9

فضاءات صوبوليف و صياغة تغيراتية لمسائل حدية إهليلجية في فضاء نوني البعد

1.9. تعريف و خصائص أولية لفضاءات صوبوليف $W^{1,p}(\Omega)$

لتكن Ω مجموعة مفتوحة و ليكن $p \in \mathbb{R}$ بحيث $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

تعريف. ــ إن فضاء صوبوليف $W^{1,p}(\Omega)$ معرف بـ[1]

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \quad \middle| \quad \begin{array}{l} \exists g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega)/ \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right\}}$$

نضع

$$\boxed{H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).}$$

لكل $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ، نكتب[2]

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \qquad \text{و} \qquad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right) = \operatorname{grad} u \ .$$

الفضاء $W^{1,p}(\Omega)$ مزود بالنظيم

[1] عندما لا يوجد أي غموض، نكتب $W^{1,p}$ عوضا عن $W^{1,p}(\Omega)$.

[2] لهذه الكتابة معنى : g_i وحيد بفضل التوطئة 2.4 .

$$\boxed{\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.}$$

أو أحيانا، بالنظيم المكافئ $\left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$ (إذا كان $1 \leqslant p < \infty$).

الفضاء $H^1(\Omega)$ مزود بالجداء السلمي

$$\boxed{(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2};}$$

النظيم المشترك

$$\|u\|_{H^1} = \left(\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$$

مكافئ لنظيم $W^{1,2}$.

• **قضية** 1.9. ـ **فضاء** $W^{1,p}$ **هو فضاء بناخ لكل** $1 \leqslant p \leqslant \infty$. **فضاء** $W^{1,p}$ **انعكاسي لـ** $1 < p < \infty$ **و قابل للفصل لـ** $1 \leqslant p < \infty$. **فضاء** H^1 **هو فضاء هلبرت قابل للفصل.**

إثبات ـ كإثبات القضية 1.8 (استعمل المؤثر $Tu = [u, \nabla u]$). $\square$

ملاحظة 1. ـ يمكننا، في تعريف الفضاء $W^{1,p}$ استعمال، على السواء، $C_c^1(\Omega)$ أو $C_c^\infty(\Omega)$ كمجموعة الدوال الاختبارية (لإثبات ذلك استعمل متتالية منظمة ρ_n).

ملاحظة 2. ـ من الواضح أنه إذا كان $u \in C^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ و $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$ لكل $i = 1, 2, ..., N$ (يمثل هنا $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ المشتق الجزئي بالمعنى العادي لـ u)، فإن $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ؛ إضافة لذلك فإن المشتقات الجزئية بالمعنى العادي لـ u تتطابق مع المشتقات الجزئية لمعنى $W^{1,p}$. و بالخصوص إذا كانت Ω محدودة، فإن $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$ لكل $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
و بالعكس، نبرهن بأنه إذا كان $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\Omega)$ مع $1 \leqslant p \leqslant \infty$ و إذا كان $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\Omega)$ لكل $i = 1, 2, ..., N$ ($\frac{\partial u}{\partial x_i}$ يرمز هنا إلى المشتق الجزئي بمعنى $W^{1,p}$)، فإن $u \in C^1(\Omega)$ (انظر [EX]).

obeikandl.com

* **ملاحظة** 3. ـ ليكن $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ؛ تسمح نظرية التوزيعات Distribution Theory بإعطاء معنى لـ $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ($\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ هو عنصر من الفضاء " الضخم " $\mathcal{D}'(\Omega)$ للتوزيعات ـ فضاء يحوي بالخصوص $L^1_{loc}(\Omega)$) . باستعمال لغة نظرية التوزيعات بإمكاننا أن نقول بأن $W^{1,p}(\Omega)$ هو مجموعة الدوال $u \in L^p(\Omega)$ بحيث كل المشتقات الجزئية $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ، $1 \leqslant i \leqslant N$ (بمعنى المشتقات التوزيعية) تنتمي إلى $L^p(\Omega)$.

عندما يكون $\Omega = \mathbb{R}^N$ و $p = 2$ ، يمكننا أيضا تعريف فضاءات صوبوليف بواسطة تحويل فورييه؛ انظر مثلا Lions – Magenes [1] ، Goulaouic [1] أو Malliavin [1] . لن نلتفت في موضوعنا هذا إلى هذه الوجهة.

ملاحظة 4. ـ ينبغي الاحتفاظ بالأمور الآتية:

ا) لتكن (u_n) متتالية من $W^{1,p}$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في L^p و تتقارب ∇u_n نحو نهاية في $(L^p)^N$ ، نستنتج بأن $u \in W^{1,p}$ و $\|u_n - u\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0$. عندما يكون $1 < p \leqslant \infty$ ، يكفي معرفة بأن $u_n \longrightarrow u$ في L^p و بأن (∇u_n) تبقى محدودة bounded في $(L^p)^N$ حتى نستنتج بأن $u \in W^{1,p}$.

ب) لدالة f معطاة معرفة على Ω ، نرمز بـ $\overline{f}$ إلى تمديدها بـ 0 خارج Ω ، أي

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{إذا } x \in \Omega \\ 0 & \text{إذا } x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

لتكن $u \in W^{1,p}(\Omega)$ و $\alpha \in C^1_c(\Omega)$. إذن[3]

$$\overline{\alpha u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{\alpha u}) = \overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \; .$$

بالفعل، ليكن $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$ ؛ لدينا

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\alpha u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} &= \int_\Omega \alpha u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega u \Big[\frac{\partial (\alpha \varphi)}{\partial x_i} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi \Big] \\ &= -\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i} \alpha \varphi + u \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \varphi \Big) = -\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\overline{\alpha \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} u} \Big) \varphi. \end{aligned}$$

نفس النتيجة تبقى سارية المفعول إذا أخذنا $\alpha \in C^1(\mathbb{R}^N) \frown L^\infty(\mathbb{R}^N)$ مع $\nabla \alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ و $supp\alpha \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$ ، عوض أن نفترض بأن $\alpha \in C^1_c(\Omega)$.

[3] حذار، عموما $\overline{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (لماذا؟).

هذه أول نتيجة حول الكثافة؛ سوف نثبت، في وقت لاحق نتيجة أكثر دقة (لازمة 8.9) مقابل افتراضات إضافية على Ω ·

• **مبرهنة** 2.9 (Friedrichs)· ـ **لتكن** $u \in W^{1,p}(\Omega)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$ · **إذن توجد متتالية** (u_n) **من** $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ **بحيث**

$$u_{n|_\Omega} \longrightarrow u \quad \text{في} \quad L^p(\Omega) \tag{1}$$

$$\nabla u_{n|_\omega} \longrightarrow \nabla u_{|_\omega} \quad \text{في} \quad L^p(\omega)^N \quad \text{لكل} \quad \omega \subset\subset \Omega \cdot \tag{2}$$

(لنذكر بأن الترميز $\omega \subset\subset \Omega$ يعني أن ω مجموعة مفتوحة بحيث $\overline{\omega} \subset \Omega$ و $\overline{\omega}$ متراصة)·
سوف نستعمل في البرهان الـ:

توطئة 1.9. ـ **لتكن** $\rho \in L^1(\mathbb{R}^N)$ **و لتكن** $\nu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ **مع** $1 \leqslant p \leqslant \infty$ · **إذن**

$$\rho * \nu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho * \nu) = \rho * \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, 2, ...N \cdot$$

<u>إثبات التوطئة 1.9.</u> ـ طابق بين إثبات التوطئة 4.8 و هذه الحالة· □

<u>إثبات المبرهنة 2.9.</u> ـ نكتب

$$\overline{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{إذا} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{إذا} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

و نضع $v_n = \rho_n * \overline{u}$ (حيث ρ_n متتالية منظمة)· نعرف (انظر المقطع 4.4) بأن $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ و $v_n \longrightarrow \overline{u}$ في $L^p(\mathbb{R}^N)$ · لنبين أن $\nabla v_{n|\omega} \longrightarrow \nabla u_{|\omega}$ في $L^p(\omega)$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$ · يعطى $\omega \subset\subset \Omega$ و نثبت دالة $\alpha \in C_c^1(\Omega)$ ، $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ ، بحيث $\alpha = 1$ على جوار لـ ω (توجد دالة كهذه ؛ انظر مثلا [EX])· لاحظ أنه لـ n كبير بما فيه الكفاية لدينا

$$\rho_n * \overline{\alpha u} = \rho_n * \overline{u} \qquad \text{على} \qquad \omega \cdot \tag{3}$$

فبالفعل،

$$\begin{aligned} Supp(\rho_n * \overline{\alpha u} - \rho_n * \overline{u}) &= Supp[\rho_n * (1-\overline{\alpha})\overline{u}] \\ &\subset Supp\rho_n + Supp(1-\overline{\alpha})\overline{u} \subset B(0,\frac{1}{n}) + Supp(1-\overline{\alpha}) \subset C^{\omega} \end{aligned}$$

لـ n كبير بما فيه الكفاية. إذن (3) محققة.
حسب التوطئة 1.9 و الملاحظة 4 ب، لدينا

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) = \rho_n * \left(\overline{\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}u}\right)$$

و بالتالي

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \longrightarrow \overline{\alpha\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}u} \qquad \text{في} \qquad L^p(\mathbb{R}^N) \cdot$$

بالخصوص

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{\alpha u}) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \text{في} \qquad L^p(\omega) \text{،}$$

و بفضل (3)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho_n * \overline{u}) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad \text{في} \qquad L^p(\omega) \cdot$$

أخيرا، " نبتر " المتتالية (v_n) مثلما فعلنا في إثبات المبرهنة 6.8 . بوضوح أكثر نضع $u_n = \zeta_n v_n$[4] . نتحقق بسهولة بأن للمتتالية (u_n) الخصائص المرتقبة أي أن $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ، $u_n \longrightarrow u$ في $L^p(\Omega)$ و $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ في $L^p(\omega)^N$. $\square$

* **ملاحظة** 5. ـ نبين (مبرهنة Meyers – Serrin) بأنه إذا $u \in W^{1,p}(\Omega)$ مع $1 \leqslant p < \infty$ فإنه توجد متتالية (u_n) بحيث $u_n \in C^\infty(\Omega) \frown W^{1,p}(\Omega)$ و $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(\Omega)$ ؛ إثبات هذه النتيجة دقيق بما فيه الكفاية (انظر، مثلا، Adams [1] أو Friedman [2]). عموما إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة كيفية و إذا $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ، فإنه لا يمكننا إنشاء متتالية (u_n) في $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(\Omega)$ (انظر [EX])؛

[4] من الآن فصاعدا، نرمز بـ (ζ_n) و بصورة منتظمة إلى متتالية " باترة " ، بمعنى أننا نثبت دالة $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ مع $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ و $\zeta(x) = 1$ إذا $|x| \leqslant 1$ ، $\zeta(x) = 0$ إذا $|x| \geqslant 2$ ، و نضع $\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right)$ ، $n = 1, 2 \ldots$.

obeikandi.com

قارن مبرهنة Meyers – Serrin (المحققة في مجموعة مفتوحة Ω كيفية) باللازمة 8.9 (التي تفترض Ω منتظمة).

إليكم تمييز بسيط لدوال $W^{1,p}$:

قضية 3.9. ـ **ليكن** $u \in L^p(\Omega)$ **مع** $1 < p \leqslant \infty$. **الخصائص التالية متكافئة**

1) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

2) **يوجد ثابت** C **بحيث**

$$\Big|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}} \qquad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega), \qquad \forall i=1,2,...N.$$

3) **يوجد ثابت** C **بحيث لكل مجموعة مفتوحة** $\omega \subset\subset \Omega$ **و لكل** $h\in\mathbb{R}^N$ **مع** $|h| < dist(\omega, C^\Omega)$ **يكون لدينا**

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)} \leqslant C|h|.$$

يمكننا، زيادة على ذلك، اختيار $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ **في** 2) **و** 3) .

---

* **ملاحظة** 6. ـ عندما يكون $p=1$ ، تبقى الاستلزامات الآتية صحيحة

$$(1 \Longrightarrow (2 \Longleftrightarrow (3.$$

الدوال المحققة لـ 2) [أو 3)] مع $p=1$ هي دوال ذات تغيرات محدودة bounded variation (بلغة التوزيعات، يتعلق الأمر بدوال L^1 التي تكون مشتقاتها الأولى التوزيعية قياسا محدودا). يلعب هذا الفضاء دورا أهم من فضاء $W^{1,1}$ ؛ نصادف دوال ذات تغيرات محدودة (أو ذات طبيعة مماثلة) في نظرية السطح الأصغري minimal surface (انظر مثلا [1] Giusti و أعمال De Giorgi ، Miranda إلخ، المذكورة فيه)، حول مسائل اللدونة plasticity (دوال ذات تشوه deformation محدود، انظر [2] Temam – Strang و عمل Suquet المذكور فيه)، في المعادلات الشبه الخطية quasi – linear من المرتبة الأولى التي تقبل حلولا غير مستمرة، أو موجات صدام (انظر مثلا [1] Volpert).

* **ملاحظة** 7. ـ يستنتج من المبرهنة 25.4 و القضية 3.9 أنه إذا كانت $\mathcal{F}$ ترمز إلى كرة الوحدة في $W^{1,p}(\Omega)$ مع $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (Ω مجموعة مفتوحة كيفية)، فإن $\mathcal{F}_{|\omega}$ تكون متراصة نسبيا في $L^p(\omega)$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$. [سوف نرى فيما بعد (مبرهنة 16.9) أنه إذا كانت Ω محدودة و منتظمة، فإن $\mathcal{F}$ متراصة في $L^p(\Omega)$ ؛ قد تسقط صلاحية هذا الاستنتاج إذا كانت Ω غير محدودة، أو إذا كانت Ω غير منتظمة]. بالتالي إذا كانت (u_n) متتالية محدودة في $W^{1,p}(\Omega)$ مع $1 \leqslant p \leqslant \infty$ و Ω مجموعة مفتوحة كيفية، فإنه يمكننا استخراج متتالية جزئية (u_{n_k}) بحيث $u_{n_k}(x)$ تتقارب حـ. ت على Ω (انظر [EX]).

<u>إثبات</u> ـ

2) $\Longrightarrow$ **1**) بديهي.

1) $\Longrightarrow$ **2**) انسخ إثبات القضية 3.8 .

3) $\Longrightarrow$ **1**) لنبدأ بافتراض أن $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. ليكن $h \in \mathbb{R}^N$ و لنضع

$$v(t) = u(x+th), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

إذن $v'(t) = h.\nabla u(x+th)$ و إن

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 h.\nabla u(x+th)dt.$$

بالتالي

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leqslant |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p dt.$$

و

$$\begin{aligned}\int_\omega |\tau_h u(x) - u(x)|^p dx &\leqslant |h|^p \int_\omega dx \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p dt \\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_\omega |\nabla u(x+th)|^p dt = |h|^p \int_0^1 dt \int_{\omega+th} |\nabla u(y)|^p dy.\end{aligned}$$

بتثبيت $|h| < dist(\omega, C^\Omega)$ ، توجد مجموعة مفتوحة $\omega' \subset\subset \Omega$ بحيث $\omega + th \subset \omega'$ لكل $t \in [0,1]$ ، و إذن

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\omega)}^p \leqslant |h|^p \int_{\omega'} |\nabla u|^p. \tag{4}$$

الآن، لـ $u \in W^{1,p}(\Omega)$ و $p \neq \infty$ توجد متتالية (u_n) في $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $L^p(\Omega)$ و $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ في $L^p(\omega)$ $\forall \omega \subset\subset \Omega$. نطبق المتباينة (4) على u_n و عند النهاية، نحصل على 3) . عندما $p = \infty$ ، ننسخ ما سبق (لـ $p < \infty$) ثم نقوم بتقريب p إلى ما لا نهاية.

2) $\Longrightarrow$ 3)

لتكن $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ؛ نعتبر مجموعة مفتوحة ω بحيث $Supp\varphi \subset \omega \subset\subset \Omega$. ليكن $h \in \mathbb{R}^N$ مع $|h| < dist(\omega, C^\Omega)$. بفضل 3) لدينا

$$\Big| \int_\Omega (\tau_h u - u)\varphi \Big| \leqslant C|h|\, \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

من جهة أخرى، بما أن

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x)dx = \int_\Omega u(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y))dy,$$

نستنتج

$$\Big| \int_\Omega u(y)\frac{(\varphi(y-h) - \varphi(y))}{|h|}dy \Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

باختيار $h = te_i$ ، $t \in \mathbb{R}$ ، و بالتقريب إلى النهاية لما $t \to 0$ نحصل على 2) . $\square$

* **ملاحظة** 8. ـ تبين القضية 3.9 (3) $\Longrightarrow$ 1)) أنه إذا $u \in W^{1,p}(\Omega)$ و إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة مترابطة، يكون لدينا

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \|\nabla u\|_{L^\infty} dist_\Omega(x,y) \qquad \text{حـ. ت.} \qquad x, y \in \Omega \tag{5}$$

حيث $dist_\Omega(x,y)$ يمثل البعد المتقاصر geodesic لـ x و y في Ω ؛ يتأتى أن u يقبل ممثلا مستمرا محققا لـ (5) لكل $x, y \in \Omega$. نستنتج أنه إذا كان $u \in W^{1,p}(\Omega)$ مع $1 \leqslant p \leqslant \infty$ و كانت Ω مجموعة مفتوحة كيفية، و إذا $\nabla u = 0$ حـ. ت. على Ω ، فإن u ثابت على كل رابطة جزئية من Ω .

نلاحظ أخيرا أنه إذا $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ مع Ω مجموعة مفتوحة مترابطة، فإنه لدينا

$$|u(x) - u(y)| \leqslant \|\nabla u\|_{L^\infty}|x - y| \qquad \forall x, y \in \Omega.$$

قضية 4.9 **(اشتقاق جداء). ـ ليكن** $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \frown L^\infty(\Omega)$ **مع** $1 \leqslant p \leqslant \infty$. **إذن** $uv \in W^{1,p}(\Omega) \frown L^\infty(\Omega)$ **و**

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, ...N.$$

إثبات. ـ يمكننا دائما الرجوع إلى الحالة حيث $1 \leqslant p < \infty$ (انظر إثبات اللازمة 9.8). استنادا إلى المبرهنة 2.9 ، فإنه توجد متتاليات (u_n) ، (v_n) في $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث

$u_n \longrightarrow u$ ، $v_n \longrightarrow v$ في $L^p(\Omega)$ و حـ. ت. على Ω

$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ ، $\nabla v_n \longrightarrow \nabla v$ في $L^p(\omega)^N$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$.

بمراجعة إثبات المبرهنة 2.9 نرى ببساطة أنه لدينا كذلك

$\|u_n\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^\infty}$ و $\|v_n\|_{L^\infty} \leqslant \|v\|_{L^\infty}$.

من ناحية أخرى لدينا

$$\int_\Omega u_n v_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}v_n + u_n\frac{\partial v_n}{\partial x_i}\Big)\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

بالانتقال إلى النهاية، عن طريق التقارب المحصور، نحصل على

$$\int_\Omega uv \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}v + u\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big)\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

□

قضية 5.9 **(اشتقاق تركيب). ـ ليكن** $G \in C^1(\mathbb{R})$ **بحيث** $G(0) = 0$ **و** $|G'(s)| \leqslant M$ $\forall s \in \mathbb{R}$. **ليكن** $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ، **فإن**

$Gou \in W^{1,p}(\Omega)$ و $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(Gou) = (G'ou)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$.

إثبات. ـ لدينا $|G(s)| \leqslant M|s|$ $\forall s \in \mathbb{R}$ و إذن $|Gou| \leqslant M|u|$ ؛ بالتالي $Gou \in L^p(\Omega)$ ، و كذلك $(G'ou)\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$. يبقى التحقق بأن

$$\int_\Omega (Gou)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G'ou)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega). \tag{6}$$

عندما $1 \leqslant p < \infty$ ، نختار متتالية (u_n) من $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $L^p(\Omega)$ و حـ. ت. على Ω ، $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ في $L^p(\omega)^N$ $\forall \omega \subset\subset \Omega$ (مبرهنة 2.9). لدينا

$$\int_\Omega (Gou_n)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega (G'ou_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

بيد أن $Gou_n \longrightarrow Gou$ في $L^p(\Omega)$ و $(G'ou_n)\dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \longrightarrow (G'ou)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ في $L^p(\omega)$ بالتقارب المحصور. حيث نستنتج (6) .

