس أملس من $u_0$ ، و يمكن أن نوضح ؛ لنفرض أن $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{x_0\})$ ، إذن $u(x,t)$ هو $C^\infty$ على $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ماعدا المستقيمين $x + t = x_0$ و $x - t = x_0$ ؛ و هما الميزتان المنطلقتان من النقطة $(x_0, 0)$ ، إن الشذوذ يتنقل على الميزات.

**ملاحظة** 9. ـ عندما تكون $\Omega$ محدودة فإنه يمكن حل المسألة (27) (28) (29) (30) ـ كما هو الحال في معادلة الحرارة ـ و ذلك بالتحليل على قاعدة هلبرتية. نختار لهذا قاعدة $(e_i(x))$ في $L^2(\Omega)$ مكونة من الدوال الذاتية للمؤثر $-\Delta$ مع شروط ديريكليه؛ أي $-\Delta e_i = \lambda_i e_i$ على $\Omega$ و $e_i = 0$ على $\Gamma$ ( لاحظ أن $\lambda_i > 0$ ). نبحث عن حل للمسألة (27) (28) (29) (30) من الشكل

$$u(x,t) = \sum_i a_i(t) e_i(x). \tag{41}$$

نرى مباشرة أنه لدينا لزوما:

$$a_i''(t) + \lambda_i a_i(t) = 0;$$

حيث

$$a_i(t) = a_i(0)\cos(\sqrt{\lambda_i}t) + \frac{a_i'(0)}{\sqrt{\lambda_i}}\sin(\sqrt{\lambda_i}t).$$

فالثوابت $a_i(0)$ و $a_i'(0)$ تعين بالعلاقات

$$u_0(x) = \sum_i a_i(0)e_i(x) \qquad \text{و} \qquad v_0(x) = \sum_i a_i'(0)e_i(x) \text{ ؛}$$

بعبارة أخرى، هي مركبات $u_0$ و $v_0$ في القاعدة $(e_i)$ ، و لدراسة تقارب السلسلة (41) ، انظر مثلا Raviart – Thomas [1] أو Weinberger [1] .

<u>إثبات المبرهنة 8.10</u> ـ لنأخذ من جديد الترميز المستعمل في إثبات المبرهنة 7.10 ، يمكن التحقق بسهولة و ذلك بالاستقراء على $k$ أن

$$D(A^k) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in H^{k+1}(\Omega) \text{ و } \Delta^j u = 0 \text{ على } \Gamma \quad \forall\ 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{k}{2}\right] \\[2ex] v \in H^k(\Omega) \text{ و } \Delta^j v = 0 \text{ على } \Gamma \quad \forall\ 0 \leqslant j \leqslant \left[\frac{k+1}{2}\right] - 1 \end{array} \right\}.$$

و بالخصوص، $D(A^k) \subset H^{k+1}(\Omega) \times H^k(\Omega)$ مع تباين مستمر. لنطبق المبرهنة 5.7 و سنرى أن $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D(A^k)$ ، $U_0 =$ إذن الحل $U$ لـ (38) يحقق

$$U \in C^{k-j}([0,\infty[; D(A^j)) \qquad \forall j = 0, 1, ...k;$$

و نستنتج أخيرا، و ذلك بمساعدة المقدمة في اللازمة 15.9 ، أنه تحت فرضيات المبرهنة 8.10 ( أي $\forall k \ U_0 \in D(A^k)$ ) فإن $\forall k \ \ u \in C^k(\overline{\Omega} \times [0,\infty[)$ . $\square$

**ملاحظة** 10. ـ علاقات التوافق المقدمة في المبرهنة 8.10 هي لازمة و كافية لكي يصبح حل المسألة (27) (28) (29) (30) في $C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,\infty[)$ ( نفس التحليل كما في الملاحظة 4 ).

**ملاحظة** 11. ـ إن التقنيات المستعملة في المقطع 3.10 تبقى صالحة لمعادلة Klein – Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = 0 \qquad \text{على } Q \qquad \text{مع} \qquad m \in \mathbb{R} \text{ ، } m \neq 0 \text{ .} \tag{27}$$

لاحظ أنه لا يمكن الوصول إلى (27) بإجراء التحويل $v(x,t) = e^{\lambda t} u(x,t)$ .

# تعاليق حول الفصل العاشر

## تعاليق حول معادلة الحرارة

### 1) **مبرهنة** J.L.Lions

النتيجة الآتية تمكننا من الحصول، في إطار مجرد و عام، على الوجود و الوحدانية لحل ضعيف للمسائل المكافئية. هذه المبرهنة تلعب دورا مقارنا لمبرهنة لاكس - ملغرام للمسائل الإهليلجية. ليكن $H$ فضاء هلبرت مزودا بالجداء السلمي $( \, , \, )$ و النظيم $| \ |$ . لنطابق $H$ بفضائه الثنوي. ليكن $V$ فضاء هلبرت آخر مزودا بالنظيم $\| \ \|$ . لنفرض أن $V \subset H$ مع تباين مستمر و متراص، بحيث

$$V \subset H \subset V'.$$

( انظر الملاحظة 1.5 ).

ليكن $T > 0$ مثبتا؛ تقريبا لكل $t \in [0,T]$ نعطى شكلا ثنائي الخطية $a(t;u,v) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ محققا الخواص:

(1) الدالة $t \longmapsto a(t;u,v)$ قيوسة $\forall u,v$ ،

(2) $|a(t;u,v)| \leqslant M\|u\|\|v\|$ حـ. ت $t \in [0,T]$ ، $\forall u,v \in V$ ،

(3) $a(t;u,v) \geqslant \alpha\|v\|^2 - C|v|^2$ حـ. ت $t \in [0,T]$ ، $\forall u,v \in V$ .

حيث $\alpha > 0$ ، $M$ و $C$ ثوابت.