عندما $p = \infty$ ، نثبت مجموعة مفتوحة Ω' بحيث $Supp\varphi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. إذن $u \in W^{1,p}(\Omega')$ $\forall p < \infty$ و نستنتج (6) مما سبق. □

قضية 6.9 (**تبديل المتغيرات** Change of variables). **ـ لتكن** Ω **و** Ω' **مجموعتين مفتوحتين من** $\mathbb{R}^N$ **و ليكن** $H : \Omega' \longrightarrow \Omega$ **تطبيقا متقابلا،** $x = H(y)$ ، **بحيث**[5]

$$H \in C^1(\Omega'), \quad H^{-1} \in C^1(\Omega), \quad JacH \in L^\infty(\Omega'), \quad JacH^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

ليكن $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ، **فإن** $uoH \in W^{1,p}(\Omega')$ **و**

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(uoH)(y) = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \qquad \forall j = 1, 2, ...N.$$

إثبات. ـ عندما $1 \leqslant p < \infty$ ، نختار متتالية (u_n) من $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $L^p(\Omega)$ و $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ في $L^p(\omega)^N$ $\forall \omega \subset\subset \Omega$. إذن $u_n oH \longrightarrow uoH$ في $L^p(\Omega')$ و

$$\Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}oH\Big)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \longrightarrow \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}oH\Big)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \qquad \text{في} \qquad L^p(\omega') \qquad \forall \omega' \subset\subset \Omega' \cdot$$

بإعطاء $\in C_c^1(\Omega')$ لدينا

$$\int_{\Omega'} (u_n oH)\frac{\partial}{\partial y_j}dy = -\int_{\Omega'} \sum_i \Big(\frac{\partial u_n}{\partial x_i}oH\Big)\frac{\partial H_i}{\partial y_j} \;\; dy.$$

عند النهاية نحصل على النتيجة المرجوة.

عندما $p = \infty$ ، نقوم بإتباع نهاية إثبات القضية 5.9 . □

---

[5] يرمز $JacH$ إلى المصفوفة اليعقوبية Jacobian matrix $\dfrac{\partial H_i}{\partial y_j}$ ؛ يتعلق الأمر إذن بدالة من $L^\infty(\Omega')^{N\times N}$.

obeikandl.com

فضاءات صوبوليف $W^{m,p}(\Omega)$

ليكن $m \geqslant 2$ عددا طبيعيا و p عددا حقيقيا مع $1 \leqslant p \leqslant \infty$. نعرف بالاستقراء

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega) \quad \forall i = 1, 2, ...N \}.$$

يعود بصفة مماثلة إدخال[6]

$$\boxed{W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \quad \middle| \quad \begin{array}{l} \forall \alpha, \qquad |\alpha| \leqslant m \qquad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \quad / \\ \displaystyle\int_\Omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}.}$$

نكتب $D^\alpha u = g_\alpha$.

الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ مزود بالنظيم

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} \|D^\alpha u\|_{L^p}$$

هو فضاء بناخ.

نضع $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ؛ $H^m(\Omega)$ مزود بالجداء السلمي

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}$$

هو فضاء هلبرت.

* **ملاحظة** 9. ـ نبرهن بأنه إذا كان Ω " منتظما بما فيه الكفاية " مع $\Gamma = \partial\Omega$ **محدود**، فإن نظيم $W^{m,p}(\Omega)$ مكافئ للنظيم

$$\|u\|_{L^p} + \sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

بتوضيح أكثر، نثبت بأن لكل دليل متعدد α مع $0 < |\alpha| < m$ و لكل $\epsilon > 0$ يوجد ثابت C (متعلق بـ Ω ، ϵ و α) بحيث

---

[6] الدليل المتعدد multi – index α هو متتالية $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ مع $\alpha_i \geqslant 0$ طبيعي؛ نضع

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i \qquad \text{و} \qquad D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_N}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_N^{\alpha_N}} \varphi \ .$$

obeikandl.com

$$\|D^\alpha u\|_{L^p} \leqslant \epsilon \sum_{|\beta|=m} \|D^\beta u\|_{L^p} + C\|u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{m,p}(\Omega)$$

(انظر مثلا Adams [1] أو [EX]).

2.9. مؤثرات التوسيع

إنه من اللائق غالبا إثبات خواص لدوال من $W^{1,p}(\Omega)$ إبتداء بالحالة حيث $\Omega = \mathbb{R}^N$ (انظر مثلا نتائج من المقطع 3.9). فهو من المفيد إذن معرفة تمديد دالة $u \in W^{1,p}(\Omega)$ إلى دالة $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. هذا الأمر غير ممكن دائما. بيد أنه إذا كانت المجموعة المفتوحة Ω " منتظمة " ، يمكننا إنشاء توسيع كهذا. لنبدأ بتوضيح فكرة المجموعة المفتوحة المنتظمة.

ترميز. ـ لـ $x \in \mathbb{R}^N$ معطى، نكتب

$$x = (x', x_N) \qquad \text{مع} \qquad x' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ ، } \qquad x' = (x_1, x_2, ..., x_{N-1})$$

و نضع

$$|x'| = \Big(\sum_{i=1}^{N-1} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

نكتب

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N); \quad x_N > 0\}\\
&Q = \{x = (x', x_N); \quad |x'| < 1, \quad |x_N| < 1\}\\
&Q_+ = Q \frown \mathbb{R}^N_+\\
&Q_0 = \{x = (x', x_N); \quad |x'| < 1, \quad x_N = 0\}.
\end{aligned}$$

تعريف. ـ نقول بأن مجموعة مفتوحة Ω من الصنف C^1 إذا وجد لكل $x \in \Gamma = \partial\Omega$ جوار neighborhood U لـ x في $\mathbb{R}^N$ و تطبيق متقابل $H : Q \longrightarrow U$ بحيث

$$H \in C^1(\overline{Q}) \text{ ، } \quad H^{-1} \in C^1(\overline{U}) \text{ ، } \quad H(Q_+) = U \frown \Omega \text{ ، } \quad \text{و} \quad H(Q_0) = U \frown \Gamma \text{ .}$$

مبرهنة 7.9. ــ **نفترض بأن** Ω **من الصنف** C^1 **مع** Γ **محدود (أو** $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ **)**.
إذن يوجد مؤثر توسيع أو تمديد

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

خطي، بحيث لكل $u \in W^{1,p}(\Omega)$

1) $Pu_{|\Omega} = u$
2) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{L^p(\Omega)}$
3) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

حيث C **ثابت متعلق بـ** Ω **فقط**.

لنبدأ ببرهان توطئة بسيطة، و لكن أساسية، بالنسبة للتوسيع بالانعكاس.

توطئة 2.9. ــ **لـ** $u \in W^{1,p}(Q_+)$ **معطى، نعرف على** Q **دالة التوسيع بالانعكاس** u^* **، أي**

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & \text{إذا} \quad x_N > 0 \\ u(x', -x_N) & \text{إذا} \quad x_N < 0. \end{cases}$$

إذن $u^* \in W^{1,p}(Q)$ **و**

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leqslant 2\|u\|_{L^p(Q_+)}, \qquad \|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leqslant 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}.$$

إثبات. ــ لنتحقق بأن

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \quad \text{لـ} \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1 \tag{7}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_N} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^\square \tag{8}$$

حيث ترمز $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^*$ إلى توسيع $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ بالانعكاس
و حيث نضع لـ f معرفة على Q_+

$$f^{\square}(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{إذا} \quad x_N > 0 \\ -f(x', x_N) & \text{إذا} \quad x_N < 0. \end{cases}$$

سوف نستعمل المتتالية (η_k) من دوال $C^\infty(\mathbb{R})$ المعرفة بـ

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{إذا} \quad t < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{إذا} \quad t > 1. \end{cases}$$

لنبرهن على (7) ؛ لتكن $\varphi \in C_c^1(Q)$ ، لدينا لـ $1 \leqslant i \leqslant N-1$

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{9}$$

حيث

$$(x', x_N) = \varphi(x', x_N) + \varphi(x', -x_N).$$

عموما، الدالة لا تنتمي إلى $C_c^1(Q_+)$ ، و لا يمكن استعمالها كدالة اختبار test ، بيد أنه

$$\eta_k(x_N) \quad (x', x_N) \in C_c^1(Q_+)$$

و إذن

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \quad) = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \quad .$$

من جهة أخرى $\frac{\partial}{\partial x_i}(\eta_k \quad) = \eta_k \frac{\partial}{\partial x_i}$ ، و بالتالي

$$\int_{Q_+} u \eta_k \frac{\partial}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_k \quad . \tag{10}$$

بالمرور إلى النهاية في (10) عندما $k \longrightarrow \infty$ (بالتقارب المرجح) نحصل على

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad . \tag{11}$$

بالربط بين (9) و (11) يكون لدينا

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad = \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^* \varphi.$$

obeikandi.com

حيث (7) ·

لنبرهن على (8) ؛ لتكن $\varphi \in C_c^1(Q)$ · لدينا

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_N} = \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} \tag{12}$$

حيث

$$\chi(x', x_N) = \varphi(x', x_N) - \varphi(x', -x_N).$$

نلاحظ بأن $\chi(x', 0) = 0$ ، إذن يوجد ثابت M بحيث $|\chi(x', x_N)| \leqslant M|x_N|$ على Q · بما أن $\eta_k \chi \in C_c^1(Q_+)$ فإن

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \chi) = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \eta_k \chi. \tag{13}$$

و لكن

$$\frac{\partial}{\partial x_N}(\eta_k \chi) = \eta_k \frac{\partial \chi}{\partial x_N} + k\eta'(kx_N)\chi. \tag{14}$$

لنثبت أن

$$\int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \longrightarrow 0 \qquad \text{عندما} \qquad k \longrightarrow \infty \cdot \tag{15}$$

بالفعل، لدينا

$$\Big| \int_{Q_+} uk\eta'(kx_N)\chi \Big| \leqslant kMC \int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u| x_N dx \leqslant MC \int_{0<x_N<\frac{1}{k}} |u| dx$$

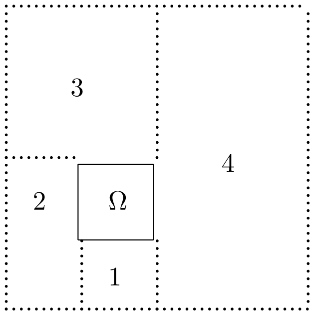
مع $C = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\eta'(t)|$ ؛ و إذن (15) ·

نستنتج من (13) ، (14) و (15) بأن

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_N} = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \chi.$$

أخيرا لدينا

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_N} \chi = \int_Q \Big(\frac{\partial u}{\partial x_N} \Big)^{\square} \varphi. \tag{16}$$



بالربط بين (12) و (16) نحصل على (8) · □

يبقى استنتاج التوطئة 2.9 صحيحا إذا عوضنا Q_+ بـ $\mathbb{R}_+^N$ (لا تغيير في الإثبات) ــ مما يثبت المبرهنة 7.9 لـ $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ ·

* **ملاحظة** .10 ــ تمكننا التوطئة 2.9 من إنشاء مؤثرات لبعض المجموعات المفتوحة التي ليست من الصنف C^1 · ليكن مثلا

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < x_1 < 1, \quad 0 < x_2 < 1\}.$$

ليكن $u \in W^{1,p}(\Omega)$ · بأربعة انعكاسات متتالية نحصل على توسيع $\tilde{u} \in W^{1,p}(\widetilde{\Omega})$ لـ u في

$$\widetilde{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^2; \quad -1 < x_1 < 3, \quad -1 < x_2 < 3\},$$

نحدد دالة $\in C_c^1(\widetilde{\Omega})$ بحيث $= 1$ على Ω · نرمز بـ Pu للدالة $\tilde{u}$ موسعة إلى $\mathbb{R}^2$ بـ 0 خارج $\widetilde{\Omega}$ · نتحقق بسهولة بأن المؤثر $P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ يحقق 1) ، 2) و 3) ·

نستعمل فيما يلي الـ:

توطئة 3.9 **(تجزئة الوحدة)· ــ لتكن Γ مجموعة متراصة من $\mathbb{R}^N$ و U_1 ، U_2 ، ... ، U_k مجموعات مفتوحة بحيث $\Gamma \subset \cup_{i=1}^k U_i$ ·**
إذن توجد دوال θ_0 ، θ_1 ، θ_2 ، ... ، θ_k من $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث

1) $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1 \quad \forall i = 0, 1, 2, ..., k$ **و** $\sum_{i=0}^{k} \theta_i = 1$ **على** $\mathbb{R}^N$

obeikandi.com

$$\left.\begin{array}{r} Supp\theta_i \text{ متراص و } Supp\theta_i\subset U_i \quad \forall i=1,2,...k \\ .Supp\theta_0 \subset \mathbb{R}^N\setminus\Gamma \end{array}\right\} \quad (2$$

عندما تكون Ω مجموعة مفتوحة محدودة و $\Gamma=\partial\Omega$ ، فإن $\theta_{0|\Omega}\in C_c^\infty(\Omega)$.

<u>إثبات</u>. ـ انظر [EX] . هذه التوطئة كلاسيكية؛ سنجد كتابات متقاربة مثلا في Agmon [1] ، Adams [1] ، Folland [1] ، L.Schwartz [1] ، Malliavin [1] . □

<u>إثبات المبرهنة 7.9</u>. ـ نقوم بتحويل Γ بواسطة إحداثيات محلية local coordinate systems و ندخل تجزئة الوحدة[7] . بوضوح أكثر، بما أن Γ متراص و من الصنف C^1 ، فإنه توجد مجموعات مفتوحة $(U_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ من $\mathbb{R}^N$ بحيث $\Gamma\subset\cup_{i=1}^k U_i$ و توجد تطبيقات تقابل $H_i:Q\longrightarrow U_i$ بحيث

$$H_i\in C^1(\overline{Q}) \quad ، \quad H_i^{-1}\in C^1(\overline{U_i}) \quad ، \quad H_i(Q_+)=U_i\frown\Omega \quad \text{و} \quad H_i(Q_0)=U_i\frown\Gamma \ .$$

نعتبر الدوال θ_0 ، θ_1 ، θ_2 ،...، θ_k التي قدمت في التوطئة 3.9 . ليعطى $u\in W^{1,p}(\Omega)$ ، نكتب

$$u=\sum_{i=0}^k\theta_i u=\sum_{i=0}^k u_i \quad ، \quad \text{حيث} \quad u_i=\theta_i u \ .$$

نوسع الآن كل من الدوال u_i إلى $\mathbb{R}^N$ مع التمييز بين u_0 و الـ $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$.

أ) توسيع u_0 . ـ نعرف توسيع u_0 إلى $\mathbb{R}^N$ بـ

$$\bar{u}_0(x)=\left\{\begin{array}{lll} u_0(x) & \text{إذا} & x\in\Omega \\ 0 & \text{إذا} & x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega. \end{array}\right.$$

نذكر بأن $\theta_0\in C^1(\mathbb{R}^N)\frown L^\infty(\mathbb{R}^N)$ و $\nabla\theta_0\in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ بما أن حامل $\nabla\theta_0=-\sum_{i=0}^k\nabla\theta_i$ متراص و $Supp\theta_0\subset\mathbb{R}^N\setminus\Gamma$. ينتج عنه (ملاحظة 4 ب) أن

$$\bar{u}_0\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\bar{u}_0=\theta_0\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}}+\frac{\partial\theta_0}{\partial x_i}\bar{u}_0 \ .$$

---

[7] في كل ما سيلي، سوف نستعمل في أغلب الأحيان هذه التقنية للانتقال من نتيجة مبرهنة على $\mathbb{R}_+^N$ (أو Q_+) إلى نفس الاستنتاج على Ω مجموعة مفتوحة منتظمة.

obeikandi.com

إذن

$$\|\bar{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

ب) توسيع الـ u_i ، $1 \leqslant i \leqslant k$. ـ نعتبر اقتصار u على $U_i \frown \Omega$ و " ننقل " هذه الدالة على Q_+ بواسطة H_i ؛ بتوضيح أكثر نضع $v_i(y) = u(H_i(y))$ لـ $y \in Q_+$. نعرف (قضية 6.9) بأن $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. نعرف بعد ذلك على Q التوسيع بالانعكاس لـ v_i (توطئة 2.9)، ليكن v_i^* ؛ نعلم بأن $v_i^* \in W^{1,p}(Q)$. " ننقل " مرة أخرى v_i^* على U_i بواسطة H_i^{-1} ، ليكن

$$w_i(x) = v_i^*[H_i^{-1}(x)] \qquad \text{لـ} \qquad x \in U_i \,.$$

لدينا إذن $w_i \in W^{1,p}(U_i)$ ، $w_i = u$ على $U_i \frown \Omega$ و

$$\|w_i\|_{W^{1,p}(U_i)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(U_i \frown \Omega)}.$$

أخيرا، نضع لـ $x \in \mathbb{R}^N$

$$\hat{u}_i(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \theta_i(x)w_i(x) & \text{إذا} & x \in U_i \\ 0 & \text{إذا} & x \in \mathbb{R}^N \setminus U_i ، \end{array} \right.$$

بحيث $\hat{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (ملاحظة 4 ب)، $\hat{u}_i = u_i$ على Ω و

$$\|\hat{u}_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U_i \frown \Omega)}.$$

خلاصة. ـ يملك المؤثر $Pu = \bar{u}_0 + \sum_{i=1}^{k} \hat{u}_i$ كل الخواص المرجوة. $\square$

• **لازمة** 8.9 **(كثافة).** ـ **نفترض** Ω **من الصنف** C^1 . **ليكن** $u \in W^{1,p}(\Omega)$ **مع** $1 \leqslant p < \infty$. **إذن توجد متتالية** (u_n) **من** $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ **بحيث** $u_{n|\Omega} \longrightarrow u$ **في** $W^{1,p}(\Omega)$. **بعبارة أخرى، تشكل اقتصارات دوال** $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ **إلى** Ω **فضاء جزئيا كثيفا في** $W^{1,p}(\Omega)$.

إثبات. ـ لنفرض أولا أن Γ محدود. يوجد إذن مؤثر توسيع P (مبرهنة 7.9). تتقارب

[8] (ρ_n) متتالية تنظيمية و (ζ_n) متتالية باترة مثلما عرفناها في إثبات المبرهنة 2.9 .

Obeikandl.com

المتتالية[8] $\zeta_n(\rho_n * Pu)$ نحو Pu في $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ و بالتالي تجيب على السؤال. عندما يكون Γ غير محدود، نبدأ باعتبار المتتالية $\zeta_n u$ ؛ لـ $\epsilon > 0$ معطى، نثبت n_0 بحيث $\|\zeta_{n_0}u - u\|_{W^{1,p}} < \epsilon$. يمكننا إذن إنشاء توسيع $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ لـ $\zeta_{n_0}u$ [بما أنه لا يقع سوى تقاطع لـ Γ مع كرة كبيرة]. ننشئ أخيرا $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث $\|w - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < \epsilon$. □

3.9. متباينات صوبوليف

رأينا في الفصل 8 أنه إذا كان Ω أحادي البعد، فإن $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$ مع تباين مستمر. بالنسبة للبعد $N \geqslant 2$ ، يبقى هذا الإحتواء صحيحا فقط لـ $p > N$ ؛
عندما يكون $p \leqslant N$ ، يمكننا إنشاء أمثلة لدوال من $W^{1,p}$ لا تنتمي إلى L^∞ (انظر الملاحظة 17 و [EX]). إلا أن نتيجة مهمة، تعود أساسا إلى صوبوليف، تؤكد بأنه إذا كان $1 \leqslant p < N$ فإن $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ مع تباين مستمر لإحدى القيم $p^* \in]p, +\infty[$.

لنبدأ باعتبار الـ:

ا. حالة حيث $\Omega = \mathbb{R}^N$.

• **مبرهنة** 9.9. ـ (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) . **ـ ليكن** $1 \leqslant p < N$ ، **فإن**

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \qquad \text{حيث } p^* \text{ معطى بـ} \qquad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

و يوجد ثابت $C = C(p, N)$[9] **بحيث**

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{17}$$

---

[9] يمكننا أخذ $C(p,N) = \dfrac{(N-1)p}{N-p}$ ، و لكن هذا الثابت ليس بالأمثل؛ القيمة الأفضل معروفة (و معقدة !)، انظر Th.Aubin [1] ، Talenti [1] و Lieb [1] .

obeikandi.com

ملاحظة 11. ـ يمكن الحصول على القيمة p^* عن طريق حجة التجانس السهلة (تذكر أن الاستدلالات بالتجانس تعطي أحيانا معلومات مهمة بأقل جهد). فبالفعل إذا وجدت ثوابت C و $1 \leqslant q \leqslant \infty$ تحقق

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{18}$$

فإنه من الضروري أن يكون $q = p^*$. حتى نرى ذلك، نختار في (18) $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ $(\lambda > 0)$ عوضا من u . نحصل على

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C\lambda^{\left(1+\frac{N}{q}-\frac{N}{p}\right)}\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall\lambda > 0,$$

مما يستلزم $q = p^*$.

في إثبات المبرهنة 9.9 ، سوف نستعمل الـ

توطئة 4.9. ـ **ليكن** $N \geqslant 2$ **و** $f_1, f_2, ...f_N \in L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})$. **لـ** $x \in \mathbb{R}^N$ **و** $1 \leqslant i \leqslant N$ **نضع**

$$\tilde{x}_i = (x_1, x_2, ...x_{i-1}, x_{i+1}, ...x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

إذن الدالة

$$f(x) = f_1(\tilde{x}_1)f_2(\tilde{x}_2)...f_N(\tilde{x}_N), \qquad x \in \mathbb{R}^N$$

تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^N)$ **و**

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant \prod_{i=1}^{N}\|f_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

<u>إثبات</u> ـ الحالة $N = 2$ سهلة. لنعتبر الحالة $N = 3$ ؛ لدينا

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx_3 = |f_3(x_1, x_2)|\int_{\mathbb{R}}|f_1(x_2, x_3)||f_2(x_1, x_3)|dx_3$$
$$\leqslant |f_3(x_1, x_2)|\Big(\int_{\mathbb{R}}|f_1(x_2, x_3)|^2dx_3\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}}|f_2(x_1, x_3)|^2dx_3\Big)^{1/2}$$

(بكوشي - شفارتز). بتطبيق مجددا متباينة كوشي - شفارتز لدينا

obeikandl.com

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|dx \leqslant \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

يحصل على الحالة العامة بالاستقراء؛ لنتقبل النتيجة لـ N و لنبرهن عليها لـ $(N+1)$. نثبت x_{N+1} ؛ بفضل متباينة هولدر لدينا

$$\int |f(x)|dx_1 dx_2 ... dx_N \leqslant \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \Big[\int |f_1.f_2...f_N|^{N'} dx_1...dx_N \Big]^{1/N'}$$

$$\Big(N' = \frac{N}{N-1}\Big).$$

بتطبيق فرضية الاستقراء للدوال $|f_1|^{N'}$ ، $|f_2|^{N'}$ ،... $|f_N|^{N'}$ ، يأتي

$$\int |f_1|^{N'} ... |f_N|^{N'} dx_1...dx_N \leqslant \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|^{N'}_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

بالتالي

$$\int |f(x)|dx_1...dx_N \leqslant \|f_{N+1}\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

نقوم الآن بتغيير x_{N+1} ؛ كل من الدوال $x_{N+1} \longmapsto \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ تنتمي إلى $L^N(\mathbb{R})$ ، $1 \leqslant i \leqslant N$. بالتالي الجداء $\prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^{N-1})}$ ينتمي إلى $L^1(\mathbb{R})$ (انظر الملاحظة 2 التي تتبع متباينة هولدر في الفصل 4) و

$$\int |f(x)|dx_1...dx_N dx_{N+1} \leqslant \prod_{i=1}^{N+1} \|f_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.$$

□

إثبات المبرهنة 9.9 ــ لنبدأ بالحالة $p = 1$ مع $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. لدينا

$$|u(x_1, x_2, ...x_N)| = \Big| \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ...x_N)dt \Big| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_1}(t, x_2, ...x_N) \Big| dt$$

و كذلك لـ $1 \leqslant i \leqslant N$

$$|u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ...x_N) \Big| dt \overset{\text{تعريف}}{\equiv} f_i(\tilde{x}_i).$$

إذن

$$|u(x)|^N \leqslant \prod_{i=1}^{N} f_i(\tilde{x}_i).$$

نستنتج من التوطئة 4.9 بأن

$$\int |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} dx \leqslant \prod_{i=1}^{N} \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}} = \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}}.$$

بالتالي لدينا

$$\|u\|_{L^{N/(N-1)}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}}. \tag{19}$$

ليكن $t \geqslant 1$ ؛ نطبق (19) على $|u|^{t-1}u$ عوضا عن u . نحصل على:

$$\|u\|_{L^{tN/(N-1)}}^{t} \leqslant t \prod_{i=1}^{N} \left\| |u|^{t-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1}^{\frac{1}{N}} \leqslant t \|u\|_{L^{p'(t-1)}}^{t-1} \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^{\frac{1}{N}}. \tag{20}$$

نختار إذن t بحيث $\frac{tN}{N-1} = p'(t-1)$ ، و هذا يعطي $t = \frac{N-1}{N} p^*$ ($t \geqslant 1$ لأن $1 \leqslant p < N$).
نحصل على

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leqslant t \prod_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^{\frac{1}{N}}.$$

إذن

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

ليكن الآن $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ؛ نعلم أنه توجد متتالية $(u_n) \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. يمكننا كذلك افتراض (باشتقاق متتالية جزئية عند الحاجة) أن $u_n \longrightarrow u$ حـ.ت. لدينا لكل n ،

$$\|u_n\|_{L^{p^*}} \leqslant C \|\nabla u_n\|_{L^p}.$$

يستخلص من توطئة فاتو[10] أن

[10] يمكننا الحصول على نفس النتيجة بملاحظة أن المتتالية (u_n) لكوشي في L^{p^*} .

obeikandi.com

$$u \in L^{p^*} \qquad \text{و} \qquad \|u\|_{L^{p^*}} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \cdot$$

□

• **لازمة** 10.9. ـ **ليكن** $1 \leqslant p < N$ · **إذن**

$$\forall q \in [p, p^*] \qquad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$$

مع تباين مستمر.

إثبات ـ لـ $p \leqslant q \leqslant p^*$ معطى، نكتب

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*} \qquad \text{مع} \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \cdot$$

نعرف (انظر ملاحظة 2.9) بأن

$$\|u\|_{L^q} \leqslant \|u\|_{L^p}^{\alpha} \|u\|_{L^{p^*}}^{1-\alpha} \leqslant \|u\|_{L^p} + \|u\|_{L^{p^*}}$$

(حسب متباينة يونغ). نستخلص بفضل المبرهنة 9.9 بأن

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

□

• **لازمة** 11.9 (**الحالة** $p = N$). ـ **لدينا**

$$\forall q \in [N, +\infty[\qquad W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$$

مع تباين مستمر.

إثبات ـ لنفرض أن $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ ؛ بتطبيق (20) مع $p = N$ يكون لدينا

$$\|u\|_{L^{tN/(N-1)}}^t \leqslant t\|u\|_{L^{(t-1)N/(N-1)}}^{t-1} \|\nabla u\|_{L^N} \qquad \forall t \geqslant 1$$

بفضل متباينة يونغ نحصل على

obeikandi.com

$$\|u\|_{L^{tN/(N-1)}} \leqslant C(\|u\|_{L^{(t-1)N/(N-1)}} + \|\nabla u\|_{L^N}). \tag{21}$$

في (21) نختار $t = N$ ؛ نحصل على

$$\|u\|_{L^{N^2/(N-1)}} \leqslant C\|u\|_{W^{1,N}}$$

و بواسطة متباينة الاستكمال (ملاحظة 2.4) لدينا

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{W^{1,N}}$$

لكل $N \leqslant q \leqslant \dfrac{N^2}{N-1}$ ·
بتكرار هذا الاستدلال مع $t = N+1$ ، $t = N+2$ إلخ ··· نصل إلى

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{W^{1,N}} \qquad \forall u \in C_c^1, \qquad \forall N \leqslant q < \infty \tag{23}$$

مع ثابت C يتعلق بـ q و N [11] · تمتد المتباينة (23) بالكثافة إلى $W^{1,N}$ · □

• مبرهنة 12.9 (Morrey) · **ــ ليكن $p > N$ ، إذن**

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N) \tag{24}$$

مع تباين مستمر·
بالإضافة إلى ذلك، لكل $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ لدينا

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha \|\nabla u\|_{L^p} \qquad \text{ح· ت·} \qquad x, y \in \mathbb{R}^N \tag{25}$$

مع $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ و C ثابت (يتعلق فقط بـ p و N)·

ملاحظة 12. ــ تستلزم المتباينة (25) وجود دالة $\tilde{u} \in C(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u = \tilde{u}$ حـ· ت· على $\mathbb{R}^N$ · [بالفعل، لتكن $A \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة ذات قياس صفري بحيث (25) محققة لـ $x, y \in \mathbb{R}^N \setminus A$ ؛ بما أن $\mathbb{R}^N \setminus A$ كثيف في $\mathbb{R}^N$ ، يقبل $u_{|\mathbb{R}^N \setminus A}$ توسيعا (وحيدا) مستمرا إلى $\mathbb{R}^N$]· بعبارة أخرى، كل دالة $u \in W^{1,p}$ ، $p > N$ ، تقبل ممثلا مستمرا· فيما يلي، نعوض بشكل منتظم u بممثلها المستمر عندما تقتضي الحاجة لذلك·

[11] و الذي " ينفجر " عندما $q \longrightarrow +\infty$ ·

إثبات ـ نبدأ بإثبات (25) لـ $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. ليكن Q مكعبا مفتوحا، محتو على 0 ، حيث أضلاعه ـ طول الضلع r ـ متوازية إلى محاور الإحداثيات.
لـ $x \in Q$ لدينا

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt$$

و بالتالي

$$|u(x) - u(0)| \leqslant \int_0^1 \sum_{i=1}^N |x_i| \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big| dt \leqslant r \sum_{i=1}^N \int_0^1 \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big| dt. \tag{26}$$

لنضع $\bar{u} = \frac{1}{|Q|} \int u(x)dx$ ($\bar{u}$ هو متوسط u على Q). بمكاملة (26) على Q نحصل على

$$\begin{aligned} |\bar{u} - u(0)| &\leqslant \frac{r}{|Q|} \int_Q dx \sum_{i=1}^N \int_0^1 \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big| dt \\ &= \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 dt \int_Q \sum_{i=1}^N \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \Big| dx = \frac{1}{r^{N-1}} \int_0^1 dt \int_{tQ} \sum_{i=1}^N \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \Big| \frac{dy}{t^N}. \end{aligned}$$

بيد أنه، استنادا إلى متباينة هولدر، لدينا

$$\int_{tQ} \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i}(y) \Big| dy \leqslant \Big(\int_Q \Big| \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|^p \Big)^{1/p} |tQ|^{1/p'}$$

(بما أن $tQ \subset Q$ لـ $0 < t < 1$).
نستنتج أنه

$$|\bar{u} - u(0)| \leqslant \frac{1}{r^{N-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{N/p'} \int_0^1 \frac{t^{N/p'}}{t^N} dt = \frac{r^{1-N/p}}{1 - N/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}.$$

تبقى هذه المتباينة صحيحة لكل مكعب Q ، قياس ضلعه r و أضلاعه متوازية مع محاور الإحداثيات؛ بالتالي

$$|\bar{u} - u(x)| \leqslant \frac{r^{1-N/p}}{1 - N/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \forall x \in Q. \tag{27}$$

بالجمع (و متباينة المثلث) لدينا

$$|u(x)-u(y)| \leqslant \frac{2r^{1-N/p}}{1-N/p}\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \qquad \forall x \in Q. \tag{28}$$

لنقطتين كيفيتين x ، y من $\mathbb{R}^N$ يوجد مكعب Q طول ضلعه $r=2|x-y|$ محتو على x و y . نستنتج إذن (25) لـ $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. عندما $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ نستعمل متتالية (u_n) من $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ و $u_n \longrightarrow u$ حـ. ت.

لنثبت الآن (24) . ليكن $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ ، $x \in \mathbb{R}^N$ و Q مكعب طول ضلعه $r=1$ محتو على x . حسب (27) ، لدينا

$$|u(x)| \leqslant |\bar{u}| + C\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

حيث يرتبط C بـ p و N فقط. إذن

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

عندما $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ نستعمل متتالية (u_n) من $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ و حـ. ت. $\square$

ملاحظة 13. ـ نستنتج من (24) بأنه إذا $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ مع $N < p < \infty$ ، فإن

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

فبالفعل توجد متتالية (u_n) في $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ؛ استنادا إلى (24) تعتبر كذلك u نهاية منتظمة uniform على $\mathbb{R}^N$ لـ u_n .

• **لازمة** 13.9. **ـ ليكن** $m \geqslant 1$ **عددا طبيعيا و** $1 \leqslant p < \infty$. **لدينا**

إذا $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} > 0$ ، **فإن** $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ **حيث** $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$ ،

إذا $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} = 0$ ، **فإن** $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N)$ $\forall q \in [p, +\infty[$ ،

إذا $\frac{1}{p} - \frac{m}{N} < 0$ ، **فإن** $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ،

مع تباينات مستمرة.

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $m - \frac{N}{p} > 0$ **غير طبيعي، نضع**

$$k = \left[m - \frac{N}{p}\right] \qquad \text{و} \qquad \theta = \left[m - \frac{N}{p}\right] - k \qquad (0 < \theta < 1)\ \cdot$$

لدينا، لكل $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ [12]

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty} \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}} \qquad \forall \alpha \qquad \text{مع} \qquad |\alpha| \leqslant k$$

و

$$|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|^\theta \quad \text{حـ. ت.} \quad x, y \in \mathbb{R}^N \ \text{،}\ \forall \alpha \ \text{،}\ |\alpha| = k\ \cdot$$

و بالخصوص $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C^k(\mathbb{R}^N)$.[13]

<u>إثبات</u> ــ يحصل على كل هذه النتائج بتطبيق متكرر للمبرهنة 9.9 ، للازمة 11.9 و للمبرهنة 12.9 · □

* **ملاحظة** 14. ــ الحالة $p = 1$ و $m = N$ جد خاصة: لدينا $W^{N,1} \subset L^\infty$ · فبالفعل ليكن $u \in C_c^\infty$ ؛ لدينا

$$u(x_1, x_2, ...x_N) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}...\int_{-\infty}^{x_N} \frac{\partial^N u}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_N}(t_1, t_2, ...t_N)dt_1dt_2...dt_N$$

و إذن

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{W^{N,1}} \qquad \forall u \in C_c^\infty. \tag{29}$$

إذا $u \in W^{N,1}$ ، نستعمل الكثافة· □

لنعتبر الآن الـ:

ب· حالة حيث $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ · ــ نعتبر Ω مجموعة مفتوحة من الصنف C^1 مع Γ محدود، أو $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ ·

---

[12] و منه يستنتج بأن $|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)| \leqslant C\|u\|_{W^{m,p}}|x-y|$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^N$ و $\forall \alpha$ مع $|\alpha| < k$ ·

[13] تقريبا و باختيار ممثل مستمر·

obeikandi.com

• لازمة 14.9. **ـ ليكن** $1 \leqslant p \leqslant \infty$ **. لدينا**

إذا $1 \leqslant p < N$ ، **فإن** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ **حيث** $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ،

إذا $p = N$ ، **فإن** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{q}(\Omega)$ $\forall q \in [p, +\infty[$ ،

إذا $p > N$ ، **فإن** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega)$ ،

مع تباينات مستمرة.

بالإضافة إلى ذلك، إذا كان $p > N$ **فإنه لدينا لكل** $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}}|x-y|^{\alpha} \qquad \text{ح. ت.} \qquad x, y \in \Omega$$

مع $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ **و** C **مرتبط فقط بـ** Ω ، p **و** N **. و بالخصوص** $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.[14]

إثبات ـ ندخل مؤثر التوسيع

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

(انظر المبرهنة 7.9)؛ نطبق بعد ذلك المبرهنة 9.9 ، اللازمة 11.9 و المبرهنة 12.9 . □

• لازمة 15.9. **ـ يبقى استنتاج اللازمة** 14.9 **صحيحا إذا عوضنا** $\mathbb{R}^N$ **بـ** Ω .[15]

[14] تقريبا و باختيار ممثل مستمر.

[15] لنوضح بأنه إذا كان $m - \frac{N}{p} > 0$ غير طبيعي، فإن

$$W^{m,p}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \qquad \text{حيث} \qquad k = \left[m - \frac{N}{p}\right]$$

و $C^k(\overline{\Omega}) = \{\ u \in C^k(\Omega)$ ؛ $D^{\alpha}u$ يقبل توسيعا مستمرا على $\overline{\Omega}$ لكل α مع $|\alpha| \leqslant k\ \}$.

[16] بإمكاننا أيضا تطبيق اللازمة 13.9 مباشرة، و لكن هذا يتطلب افتراضا إضافيا: يلزمنا أن تكون Ω من الصنف C^m حتى يتمكن لنا إنشاء مؤثر التوسيع $P : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

obeikandi.com

إثبات ـ بتطبيق مكرر للازمة 14.9[16] . □

• **مبرهنة** 16.9 (Rellich – Kondrachov) . ـ **نفترض** Ω **محدودة و من الصنف** C^1 . **لدينا**

إذا $p < N$ ، **فإن** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ **حيث** $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$ ،

إذا $p = N$ ، **فإن** $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$ ،

إذا $p > N$ ، **فإن** $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ ،

مع تباينات متراصة.[17]

إثبات ـ تستنتج الحالة $p > N$ من اللازمة 14.9 و من مبرهنة أسكولي. يمكن إرجاع الحالة $p = N$ إلى الحالة $p < N$.

لنفرض إذن $p < N$. نطبق اللازمة 26.4 مع اعتبار $\mathcal{F}$ كرة الوحدة لـ $W^{1,p}(\Omega)$.

التحقق من (23.4) . ـ بما أن $1 \leqslant q < p^*$ فيمكننا كتابة

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{1} + \frac{1-\alpha}{p^*} \qquad \text{مع} \qquad 0 < \alpha \leqslant 1 \ .$$

ليكن $\omega \subset\subset \Omega$ ، $u \in \mathcal{F}$ و $|h| < dist(\omega, C^{\Omega})$. بفضل متباينة الاستكمال (ملاحظة 2.4) لدينا

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant \|\tau_h u - u\|^{\alpha}_{L^1(\omega)} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\omega)}.$$

بيد أنه استنادا إلى القضية 3.9 لدينا $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\omega)} \leqslant |h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$. بالتالي

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} \leqslant (|h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)})^{\alpha} (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \leqslant C|h|^{\alpha}$$

(طبق متباينة هولدر و اللازمة 14.9). نستخلص بأنه $\|\tau_h u - u\|_{L^q(\omega)} < \epsilon$ لـ $|h|$ صغير بما فيه الكفاية.

التحقق من (24.4) . ـ ليكن $u \in \mathcal{F}$ ؛ حسب متباينة هولدر لدينا

$$\|u\|_{L^q(\Omega \setminus \omega)} \leqslant \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \omega)} |\Omega \setminus \omega|^{1-\frac{q}{p^*}} \leqslant |\Omega \setminus \omega|^{1-\frac{q}{p^*}} < \epsilon$$

[17] و بالخصوص $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ مع تباينات متراصة لكل p .

obeikandi.com

لـ ω مختارة بطريقة مناسبة[18] . $\square$

ملاحظة 15. ـ تعد المبرهنة 16.9 قصوى " تقريبا " بهذا المعنى:

1) إذا كانت Ω غير محدودة فإنه، عموما، التباين $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ غير متراص[19] .

2) التباين $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ ليس متراصا بالضرورة حتى إذا كانت Ω محدودة و منتظمة (انظر [EX]).

* **ملاحظة** 16. ـ لتكن Ω محدودة من الصنف C^1 . إذن لكي يكافئ النظيم

$$|||u||| = \|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^q}$$

نظيم $W^{1,p}$ يكفي أن

$$\begin{array}{lll} 1 \leqslant q \leqslant p^* & \text{إذا} & 1 \leqslant p < N \\ 1 \leqslant q < \infty & \text{إذا} & p = N \\ 1 \leqslant q \leqslant \infty & \text{إذا} & p > N \end{array}$$

(انظر [EX]).

* **ملاحظة** 17 (الحد النهائي $p = N$). ـ لتكن Ω محدودة من الصنف C^1 و $u \in W^{1,N}(\Omega)$. فإنه عموما $u \notin L^\infty(\Omega)$. فمثلا إذا

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| < 1/2\}$$

فإن الدالة $u(x) = \left(log\dfrac{1}{|x|}\right)^\alpha$ مع $0 < \alpha < 1 - \dfrac{1}{N}$ تنتمي إلى $W^{1,N}(\Omega)$ (انظر [EX])، و لكن ليست محدودة بسبب الشذوذ singularity عند $x = 0$. بيد أنه لدينا متباينة Trudinger

$$\int_\Omega e^{|u|N(N-1)} < \infty \qquad \forall u \in W^{1,N}(\Omega)$$

(انظر Adams [1] و Gilbarg – Trudinger [1]).

---

[18] مثلا $\omega = \{x \in \Omega;\ dist(x, \Gamma) > \delta\}$ و $\delta > 0$ صغير بما فيه الكفاية (طبق مبرهنة التقارب ذي الرتابة أو التقارب المحصور).

[19] حتى بالنسبة لبعض المجموعات المفتوحة ذات القياس المتهي و ذو الحد المنتظم (انظر Adams [1] صفحة 167).

opeikandi.com

4.9. فضاء $W_0^{1,p}(\Omega)$

تعريف. ـ ليكن $1 \leqslant p < \infty$ ؛ $W_0^{1,p}(\Omega)$ يرمز إلى إغلاقة $C_c^1(\Omega)$ في $W^{1,p}(\Omega)$ ، و ندون[20]

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

فضاء $W_0^{1,p}$ المزود بالنظيم المنتج من $W^{1,p}$ هو فضاء بناخ، قابل للفصل؛ و انعكاسي لـ $1 < p < \infty$. H_0^1 هو فضاء هلبرت للجداء السلمي المنتج من H^1 .

* **ملاحظة** 18. ـ بما أن $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ كثيف في $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ، لدينا

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

بيد أنه إذا $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ، فإنه عموما $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$. و لكن إذا كان $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ " ضعيفا بما فيه الكفاية " و $p < N$ ، فإنه لدينا $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. فمثلا إذا $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ و $N \geqslant 2$ نثبت أن $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$ (انظر [EX]).

ملاحظة 19. ـ نتحقق بسهولة ـ بواسطة متتالية تنظيمية (ρ_n) ـ بأن $C_c^\infty(\Omega)$ كثيف في $W_0^{1,p}(\Omega)$. بعبارة أخرى بإمكاننا استعمال دون تفريق $C_c^\infty(\Omega)$ عوضا عن $C_c^1(\Omega)$ في تعريف $W_0^{1,p}(\Omega)$.