---

**مبرهنة** 9.10 ( J.L.Lions ). ـ **تعطى** $f \in L^2(0,T;V')$ **و** $u_0 \in H$ ، **توجد دالة وحيدة** $u$ **بحيث**

$$\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;V') \quad \text{و} \quad u \in L^2(0,T;V) \frown C([0,T];H)$$

$$\left.\begin{array}{ll} <\dfrac{du}{dt}(t),v> +a(t;u(t),v) =< f(t),v> & \text{حـ. ت } t \in [0,T] \text{ ، } \forall v \in V \\ u(0) = u_0 \text{ .} & \end{array}\right\}$$

---

للبرهان، انظر Lions – Magenes [1] أو [EX] .

**تطبيق:** $H = L^2(\Omega)$ ، $V = H_0^1(\Omega)$

$$a(t;u,v) = \sum_{i,j}\int_\Omega a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx + \sum_i\int_\Omega a_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Omega a_0(x,t)uvdx$$

مع $a_{ij}, a_i, a_0 \in L^\infty(\Omega\times]0,T[)$ و

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 \quad \text{حـ. ت } (x,t) \in \Omega\times]0,T[ \text{ ، } \forall\xi \in \mathbb{R}^N \text{ ، } \alpha > 0 \text{ .} \qquad (42)$$

و بالتالي نحصل على حل ضعيف للمسألة

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \sum_i a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f & \text{على } \Omega\times]0,T[ \\ u = 0 & \text{على } \Gamma\times]0,T[ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{على } \Omega \text{ .} \end{array}\right\} \qquad (43)$$

بفضل فرضيات إضافية على المعطيات الابتدائية، فإن حل (43) سوف يكون أكثر انتظاما؛ انظر التعليقات الآتية.

### 2) الانتظام $C^\infty$ .

لنفرض أن $\Omega$ محدودة و من الصنف $C^\infty$ . لتكن $a_{ij}, a_i, a_0 \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ محققة (42).

---

**مبرهنة** 10.10. **ــ نفرض أن** $u_0 \in L^2(\Omega)$ **و أن** $f \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ . **إذن الحل** $u$ **للمسألة** (43) **ينتمي إلى** $C^\infty(\overline{\Omega} \times [\epsilon,T])$ **لكل** $\epsilon > 0$ .
**إذا كان بالإضافة إلى ذلك** $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ، **و** $\{f, u_0\}$ **تحقق بعض علاقات التوافق**[13] **على** $\Gamma \times \{0\}$ ، **فإن** $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ .

---

بالنسبة للإثبات، انظر Lions – Magenes [1] ، Friedman [1], [2] ، Ladyzhenskaya – Solonnikov – Uraltseva [1] و [EX] ؛ و هو يعتمد على تقنيات التقديرات المشابهة جدا إلى تلك التي طورت في الفصل السابع و المقطع 1.10 .

نشير إلى أنه توجد نظرية مجردة تعمم نظرية هيل - يوشيدا إلى المعادلات من الشكل $\frac{du}{dt} + A(t)u(t) = f(t)$ ، حيث، لكل $t \in [0,T]$ ، يكون $A(t)$ رتيبا أعظميا. هذه النظرية طورت بواسطة Kato ، Tanabe ، Sobolevski و آخرين؛ و هي تقنيا أكثر تعقيدا و أقل سهولة للتعامل من نظرية هيل - يوشيدا، انظر Friedman [2] ، Tanabe [1] ، Yosida [1] .

### 3) الانتظام $L^p$ و $C^{0,\alpha}$ .

لنعتبر المسألة[14]

---

[13] لن نشرح هذه العلاقات؛ إنها تعميم طبيعي للعلاقة (8) ( انظر أيضا الملاحظة 4 ).

[14] مفهوم أنه يمكننا أن نعطي شرطا حديا غير متجانس $u(x,t) = g(x,t)$ على $\Gamma \times ]0,T[$ و لكن للاختصار سوف نقتصر على الحالة $g = 0$ .

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{على } \Omega\times]0,T[ \\ u = 0 & \text{على } \Gamma\times]0,T[ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{على } \Omega \cdot \end{array}\right\} \qquad (44)$$

لتثبيت الأفكار، نفرض أن $\Omega$ محدودة من الصنف $C^\infty$ · لنبدأ بهذه المسألة البسيطة·

---

**مبرهنة** 11.10 **( الانتظام** $L^2$ **)· ـ تعطى** $f \in L^2(\Omega\times]0,T[)$ **و** $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ **، يوجد حل وحيد** $u$ **لـ** (44) **بحيث**

$$u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \frown L^2(0,T; H^2(\Omega) \frown H_0^1(\Omega))$$

**و**

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

---

الإثبات سهل؛ انظر [1] Lions – Magenes أو [EX] · و أعم من ذلك، في الفضاء $L^p$ ، لدينا

---

**مبرهنة** 12.10 **( الانتظام** $L^p$ **)· ـ تعطى** $f \in L^p(\Omega\times]0,T[)$ **مع** $1 < p < \infty$ **و** $u_0 = 0$ [15] **يوجد حل وحيد** $u$ **لـ** (44) **بحيث**

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^p(\Omega\times]0,T[) \qquad \forall i, j.$$

---

**مبرهنة** 13.10 **(الانتظام الهولدري)· ـ ليكن** $0 < \alpha < 1$ · **لنفرض أن**

---

[15] للاختصار فقط

[16] أي $|f(x_1,t_1) - f(x_2,t_2)| \leqslant C(|x_1 - x_2|^2 + |t_1 - t_2|)^{\alpha/2}$ $\quad \forall x_1, x_2, t_1, t_2$ ·

**و** $^{16}f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [0,T])$ و $u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ **يحققان علاقات التوافق الطبيعية**

$$u_0 = 0 \quad \text{على } \Gamma \qquad \text{و} \qquad -\Delta u_0 = f(x,0) \quad \text{على } \Gamma \cdot$$

**إذن** (44) **تقبل حلا وحيدا بحيث إن**

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \frac{\partial u}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [0,T]) \qquad \forall i,j.$$

---

إن إثبات المبرهنتين 12.10 و 13.10 دقيق ( ماعدا للحالة $p = 2$ في المبرهنة 12.10 ). كما هو في الحالة الإهليلجية (انظر التعاليق حول الفصل التاسع) نستعمل:

أ) صيغة تمثيل صريحة للحل $u$ بواسطة الحل الأساسي للمؤثر $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ ؛ مثلا إذا كان $\Omega = \mathbb{R}^N$ و إذا كان $f = 0$ فإن

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} E(x-y,t)u_0(y)dy = E * u_0 \tag{45}$$

( $*$ يرمز إلى الملفوف فقط بالنسبة للمتغير $x$ ) حيث $E(x,t) = (4\pi t)^{-N/2}e^{-|x|^2/4t}$ ، انظر مثلا Folland [1] .

ب) تقنية التكاملات الشاذة.
انظر Ladyzhenskaya – Solonnikov – Uraltseva [1] و Friedman [1] . بالنسبة للمبرهنة 12.10 ، انظر أيضا Grisvard [1] ( مقطع 9 ) و Stroock – Varadhan [1] ؛ Brandt [2] ( انظر أيضا Knerr [1] ) يقدم برهانا سهلا للانتظام الهولدري " بداخل " $\Omega\times]0,T[$ ( و هي نتيجة جزئية للمبرهنة 13.10 ).

و بفضل فرضيات إضافية على تفاضل $f$ نحصل على انتظام إضافي للحل $u$ . نحفظ " العبرة " الآتية: عموما، إذا كان $u_0 = 0$ ، فإن الأمور تسير كما لو أن $\frac{\partial u}{\partial t}$ و $\Delta u$ يمتلكان بصفة مستقلة نفس انتظام $f$ .

أخيرا نلفت النظر إلى أن نتائج المبرهنات 11.10 ، 12.10 و 13.10 تبقى صالحة إذا عوضنا $\Delta$ بـ

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u$$

حيث إن المعاملات منتظمة و تحقق

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2 \qquad \forall x,t \text{ ،} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^N \text{ ،} \qquad \nu > 0 \text{ .} \tag{46}$$

بالنسبة لحالة المعاملات غير المنتظمة ( $a_{ij} \in L^\infty(\Omega\times]0,T[)$ ) و التي تحقق (46) ، فإن مبرهنة صعبة من طرف Nash – Moser تؤكد وجود $\alpha > 0$ بحيث إن $u \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [0,T])$ ؛ انظر [1] Ladyzhenskaya – Solonnikov – Uraltseva .

## 4) مثال للمعادلات المكافئية.

نلتقي بمعادلات (و جمل) مكافئية خطية و غير خطية في مجالات عديدة: الميكانيكا، الفيزياء، الكيمياء، الأحياء، التحكم الأمثل Optimal Control ، الاحتمالات، إلخ. نشير بالمناسبة إلى:

أ) نظام Navier – Stokes

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \Delta u_i + \displaystyle\sum_{j=1}^{N} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} & \text{على } \Omega\times]0,T[ \text{ ،} \quad 1 \leqslant i \leqslant N \\
divu = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 & \text{على } \Omega\times]0,T[ \\
u = 0 & \text{على } \Gamma\times]0,T[ \\
u(x,0) = u_0(x) & \text{على } \Omega \text{ ،}
\end{array}\right\}$$

الذي يلعب دورا أساسيا في ميكانيكا الموائع، انظر [1] Temam و المراجع المذكورة.

ب) أنظمة التفاعل و الانتشار Reaction – diffusion system . و هي المعادلات (و كذلك الأنظمة) المكافئية غير الخطية من الشكل

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} - M\Delta\vec{u} = f(\vec{u}) & \text{على } \Omega\times]0,T[ \\
+ \text{ شروط حدية و معطيات ابتدائية} &
\end{array}\right\}$$

حيث $\vec{u}(x,t)$ هو متجه من $m$ مركبة، $M$ هي مصفوفة قطرية $m \times m$ و $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ هو تطبيق غير خطي. هذه المعادلات تنمذج ظواهر تبدو في مجالات مختلفة: الكيمياء، البيولوجيا، الفيزيولوجيا العصبية، دراسة الأوبئة، الاحتراق، علم الوراثة، إلخ. انظر [1] Fife و العدد الكبير من المراجع المذكورة.

جـ) المسائل ذات الحد الحر. فمثلا مسألة Stefan التي تصف تطور خليط ماء ـ ثلج؛ انظر عرض Magenes [1] (الذي يحوي عدة مراجع)، المسائل ذات الحد الحر Free Boundary Problems [1] [2] ، المسائل ذات الحد المتحرك Moving Boundary Problems [1] (و المراجع المذكورة).

د) معادلات الانتشار تتدخل في نظرية الاحتمالات (الحركة البراونية Brownian motion ، عمليات Markov ، عملية الانتشار Diffusion Process ، المعادلات التفاضلية الطورية Stochastic differential equation ، إلخ)؛ انظر Stroock – Varadhan [1] .

هـ) لأمثلة أخرى من المسائل المكافئية غير الخطية انظر D.Henry [1] ، Bénilan – Crandall – Pazy [1] و H.Brézis [2] .

و) نشير أخيرا إلى استعمال أصيل لمعادلة الحرارة في نظرية الأدلة و المؤشرات Index Theory لـ Atiyah – Singer ، انظر Gilkey [1] .