إن دوال $W_0^{1,p}(\Omega)$ " بشكل مضخم " هي دوال $W^{1,p}(\Omega)$ التي " تنعدم على $\Gamma = \partial\Omega$ " . إنه من الصعب إعطاء معنى لهذه العبارة مادامت دالة $u \in W^{1,p}(\Omega)$ معرفة فقط حـ. ت. (بيد أن Γ ذات قياس صفري !) و ليس لـ u ممثلا مستمرا[21] . غير أنه تقترح المميزات التالية بأننا " سنتعامل " مع دوال " منعدمة على Γ " . لنبدأ بـ

[20] عندما لا يكون أي غموض نكتب $W_0^{1,p}$ و H_0^1 عوضا عن $W_0^{1,p}(\Omega)$ و $H_0^1(\Omega)$.

[21] غير أنه إذا $u \in W^{1,p}(\Omega)$ يمكننا إعطاء معنى لـ $u_{|\Gamma}$ (عندما تكون Ω منتظمة) و إثبات أن $u_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)$ ؛ من أجل هذا يجب استدعاء نظرية الأثر traces (انظر التعاليق في هذا الفصل).

obeikandi.com

توطئة 5.9. ـ **ليكن** $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ، $1 \leqslant p < \infty$ ، **مع** $Suppu$ **متراص، محتو في** Ω ، **فإن** $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

إثبات ـ نثبت مجموعة مفتوحة ω بحيث $Suppu \subset \omega \subset\subset \Omega$ و نختار $\alpha \in C_c^1(\omega)$ بحيث $\alpha = 1$ على $Suppu$ ؛ إذن $\alpha u = u$. من جهة أخرى (مبرهنة 2.9) توجد متتالية (u_n) في $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $L^p(\Omega)$ و $\nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ في $L^p(\omega)^N$. بالتالي $\alpha u_n \longrightarrow \alpha u$ في $W^{1,p}(\Omega)$ و $\alpha u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. يستنتج أنه $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

مبرهنة 17.9. ـ **نفترض بأن** Ω **من الصنف** C^1 . **ليكن**[22]

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \frown C(\overline{\Omega}) \quad \text{مع} \quad 1 \leqslant p < \infty \ .$$

إذن الخاصيتان التاليتان متكافئتان:

1) $u = 0$ **على** Γ

2) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

إثبات ـ **1**) $\Longleftarrow$ **2**). لنفرض أولا أن $Suppu$ محدود. نثبت دالة $G \in C^1(\mathbb{R})$ بحيث

$$|G(t)| \leqslant |t| \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad G(t) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{إذا} & |t| \leqslant 1 \\ t & \text{إذا} & |t| \geqslant 2 . \end{array} \right.$$

إذن $u_n = \dfrac{1}{n} G(nu)$ تنتمي إلى $W^{1,p}$ (قضية 5.9). نتحقق بسهولة (بواسطة مبرهنة التقارب المرجح) بأن $u_n \to u$ في $W^{1,p}$. من جهة أخرى

[22] إذا $p > N$ ، فإن $u \in W^{1,p} \Longrightarrow u \in C(\overline{\Omega})$ (انظر اللازمة 14.9).

$$Suppu_n \subset \{x \in \Omega; \quad |u(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}$$

و إذن $Suppu_n$ متراص محتو في Ω · استنادا إلى التوطئة 5.9 ، $u_n \in W_0^{1,p}$ و بالتالي $u \in W_0^{1,p}$ · في الحالة العامة حيث $Suppu$ غير محدود، نعتبر المتتالية $\zeta_n u$ ، " باترات u " ، (مثل ζ_n في إثبات المبرهنة 2.9)· حسب ما سبق $\zeta_n u \in W_0^{1,p}$ و من جهة أخرى $\zeta_n u \longrightarrow u$ في $W^{1,p}$ ؛ إذن $u \in W_0^{1,p}$ ·

2) $\Longleftarrow$ **1)**. بواسطة منظومة إحداثيات محلية نرجع المسألة إلى التالي· ليكن $u \in W_0^{1,p}(Q_+) \frown C(\overline{Q}_+)$ ؛ أثبت أن $u = 0$ على Q_0 ·
لتكن (u_n) متتالية من $C_c^1(Q_+)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}(Q_+)$ ·
لدينا، لـ $(x', x_N) \in Q_+$

$$|u_n(x', x_N)| \leqslant \int_0^{x_N} \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t)\Big| dt$$

و إذن لـ $0 < \epsilon < 1$

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^{\epsilon} |u_n(x', x_N)| dx' dx_N \leqslant \int_{|x'|<1}\int_0^{\epsilon} \Big|\frac{\partial u_n}{\partial x_N}(x', t)\Big| dx' dt.$$

عند النهاية، لما $n \longrightarrow \infty$ ($\epsilon > 0$ مثبت) نحصل على

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^{\epsilon} |u(x', x_N)| dx' dx_N \leqslant \int_{|x'|<1}\int_0^{\epsilon} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x', t)\Big| dx' dt.$$

أخيرا، لما $\epsilon \longrightarrow 0$ ينتج

$$\int_{|x'|<1} |u(x', 0)| dx' = 0$$

(بما أن $u \in C(\overline{Q}_+)$ و $\frac{\partial u}{\partial x_N} \in L^1(Q_+)$)· إذن $u = 0$ على Q_0 · $\square$

ملاحظة 20. ـ في إثبات 1) $\Longleftarrow$ 2) لم نستعمل انتظام Ω · بيد أن العكس 2) $\Longleftarrow$ 1) يتطلب فرضية انتظام Ω (اعتبر مثلا $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ مع $N \geqslant 2$ و $p \leqslant N$ ؛ انظر [EX])·

هذه خاصية أخرى لـ $W_0^{1,p}$ ؛

obeikandi.com

قضية 18.9. ـ **نفترض** Ω **من الصنف** C^1 ، **ليكن** $u \in L^p(\Omega)$ **مع** $1 < p < \infty$ ،
الخواص التالية متكافئة

1) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ،

2) **يوجد ثابت** C **بحيث**

$$\Big|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}} \qquad \forall\varphi\in C_c^1(\mathbb{R}^N), \qquad \forall i=1,2,...N.$$

3) **الدالة** $\bar{u}(x) = \left\{\begin{array}{ll} u(x) & x\in\Omega \\ 0 & x\in\mathbb{R}^N\setminus\Omega \end{array}\right.$

تنتمي إلى $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ **و في هذه الحالة** $\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial x_i} = \overline{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$ ،

<u>إثبات</u> ـ **1**) $\Longleftarrow$ **2**). لتكن (u_n) متتالية من $C_c^1(\Omega)$ بحيث $u_n \longrightarrow u$ في $W^{1,p}$ ، لـ $\varphi\in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ لدينا

$$\Big|\int_\Omega u_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big| = \Big|\int_\Omega \frac{\partial u_n}{\partial x_i}\varphi\Big| \leqslant \|\nabla u_n\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

عند النهاية، نحصل على 2) .

2) $\Longleftarrow$ **3**). ليكن $\varphi\in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ ؛ لدينا

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^N}\bar{u}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big| = \Big|\int_\Omega u\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\Big| \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}.$$

إذن $\bar{u}\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (حسب القضية 3.9).

3) $\Longleftarrow$ **1**). يمكننا دائما افتراض أن Ω محدودة (و إلا نعتبر باترات $\zeta_n u$ لـ u). بواسطة منظومة إحداثيات محلية و تجزئة الوحدة نعود إلى المسألة التالية : ليكن $u\in L^p(Q_+)$ ؛ نفترض أن الدالة

$$\bar{u}(x) = \left\{\begin{array}{lll} u(x) & x\in Q \text{ ،} & x_N>0 \\ 0 & x\in Q \text{ ،} & x_N<0 \end{array}\right.$$

تنتمي إلى $W^{1,p}(Q)$ ؛ أثبت أن

obeikandl.com

$$\alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+) \qquad \forall \alpha \in C_c^1(Q).$$

لتكن (ρ_n) متتالية منظمة بحيث

$$Supp\rho_n \subset \{x \in \mathbb{R}^N;\ \frac{1}{2n} < x_N < \frac{1}{n}\};$$

يمكننا مثلا اختيار

$$\rho_n(x) = n^N \rho(nx) \qquad \text{و} \qquad Supp\rho \subset \{x \in \mathbb{R}^N;\ \frac{1}{2} < x_N < 1\}\ \cdot$$

إذن $(\alpha\bar{u}) \longrightarrow (\alpha\bar{u})$ $\rho_n * (\alpha\bar{u}) \longrightarrow (\alpha\bar{u})$ في $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ · (لاحظ أن $\alpha\bar{u}$ موسعة بـ 0 خارج Q تنتمي إلى $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$)· من جهة أخرى

$$Supp(\rho_n * \alpha\bar{u}) \subset Supp\rho_n + Supp(\alpha\bar{u}) \subset Q_+$$

لـ n كبير بما فيه الكفاية· بالتالي

$$\rho_n * (\alpha\bar{u}) \in C_c^1(Q_+) \qquad \text{و إذن} \qquad \alpha u \in W_0^{1,p}(Q_+)\ \cdot$$

$\square$

ملاحظة 21. ـ يستدعي إثبات اللازمة 14.9 إلى مؤثر توسيع و لهذا كان علينا افتراض Ω منتظمة· إذا عوضنا $W^{1,p}(\Omega)$ بـ $W_0^{1,p}(\Omega)$ ، فبوسعنا استعمال التوسيع القانوني بـ 0 خارج Ω ، و هو ممكن لمجموعة مفتوحة كيفية (لاحظ أن، في إثبات القضية 18.9 ، الالتزام 1) $\Longleftarrow$ 3) لا يستعمل أي افتراض انتظام على Ω)· يستنتج بالخصوص أن اللازمة 14.9 صحيحة لـ $W_0^{1,p}(\Omega)$ مع Ω مجموعة مفتوحة كيفية؛ المبرهنة 16.9 صحيحة لـ $W_0^{1,p}(\Omega)$ مع Ω مجموعة مفتوحة محدودة كيفية· نستنتج أيضا من المبرهنة 9.9 أنه إذا كانت Ω مجموعة مفتوحة كيفية و $1 \leqslant p < N$ فإن

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leqslant C(p,N)\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{30}$$

• **لازمة** 19.9 **(متباينة بوانكاريه)· ـ نفترض بأن Ω مجموعة مفتوحة محدودة· فإنه يوجد ثابت C (متعلق بـ Ω و p) بحيث**

$$\|u\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

بالخصوص، العبارة $\|\nabla u\|_{L^p}$ نظيم على $W_0^{1,p}(\Omega)$ ، مكافئ للنظيم $\|u\|_{W^{1,p}}$ ؛ على $H_0^1(\Omega)$ ،

obeikandl.com

العبارة $\int_\Omega \nabla u.\nabla v$ جداء سلمي يرافق النظيم $\|\nabla u\|_{L^2}$ المكافئ للنظيم $\|u\|_{H^1}$ ·

ملاحظة 22. ـ تبقى متباينة بوانكاريه صحيحة إذا كان قياس Ω منته، أو إذا كانت Ω محدودة في إتجاه واحد (انظر [EX])·

ملاحظة 23. ـ لـ m عدد طبيعي $\geqslant 1$ و $1 \leqslant p < \infty$ ، نعرف $W_0^{m,p}(\Omega)$ كإغلاقة $C_c^m(\Omega)$ في $W^{m,p}(\Omega)$ · " فتقريبا " ، تنتمي دالة u إلى $W_0^{m,p}(\Omega)$ إذا $u \in W^{m,p}(\Omega)$ و إذا $D^\alpha u = 0$ على Γ لكل دليل متعدد α بحيث $|\alpha| \leqslant m-1$ · ينبغي التمييز جيدا بين $W_0^{m,p}$ و $(W^{m,p} \frown W_0^{1,p})$ لـ $m \geqslant 2$ ·

الفضاء الثنوي لـ $W_0^{1,p}$

ترميز. ـ نرمز بـ $W^{-1,p'}(\Omega)$ للفضاء الثنوي لـ $W_0^{1,p}(\Omega)$ ، $1 \leqslant p < \infty$ و بـ $H^{-1}(\Omega)$ لثنوي $H_0^1(\Omega)$ ·

نطابق $L^2(\Omega)$ مع ثنويه، و لكن لا نطابق $H_0^1(\Omega)$ مع ثنويه· لدينا الشكل

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

مع تباينات مستمرة و كثيفة·

إذا كانت Ω محدودة، فلدينا

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \qquad \text{إذا} \qquad \frac{2N}{N+2} \leqslant p < \infty$$

مع تباينات مستمرة و كثيفة·

إذا كانت Ω غير محدودة، فلدينا

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \qquad \text{إذا} \qquad \frac{2N}{N+2} \leqslant p \leqslant 2 \ ·$$

يمكن تمييز عناصر $W^{-1,p'}$ بواسطة الـ

obeikandl.com

قضية 20.9. ـ **ليكن** $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$ ، **إذن يوجد** $f_0, f_1, ...f_N \in L^{p'}(\Omega)$ **بحيث**

$$< F, v >= \int f_0 v + \sum_{i=1}^{N} \int f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

و

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant N} \|f_i\|_{L^{p'}} = \|F\|.$$

عندما تكون Ω **محدودة، يمكننا أخذ** $f_0 = 0$.

إثبات ـ عمم إثبات القضية 13.8 . □

5.9. صياغة تغيراتية لبعض المسائل الحدية الإهليلجية

سوف نبادر الآن بحل بعض المعادلات التفاضلية الجزئية[23] الإهليلجية من الدرجة الثانية.

مثال 1 **(مسألة ديريكليه المتجانسة)** . ـ لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة محدودة؛ نبحث عن دالة $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ محققة لـ

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta u + u = f & \text{على} & \Omega \\ u = 0 & \text{على} & \Gamma = \partial\Omega \end{array}\right\} \qquad (31)$$

حيث

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \text{لابلاسي } u \text{ ،}$$

[23] باختصار مـ. ت. جـ (= PDE بالـلغة الإنجليزية).

و f دالة معطاة على Ω . يسمى الشرط الحدي $u=0$ على Γ بشرط ديريكليه (المتجانس).

تعاريف. ـ الحل الكلاسيكي لـ (31) هو دالة $u \in C^2(\bar{\Omega})$ تحقق (31) . الحل الضعيف لـ (31) هو دالة $u \in H_0^1(\Omega)$ تحقق

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{32}$$

لنبدأ بتطبيق البرنامج المحدد في الفصل 8 .

المرحلة أ . كل حل كلاسيكي هو حل ضعيف. ـ بالفعل $u \in H^1(\Omega) \frown C(\overline{\Omega})$ و إذن $u \in H_0^1(\Omega)$ بفضل المبرهنة 17.9 (انظر كذلك الملاحظة 20). من جهة أخرى إذا $v \in C_c^1(\Omega)$ ، لدينا

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

و بالكثافة تبقى هذه المساواة صحيحة لكل $v \in H_0^1(\Omega)$.

المرحلة ب . وجود و وحدانية الحل الضعيف.

• **مبرهنة** 21.9 **(ديريكليه - ريمان - هلبرت).** ـ **لكل** $f \in L^2(\Omega)$ ، **يوجد** $u \in H_0^1(\Omega)$ **حل وحيد ضعيف لـ** (31) . **إضافة إلى ذلك، يحصل** u **عن طريق**

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \Big\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_\Omega fv \Big\}.$$

هذا مبدأ ديريكليه.

إثبات. ـ طبق مبرهنة لاكس - ملغرام (أو ببساطة مبرهنة التمثيل لرايز - فريشيه) في فضاء هلبرت $H = H_0^1(\Omega)$ مع الشكل الثنائي الخطية

$$a(u,v) = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv)$$

obeikandl.com

و الشكل الخطي $\varphi : v \longmapsto \int_\Omega fv$ · $\square$

مرحلة جـ · انتظام الحل الضعيف. ـ هذا السؤال صعب نوعا ما؛ سوف نبادره في المقطع 6.9 ·

مرحلة د · العودة إلى الحل الكلاسيكي. ـ لنفرض أن الحل الضعيف $u \in H_0^1(\Omega)$ لـ (31) ينتمي إلى $C^2(\overline{\Omega})$ و لنفرض Ω من الصنف C^1 ·

فإن $u = 0$ على Γ (حسب المبرهنة 17.9). من ناحية أخرى لدينا

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in C_c^1(\Omega)$$

و بالتالي $-\Delta u + u = f$ حـ. ت. على Ω بما أن $C_c^1(\Omega)$ كثيف في $L^2(\Omega)$ · فبالفعل، لدينا $-\Delta u + u = f$ في كل Ω لأن $u \in C^2(\Omega)$ ؛ إذن u هو حل كلاسيكي.

لنصف الآن بعض الأمثلة الأخرى. نؤكد على مدى أهمية توضيح الفضاء الدالي الذي نبحث فيه عن الحل الضعيف.

مثال 2 (شرط ديريكليه غير المتجانس) · ـ لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة محدودة. نبحث عن دالة $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ محققة لـ

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta u + u = f & \text{على} & \Omega \\ u = g & \text{على} & \Gamma \end{array}\right\} \qquad (33)$$

حيث f معطاة على Ω و g معطاة على Γ ·

نفترض أنه توجد دالة $\tilde{g} \in H^1(\Omega) \frown C(\overline{\Omega})$ بحيث $\tilde{g} = g$ على Γ[24] و ندخل المجموعة

$$K = \{v \in H^1(\Omega);\ v - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega)\}.$$

يستنتج من المبرهنة 17.9 بأن K لا يرتبط باختيار $\tilde{g}$ (و يرتبط بـ g فقط)؛ K محدب مغلق غير خال من $H^1(\Omega)$ ·

[24] تتحقق مثلا هذه الفرضية إذا كانت Ω من الصنف C^1 و إذا $g \in C^1(\Gamma)$ · إذا كانت Ω منتظمة بما فيه الكفاية، فليس من الضروري افتراض $\tilde{g} \in C^1(\overline{\Omega})$ · طبق نظرية الأثر (انظر تعاليق هذا الفصل)، يكفي معرفة أن $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ أي $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ ·

تعاريف. ـ الحل الكلاسيكي لـ (33) هو دالة $u \in C^2(\bar{\Omega})$ تحقق (33) . الحل الضعيف لـ (33) هو دالة $u \in K$ تحقق

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla v + uv) = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{34}$$

من الواضح أن كل حل كلاسيكي هو حل ضعيف.