5) لخواص أخرى متعلقة بمبدأ الأعظمية، انظر Friedman [1] ، Protter – Weinberger [1] ، Sperb [1] . مثلا نبين أنه إذا كانت $u$ حلا للمسألة (1) (2) (3) مع $u_0 \geqslant 0$ و $u_0 \not\equiv 0$ فإن $u(x,t) > 0$ ، $\forall x \in \Omega$ ، $\forall t > 0$ . عندما يكون $\Omega = \mathbb{R}^N$ فإن هذه الخاصية واضحة و ذلك من خلال العلاقة (45) التي تعطي تمثيلا صريحا للحل.

## تعاليق حول معادلة الأمواج

### 6) الحلول الضعيفة لمعادلة الأمواج

يمكننا إثبات الوجود و الوحدانية لحل ضعيف لمعادلة الأمواج ( ذات طرف ثاني $f$ ) و ذلك ضمن إطار مجرد عام. ليكن $V$ و $H$ فضاءي هلبرت بحيث $V \subset H \subset V'$ ( انظر التعليق 1 ). ليكن $T > 0$ ؛ لكل $t \in [0,T]$ نعطى شكل ثنائي الخطية مستمر و متناظر $a(t;u,v) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ بحيث

(1) الدالة $t \longmapsto a(t;u,v)$ من الرتبة $C^1$ ، $\forall u,v \in V$ ،
(2) $a(t;v,v) \geqslant \alpha\|v\|^2 - C|v|^2$ ، $\forall t\in[0,T]$ ، $\forall v \in V$ ، $\alpha > 0$ .

---

**مبرهنة** 14.10 ( J.L.Lions ) . ـ **تعطى** $f \in L^2(0,T;H)$ ، $u_0 \in V$ ، $v_0 \in H$ ، **توجد دالة وحيدة** $u$ **بحيث**

$$u \in C([0,T];V)\ ,\quad \frac{du}{dt} \in C([0,T];H)\ ,\quad \frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(0,T;V')$$

$$< \frac{d^2u}{dt^2}(t), v > +a(t;u(t),v) =< f(t),v > \quad \text{ح.ت } t\in[0,T]\ ,\ \forall v \in V$$

$$u(0)=u_0\ ,\quad \frac{du}{dt}(0)=v_0\ .$$

---

من أجل إثبات المبرهنة 14.10 ، انظر [1] Lions – Magenes .

**تطبيق:** $V=H_0^1(\Omega)$ ، $H=L^2(\Omega)$

$$a(t;u,v)=\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}dx+\int_\Omega a_0(x,t)uvdx$$

مع (42) و

$$a_{ij},\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t},\ a_0,\ \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \in L^\infty(\Omega\times]0,T[),\qquad a_{ij}=a_{ji},\qquad \forall i,j.$$

نحصل إذن على حل ضعيف للمسألة

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\displaystyle\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)+a_0u=f \quad \text{على } \Omega\times]0,T[\\ (28)\ (29)\ (30)\ .\end{array}\right\}$$

نشير أن الشروط على المعطيات الابتدائية ( $u_0\in H_0^1(\Omega)$ و $v_0 \in L^2(\Omega)$ ) هنا أضعف مما هي عليه في المبرهنة 7.10 . و بفضل فرضيات إضافية على $f$ ، $u_0$ و $v_0$ (انتظام و علاقات توافق) و كذلك على $a_{ij}$ ، $a_0$ نحصل على $u$ أكثر انتظاما، انظر [1] Lions – Magenes .

7) نظرية $L^p$ لمعادلة الأمواج دقيقة و لازالت غير معروفة كثيرا.

## 8) مبدأ النهاية العظمى

بعض الأشكال الخاصة جدا بمبدأ النهاية العظمى صالحة. انظر Protter – Weinberger [1] . مثلا، ليكن $u$ حلا للمسألة (27) (28) (29) (30) .

(أ) إذا كان $\Omega = \mathbb{R}$ ، $u_0 \geqslant 0$ ، $v_0 \geqslant 0$ فإن $u \geqslant 0$

(ب) إذا كان $\Omega = \mathbb{R}^2$ ، $u_0 = 0$ ، $v_0 \geqslant 0$ فإن $u \geqslant 0$ .

النقطة (أ) ناتجة من العلاقة (40) التي تعطي تمثيلا صريحا للحل. و هناك علاقة مشابهة و لكنها معقدة، صالحة لـ $\Omega = \mathbb{R}^N$ ؛ انظر مثلا Mizohata [1] ، Folland [1] ، Weinberger [1] ، Courant – Hilbert [1] ، Mikhlin [1] و [EX] . يمكننا منها استنتاج (ب).

و على العكس نلفت النظر إلى النقاط التالية ( انظر [EX] ):

(جـ) إذا كان $\Omega = ]0,1[$ ، فإن $u_0 \geqslant 0$ و $v_0 = 0$ لا تستلزم $u \geqslant 0$

(د) إذا كان $\Omega = \mathbb{R}^2$ ، فإن $u_0 \geqslant 0$ و $v_0 = 0$ لا تستلزم $u \geqslant 0$ .

## 9) مجال الارتباط. انتشار الأمواج. مبدأ Huygens

يوجد فرق أساسي بين معادلة الحرارة و معادلة الأمواج:

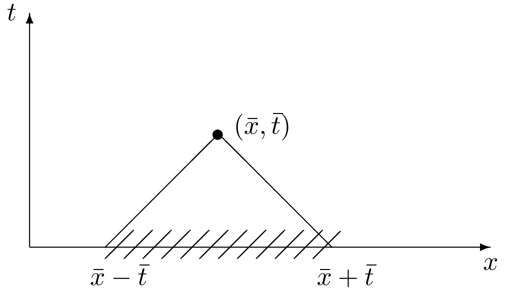
أ) بالنسبة لمعادلة الحرارة، إن تأثير أي تغير طفيف (تشويش) ابتدائي يشعر به آنيا و في كل مكان، أي أن $\forall x \in \Omega$ ، $\forall t > 0$ . فمثلا لقد رأينا أنه إذا كان $u_0 \geqslant 0$ و $u_0 \not\equiv 0$ ، فإن $u(x,t) > 0$ ، $\forall x \in \Omega$ ، $\forall t > 0$ . نقول إن الحرارة تنتشر بسرعة لانهائية[17] .

ب) بالنسبة لمعادلة الأمواج لدينا ظاهرة مختلفة تماما. لنعتبر مثلا الحالة $\Omega = \mathbb{R}$ . الصيغة الصريحة (40) تبين أن $u(\bar{x},\bar{t})$ يرتبط فقط بقيم $u_0$ و $v_0$ في المجال $[\bar{x}-\bar{t}, \bar{x}+\bar{t}]$ .

نقول إن المجال $[\bar{x}-\bar{t}, \bar{x}+\bar{t}]$ على محور $x$ هو مجال ارتباط النقطة $(\bar{x},\bar{t})$ .

نفس الخاصية أيضا صحيحة عندما $\Omega = \mathbb{R}^N$ ( مع $N \geqslant 2$ ): $u(\bar{x},\bar{t})$ تتعلق فقط بقيم $u_0$ و $v_0$ في الكرة $\{x \in \mathbb{R}^N ; |x-\bar{x}| \leqslant \bar{t}\}$ . هذه الكرة ( في فوق المستو $\mathbb{R}^N \times \{0\}$ ) تسمى كرة الارتباط للنقطة $(\bar{x},\bar{t})$ ؛ هندسيا هي تقاطع المخروط

[17] فيزيائيا، هذا غير واقعي! و على كل فإن صيغة التمثيل (45) تبين أن أي تشويش ابتدائي محلي عند $x_0$ له تأثير مهمل عند النقطة $(x,t)$ إذا كان $t$ صغيرا و $|x-x_0|$ كبيرا.




$$\{\ (x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\ ;\quad |x-\bar{x}|\leqslant\bar{t}-t\quad \text{و}\quad t\leqslant\bar{t}\ \}$$

مع الفوق مستو $\mathbb{R}^N\times\{0\}$ . هذه الخاصية تفسر فيزيائيا كالآتي: الأمواج تنتشر بسرعة تساوي على الأكثر 1[18] فالإشارة المحصورة في المجال $D$ عند اللحظة $t=0$[19] تؤثر على النقطة $x\in\mathbb{R}^N$ فقط ابتداء من الزمن $t\geqslant dist(x,D)$ ( في الأزمنة $t<dist(x,D)$ لدينا $u(x,t)=0$ ).

عندما يكون $N>1$ فرديا ـ مثلا $N=3$ ـ لدينا خاصية مفاجئة: $u(\bar{x},\bar{t})$ ترتبط فقط بقيم $u_0$ و $v_0$[20] على حدود الكرة $\{x\in\mathbb{R}^N;|x-\bar{x}|=\bar{t}\}$ . هذا مبدأ Huygens . فيزيائيا يعبر على أن إشارة محصورة في $D$ عند اللحظة $t=0$ تكون قابلة للملاحظة عند النقطة $x\in\mathbb{R}^N$ فقط عند الفترة الزمنية $[t_1,t_2]$ حيث إن $t_1=\inf\limits_{y\in D}d(x,y)$ و $t_2=\sup\limits_{y\in D}d(x,y)$ . بعد اللحظة $t_2$ يتوقف تأثير الإشارة على النقطة $x$ .

و على العكس في البعد $N$ زوجي ( مثلا $N=2$ ) فإن تأثير الإشارة يظل قائما لكل $t>t_1$[21] .

[18] السرعة 1 تأتي بسبب الشكل الناظمي لمعادلة الأمواج. بعض الدارسين يفضلون العمل بالمعادلة $\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c^2\Delta u=0$ و ذلك لتمكين السرعة $c$ أن تلعب دورا متميزا.

[19] بمعنى أن حامل المعطيات الأولية $u_0$ ، $v_0$ يكون في $D$ .

[20] و بعض من مشتقاتها.

[21] هذا التأثير يتخامد بمرور الزمن و لكنه لن يغيب تماما.

[22] نفرض أنها ذات أبعاد مهملة.

**تطبيق موسيقي.** المستمع الجالس في $\mathbb{R}^3$ على بعد $d$ من آلة موسيقية[22] يستمع عند اللحظة $t$ فقط النوتة المعزوفة عند اللحظة $t-d$ و لا شيء آخر![23]

لمزيد من التفصيل حول مبدأ Huygens يمكن للقارئ العودة إلى Courant – Hilbert [1] ، Folland [1] ، Garabedian [1] ، Mikhlin [1] .

[23] بينما يستمع في $\mathbb{R}^2$ تراكيب مختلطة لكل النوتات المعزوفة في الفترة $[0, t-d]$ .

# المراجع


Adams R. : [1] *Sobolev spaces*, Acad. Press (1975).

Agmon S. : [1] *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand (1965).

Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. : [1] Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary value conditions I, *Comm. Pure Appl. Math., 12* (1959), p. 623-727.

Akhiezer N., Glazman I. : [1] *Theory of linear operators in Hilbert space*, Pitman (1980).

Aubin J. P. : [1] *Mathematical methods of game and economic theory*, North Holland (1979).

[2] *Applied Functional Analysis*, Wiley (1979).

Aubin Th. : [1] Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 280 (1975), p. 279-281 et *J. Diff. Geom.*, 11 (1976), p. 573-598.

Baiocchi C., Capelo A. : [1] *Disequazioni variazionali e quasi-variazionali. Applicazioni a problemi di frontiera libera.* Pitagora Editrice, Bologna (1978) ( Traduction anglaise : Wiley (1984) ).

Balakrishnan A. : [1] *Applied Functional Analysis*, Sringer (1976).

Baouendi M. S., Goulaouic C. : [1] Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, *Archive Rat. Mech. Anal., 34* (1969), p. 361-379.