• **قضية** 22.9. **ـ لكل** $f \in L^2(\Omega)$ **، يوجد** $u \in K$ **وحيد، حل ضعيف لـ** (33) **. إضافة إلى ذلك، يحصل** u **عن طريق**

$$\min_{v \in K} \Big\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_\Omega fv \Big\}.$$

إثبات. ـ لنلاحظ قبل كل شيء أن $u \in K$ حل ضعيف لـ (33) إلا إذا كان لدينا

$$\int_\Omega \nabla u(\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) \geqslant \int_\Omega f(v-u) \qquad \forall v \in K. \tag{35}$$

بالفعل، إذا كان u حلا ضعيفا لـ (33) ، فمن الواضح أن

$$\int_\Omega \nabla u(\nabla v - \nabla u) + \int_\Omega u(v-u) = \int_\Omega f(v-u) \qquad \forall v \in K.$$

و بالعكس، إذا كان $u \in K$ و يحقق (35) ، نختار $v = u \pm w$ في (35) ، مع $w \in H_0^1(\Omega)$ و نحصل على (34) . طبق إذن مبرهنة ستامباكيا (مبرهنة 6.5) في $H = H^1(\Omega)$. دراسة الانتظام و الرجوع إلى الحل الكلاسيكي، تقام كما في المثال 1 . □

مثال 3 **(معادلات إهليلجية من الدرجة الثانية)** . ـ لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة محدودة. نعطى دوالا $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$ ، $1 \leqslant i,j \leqslant N$ تحقق الشرط الإهليلجي Elliptic condition :

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega ، \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N ، \quad \text{مع} \quad \alpha > 0 . \tag{36}$$

obeikandi.com

نعطى كذلك دالة $a_0(x) \in C(\overline{\Omega})$ · نبحث عن دالة $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ محققة لـ

$$\left.\begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + a_0 u = f & \text{على} & \Omega \\ u = 0 & \text{على} & \Gamma. \end{array}\right\} \tag{37}$$

الحل الكلاسيكي لـ (37) هو دالة $u \in C^2(\overline{\Omega})$ تحقق (37) · الحل الضعيف لـ (37) هو دالة $u \in H_0^1(\Omega)$ تحقق

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{38}$$

من الواضح أن كل حل كلاسيكي هو حل ضعيف· من ناحية أخرى إذا $a_0(x) \geqslant 0$ على Ω فإنه لكل $f \in L^2(\Omega)$ ، يوجد $u \in H_0^1(\Omega)$ وحيد، حل ضعيف؛ بالفعل نطبق مبرهنة لاكس - ملغرام في الفضاء $H = H_0^1$ مع الشكل الثنائي الخطية المستمر

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 uv.$$

نلاحظ أن قصرية coercivity $a(\,,\,)$ ترجع إلى افتراض الإهليلجية و متباينة بوانكاريه· بالإضافة، إذا كانت المصفوفة (a_{ij}) متناظرة، فإن الشكل الثنائي متناظر و يحصل u عن طريق

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} \Big\{\frac{1}{2}\int_\Omega \Big(\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 v^2\Big) - \int_\Omega fv\Big\}.$$

لنعتبر الآن المسألة الأكثر عموما: إبحث عن دالة $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ محققة لـ

$$\left.\begin{array}{lll} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \sum_{i,j=1}^{N} a_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f & \text{على} & \Omega \\ u = 0 & \text{على} & \Gamma \end{array}\right\} \tag{39}$$

حيث الـ $a_i(x)$ دوال معطاة في $C(\overline{\Omega})$ · حل ضعيف لـ (39) هو دالة $u \in H_0^1(\Omega)$ بحيث

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega \sum_i a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{40}$$

ينبغي إذن إدخال في $H_0^1(\Omega)$ الشكل الثنائي الخطية المستمر

$$a(u,v)=\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}+\int_\Omega \sum_i a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v+\int_\Omega a_0uv. \tag{41}$$

على العموم، هذا الشكل ليس متناظرا[25] ؛ في بعض الأحيان هو إهليلجي : نبرهن إذن وجود و وحدانية حل ضعيف بواسطة مبرهنة لاكس - ملغرام. في كل الحالات، لدينا الـ

مبرهنة 23.9. ـ **إذا** $f=0$ ، **فإن مجموعة الحلول** $u\in H_0^1(\Omega)$ **لـ** (40) **هي فضاء متجهي بعده منته، يرمز له بـ** d . **بالإضافة إلى ذلك، يوجد فضاء جزئي متجهي** $F\subset L^2(\Omega)$ **بعده** d **بحيث**[26]

$$\textbf{[يقبل حلا (40)]} \iff \textbf{[}\ \int_\Omega fv=0 \quad \forall v\in F\ \textbf{]}.$$

ملاحظة 24. ـ لنفترض أن المعادلة المتجانسة المرافقة لـ (40) ، أي مع $f=0$ ، تقبل $u=0$ كحل وحيد. إذن لكل $f\in L^2$ ، يوجد $u\in H_0^1$ وحيد حل لـ (40)[27] بالخصوص إذا $a_0\geqslant 0$ على Ω نثبت ـ بطريقة مماثلة " لمبدأ النهاية العظمى " ـ بأن $(f=0)\implies(u=0)$. نستنتج إذن، تحت الافتراض الوحيد $a_0\geqslant 0$ على Ω ، بأن لكل $f\in L^2$ يوجد $u\in H_0^1$ حل وحيد لـ (40) ؛ انظر [1] Gilbarg – Trudinger و [EX] .

إثبات. ـ نثبت $\lambda>0$ كبيرا بما فيه الكفاية حتى يكون الشكل الثنائي الخطية $a(u,v)+\lambda\int_\Omega uv$ إهليلجيا على H_0^1 . لكل $f\in L^2$ يوجد إذن $u\in H_0^1$ وحيد بحيث

$$a(u,\varphi)+\lambda\int_\Omega u\varphi=\int_\Omega f\varphi \qquad \forall\varphi\in H_0^1.$$

نكتب $u=Tf$ ؛ بحيث أن $T:L^2\longrightarrow L^2$ هو مؤثر خطي متراص (بما أن Ω محدودة، التباين $H_0^1(\Omega)\subset L^2(\Omega)$ متراص؛ انظر المبرهنة 16.9 و الملاحظة 21).
المعادلة (40) تكافئ

---

[25] في البعد N ، لا نعرف طريقة تسمح، كما في البعد 1 ، بالرجوع إلى حالة التناظر.

[26] بعبارة أخرى [(40) يقبل حلا] $\iff$ [f تحقق d من شروط التعامد].

[27] لاحظ العلاقة القريبة التي تربط وجود و وحدانية حلول المعادلات الإهليلجية. هذه العلاقة العجيبة هي نتيجة لبديلة فريدهولم (مبرهنة 6.6).

obeikandl.com

$$u = T(f + \lambda u). \tag{42}$$

ندخل $v = f + \lambda u$ كمجهول جديد و (42) تصبح

$$v - \lambda T v = f. \tag{43}$$

نطبق إذن بديلة فريدهولم. $\square$

مثال 4 **(مسألة نيومان المتجانسة)**. ـ لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة محدودة من الصنف C^1. نبحث عن دالة $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ محققة لـ

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta u + u = f & \text{على} & \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{على} & \Gamma \end{array}\right\} \tag{44}$$

حيث f معطاة على Ω ؛ $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ تمثل المشتق الناظمي الخارجي لـ u ، أي $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.\vec{n}$ حيث $\vec{n}$ المتجه الأحادي الناظمي الخارجي لـ Γ. الشرط الحدي $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ على Γ يسمى بشرط نيومان (المتجانس).

تعاريف. ـ الحل الكلاسيكي لـ (44) هو دالة $u \in C^2(\overline{\Omega})$ تحقق (44). الحل الضعيف لـ (44) هو دالة $u \in H^1(\Omega)$ تحقق

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{45}$$

المرحلة أ. كل حل كلاسيكي هو حل ضعيف. ـ لنذكر أولا أنه بفضل صيغة غرين Green لدينا

$$\int_\Omega (\triangle u) v = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v \qquad \forall u \in C^2(\overline{\Omega}), \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{46}$$

بحيث $d\sigma$ هو القياس السطحي على Γ. إذا كان u حلا كلاسيكيا لـ (44) ، فإن $u \in H^1(\Omega)$ و

obeikandl.com

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

نستنتج بالكثافة (لازمة 8.9) بأن

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H^1(\Omega).$$

المرحلة ب . وجود و وحدانية الحل الضعيف.

• **قضية** 24.9. **ـ لكل** $f \in L^2(\Omega)$ **، يوجد** $u \in H^1(\Omega)$ **وحيد، حل ضعيف لـ** (44) .
إضافة إلى ذلك، يحصل u **عن طريق**

$$\min_{v \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla v|^2 + v^2) - \int_\Omega fv \right\}.$$

إثبات. ـ طبق مبرهنة لاكس - ملغرام في $H = H^1(\Omega)$. □

مرحلة جـ . انتظام الحل الضعيف. ـ انظر المقطع 6.9 .

مرحلة د . العودة إلى الحل الكلاسيكي. ـ إذا كان $u \in C^2(\overline{\Omega})$ حلا ضعيفا لـ (44) ، لدينا بفضل (46)

$$\int_\Omega (-\Delta u + u)v + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}) \tag{47}$$

في (47) نختار أولا $v \in C_c^1(\Omega)$ ؛ بالتالي

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{على } \Omega \ .$$

نعود بعد ذلك إلى (47) مع $v \in C^1(\overline{\Omega})$ ؛ نحصل على

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma = 0 \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega}),$$

و بالتالي $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ على Γ .

obeikandi.com

مثال 5 **(مجموعات مفتوحة غير محدودة)** . ـ في حالة Ω مجموعة مفتوحة غير محدودة من $\mathbb{R}^N$ ، نفرض ـ بالإضافة للشروط الحدية المعتادة على $\Gamma = \partial\Omega$ ـ شرطا حديا عند النهاية، مثلا $u(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. و هذا يعبر عنه عند الحل الضعيف[28] بالشرط $u \in H^1$. الوجود و الوحدانية للحل الضعيف سهل إثباتهما.

أمثلة: أ) $\Omega = \mathbb{R}^N$ ؛ لكل $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ المعادلة

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{على} \qquad \mathbb{R}^N$$

تقبل حلا ضعيفا وحيدا بالمعنى التالي:

$$u \in H^1(\mathbb{R}^N) \qquad \text{و} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv = \int_{\mathbb{R}^N} fv \qquad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N) \cdot$$

ب) $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ ؛ لكل $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ المسألة

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u + u = f \\ u(x',0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{على} \qquad \begin{array}{l} \mathbb{R}^N_+ \\ x' \in \mathbb{R}^{N-1} \end{array}$$

تقبل حلا ضعيفا وحيدا بالمعنى التالي:

$$u \in H^1_0(\Omega) \qquad \text{و} \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H^1_0(\Omega) \cdot$$

جـ) $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ ؛ لكل $f \in L^2(\mathbb{R}^N_+)$ المسألة

$$\left.\begin{array}{r} -\Delta u + u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_N}(x',0) = 0 \end{array}\right\} \qquad \text{على} \qquad \begin{array}{l} \mathbb{R}^N_+ \\ x' \in \mathbb{R}^{N-1} \end{array}$$

تقبل حلا ضعيفا وحيدا بالمعنى التالي:

$$u \in H^1(\Omega) \qquad \text{و} \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H^1(\Omega) \cdot$$

[28] بالطبع، يجب أولا إثبات أن u حل كلاسيكي بحيث $u(x) \longrightarrow 0$ عندما $|x| \longrightarrow \infty$ ، إذن بالضرورة أن $u \in H^1$ ؛ انظر مثالا في [EX] .

obeikandl.com

6.9. انتظام الحلول الضعيفة

تعريف. ـ نقول بأن مجموعة مفتوحة Ω من الصنف C^m ، m عدد طبيعي $\geqslant 1$ إذا وجد لكل $x \in \Gamma = \partial\Omega$ جوار U لـ x في $\mathbb{R}^N$ و تطبيق متقابل $H : Q \longrightarrow U$ بحيث

$$H \in C^m(\overline{Q}) \quad \text{،} \quad H^{-1} \in C^m(\overline{U}) \quad \text{،} \quad H(Q_+) = U \frown \Omega \quad \text{و} \quad H(Q_0) = U \frown \Gamma \text{ .}$$

نقول بأن Ω من الدرجة C^∞ إذا كان Ω من الدرجة C^m لكل m .

النتائج الرئيسية بخصوص الانتظام هي الآتية:

• **مبرهنة** 25.9 **(الانتظام لمسألة ديريكليه).** ـ **لتكن** Ω **مجموعة مفتوحة من الصنف** C^2 **مع** Γ **محدود (أو** $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ **). ليكن** $f \in L^2(\Omega)$ **و ليكن** $u \in H^1_0(\Omega)$ **يحقق**

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega). \tag{48}$$

إذن $u \in H^2(\Omega)$ **و** $\|u\|_{H^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}$ **حيث** C **ثابت يرتبط بـ** Ω **فقط.**
بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت Ω **من الصنف** C^{m+2} **و إذا كان** $f \in H^m(\Omega)$ **، فإن**

$$u \in H^{m+2}(\Omega) \qquad \text{و} \qquad \|u\|_{H^{m+2}} \leqslant C\|f\|_{H^m} \text{ ؛}$$

و بالخصوص إذا $m > \dfrac{N}{2}$ **، فإن** $u \in C^2(\overline{\Omega})$.
أخيرا، إذا كانت Ω **من الصنف** C^∞ **و إذا كان** $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ **، فإن** $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

مبرهنة 26.9 **(الانتظام لمسألة نيومان).** ـ **مع نفس افتراضات المبرهنة** 25.9 **نحصل على نفس النتائج لمسألة نيومان، بمعنى أن لـ** $u \in H^1(\Omega)$ **حيث**

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{49}$$

---

obeikandl.com

ملاحظة 25. ـ نحصل على نفس النتائج لمسألة ديريكليه (أو لمسألة نيومان) مرافقة لمؤثر إهليلجي عام من الدرجة 2 أي، إذا $u \in H_0^1(\Omega)$ تحقق

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

إذن[29]

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{و} \quad a_{ij} \in C(\overline{\Omega}) \quad \Longrightarrow \quad u \in H^2(\Omega) \text{ ،}$$

و لـ $m \geqslant 1$ ،

$$f \in H^m(\Omega) \quad \text{و} \quad a_{ij} \in C^{m+1}(\overline{\Omega}) \quad \Longrightarrow \quad u \in H^{m+2}(\Omega) \text{ .}$$

سوف نبرهن فقط على المبرهنة 25.9 ؛ إثبات المبرهنة 26.9 مماثل تماما (انظر [EX]).
الفكرة الموجهة للإثبات هي كالتالي. نثبت أولا المبرهنة 25.9 لـ $\Omega = \mathbb{R}^N$ ثم لـ $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. في حالة مجموعة مفتوحة عامة Ω نجري الإثبات على مرحلتين:

1) **الانتظام في الداخل** ، أي في كل مجموعة مفتوحة $\omega \subset\subset \Omega$ (نستعين بالحالة $\Omega = \mathbb{R}^N$).

2) **الانتظام بالقرب من الحد** (نستعين ـ بعد استعمال منظومة إحداثيات محلية ـ بالحالة $\Omega = \mathbb{R}_+^N$).

ننصح القارئ بفهم الحالتين $\Omega = \mathbb{R}^N$ و $\Omega = \mathbb{R}_+^N$ جيدا قبل مبادرة الحالة العامة.
خطة هذا المقطع هي التالية:

أ . الحالة $\Omega = \mathbb{R}^N$

ب . الحالة $\Omega = \mathbb{R}_+^N$

جـ . الحالة العامة:

جـ$_1$. تقديرات في الداخل.

جـ$_2$. تقديرات بالقرب من الحد.

الوسيلة الأساسية في البرهان هي طريقة الانسحابات Translation – method[30] الراجعة لـ Nirenberg

---

[29] عندما لا تكون Ω محدودة، يجب أيضا افتراض بأن

$$D^\alpha a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \qquad \forall\alpha \text{ ،} \ |\alpha| \leqslant 1 \qquad (\text{على الترتيب } |\alpha| \leqslant m+1).$$

[30] تسمى أيضا طريقة الكسور التفاضلية.

obeikandi.com

أ . الحالة $\Omega = \mathbb{R}^N$.

ترميز. ـ لـ $h \in \mathbb{R}^N$ معطى، $h \neq 0$ نضع

$$D_h u = \frac{1}{|h|}(\tau_h u - u) \quad ، \quad \text{أي} \quad (D_h u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \cdot$$

في (48) نأخذ $\varphi = D_{-h}(D_h u)$ ، و هذا ممكن بما أن $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ (لأن $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$)؛ إذن

$$\int |\nabla D_h u|^2 + \int |D_h u|^2 = \int f D_{-h}(D_h u),$$

و بالتالي

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leqslant \|f\|_{L^2} \, \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2}. \tag{50}$$

من جهة أخرى لدينا

$$\|D_{-h} v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall v \in H^1. \tag{51}$$

بالفعل، نذكر (قضية 3.9) بأن

$$\|D_{-h} v\|_{L^2(\omega)} \leqslant \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall \omega \subset\subset \mathbb{R}^N, \quad \forall h;$$

حيث (51) .
باستعمال (50) و (51) نحصل على

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leqslant \|f\|_{L^2} \|D_h u\|_{H^1}$$

و إذن

$$\|D_h u\|_{H^1} \leqslant \|f\|_{L^2}. \tag{52}$$

بالخصوص

$$\Big\| D_h \frac{\partial u}{\partial x_j} \Big\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2} \qquad \forall j = 1, 2, ...N$$

و بالتالي $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in H^1$ (بفضل القضية 3.9)؛ إذن $u \in H^2$.

obeikandi.com

لنبرهن الآن بأن $f \in H^1 \Longleftarrow u \in H^3$. نرمز بـ Du لأي من المشتقات $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ ، $1 \leqslant j \leqslant N$. نعلم سابقا أن $Du \in H^1$ ؛ يتعلق الأمر بإثبات أن $Du \in H^2$. لهذا يكفي التحقق بأن

$$\int \nabla(Du)\nabla\varphi + \int (Du)\varphi = \int (Df)\varphi \qquad \forall\varphi \in H^1 \tag{53}$$

(نطبق بعد ذلك المرحلة السابقة فتعطي $Du \in H^2$ ؛ إذن $u \in H^3$). ليكن إذن $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. في (48) يمكننا تعويض φ بـ $D\varphi$ ؛ فيأتي

$$\int \nabla u \nabla(D\varphi) + \int u(D\varphi) = \int f(D\varphi)$$

و إذن

$$\int \nabla(Du)\nabla\varphi + \int (Du)\varphi = \int (Df)\varphi.$$

هذا يستلزم (53) بما أن $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ كثيف في $H^1(\mathbb{R}^N)$ (لازمة 8.9).

لإثبات أن $f \in H^m \Longleftarrow u \in H^{m+2}$ يكفي الاستدلال بالاستقراء على m و تطبيق (53) .

ب . الحالة $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.

نستعمل مرة أخرى الانسحابات و لكن فقط في إتجاهات مماسية tangential ، بمعنى أننا نختار $h \in \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ ؛ نقول بأن h موازي للحد و ندون $h//\Gamma$.

إنه من الضروري ملاحظة أن

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \Longleftarrow \quad \tau_h u \in H_0^1(\Omega) \quad \text{إذا} \quad h//\Gamma \text{ ؛}$$

بعبارة أخرى $H_0^1(\Omega)$ لا يتغير بانسحابات مماسية. نختار $h//\Gamma$ و نأخذ $\varphi = D_{-h}(D_h u)$ في (48) ؛ يأتي

$$\int |\nabla(D_h u)|^2 + \int |D_h u|^2 = \int f D_{-h}(D_h u)$$

أي

$$\|D_h u\|_{H^1}^2 \leqslant \|f\|_{L^2}\, \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2} \tag{54}$$

نستعمل الآن الـ:

توطئة 6.9 ـ لدينا

$$\|D_h v\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \qquad \forall v \in H^1(\Omega), \qquad \forall h // \Gamma.$$

إثبات. ـ إبدأ بافتراض أن $v \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ و اتبع إثبات القضية 3.9 (لاحظ أنه إذا $h//\Gamma$ فإن $\Omega + th = \Omega$ لـ $0 < t < 1$)؛ استدل بالكثافة عندما $v \in H^1(\Omega)$. $\square$

باستعمال (54) و التوطئة 6.9 ، نحصل على

$$\|D_h u\|_{H^1} \leqslant \|f\|_{L^2} \qquad \forall h // \Gamma. \tag{55}$$

ليكن $1 \leqslant j \leqslant N$ ، $1 \leqslant k \leqslant N-1$ ، $h = |h| e_k$ و $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. لدينا

$$\int D_h \Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) \varphi = -\int u D_{-h} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big)$$

و بفضل (55) $\Big| \int u D_{-h} \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big) \Big| \leqslant \|f\|_{L^2} \, \|\varphi\|_{L^2}$.

بالمرور إلى النهاية عندما $|h| \longrightarrow 0$ يأتي

$$\Big| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \Big| \leqslant \|f\|_{L^2} \, \|\varphi\|_{L^2} \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant N, \quad \forall 1 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{56}$$

لنثبت أخيرا بأنه لدينا

$$\Big| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2} \Big| \leqslant C \|f\|_{L^2} \, \|\varphi\|_{L^2} \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{57}$$

من أجل هذا، نعود إلى المعادلة (48) ؛ و هي تستلزم المتباينة

$$\Big| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_N^2} \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{N-1} \Big| \int u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \Big| + \Big| \int (f-u) \varphi \Big| \leqslant C \|f\|_{L^2} \, \|\varphi\|_{L^2}$$

بفضل (56) . باستعمال (56) و (57) نتوصل إلى

$$\Big|\int u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}\Big| \leqslant C\|f\|_{L^2}\,\|\varphi\|_{L^2} \qquad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega), \qquad \forall 1\leqslant j,k\leqslant N.$$

بالنتيجة $u\in H^2(\Omega)$ (لاحظ أنه يوجد $f_{jk}\in L^2(\Omega)$ بحيث

$$\int u\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k}=\int f_{jk}\varphi \qquad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega),$$

بفضل مبرهنة هان - بناخ و مبرهنة التمثيل لرايز).

لنثبت أخيرا أن $f\in H^m(\Omega) \Longleftarrow u\in H^{m+2}(\Omega)$. نرمز بـ Du لإحدى أي من المشتقات الماسية $Du=\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ $1\leqslant j\leqslant N-1$ ؛ نبرهن على التوطئة الآتية و نستخلص بعد ذلك بالاستقراء على m[31] .

توطئة 7.9 **ـ ليكن** $u\in H^2(\Omega)\frown H_0^1(\Omega)$ **محققا** (48) . **إذن** $Du\in H_0^1(\Omega)$ **و**

$$\int\nabla(Du)\nabla\varphi+\int(Du)\varphi=\int(Df)\varphi \qquad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{58}$$

إثبات. ـ النقطة الصعبة الوحيدة تتعلق في إثبات أن $Du\in H_0^1(\Omega)$ [بالفعل، نختار $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ و نعوض φ بـ $D\varphi$ في (48) ؛ نستنتج إذن (58) بالكثافة]. ليكن $h=|h|e_j$ ، $1\leqslant j\leqslant N-1$ ؛ فإن $D_hu\in H_0^1(\Omega)$ (بما أن H_0^1 لا يتغير بالانسحابات الماسية). حسب التوطئة 6.9 لدينا

$$\|D_hu\|_{H^1}\leqslant\|u\|_{H^2}.$$

إذن توجد متتالية $h_n\longrightarrow 0$ بحيث $D_{h_n}u\rightharpoonup g$ بضعف في H_0^1 (بما أن H_0^1 فضاء هلبرت). كذلك $D_{h_n}u\rightharpoonup g$ بضعف في L^2 . لـ $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ لدينا

$$\int(D_{h_n}u)\varphi=\int uD_{-h_n}\varphi$$

و عند النهاية عندما $h_n\longrightarrow 0$ نحصل على

$$\int g\varphi=-\int u\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \qquad \forall\varphi\in C_c^\infty(\Omega).$$

[31] لتقدير المشتقات الناظمية، يجب مرة أخرى الرجوع إلى المعادلة (48) .

بالتالي $H_0^1(\Omega) \ni g = \frac{\partial u}{\partial x_j}$ · $\square$

جـ · الحالة العامة·

لنبرهن أن $f \in L^2(\Omega) \Longleftarrow u \in H^2(\Omega)$ [32] · للتبسيط، نفترض Ω محدودة؛ نستعمل تجزئة الوحدة و نكتب $u = \sum_{i=0}^{k} \theta_i u$ كما في إثبات المبرهنة 7.9 ·

جـ$_1$ · تقديرات بالداخل·

يتعلق الأمر في إثبات أن $\theta_0 u \in H^2(\Omega)$ ؛ بما أن $\theta_{0|\Omega} \in C_c^\infty(\Omega)$ ، الدالة $\theta_0 u$ موسعة بـ 0 خارج Ω تنتمي إلى $H^1(\mathbb{R}^N)$ (انظر ملاحظة 4 ب)· نتحقق بسهولة بأن $\theta_0 u$ حل ضعيف في $\mathbb{R}^N$ للمعادلة

$$-\Delta(\theta_0 u) + \theta_0 u = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0.\nabla u - (\Delta\theta_0)u = g$$

مع $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ · نستنتج من الحالة **أ** بأن $\theta_0 u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ مع

$$\|\theta_0 u\|_{H^2} \leqslant C(\|f\|_{L^2} + \|u\|_{H^1}) \leqslant C'\|f\|_{L^2}$$

بما أن $\|u\|_{H^1} \leqslant C\|f\|_{L^2}$ (بفضل (48))·

جـ$_2$ · تقديرات بالقرب من الحد·

يتعلق الأمر في إثبات أن $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ لـ $1 \leqslant i \leqslant k$ · نذكر بأن $\theta_i \in C_c^\infty(U_i)$ و أنه لدينا تقابل $H : Q \longrightarrow U_i$ بحيث

$$H \in C^2(\overline{Q}), \quad J = H^{-1} \in C^2(\overline{U_i}), \quad H(Q_+) = \Omega \frown U_i, \quad H(Q_0) = \Gamma \frown U_i.$$

نكتب $x = H(y)$ و $y = H^{-1}(x) = J(x)$ ·

نتحقق بسهولة بأن $v = \theta_i u \in H_0^1(\Omega \frown U_i)$ و أن v حل ضعيف على $\Omega \frown U_i$ للمعادلة

---

[32] لإثبات أن $f \in H^m(\Omega) \Longleftarrow u \in H^{m+2}(\Omega)$ نستدل بالاستقراء على m كما في الحالتين أ و ب·

$$-\Delta v = \theta_i f - \theta_i u - 2(\nabla\theta_i)(\nabla u) - (\Delta\theta_i)u \equiv g$$

مع $g \in L^2(\Omega \frown U_i)$ و $\|g\|_{L^2} \leqslant C\|f\|_{L^2}$ ؛ بتوضيح أدق لدينا

$$\int_{\Omega\frown U_i} \nabla v \nabla \varphi dx = \int_{\Omega\frown U_i} g\varphi dx \qquad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega \frown U_i). \tag{59}$$

ننقل $v_{|\Omega\frown U_i}$ إلى Q_+ ؛ نضع

$$w(y) = v(H(y)) \qquad \text{لـ} \qquad y \in Q_+$$

بمعنى:

$$w(Jx) = v(x) \qquad \text{لـ} \qquad x \in \Omega \frown U_i \cdot$$

تبين التوطئة التالية ــ و هي أساسية ــ بأن المعادلة (59) تنقل على Q_+ على شكل معادلة إهليلجية من الدرجة 2[33]

توطئة 8.9. **ــ بالترميز أعلاه، لدينا** $w \in H_0^1(Q_+)$ **و**

$$\sum_{k,l=1}^{N} \int_{Q_+} a_{kl} \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial y_l} dy = \int_{Q_+} \tilde{g} \quad dy \qquad \forall \quad \in H_0^1(Q_+), \tag{60}$$

حيث $\tilde{g} = (goH)|JacH| \in L^2(Q_+)$ **و الدوال** $a_{kl} \in C^1(\overline{Q}_+)$ **تحقق شرط الإهليلجية** (36) .

إثبات ــ ليكن $\in H_0^1(Q_+)$ ؛ نضع $\varphi(x) = \quad (Jx)$ لـ $x \in \Omega \frown U_i$ · إذن $\varphi \in H_0^1(\Omega \frown U_i)$ و

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_k \frac{\partial w}{\partial y_k} \frac{\partial J_k}{\partial x_j}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_l \frac{\partial}{\partial y_l} \frac{\partial J_l}{\partial x_j}.$$

إذن

[33] بوضوح أكثر، شرط الإهليلجية هو الذي يبقى متحققا بتغيير الإحداثيات·

obeikandl.com

$$\int_{\Omega\frown U_i}\nabla v\nabla\varphi dx=\int_{\Omega\frown U_i}\sum_{j,k,l}\frac{\partial J_k}{\partial x_j}\frac{\partial J_l}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_l}dx=\int_{Q_+}\sum_{j,k,l}\frac{\partial J_k}{\partial x_j}\frac{\partial J_l}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_l}|JacH|dy$$

حسب الصيغ العادية لتغيير الإحداثيات في التكاملات. بالتالي يأتي

$$\int_{\Omega\frown U_i}\nabla v\nabla\varphi dx=\int_{Q_+}\sum_{k,l}a_{kl}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_l}dy \qquad (61)$$

مع

$$a_{kl}=\sum_j\frac{\partial J_k}{\partial x_j}\frac{\partial J_l}{\partial x_j}|JacH|.$$

لاحظ أن $a_{kl}\in C^1(\overline{Q}_+)$ و أن شرط الإهليلجية متحقق بما أن لكل $\xi\in\mathbb{R}^N$ لدينا

$$\sum_{k,l}a_{kl}\xi_k\xi_l=|JacH|\sum_j\Big|\sum_k\frac{\partial J_k}{\partial x_j}\xi_k\Big|^2\geqslant\alpha|\xi|^2$$

مع $\alpha>0$ لأن مصفوفتا جاكوبي Jacobi $JacH$ و $JacJ$ ليستا شاذتين.

من جهة أخرى لدينا

$$\int_{\Omega\frown U_i}g\varphi dx=\int_{Q_+}(goH)\ \ |JacH|dy. \qquad (62)$$

بالربط بين (59) ، (61) و (62) نحصل على (60) ، مما ينهي إثبات التوطئة 8.9 . □

لنثبت الآن بأن $w\in H^2(Q_+)$ و أن $\|w\|_{H^2}\leqslant C\|\tilde g\|_{L^2}$ [34] ؛ هذا يستلزم، بالرجوع إلى $\Omega\frown U_i$ ، بأن $\theta_i u$ تنتمي إلى $H^2(\Omega\frown U_i)$ و إذن بالفعل إلى $H^2(\Omega)$ مع $\|\theta_i u\|_{H^2}\leqslant C\|f\|_{L^2}$.

كما في الحالة **ب** ($\Omega=\mathbb{R}^N_+$) نستعمل انسحابات مماسية؛ في (60) نختار $=D_{-h}(D_h w)$ مع $h//Q_0$ و $|h|$ صغير بما يكفي حتى تكون $\in H^1_0(Q_+)$ [35] . نحصل إذن على

$$\sum_{k,l}\int_{Q_+}D_h\Big(a_{kl}\frac{\partial w}{\partial y_k}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}(D_h w)=\int_{Q_+}\tilde g D_{-h}(D_h w). \qquad (63)$$

---

[34] في ما يلي، نرمز بـ C لمختلف الثوابت التي ترتبط فقط بالـ a_{kl} .

[35] نذكر بأن $Suppw\subset\{\ (x',x_N)\ ؛\ |x'|<1-\delta$ و $0<x_N<1-\delta\ \}$ مع $\delta>0$.

obeikandi.com

بيد أن

$$\int_{Q_+} \tilde{g} D_{-h}(D_h w) \leqslant \|\tilde{g}\|_{L^2}\, \|D_{-h}(D_h w)\|_{L^2} \leqslant \|\tilde{g}\|_{L^2}\, \|\nabla D_h w\|_{L^2} \tag{64}$$

(توطئة 6.9).
من ناحية أخرى، نكتب

$$D_h\Big(a_{kl}\frac{\partial w}{\partial y_k}\Big)(y) = a_{kl}(y+h)\frac{\partial}{\partial y_k} D_h w(y) + (D_h a_{kl}(y))\frac{\partial w}{\partial y_k}(y),$$

و بالتالي لدينا

$$\sum_{k,l}\int_{Q_+} D_h\Big(a_{kl}\frac{\partial w}{\partial y_k}\Big)\frac{\partial}{\partial y_l}(D_h w) \geqslant \alpha\|\nabla D_h w\|_{L^2}^2 - C\|w\|_{H^1}\|\nabla D_h w\|_{L^2}. \tag{65}$$

بالربط بين (64) و (65) نحصل على

$$\|\nabla D_h w\|_{L^2} \leqslant C(\|w\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{L^2}) \leqslant C\|\tilde{g}\|_{L^2} \tag{66}$$

(لاحظ أنه بفضل (60) و متباينة بوانكاريه لدينا $\|w\|_{H^1} \leqslant C\|\tilde{g}\|_{L^2}$).
نستنتج من (66) ـ كما في الحالة **ب** ـ بأن

$$\Big|\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial \ }{\partial y_l}\Big| \leqslant C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|\ \ \|_{L^2} \quad \forall \ \ \in C_c^1(Q_+) \quad \forall (k,l)\neq(N,N). \tag{67}$$

حتى نستخلص بأن $w \in H^2(Q_+)$ (و $\|w\|_{H^2} \leqslant C\|\tilde{g}\|_{L^2}$) يبقى أن نبين بأن

$$\Big|\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial \ }{\partial y_N}\Big| \leqslant C\|\tilde{g}\|_{L^2}\|\ \ \|_{L^2} \qquad \forall \ \ \in C_c^1(Q_+). \tag{68}$$

من أجل هذا نعود إلى المعادلة (69) حيث نعوض بـ $\frac{1}{a_{NN}}$ ($\ \in C_c^1(Q_+)$) ـ و هذا ممكن بما أن $a_{NN} \in C^1(\overline{Q}_+)$ و $a_{NN} \geqslant \alpha > 0$. نحصل على

$$\int a_{NN}\frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_N}\Big(\frac{1}{a_{NN}}\ \ \Big) = \int \frac{\tilde{g}}{a_{NN}}\ \ - \sum_{(k,l)\neq(N,N)} \int a_{kl}\frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{1}{a_{NN}}\ \ \Big),$$

أي أن

obeikandi.com

$$(69)\quad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_N} = \int \frac{1}{a_{NN}}\Big(\frac{\partial a_{NN}}{\partial y_N}\Big)\frac{\partial w}{\partial y_N} \quad + \int \frac{\tilde{g}}{a_{NN}} \\ \displaystyle + \sum_{(k,l)\neq(N,N)} \int \frac{\partial w}{\partial y_k}\Big(\frac{\partial a_{kl}}{\partial y_l}\Big)\frac{}{a_{NN}} - \sum_{(k,l)\neq(N,N)} \int \frac{\partial w}{\partial y_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\Big(\frac{a_{kl}}{a_{NN}} \quad \Big). \end{cases}$$

بالربط بين (67)[36] و (69) نحصل على

$$\Big|\int_{Q_+} \frac{\partial w}{\partial y_N}\frac{\partial}{\partial y_N}\Big| \leqslant C(\|w\|_{H^1} + \|\tilde{g}\|_{L^2})\| \quad \|_{L^2} \qquad \forall \quad \in C_c^1(Q_+);$$

و بالتالي (68) . □

ملاحظة 26. ـ لتكن Ω مجموعة مفتوحة كيفية و لتكن $u \in H^1(\Omega)$ بحيث

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(Q_+).$$

نفترض بأن $f \in H^m(\Omega)$. إذن $\theta u \in H^{m+2}(\Omega)$ لكل $\theta \in C_c^\infty(\Omega)$: نقول بأن $u \in H_{loc}^{m+2}(\Omega)$ [لإثبات ذلك، يكفي مراجعة تقديرات الحالة جـ$_1$ و الاستدلال بالاستقراء على m]. بالخصوص إذا $f \in C^\infty(\Omega)$ ، فإن $u \in C^\infty(\Omega)$[37] .

نفس الاستخلاص يبقى صحيحا لحل جد ضعيف أي دالة $u \in L^2(\Omega)$ بحيث

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

(الإثبات أكثر تعقيد؛ انظر مثلا Agmon [1]). نؤكد على صفة لمبرهنات الانتظام. ليكن $f \in L^2(\Omega)$ و ليكن $u \in H_0^1(\Omega)$ الحل الوحيد الضعيف للمسألة

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

لنثبت $\omega \subset\subset \Omega$ ؛ إذن $u_{|\omega}$ تتعلق بقيم f على Ω كلها ـ و ليس فقط بقيم f على ω[38] . بيد أن انتظام $u_{|\omega}$ يخضع فقط إلى انتظام $f_{|\omega}$ ؛ مثلا $f \in C^\infty(\omega) \Longleftarrow u \in C^\infty(\omega)$ ، حتى إذا كانت f غير منتظمة خارج ω . [نقول بأن Δ hypoelliptic].

---

[36] نستعمل (67) مع $\frac{a_{kl}}{a_{NN}}$ عوضا عن .

[37] و لكن عموما، $u \notin C(\overline{\Omega})$ (حتى إذا كانت Ω من الصنف C^∞) لأن الشرط الحدي لم يعين.

[38] مثلا إذا $f \geqslant 0$ على Ω ، $f \not\equiv 0$ و $f = 0$ على ω لدينا دائما $u > 0$ على ω (انظر مبدأ النهاية العظمى القوي و التعاليق حول هذا الفصل).

obeikandl.com

ملاحظة 27. ــ نتائج الانتظام، من وجهة نظر، عجيبة نوعا ما.
فبالفعل، فرضية على Δu ، أي على مجموع المشتقات $\sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ ، تستلزم استنتاجا من نفس النوعية حول كل المشتقات $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ معتبرة على حدة.

7.9. مبدأ النهاية العظمى

لمبدأ النهاية العظمى صياغات عديدة؛ نقدم بعضها.
لتكن Ω مجموعة مفتوحة كيفية من $\mathbb{R}^N$.

• **مبرهنة** 27.9 **(مبدأ النهاية العظمى لمسألة ديريكليه). ــ ليكن**[39]

$$f \in L^2(\Omega) \qquad \text{و} \qquad u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

بحيث

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{70}$$

إذن

$$\min\{\inf_\Gamma u, \inf_\Omega f\} \leqslant u(x) \leqslant \max\{\sup_\Gamma u, \sup_\Omega f\} \qquad \text{لـ} \qquad x \in \Omega\ .$$

[هنا و في كل ما يلي $\sup = \text{essup}$ و $\inf = \text{essinf}$].

إثبات ــ نستعمل طريقة البتر لستامباكيا. نحدد دالة $G \in C^1(\mathbb{R})$ بحيث

1) $|G'(s)| \leqslant M \qquad \forall s \in \mathbb{R}$

---

[39] إذا كانت Ω من الصنف C^1 يمكننا حذف الفرضية $u \in C(\overline{\Omega})$ باللجوء إلى نظرية الأثر التي تسمح بإعطاء معنى لـ $u_{|\Gamma}$ (انظر التعاليق حول هذا الفصل)؛ كذلك إذا $u \in H_0^1(\Omega)$ يمكننا حذف الفرضية $u \in C(\overline{\Omega})$.

obeikandi.com

2) G متزايدة فعلا على $]0,+\infty[$
3) $G(s)=0$ ؛ $\forall s\leqslant 0$ ·

نضع

$$K=\max\{\sup_\Gamma u, \sup_\Omega f\}\ ؛\quad \text{نفرض أن } K<\infty\ ·$$

و $v=G(u-K)$ ·

نميز حالتين:

أ) الحالة $|\Omega|<\infty$ ·

إذن $v\in H^1(\Omega)$ (حسب القضية 5.9 مطبقة على الدالة $t\longmapsto G(t-K)-G(-K)$). من ناحية أخرى $v\in H_0^1(\Omega)$ بما أن $v\in C(\overline{\Omega})$ و $v=0$ على Γ ، (انظر المبرهنة 17.9). ننقل إذن v في (70) و نواصل كمثل إثبات المبرهنة 17.8 ·

ب) الحالة $|\Omega|=\infty$ ·

لدينا إذن $K\geqslant 0$ (لأن $f(x)\leqslant K$ حـ. ت. على Ω و $f\in L^2(\Omega)$ يستلزمان $K\geqslant 0$). نثبت $K'>K$ · إذن $v=G(u-K')\in H^1(\Omega)$ (القضية 5.9 مطبقة على الدالة $t\longmapsto G(t-K')$). بالإضافة $v\in C(\overline{\Omega})$ و $v=0$ على Γ ؛ إذن $v\in H_0^1(\Omega)$ · بنقل v في (70) لدينا

$$\int_\Omega |\nabla u|^2G'(u-K')+\int_\Omega uG(u-K')=\int_\Omega fG(u-K'). \tag{71}$$

من جهة أخرى $G(u-K')\in L^1(\Omega)$ بما أن[40]

$$0\leqslant G(u-K')\leqslant M|u|$$

و على المجموعة $[u\geqslant K']=\{x\in\Omega;\ u(x)\geqslant K'\}$ لدينا

$$K'\int_{[u\geqslant K']}|u|\leqslant\int_\Omega u^2<\infty.$$

نستنتج إذن من (71) بأن

---

[40] لأن $G(u-K')-G(-K')\leqslant M|u|$ و $G(-K')=0$ بما أن $-K'<0$ ·

$$\int_\Omega (u-K')G(u-K') \leqslant \int_\Omega (f-K')G(u-K') \leqslant 0.$$

بالتالي $u \leqslant K'$ حـ. ت. على Ω و إذن $u \leqslant K$ حـ. ت. على Ω (لأن $K' > K$ قد ثبت كيفيا). □

• **لازمة** 28.9. ـ **ليكن** $f \in L^2(\Omega)$ **و** $u \in H^1(\Omega) \frown C(\overline{\Omega})$[41] **يحققان** (70) . **لدينا**

$$\text{(} u \geqslant 0 \text{ على } \Gamma \text{) و (} f \geqslant 0 \text{ على } \Omega \text{)} \Longrightarrow \text{(} u \geqslant 0 \text{ على } \Omega \text{)} \tag{72}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \max\{\|u\|_{L^\infty(\Gamma)}, \|f\|_{L^\infty(\Omega)}\}. \tag{73}$$

بالخصوص،

$$\text{إذا } f = 0 \text{ على } \Omega \text{ فإن } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(\Gamma)} \text{ ؛} \tag{74}$$

$$\text{إذا } u = 0 \text{ على } \Gamma \text{ فإن } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ .} \tag{75}$$

ملاحظة 28. ـ إذا كانت Ω محدودة و إذا كان u حلا كلاسيكيا للمعادلة

$$-\triangle u + u = f \quad \text{على} \quad \Omega \tag{76}$$

يمكننا إعطاء إثباتا آخر للمبرهنة 27.9 . بالفعل ليكن $x_0 \in \overline{\Omega}$ بحيث $u(x_0) = \max_{\Omega} u$ ؛

- إذا $x_0 \in \Gamma$ ، فإن $u(x_0) \leqslant \sup_\Gamma u$.
- إذا $x_0 \in \Omega$ ، فإن $\nabla u(x_0) = 0$ ، $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x_0) \leqslant 0$ لـ $1 \leqslant i \leqslant N$ و إذن $\triangle u(x_0) \leqslant 0$.

نستنتج باستعمال المعادلة (76) بأن $u(x_0) = f(x_0) + \triangle u(x_0) \leqslant f(x_0)$.
لهذه الطريقة ميزة بأن تطبق على مسائل المعادلات الإهليلجية العامة من الدرجة الثانية:

---

[41] الفرضية $u \in C(\overline{\Omega})$ غير ضرورية في بعض الأحيان؛ انظر الملاحظة أدنى المبرهنة 27.9 .

obeikandl.com

$$-\sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)+\sum_{i=1}^{N}a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+u=f. \tag{77}$$

سوف نلاحظ أنه إذا $x_0\in\Omega$ ، فإن

$$\sum_{i,j=1}^{N}a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)\leqslant 0;$$

بالفعل، بتغيير القاعدة في x_0 ، يمكننا الرجوع إلى الحالة حيث المصفوفة $a_{ij}(x_0)$ قطرية في x_0 . تبقى نتيجة المبرهنة 27.9 صحيحة بالنسبة للحلول الضعيفة لـ (77) ، و لكن الإثبات أكثر دقة؛ انظر [1] Gilbarg – Trudinger .