Barbu V. : [1] *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces,* Noordhoff (1976).

Barbu V., Precupanu I. : [1] *Convexity and optimization in Banach spaces*, Noordhoff (1978).

Beauzamy B. : [1] *Introduction to Banach spaces and their geometry.* North-Holland (1983).

Benilan Ph., Crandall M., Pazy A. : [1] *Nonlinear evolution equations governed by accretive operator* (to appear).

Bensoussan A., Lions J. L. : [1] *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique,* Dunod (1978).

Berger M. : [1] Geometry of the spectrum, in Differential Geometry, Chern-Osserman ed., *Proc. Symp. Pure Math.,* Vol. 27, Part 2, *Amer. Math. Soc.* (1975), p. 129-152.

Berger M. : [1] *Nonlinearity and Functional Analysis,* Acad. Press (1977).

Bergh J., Löfström J. : [1] *Interpolation spaces :* an introduction. Springer (1976).

Bers L., John F., Schechter M. : [1] *Partial differential equations* (2nd edition), Amer. Math. Soc. (1979).

Bombieri E. : [1] Variational problems and elliptic equations in *Mathematical developments arising from Hilbert problems,* F. Browder ed., *Proc. Symp. Pure Math.,* Vol. 28, Part. 2, Amer. Math. Soc. (1977), p. 525-536.

Bourbaki N. : [1] *Espaces vectoriels topologiques,* (2 volumes), Hermann (1967).

Brandt A. : [1] Interior estimates for second order elliptic differential (or finite-difference) equations via the maximum principle, *Israel J. Math., 7* (1969), p. 95-121.

[2] Interior Schauder estimates for parabolic differential (or difference) equations, *Israel J. Math., 7* (1969), p. 254-262.

Brézis H. : [1] *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* North Holland (1973).

[2], Cours de 3e cycle sur les équations d'évolution non linéaires. Rédaction détaillée à paraître.

Brézis H., Coron J. M., Nirenberg L. : [1] Free vibrations for a nonlinear wave equation and a Theorem of P. Rabinowitz, *Comm. Pure Appl. Math., 33* (1980), p. 667-689.

Browder F. : [1] *Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution, Proc. Symp. Pure Math.,* Vol. 18, Part 2, Amer. Math. Soc. (1976).

Chae S. B. : [1] *Lebesgue Integration,* Dekker (1980).

Choquet G. : [1] *Cours d'Analyse. Topologie.* Masson (1964).

[2] *Lectures on Analysis* (3 volumes), Benjamin (1969).

Choquet-Bruhat Y., Dewitt-Morette C., Dillard-Bleick M. : [1] *Analysis, manifolds and physics,* North Holland (1977).

Ciarlet Ph. : [1] *The finite element method for elliptic problems,* North Holland (2nd edition, 1979).

Clarke F., Ekeland I. : [1] Hamiltonian trajectories having prescribed minimal period, *Comm. Pure Appl. Math., 33* (1980), p. 103-116.

Coddington E., Levinson N. : [1] *Theory of ordinary differential equations,* Mc Graw Hill (1955).

Courant R., Hilbert D. : [1] *Methods of mathematical physics* (2 volumes), Interscience (1962).

Damlamian A. : [1] Application de la dualité non convexe à un problème non linéaire à frontière libre (équilibre d'un plasma confiné), C. R. Acad. Sc. Paris 286 (1978), p. 153-155.

Davies E. : [1] *One parameter semigroups,* Acad. Press (1980).

Dellacherie C., Meyer P.-A. : [1] Probabilités et potentiel, Hermann, Paris (1983).

Devito C. : [1] *Functional Analysis,* Acad. Press (1978).

Diestel J. : [1] *Geometry of Banach spaces : selected topics,* Springer (1975).

[2] Sequences and series in Banach spaces, Springer (1984).

Dieudonné J. : [1] *Fondements de l'Analyse moderne,* Gauthier Villars (1963).

[2] *Éléments d'Analyse,* Tome II, Gauthier Villars (1968).

[3] *History of Functional Analysis,* North Holland (1981).

Dixmier J. : [1] *Topologie générale,* PUF (1980).

Dubreil P., Dubreil-Jacotin M. L. : [1] *Leçons d'Algèbre moderne,* Dunod (1961).

Dunford N., Schwartz J. T. : [1] *Linear operators* (3 volumes), Interscience (1958).

Duvaut G., Lions J. L. : [1] *Les inéquations en mécanique et en physique,* Dunod (1972).

Edwards R. : [1] *Functional Analysis,* Holt-Rinehart-Winston (1965).

Ekeland I., Temam R. : [1] *Analyse convexe et problèmes variationnels,* Dunod-Gauthier Villars, Paris (1974).

Enflo P. : [1] A conterexample to the approximation property in Banach spaces, Acta Math. 130 (1973), p. 309-317.

Fife P. : [1] *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems,* Lecture Notes in Biomathematics, n° 28, Springer (1979).

De Figueiredo D. G., Karlovitz L. : [1] On the radial projection in normed spaces, *Bull. Amer. Math. Soc., 73* (1967), p. 364-368.

Folland G. : [1] *Introduction to partial differential equations,* Princeton Univ. Press (1976).

Free Boundary Problems : [1] Proc. Sem. held in Pavia (1979), Ist. Naz. Alta. Mat. Roma.

[2] Proc. Sem. held in Montecatini (1981), Pitman (to appear).

Friedman A. : [1] *Partial differential equations of parabolic type,* Prentice Hall (1964).

[2] *Partial differential equations,* Holt-Rinehart-Winston (1969).

[3] *Foundations of modern Analysis,* Holt-Rinehart-Winston (1970).

Garabedian P. : [1] *Partial differential equations,* Wiley (1964).

Germain P. : [1] *Cours de Mécanique,* École Polytechnique (1982).

Gilbarg D., Trudinger N. : [1] *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer (1977).

Gilkey P. : [1] *The index Theorem and the heat equation,* Publish or Perish (1974).

Giusti E. : [1] *Minimal surfaces and functions of bounded variation,* Lecture Notes Australian Nat. Univ. Canberra (1977).

Goldstein J. : [1] *Semigroups of operators and applications,* Encycl. of Math. and its Applic. G. C. Rota, ed. Addison Wesley (to appear).

Goulaouic C. : [1] *Calcul différentiel et Analyse Fonctionnelle,* Cours de l'École Polytechnique (1981).

Grisvard P. : [1] Équations différentielles abstraites, *Ann. Sc. ENS, 2* (1969), p. 311-395.

Guichardet A. : [1] *Calcul Intégral,* Armand Colin (1969).

Gurtin M. : [1] *An Introduction to Continuum Mechanics,* Acad. Press (1981).

Hartman Ph. : [1] *Ordinary differential equations,* Wiley (1964).

Henry D. : [1] *Geometric theory of semilinear parabolic equations,* Springer (1981).

Hewitt E., Stromberg K. : [1] *Real and abstract analysis,* Springer (1965).

Holmes R. : [1] *Geometric Functional Analysis and its applications,* Springer (1975).

Hörmander L. : [1] *Linear partial differential operators,* Springer (1963).

Horvath J. : [1] *Topological vector spaces and distributions,* Addison Wesley (1966).

Huet D. : [1] *Décomposition spectrale et opérateurs,* PUF (1976).

James R. C. : [1] A non reflexive Banach space isometric with its second conjugate space, *Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 37* (1951), p. 174-177.

Kac M. : [1] Can one hear the shape of a drum ? *Amer. Math. Monthly, 73* (1966), p. 1-23.

Kakutani S. : [1] Some characterizations of Euclidean spaces, *Jap. J. Math., 16* (1939), p. 93-97.

Karlin S. : [1] *Mathematical methods and theory in games, programming, and economics,* (2 volumes), Addison-Wesley (1959).

Kato T. : [1] *Perturbation theory for linear operators,* Springer (1976).

Katznelson Y. : [1] *An introduction to harmonic analysis,* Dover Publications (1976).

Kelley J., Namioka I. : [1] *Linear topological spaces,* Springer (2nd edition, 1976).

Kinderlehrer D., Stampacchia G. : [1] *An introduction to variational inequalities and their applications,* Acad. Press (1980).

Knerr B. : [1] Parabolic interior Schauder estimates by the maximum principle, *Archive Rat. Mech. Anal., 75* (1980), p. 51-58.

Kohn J. J., Nirenberg L. : [1] Degenerate elliptic parabolic equations of second order, *Comm. Pure Appl. Math., 20* (1967), p. 797-872.

Kolmogorov A., Fomin S. : [1] *Introductory real Analysis,* Prentice Hall (1970).

Köthe . : [1] *Topogical vector spaces* (2 volumes), Springer (1969, 1979).

Krasnoselskii M. : [1] *Topological methods in the theory of nonlinear integral equations,* Mc Millan (1964).

Kreyszig E. : [1] *Introductory Functional Analysis with Applications,* Wiley (1978).

Ladyzhenskaya O., Uraltseva N. : [1] *Linear and quasilinear elliptic equations,* Acad. Press (1968) (French Translation, Dunod).

Ladyzhenskaya O., Solonnikov V., Uraltseva N. : [1] *Linear and quasilinear equations of parabolic type,* Amer. Math. Soc. (1968).

Lang S. : [1] *Analyse réelle,* Inter Éditions Paris (1977).

Larsen R. : [1] *Functional Analysis; an introduction,* Dekker (1973).

Lieb E. : [1] Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities, Ann. Math. 118 (1983), p.349-374.

Lindenstrauss J., Pazy A., Weiss B. : [1] *Introduction to Functional Analysis,* Cours de l'Université de Jérusalem (1980) (in Hebrew).

Lindenstrauss J., Tzafriri L. : [1] On the complemented subspaces problem, *Israel J. Math., 9* (1971), p. 263-269.

[2] *Classical Banach spaces* (2 volumes), Springer (1973, 1979).

Lions J. L. : [1] *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles,* Presses de l'Univ. de Montreal (1965).

[2] *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,* Dunod (1968).

[3] *Quelques méthodes de résolution des Problèmes aux limites non linéaires,* Dunod-Gauthier Villars (1969).

Lions J. L., Magenes E. : [1] *Problèmes aux limites non homogènes* (3 volumes), Dunod (1968).

Magenes E. : [1] Topics in parabolic equations : some typical free boundary problems, in *Boundary value problems for linear evolution partial differential equations,* Garnir ed. Reidel (1977).

Malliavin P. : [1] *Intégration et Probabilités. Analyse de Fourier et Analyse spectrale,* Masson (1982).

Marle C. M. : [1] *Mesures et probabilités,* Hermann (1974).

Martin R. H. : [1] *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces,* Wiley (1976).

Mikhlin S. : [1] *An advanced course of mathematical physics,* North Holland (1970).

Miranda C. : [1] *Partial differential equations of elliptic type,* Springer (1970).

Mizohata S. : [1] *The theory of partial differential equations,* Cambridge Univ. Press. (1973).

Morawetz C. : [1] $L^p$ inequalities, *Bull. Amer. Math. Soc., 75* (1969), p. 1299-1302.

Moreau J. J. : [1] *Fonctionnelles convexes,* Séminaire Leray, Collège de France (1966).

[2] Applications of convex analysis to the treatment of elastoplastic systems, in *Applications of methods of Functional Analysis to problems in Mechanics,* Symp. IUTAM/IMU, Germain-Nayrolles ed., Springer (1976).

Morrey C. : [1] *Multiple integrals in the calculus of variations,* Springer (1966).

Moulin H., Fogelman F. : [1] *La convexité dans les mathématiques de la décision,* Hermann (1979).