• **قضية** 29.9. **ـ نفترض أن الدوال** $a_{ij}\in L^\infty(\Omega)$ **محققة للشروط الإهليلجية** (36) **و أن** $a_i,a_0\in L^\infty$ **مع** $a_0\geqslant 0$ **على** Ω . **ليكن** $f\in L^2(\Omega)$ **و** $u\in H^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ [42] **بحيث**

$$\int_\Omega\sum_{i,j}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+\int_\Omega\sum_i a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi+\int_\Omega a_0u\varphi=\int_\Omega f\varphi\qquad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{78}$$

إذن

(79) ($u\geqslant 0$ **على** Γ) **و** ($f\geqslant 0$ **على** Ω) $\Longrightarrow$ ($u\geqslant 0$ **على** Ω).

لنفرض أن $a_0\equiv 0$ **و أن** Ω **محدودة. إذن**

(80) ($f\geqslant 0$ **على** Ω) $\Longrightarrow$ ($u\geqslant\inf_\Gamma u$ **على** Ω).

(81) ($f=0$ **على** Ω) $\Longrightarrow$ ($\inf_\Gamma u\leqslant u\leqslant\sup_\Gamma u$ **على** Ω).

<u>إثبات</u> ـ سوف نثبت هذه النتيجة عندما $a_i=0$ ، $1\leqslant i\leqslant N$ ؛ الحالة العامة أكثر تعقيدا (انظر [1] Gilbarg – Trudinger ، مبرهنة 1.8).

[42] الفرضية $u\in C(\overline{\Omega})$ غير ضرورية في بعض الأحيان؛ انظر الملاحظة أدنى المبرهنة 27.9 .

لإثبات (79) ، يرجع بالمثل إلى إثبات

$$(79') \qquad \big(u \leqslant 0 \text{ على } \Gamma \big) \text{ و } \big(f \leqslant 0 \text{ على } \Omega \big) \Longrightarrow \big(u \leqslant 0 \text{ على } \Omega \big).$$

نختار $\varphi = G(u)$ في (78) مع G في مثل إثبات المبرهنة 27.9 ؛ نحصل إذن على

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} G'(u) \leqslant 0 \qquad \text{و إذن} \qquad \int_\Omega |\nabla u|^2 G'(u) \leqslant 0 \,.$$

لنضع $H(t) = \int_0^t [G'(s)]^{1/2} ds$ ، بحيث

$$H(u) \in H_0^1(\Omega) \qquad \text{و} \qquad |\nabla H(u)|^2 = |\nabla u|^2 G'(u) = 0 \,.$$

يستنتج أن $H(u) = 0$ على Ω[43] و إذن $u \leqslant 0$ على Ω .
لنبرهن الآن على (80) على الشكل الآتي

$$(80') \qquad \big(f \leqslant 0 \text{ على } \Omega \big) \Longrightarrow \big(u \leqslant \sup_\Gamma u \text{ على } \Omega \big).$$

لنضع $K = \sup_\Gamma u$ ؛ إذن $(u-K)$ تحقق (78) بما أن $a_0 = 0$ و $(u-K) \in H^1(\Omega)$ بما أن Ω محدود. بتطبيق $(79')$ نحصل على $u - K \leqslant 0$ على Ω ، أي $(80')$. أخيرا ينتج (81) من (80) و $(80')$. $\square$

قضية 30.9 **(مبدأ النهاية العظمى لمسألة نيومان). ــ ليكن** $f \in L^2(\Omega)$ **و** $u \in H^1(\Omega)$ **بحيث**

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

إذن لدينا

$$\inf_\Omega f \leqslant u(x) \leqslant \sup_\Omega f \qquad \text{ح. ت.} \qquad x \in \Omega \,.$$

---

[43] لاحظ أنه إذا كان $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ مع $1 \leqslant p < \infty$ و $\nabla f = 0$ على Ω ، فإن $f = 0$ على Ω . بالفعل، ليكن $\bar f$ التوسيع بـ 0 لـ f خارج Ω . إذن $\bar f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ و $\nabla \bar f = \overline{\nabla f} = 0$ (قضية 18.9). بالتالي $\bar f$ ثابتة على $\mathbb{R}^N$ (ملاحظة 8) و بما أن $\bar f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ، فإن $\bar f = 0$.

obeikandi.com

إثبات ـ مماثل لإثبات المبرهنة 27.9 · □

8.9. دوال ذاتية و تحليل طيفي

في كل هذا المقطع، نفترض بأن Ω مجموعة مفتوحة محدودة.

• **مبرهنة** 31.9. ـ **توجد قاعدة هلبرتية** $(e_n)_{n\geqslant 1}$ **لـ** $L^2(\Omega)$ **و توجد متتالية** $(\lambda_n)_{n\geqslant 1}$ **لأعداد حقيقية مع** $\lambda_n > 0$ **و** $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ **بحيث**

$$e_n \in H_0^1(\Omega) \frown C^\infty(\Omega), \tag{82}$$

$$-\triangle e_n = \lambda_n e_n \quad \text{على} \quad \Omega \cdot \tag{83}$$

نقول بأن الـ (λ_n) **هي القيم الذاتية** eignvalues **لـ** $-\triangle$ **(مع شرط ديريكلي) و أن الـ** (e_n) **هي الدوال الذاتية المرافقة لها.**

إثبات ـ لـ $f \in L^2(\Omega)$ ، نرمز بـ $u = Tf$ للحل الوحيد $u \in H_0^1(\Omega)$ للمسألة

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{84}$$

نعتبر المؤثر T كمؤثر من $L^2(\Omega)$ في $L^2(\Omega)$ · T مؤثر قرين ذاتي متراص (أعد إثبات المبرهنة 20.8 و استعمل نتيجة أن التباين $H_0^1 \subset L^2$ متراص). من جهة أخرى $N(T) = \{0\}$ و $(Tf, f) \geqslant 0$ $\forall f \in L^2$ · نستنتج (بفضل المبرهنة 11.6) بأن L^2 يقبل قاعدة هلبرتية (e_n) مكونة من دوال ذاتية لـ T مرافقة لقيم ذاتية μ_n مع $\mu_n > 0$ و $\mu_n \longrightarrow 0$ · لدينا إذن $e_n \in H_0^1$ و

$$\int_\Omega \nabla e_n \nabla \varphi = \frac{1}{\mu_n} \int_\Omega e_n \varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1.$$

obeikandi.com

بعبارة أخرى e_n هي حل ضعيف لـ (83) مع $\lambda_n = \mu_n^{-1}$ · استنادا إلى نتائج الانتظام في المقطع 6.9 (انظر ملاحظة 26) نعلم أن $e_n \in H^2(\omega)$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$ ؛ بالتالي $e_n \in H^4(\omega)$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$ ، $e_n \in H^6(\omega)$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$ ، إلخ· إذن $e_n \in \bigcap_{m\geqslant 1} H^m(\omega)$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$ و بالتالي $e_n \in C^\infty(\omega)$ لكل $\omega \subset\subset \Omega$ ؛ أي أن $e_n \in C^\infty(\Omega)$ · $\square$

ملاحظة 29. ـ تحت افتراضات المبرهنة 31.9 ، المتتالية $\left(\dfrac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ قاعدة هلبرتية لـ $H_0^1(\Omega)$ بالنسبة للجداء السلمي $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ [على التوالي، المتتالية $\left(\dfrac{e_n}{\sqrt{\lambda_n + 1}}\right)$ قاعدة هلبرتية لـ $H_0^1(\Omega)$ بالنسبة للجداء السلمي $\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_\Omega uv$]· بالفعل، من الواضح أن المتتالية $\left(\dfrac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ متعامدة في H_0^1 (استعمل (83))· يبقى التحقق بأن الفضاء المتجهي المولد بالـ (e_n) كثيف في H_0^1 · ليكن إذن $f \in H_0^1$ بحيث $(f, e_n)_{H_0^1} = 0$ $\forall n$ و لنبرهن أن $f = 0$ · حسب (83) لدينا $\lambda_n \int e_n f = 0$ $\forall n$ و بالتالي $f = 0$ (بما أن (e_n) قاعدة هلبرتية لـ L^2)·

ملاحظة 30. ـ تحت إفتراضات المبرهنة 31.9 ، نبين أن $e_n \in L^\infty(\Omega)$ (انظر [EX])· من جهة أخرى إذا كانت Ω من الصنف C^∞ ، فإن $e_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ؛ هذا يستنتج بسهولة من المبرهنة 25.9 ·

ملاحظة 31. ـ لتكن $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ دوالا تحقق شرط الإهليلجية (36) و ليكن $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ · فإنه توجد قاعدة هلبرتية $(e_n) \in L^2(\Omega)$ و توجد متتالية (λ_n) لأعداد حقيقية مع $\lambda_n \longrightarrow +\infty$ بحيث $e_n \in H_0^1(\Omega)$ و

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial e_n}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \int_\Omega a_0 e_n \varphi = \lambda_n \int_\Omega e_n \varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

تعاليق حول الفصل التاسع

يشكل هذا الفصل مقدمة لنظرية فضاءات صوبوليف و لنظرية المعادلات الإهليلجية. القارئ الذي يتمنى تعميق معلوماته حول هذا الموضوع، يمكنه الاطلاع على مراجع عديدة؛ نذكر من بينها، Agmon [1] ، Bers – John – Shechter [1] ، Lions [1] ، Lions – Magenes [1] ، Friedman [2] ، Miranda [1] ، Folland [1] ، Treves [4] ، Adams [1] ، Gilbarg – Trudinger [1] ، Stampacchia [1] ، Courant – Hilbert [1] ، (الجزء 2)، Nečas [1] ، Mizohata [1] ، Ladyzhenskaya – Uraltseva [1] ، Morrey [1] ، Potter – Weinberger [1] ، Nirenberg [1] ... و مراجع هذه النصوص.

1) في الفصل 9 ، قد افترضنا في أغلب الأحيان بأن Ω من الصنف C^1 ، مما يلغي مثلا المجموعات ذات " أركان " . يمكننا حسب الحالات تضعيف هذه الفرضية و تبديلها بشروط مختلفة: Ω من الصنف C^1 جزئيا، Ω ليبشتزي، لـ Ω خاصية المخروط، لـ Ω خاصية القطعة المستقيمة إلخ.؛ انظر مثلا Adams [1] ، Agmon [1] ، Nečas [1] .

2) المبرهنة 7.9 (وجود مؤثر توسيع) تمتد إلى فضاءات $W^{m,p}(\Omega)$ (Ω من الصنف C^m) بواسطة تعميمات مناسبة لتقنية التوسيع بالانعكاس؛ انظر مثلا Adams [1] ، Nečas [1] ، Lions – Magenes [1] ، Lions [1] ، Friedman [1] و [EX] .

3) نشير إلى بعض المتباينات الجد مهمة حول نظم صوبوليف.

• ا) متباينة **Poincaré–Wirtinger** . ـ لتكن Ω مجموعة مفتوحة مترابطة من الصنف C^1 و ليكن $1 \leqslant p \leqslant \infty$. فإنه يوجد ثابت C بحيث

$$\|u - \bar{u}\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \qquad \text{مع} \qquad \bar{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u \ .$$

نستنتج، بفضل متباينة صوبوليف بأنه إذا كان $p < N$ ،

$$\|u - \bar{u}\|_{L^{p^*}} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

انظر مثلا [EX] .

• ب) **متباينة Hardy** ـ لتكن Ω مجموعة مفتوحة محدودة من الصنف C^1 و ليكن $1 < p < \infty$. نضع $d(x) = dist(x, \Gamma)$. فإنه يوجد ثابت C بحيث

$$\|\frac{u}{d}\|_{L^p} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p} \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

و بالعكس،

$$\Big(u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{و} \quad \frac{u}{d} \in L^p(\Omega) \Big) \quad \Longrightarrow \quad (u \in W_0^{1,p}(\Omega)) \cdot$$

انظر [1] Lions – Magenes و [EX] للحالة $p = 2$.

• جـ) **متباينات الاستكمال لـ Gagliardo – Nirenberg** ـ لنذكر ببعض الأمثلة الأكثر بروزا في التطبيقات. بالنسبة للحالة العامة انظر [1] Nirenberg أو [2] Friedman (بعض المتباينات مبرهن عليها في [EX]).

لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة محدودة منتظمة (لتثبيت الأفكار).

مثال 1 ـ ليكن $u \in L^p(\Omega) \frown W^{2,r}(\Omega)$ مع $1 \leqslant p \leqslant \infty$ و $1 \leqslant r \leqslant \infty$. فإن $u \in W^{1,q}(\Omega)$ حيث q هو الوسط التوافقي harmonic mean لـ p و r ، أي: $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\Big)$ ، و

$$\|Du\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{W^{2,r}}^{1/2} \|u\|_{L^p}^{1/2}.$$

حالات خاصة: * $p = \infty$ و إذن $q = 2r$. لدينا

$$\|Du\|_{L^{2r}} \leqslant C\|u\|_{W^{2,r}}^{1/2} \|u\|_{L^\infty}^{1/2}.$$

من بين ما تسمح هذه المتباينة، إثبات أن $W^{2,r} \frown L^\infty$ جبر Algebra ، أي أن

$$u, v \in W^{2,r} \frown L^\infty \implies uv \in W^{2,r} \frown L^\infty$$

[تبقى هذه الخاصية صحيحة لـ $W^{m,r} \frown L^\infty$ مع m عدد طبيعي $\geqslant 2$].

** $p = q = r$. لدينا

$$\|Du\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{W^{2,p}}^{1/2} \|u\|_{L^p}^{1/2}.$$

و منه نستنتج بالخصوص أن

obeikandi.com

$$\|Du\|_{L^p} \leqslant \epsilon \|D^2u\|_{L^p} + C_\epsilon \|u\|_{L^p} \qquad \forall \epsilon > 0.$$

مثال 2 ۰ ـ ليكن $1 \leqslant q \leqslant p < \infty$ ۰ فإن

$$\|u\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{L^q}^{1-a} \|u\|_{W^{1,N}}^a \qquad \forall u \in W^{1,N}(\Omega) \qquad \text{مع} \qquad a = 1 - \frac{q}{p} \cdot \tag{85}$$

لاحظ الحالة الخاصة الأكثر استعمالا

$$N = 2 \text{ ،} \quad p = 4 \text{ ،} \quad q = 2 \quad \text{و} \quad a = \frac{1}{2} \text{ ،}$$

أي

$$\|u\|_{L^4} \leqslant C\|u\|_{L^2}^{1/2} \|u\|_{H^1}^{1/2} \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

نلاحظ كذلك في هذا الإطار بأنه لدينا متباينة الاستكمال الكثيرة الاستعمال (ملاحظة 2 من الفصل 4)

$$\|u\|_{L^p} \leqslant \|u\|_{L^q}^{1-a} \|u\|_{L^\infty}^a \qquad \text{مع} \qquad a = 1 - \frac{q}{p}$$

و لكنها لا تستلزم (85) لأن $W^{1,N} \not\subset L^\infty$ ۰

مثال 3 ۰ ـ ليكن $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ و $r > N$ ۰ فإن

$$\|u\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{L^q}^{1-a} \|u\|_{W^{1,r}}^a \quad \forall u \in W^{1,r}(\Omega) \quad \text{مع} \quad a = \frac{\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}}{\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{N} - \dfrac{1}{r}} \cdot \tag{86}$$

• 4) الخاصية الآتية مهمة أحيانا. ليكن $u \in W^{1,p}(\Omega)$ مع $1 \leqslant p \leqslant \infty$ و Ω مجموعة مفتوحة كيفية. فإن $\nabla u = 0$ حـ. ت. على المجموعة $\{x \in \Omega;\ u(x) = k\}$ حيث k ثابت كيفي؛ انظر Stampacchia [1] أو [EX] ۰

* 5) دوال $W^{1,p}(\Omega)$ قابلة للاشتقاق بالمعنى العادي حـ. ت. على Ω عندما $p > N$ ۰ بوضوح أكثر ليكن $u \in W^{1,p}(\Omega)$ مع $p > N$ ۰ إذن توجد مجموعة $A \subset \Omega$ ذات قياس صفري بحيث

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)-h.\nabla u(x)}{|h|}=0 \qquad \forall x\in\Omega\setminus A.$$

هذه الخاصية ليست صحيحة عندما $u\in W^{1,p}(\Omega)$ و $p\leqslant N$ ($N>1$). حول هذا السؤال انظر [1] Stein (فصل 8).

* 6) **فضاءات صوبوليف الكسرية.** ـ يمكننا تعريف عائلة من الفضاءات محصورة بين $L^p(\Omega)$ و $W^{1,p}(\Omega)$. بوضوح أكثر إذا $0<s<1$ ($s\in\mathbb{R}$) و $1\leqslant p<\infty$ ، نضع

$$W^{s,p}(\Omega)=\Big\{u\in L^p(\Omega);\quad \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{s+\frac{N}{p}}}\in L^p(\Omega\times\Omega)\Big\},$$

مزود بالنظيم العادي. نكتب $H^s(\Omega)=W^{s,2}(\Omega)$. لدراسة هذه الفضاءات، انظر Adams [1] ، Lions – Magenes [2] ، Malliavin [1] . نحتفظ أيضا بأنه يمكن إدخال فضاءات $W^{s,p}(\Omega)$ كاستكمالات بين $W^{1,p}$ و L^p ، أو بواسطة تحويل فورييه إذا كان $p=2$ و $\Omega=\mathbb{R}^N$.

نعرف أخيرا $W^{s,p}(\Omega)$ لـ s عدد حقيقي، s غير طبيعي، $s>1$ كما يلي. نكتب $s=m+\sigma$ مع m = القيمة الطبيعية لـ s ، و نضع

$$W^{s,p}(\Omega)=\{\ u\in W^{m,p}(\Omega)\ ؛\ D^\alpha u\in W^{\sigma,p}(\Omega)\quad \forall\alpha \quad \text{مع}\quad |\alpha|=m\ \}\ .$$

بواسطة منظومة إحداثيات محلية، نعرف كذلك $W^{s,p}(\Gamma)$ حيث Γ متنوعة منتظمة regular manifold (مثلا حد مفتوح منتظم). هذه الفضاءات تلعب دورا هاما في نظرية الآثار (انظر تعاليق 7).

• 7) **نظرية الآثار** Traces . ـ ليكن $1\leqslant p<\infty$. لنبدأ بتوطئة أساسية:

توطئة 9.9 ـ **ليكن** $\Omega=\mathbb{R}^N_+$. **يوجد ثابت** C **بحيث**

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^{N-1}}|u(x',0)|^p dx'\Big)^{1/p}\leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u\in C^1_c(\mathbb{R}^N).$$

<u>إثبات</u>. ـ لتكن $G(t)=|t|^{p-1}t$ و لتكن $u\in C^1_c(\mathbb{R}^N)$. لدينا

$$\begin{aligned} G(u(x',0)) &= -\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_N} G(u(x',x_N))dx_N \\ &= -\int_0^{+\infty} G'(u(x',x_N))\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',x_N)dx_N. \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} |u(x',0)|^p &\leqslant p\int_0^{+\infty} |u(x',x_N)|^{p-1}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',x_N)\Big|dx_N \\ &\leqslant C\Big[\int_0^{+\infty} |u(x',x_N)|^p dx_N + \int_0^{+\infty}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_N}(x',x_N)\Big|^p dx_N\Big] \end{aligned}$$

و يتبع الاستنتاج بالمكاملة حول $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. $\square$

نستنتج من التوطئة 9.9 بأن التطبيق $u \longmapsto u_{|\Gamma}$ مع $\Gamma = \partial\Omega = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ معرف من $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ في $L^p(\Gamma)$ ، يتوسع بالكثافة إلى مؤثر خطي و مستمر من $W^{1,p}(\Omega)$ في $L^p(\Gamma)$. هذا المؤثر هو، بالتعريف، أثر u على Γ ؛ نرمز إليه كذلك بـ $u_{|\Gamma}$.

نلاحظ بأنه يوجد فرق أساسي بين $L^p(\mathbb{R}_+^N)$ و $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^N)$ ؛ دوال $L^p(\mathbb{R}_+^N)$ ليس لها أثرا على Γ .

نتصور بسهولة كيفية تعريف ـ بواسطة إحداثيات محلية ـ الأثر على $\Gamma = \partial\Omega$ لدالة $u \in W^{1,p}(\Omega)$ عندما تكون Ω مجموعة مفتوحة منتظمة في $\mathbb{R}^N$ (مثلا Ω من الصنف C^1 مع Γ محدود). في هذه الحالة $u_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)$ (للقياس السطحي $d\sigma$). أهم خصائص الأثر هي كالآتي:

$(*)$ إذا $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ، فإنه في الحقيقة، $u_{|\Gamma} \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ و

$$\|u_{|\Gamma}\|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

بالإضافة إلى ذلك، المؤثر $u \longmapsto u_{|\Gamma}$ غامر من $W^{1,p}(\Omega)$ على $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$.