Moving Boundary Problems, Proc. Symp. held at Gatlinburg, Wilson, Solomon, Boggs ed. Acad. Press (1978).

Nečas J. : [1] *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,* Masson (1967).

Nečas J., Hlavaček L. : [1] *Mathematical theory of elastic and elastoplastic bodies. An introduction.* Elsevier (1981).

Neveu J. : [1] *Bases mathématiques du calcul des probabilités,* Masson (1964).

Nirenberg L. : [1] On elliptic partial differential equations, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 13* (1959), p. 116-162.

[2] *Topics in nonlinear Functional Analysis,* New York, Univ. Lecture notes (1974).

[3] Variational and topological methods in nonlinear problems, *Bull. Amer. Math. Soc. 4* (1981), p. 267-302.

Oleinik O., Radkevitch E. : [1] *Second order equations with non negative characteristic form,* Plenum (1973).

Osserman R. : [1] Isoperimetric inequalities and eigenvalues of the Laplacian, in *Proc. Int. Congress of Math.,* Helsinki (1978) and *Bull. Amer. Math. Soc., 84* (1978), p. 1182-1238.

Pazy A. : [1] *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations,* Lecture Notes Univ. of Maryland (1974).

Phelps R. : [1] *Lectures on Choquet's Theorem,* Van Nostrand (1966).

Protter M., Weinberger H. : [1] *Maximum principles in differential equations,* Prentice Hall (1967).

Rabinowitz P. : [1] Variational methods for nonlinear eigenvalue problems, in *Eigenvalues of Nonlinear Problems,* CIME Cremonese (1974).

Raviart P. A., Thomas J. M. : [1] *Introduction à l'Analyse numérique des équations aux dérivées partielles,* Masson (1983).

Rockafellar R. T. : [1] *Convex Analysis,* Princeton Univ. Press (1970).

Reed M., Simon B. : [1] *Methods of modern mathematical physics* (4 volumes), Acad. Press (1972-1979).

Rudin W. : [1] *Functional Analysis,* Mc Graw Hill (1973).

[2] *Real and complex Analysis,* Mc Graw Hill (2nd edition, 1974). French edition (1st edition, 1975) Masson.

Schaefer H. : [1] *Topological vector spaces,* Springer (2nd edition, 1971).

Schechter M. : [1] *Principles of Functional Analysis,* Acad. Press (1971).

[2] *Operator methods in Quantum mechanics,* North Holland (1981).

Schwartz J. T. : [1] *Nonlinear Functional Analysis,* Gordon Breach (1969).

Schwartz L. : [1] *Théorie des distributions,* Hermann (new edition 1973).

[2] *Topologie générale et Analyse Fonctionnelle,* Hermann (1970).

[3] *Analyse Hilbertienne,* Hermann (1979).

[4] *Geometry and Probability in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 4* (1981), p. 135-141 and Lecture Notes, n° 852, Springer (1981).

[5] Fonctions mesurables et $*$-scalairement mesurables, propriété de Radon-Nikodym, Exposés 4, 5 et 6, Séminaire Maurey-Schwartz, École Polytechnique (1974-1975).

Serrin J. : [1] The solvability of boundary value problems, in *Mathematical developments arising from Hilbert problems,* F. Browder ed. *Proc. Symp. Pure Math.,* vol. 28, Part. 2, Amer. Math. Soc. (1977), p. 507-525.

Singer I. : [1] *Bases in Banach spaces,* Springer (1970).

Singer I.M. : [1] Eigenvalues of the Laplacian and invariants of manifolds in *Proc. Int. Congress of Math.* Vancouver (1974).

Sperb R. : [1] *Maximum principles and their applications,* Acad. Press (1981).

Stampacchia G. : [1] *Équations élliptiques du second ordre à coefficients discontinus ,* Presses Univ. Montreal (1966).

Stein E. : [1] *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton Univ. Press (1970).

Stein E., Weiss G. : [1] *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean spaces,* Princeton Univ. Press (1971).

Stoer J., Witzgall C. : [1] *Convexity and optimization in finite dimensions,* Springer (1970).

Stroock D., Varadhan S. : [1] *Multidimensional diffusion processes,* Springer (1979).

Talenti G. : [1] Best constants in Sobolev inequality, *Ann. Mat. Pura Appl., 110* (1976), p. 353-372.

Tanabe H. : [1] *Equations of evolution,* Pitman (1979).

Taylor A., Lay D. : [1] *Introduction to Functional Analysis,* Wiley (1980).

Temam R. : [1] *Navier-Stokes equations,* North-Holland (2nd edition, 1979).

Temam R., Strang G. : [1] Duality and relaxation in the variational problems of plasticity, *J. de Mécanique, 19* (1980), p. 493-528.

[2] Functions of bounded deformation, *Archive Rat. Mech. Anal., 75* (1980), p. 7-21.

Treves F. : [1] *Topological vector spaces, distributions and kernels,* Acad. Press (1967).

[2] *Linear partial differential equations with constant coefficients,* Gordon Breach (1967).

[3] *Locally convex spaces and linear partial differential equations,* Springer (1967).

[4] *Basic linear partial differential equations,* Acad. Press (1975).

Volpert A. I. : [1] The spaces BV and quasilinear equations, *Mat. Sbornik USSR, 2* (1967), p. 225-267.

Weinberger H. : [1] *A first course in partial differential equations,* Blaisdell (1965).

[2] *Variational methods for eigenvalue approximation,* Reg. Conf. Appl. Math. SIAM (1974).

Wheeden R., Zygmund A. : [1] *Measure and Integral,* Dekker (1977).

Yau S. T. : [1] The role of partial differential equations in differential geometry, in *Proc. Int. Congress of Math.,* Helsinki (1978).

Yosida K. : [1] *Functional Analysis,* Springer (1965).

# الفهـرس