$(**)$ نواة مؤثر الأثر هو $W_0^{1,p}(\Omega)$ ، أي

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega);\ u_{|\Gamma} = 0\}.$$

$(***)$ لدينا صيغة غرين Green's formula :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v = -\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Gamma uv(\vec{n}.\vec{e}_i)d\sigma \qquad \forall u,v \in H^1(\Omega)$$

obeikandi.com

حيث $\vec{n}$ هو متجه الوحدة الناظمي الخارجي لـ Γ . لاحظ أنه للتكامل السطحي معنى مادام $u,v \in L^2(\Gamma)$.

بنفس الطريقة يمكن التحدث عن $\frac{\partial u}{\partial n}$ لدالة $u \in W^{2,p}(\Omega)$: نضع $\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u_{|\Gamma}).\vec{n}$ ـ و الذي له معنى مادام $\nabla u_{|\Gamma} \in L^p(\Gamma)^N$ ـ و $\frac{\partial u}{\partial n} \in L^p(\Gamma)$ (فبالفعل $\frac{\partial u}{\partial n} \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$).

لدينا صيغة غرين:

$$\int_\Omega -\Delta uv = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma \qquad \forall u,v \in H^2(\Omega).$$

$(****)$ المؤثر $u \longmapsto \left\{u_{|\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial n}\right\}$ خطي، مستمر و غامر من $W^{2,p}(\Omega)$ على $W^{2-1/p,p}(\Gamma) \times W^{1-1/p,p}(\Gamma)$. حول هذه الأسئلة، انظر Lions – Magenes [1] للحالة $p=2$ (و المراجع المذكورة في Lions – Magenes [1] للحالة $p \neq 2$).

8) **مؤثرات من الدرجة $2m$ و أنظمة إهليلجية.** ـ تمتد نتائج الوجود و الانتظام المبرهن عليها في الفصل 9 إلى مؤثرات إهليلجية من الدرجة $2m$ و إلى أنظمة إهليلجية[44] . أحد الوسائل الأساسية هي متباينة Garding . حول هذه الأسئلة، انظر Agmon [1] ، Nečas [1] ، Lions – Magenes [1] ، Agmon – Douglis – Nirenberg [1] . تلعب مؤثرات الدرجة $2m$ و بعض المنظومات دورا هاما في الميكانيكا و في الفيزياء. نشير بالخصوص إلى المؤثر الثنائي التوافقية Δ^2 (نظرية الصفائح)، منظومة المرونة و منظومة Stokes (ميكانيكا الموائع)؛ انظر مثلا Ciarlet [1] ، Duvaut – Lions [1] ، Raviart – Thomas [1] ، Temam [1] ، Nečas – Hlavaček [1] ، Gurtin [1] .

9) **الانتظام في فضاءات L^p و $C^{0,\alpha}$** . ـ مبرهنات الانتظام المثبت عليها في الفصل 9 لـ $p=2$ تمتد إلى الحالة $p \neq 2$:

• **مبرهنة** 32.9 (Agmon – Douglis – Nirenberg [1]) ـ **نفترض أن** Ω **من الصنف** C^2 **مع** Γ **محدود. ليكن** $1 < p < \infty$. **إذن لكل** $f \in L^p(\Omega)$ ، **يوجد**

[44] و لكن ليس مبدأ النهاية العظمى، ما عدا حالات خاصة.

$u \in W^{2,p}(\Omega) \frown W_0^{1,p}(\Omega)$ **وحيد، حلا للمعادلة**

$$-\Delta u + u = f \quad \text{على} \quad \Omega \cdot \tag{87}$$

إضافة إلى ذلك، إذا كانت Ω **من الصنف** C^{m+2} **و إذا** $f \in W^{m,p}(\Omega)$ **(** m **عدد طبيعي** $\geqslant 1$ **)، فإن**

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad \text{و} \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leqslant C\|f\|_{W^{m,p}} \cdot$$

[نتائج مماثلة إذا عوضت (87) بمعادلة إهليلجية من الدرجة 2 و ذات عوامل منتظمة].

إثبات المبرهنة 32.9 أكثر تعقيدا من الحالة $p=2$ (مبرهنة 25.9). تعتمد أساسا على فكرتين:

ا) صيغة التمثيل الصريح لـ u بواسطة الحل الأساسي. مثلا إذا $\Omega = \mathbb{R}^3$ ، فإن حل (87) معطى بـ $u = G * f$ حيث $G(x) = \frac{C}{|x|}e^{-|x|}$ (انظر [EX]). بحيث بشكل تقريبي $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} * f$ ؛ " و لكن " $\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j}$ لا تنتمي إلى $L^1(\mathbb{R}^3)$[45] ، بسبب الشذوذ في $x=0$ ، و لا يمكننا تطبيق التقديرات الأولية على الملفوف التكاملي (مبرهنة 15.4).

ب) لتجاوز هذه الصعوبة نستعمل نظرية التكامل الشاذ في L^p و التي ترجع إلى Calderon – Zygmund (انظر مثلا Stein [1] و Bers – John – Schechter [1]).

نحتفظ بأن نتيجة المبرهنة 32.9 خاطئة لـ $p=1$ و $p=\infty$.

نعرف كذلك نتائج انتظام في فضاءات دوال هولدر[46] :

---

[45] ولكن تقريبا!

[46] نذكر بأن

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C(\overline{\Omega}); \quad \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}$$

و

$$C^{m,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{\ u \in C^m(\overline{\Omega}) \ ; \quad D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \forall \beta \ \text{مع}\ |\beta| = m\ \} \cdot$$

• **مبرهنة** 33.9 **(شاودر). ــ نفترض بأن Ω محدودة من الصنف $C^{2,\alpha}$ مع $0 < \alpha < 1$. إذن لكل $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ يوجد $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ وحيد، حلا للمسألة**

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta u + u = f & \text{على} & \Omega \\ u = 0 & \text{على} & \Gamma \, . \end{array}\right\} \tag{88}$$

بالإضافة إلى ذلك إذا كانت Ω من الصنف $C^{m+2,\alpha}$ (m عدد طبيعي $\geqslant 1$) و إذا $f \in C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ ، فإن

$$u \in C^{m+2,\alpha}(\overline{\Omega}) \qquad \text{و} \qquad \|u\|_{C^{m+2,\alpha}} \leqslant C\|f\|_{C^{m,\alpha}} \, .$$

[نتائج مماثلة إذا عوضت (88) بمعادلة إهليلجية من الدرجة 2 و ذات عوامل منتظمة].

إثبات المبرهنة 33.9 يعتمد ــ كما في المبرهنة 32.9 ــ على إحدى التمثيل الصريح لـ u و على نظرية التكامل الشاذ في فضاءات $C^{0,\alpha}$ و التي ترجع إلى Hölder ، Korn ، Lichtenstein ، Giraud .

حول هذا الموضوع، انظر Agmon – Douglis – Nirenberg [1] ، Bers – John – Schechter [1] ، Gilbarg – Trudinger [1] و كذلك التقريب الإبتدائي المدد مؤخرا من طرف A.Brandt [1] (يعتمد أساسا على مبدأ النهاية العظمى).

لتكن Ω مجموعة مفتوحة محدودة و منتظمة و ليكن $f \in C(\overline{\Omega})$. حسب المبرهنة 32.9 ، يوجد $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (لكل $1 < p < \infty$) حلا وحيدا لـ (87) . بالخصوص، $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ لكل $0 < \alpha < 1$ (بفضل مبرهنة Morrey (مبرهنة 12.9)). عموما u لا ينتمي إلى C^2 ، و لا إلى $W^{2,\infty}$. هذا يفسر لماذا نتجنب غالبا العمل في فضاءات $L^1(\Omega)$ ، $L^\infty(\Omega)$ و $C(\overline{\Omega})$ ، و هي فضاءات لا نعرف لها نتائج أعظمية للانتظام.

تتمدد المبرهنتان 32.9 و 33.9 إلى مؤثرات إهليلجية من الدرجة $2m$ و إلى المنظومات الإهليلجية؛ انظر Agmon – Douglis – Nirenberg [1] . نشير أخيرا، في اتجاه آخر، بأن المعادلات الإهليلجية من الدرجة 2 ذات العوامل الغير المستمرة قد كانت محور عديد من الأعمال. نذكر، مثلا، النتيجة التالية:

---

* **مبرهنة** 34.9 (De Giorgi – Stampacchia) . ــ **لتكن** $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **مجموعة مفتوحة محدودة و منتظمة. نفترض بأن الدوال** $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ **محققة لشرط الإهليلجية** (36) . **ليكن** $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ **مع** $p > \dfrac{N}{2}$ **و ليكن** $u \in H_0^1(\Omega)$ **بحيث**

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f\varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

إذن $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ **لأحد** $0 < \alpha < 1$ **(الذي يتعلق بـ** Ω ، a_{ij} **و** p **).**

حول هذه الأسئلة، انظر Stampacchia [1] ، Gilbarg – Trudinger [1] و Ladyzhenskaya – Uraltseva [1] .

10) بعض سلبيات الطريقة التغيراتية و كيفية معالجتها!

تسمح الطريقة التغيراتية إثبات وجود حل ضعيف بسهولة. لا يمكن تطبيقها دائما، و لكن يمكن إكمالها. لنشر إلى مثالين.
لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة محدودة و منتظمة.

أ) طريقة الثنوية (أو المناقلة Transposition). ــ ليكن $f \in L^1(\Omega)$ ــ أو f قياس (رادون) على Ω ــ و لنبحث عن حل المسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta u + u = f & \text{على} & \Omega \\ u = 0 & \text{على} & \Gamma \cdot \end{array}\right\} \tag{89}$$

مجرد أن $N > 1$ الشكل الخطي $\varphi \longmapsto \int_\Omega f\varphi$ غير معرف لـ $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ و بالتالي الطريقة التغيراتية لا يعمل بها. بيد أنه يمكننا استعمال التقنية التالية. نرمز بـ $T : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ للمؤثر $u \longmapsto f$ (حيث u هو حل (89) ، و الذي يوجد لـ $f \in L^2(\Omega)$). نعلم أن T قرين ذاتي. من ناحية أخرى (مبرهنة 32.9) $T : L^p(\Omega) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega)$ لـ $2 \leqslant p < \infty$ و بفضل مبرهنتي صوبوليف و Morrey ، $T : L^p(\Omega) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$ إذا $p > \dfrac{N}{2}$. بواسطة الثنوية نستنتج أن

$$T^* : M(\Omega) = C(\overline{\Omega})' \longrightarrow L^{p'}(\Omega) \qquad \text{إذا} \qquad p > \frac{N}{2} \cdot$$

لكن بما أن T قرين ذاتي في L^2 ، T^* هو توسيع لـ T ؛ إذن يمكننا اعتبار $u = T^*f$ كحل عام لـ (89) . كحقيقة، إذا $f \in L^1(\Omega)$ ، فإن $u = T^*f \in L^q(\Omega)$ لكل $q < \dfrac{N}{N-2}$ ؛ u هو الحل الوحيد الضعيف (جدا) لـ (89) بالمعنى التالي:

$$-\int_\Omega u\Delta\varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \qquad \text{،} \ \forall\varphi \in C^2(\overline{\Omega}) \qquad \varphi = 0 \quad \text{على} \quad \Gamma \cdot$$

في نفس الإطار، يمكننا دراسة (89) لـ f معطاة في $H^{-m}(\Omega)$ ؛ انظر Lions – Magenes [1] .

ب) طريقة الكثافة . ــ ليكن $g \in C(\Gamma)$ و لنبحث لحل المسألة

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta u + u = 0 & \text{على} & \Omega \\ u = g & \text{على} & \Gamma \cdot \end{array}\right\} \tag{90}$$

عموما إذا $g \in C(\Gamma)$ ، لا توجد دالة $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ بحيث $\tilde{g}_{|\Gamma} = g$ (انظر تعليق 7 و لاحظ أن $C(\Gamma) \not\subset H^{1/2}(\Gamma)$). إنه إذن من البديهي عدم البحث عن حل (90) في $H^1(\Omega)$: الطريقة التغيراتية لا يعمل بها. بيد أنه لدينا الـ

• **مبرهنة** 35.9. ــ **يوجد** $u \in C(\overline{\Omega}) \frown C^\infty(\Omega)$ **حلا وحيدا لـ** (90) .

إثبات. ــ لنثبت $\tilde{g} \in C_c(\mathbb{R}^N)$ بحيث $\tilde{g}_{|\Gamma} = g$ ؛ حسب مبرهنة Tietze – Urysohn يوجد $\tilde{g}$ (انظر Dieudonné [1] ، Schwartz [2]). لتكن $(\tilde{g}_n)$ متتالية من $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ بحيث $\tilde{g}_n \longrightarrow g$ بانتظام على $\mathbb{R}^N$. نضع $g_n = \tilde{g}_{n|\Gamma}$. بتطبيق الطريقة التغيراتية و نتائج الانتظام نرى أنه يوجد $u_n \in C^2(\overline{\Omega})$ حلا كلاسيكيا للمسألة:

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta u_n + u_n = 0 & \text{على} & \Omega \\ u_n = g_n & \text{على} & \Gamma \cdot \end{array}\right\}$$

استنادا إلى مبدأ النهاية العظمى (لازمة 28.9) لدينا

$$\|u_m - u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant \|g_m - g_n\|_{L^\infty(\Gamma)}.$$

بالتالي (u_n) متتالية كوشي في $C(\overline{\Omega})$ و $u_n \longrightarrow u$ في $C(\overline{\Omega})$. من الواضح أنه لدينا

$$\int_\Omega u(-\Delta\varphi + \varphi) = 0 \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

و بالتالي $u \in C^\infty(\Omega)$ (انظر ملاحظة 26). إذن $u \in C(\overline{\Omega}) \frown C^\infty(\Omega)$ تحقق (90) .
وحدانية الحل لـ (90) يستنتج من مبدأ النهاية العظمى (انظر ملاحظة 28). □

* **ملاحظة** 32. ـ لا يمكن في المبرهنة 35.9 الاستغناء عن فرضية Ω منتظمة بما يكفي. عندما يكون لـ Ω حد " مرضي " نشرف على مسائل نظرية الكمون Potential theory (نقاط منتظمة، معيار Weiner إلخ.).

مبادرة أخرى لحل (90) هي طريقة Perron ، و هي كلاسيكية في نظرية الكمون. نضع

$u(x) = \sup$ { $v(x)$ ؛ $v \in C(\overline{\Omega}) \frown C^2(\Omega)$ ، $-\Delta v + v \leqslant 0$ على Ω و $v \leqslant g$ على Γ }

و نبرهن بأن u يحقق (90) .
يقال عن دالة v تحقق $-\Delta v + v \leqslant 0$ على Ω تحت توافقية؛ إذا حققت بالإضافة $v \leqslant g$ على Γ نقول بأن v حل تحتي لـ (90) .

11) **مبدأ النهاية العظمى القوي.** ـ يمكننا تحديد استخلاص القضية 29.9 عندما يكون u حلا كلاسيكيا. بوضوح أكثر، لتكن Ω مجموعة مفتوحة مترابطة محدودة منتظمة. لتكن $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ محققة لشرط الإهليلجية (36) ، $a_i, a_0 \in C(\overline{\Omega})$ مع $a_0 \geqslant 0$ على Ω . لدينا الـ

مبرهنة 36.9 (Hopf) . **ـ ليكن** $u \in C(\overline{\Omega}) \frown C^2(\Omega)$ **محققا لـ**

$$-\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \qquad \textbf{على} \quad \Omega \;. \qquad (91)$$

نفترض بأن $f \geqslant 0$ **على** Ω · **إذا وجد** $x_0 \in \Omega$ **بحيث** $u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}} u$ **و إذا** $u(x_0) \leqslant 0$ [47] **فإن** u **ثابت على** Ω **(و بالإضافة إلى ذلك** $f = 0$ **على** Ω **)·**

للإثبات، انظر Bers – John – Schechter [1] ، Gilbarg – Trudinger [1] أو Protter – Weinberger [1] ·

• **لازمة** 37.9. **ـ ليكن** $u \in C(\overline{\Omega}) \frown C^2(\Omega)$ **محققا لـ** (91) **مع** $f \geqslant 0$ **على** Ω · **نفترض أن** $u \geqslant 0$ **على** Γ · **إذن**

- **إما** $u > 0$ **على** Ω
- **إما** $u \equiv 0$ **على** Ω ·

بالنسبة لنتائج أخرى لها علاقة بمبدأ النهاية العظمى، (متباينة Harnack إلخ·) انظر Stampacchia [1] ، Gilbarg – Trudinger [1] ، Protter – Weinberger [1] ، Sperb [1].

12) **مؤثر** Laplace – Beltrami · ـ المؤثرات الإهليلجية المعرفة على متنوعات ريمانية Riemannian manifolds (بحد أو بدون حد) و بالخصوص مؤثر Laplace – Beltrami تلعب دورا في الهندسة التفاضلية و في الفيزياء؛ انظر مثلا Choquet – De Witt – Dillard [1].

13) **خصائص طيفية**· ـ تتمتع القيم الذاتية و الدوال الذاتية لمؤثرات إهليلجية من الدرجة 2 بعدة خصائص مميزة· لنذكر البعض منها· لتكن $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ مجموعة مفتوحة مترابطة محدودة منتظمة· لتكن $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ محققة لشرط الإهليلجية (36) و $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ · ليكن A المؤثر

$$Au = -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + a_0 u$$

---

[47] الفرضية $u(x_0) \leqslant 0$ غير ضرورية إذا $a_0 = 0$ ·

مع شرط ديريكليه المتجانس ($u = 0$ على Γ)· نرمز بـ (λ_n) إلى متتالية القيم الذاتية لـ A مرتبة في ترتيب متزايد، مع $\lambda_n \longrightarrow \infty$ عندما $n \longrightarrow \infty$ · إذن فالقيمة الذاتية الأولى λ_1 تعددها 1 (نقول بأن λ_1 قيمة ذاتية بسيطة)[48] ، و يمكننا اختيار الدالة الذاتية المرافقة e_1 بحيث $e_1 > 0$ على Ω ؛ انظر مبرهنة Krein – Rutman في تعاليق الفصل 6 · من ناحية أخرى، نثبت بأن $\lambda_n \sim cn^{2/N}$ عندما $n \longrightarrow \infty$ مع $c > 0$ ؛ انظر Agmon [1] ·

العلاقات الموجودة بين الخصائص الهندسية[49] لـ Ω و طيف A تحل مجال بحوث معمقة؛ انظر Kac [1] ، Marcel – Berger [1] ، Osserman [1] ، I.M.Singer [1] · الهدف من ذلك هو استنتاج أقصى حد من المعلومات حول Ω عبر معرفة الطيف (λ_n) ·

مسألة مفتوحة ملفتة للنظر هي كالتالي· ليكن Ω_1 و Ω_2 حيزين محدودين من $\mathbb{R}^2$ ؛ نفترض أن القيم الذاتية للمؤثر $-\Delta$ (مع شرط ديريكليه) هي نفسها بالنسبة لـ Ω_1 و Ω_2 · هل Ω_1 و Ω_2 متشاكلان؟ سميت هذه المسألة: " هل يمكن سماع شكل طبل؟ "[50] · نعرف بأن الجواب إيجابي عندما يكون Ω_1 قرصا·

سؤال آخر مهم هو الآتي· لنعتبر المؤثر $Au = -\Delta u + a_0 u$ (مع شروط حدية)· ما هي خصائص a_0 التي يمكن استخلاصها عبر معرفة طيف A ؟

14) **مسائل إهليلجية منحلة** degenerate · ـ يتعلق الأمر بحل مسائل من الشكل

$$\left.\begin{array}{l} -\sum_{i,j} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\Big) + \sum_i a_i \dfrac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \qquad \text{على} \qquad \Omega \\ + \text{ شروط حدية على } \Gamma \text{ أو على جزء من } \Gamma \end{array}\right\}$$

حيث الدوال a_{ij} لا تحقق شرط الإهليلجية (36) و لكن فقط

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0 \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{36'}$$

[48] عند البعد $N \geqslant 2$ القيم الذاتية الأخرى يمكن أن يكون تعددها > 1 ·

[49] خصوصا عندما تكون Ω متنوعة ريمانية بدون حد و A مؤثر Laplace – Beltrami ·

[50] لأن التوفيقات لاهتزاز غشاء Ω مثبت عند حده Γ هي دوال $e_n(x)\sin\sqrt{\lambda_n t}$ حيث (λ_n, e_n) هي القيم الذاتية و الدوال الذاتية لـ $-\Delta$ مع شرط ديريكليه·

obeikandi.com

حول هذا الموضوع الشاسع، اطلع مثلا على أعمال Kohn – Nirenberg [1] ، Baouendi – Goulaouic [1] ، Oleinik – Radkevitch [1] .

15) **مسائل إهليلجية غير خطية** Nonlinear . ـ مجال شاسع للبحوث، محفز بعدة أسئلة من الهندسة، الميكانيكا، الفيزياء، التحكم الأمثل، نظرية الاحتمالات إلخ. قد عرف توسيعات عجيبة من خلال آخر أعمال Leray و Schauder في بداية الثلاثينات. لنميز بعض المجموعات:

أ) المسائل نصف - خطية semi – linear . ـ يتعلق الأمر، مثلا، بمسائل على الشكل

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f(x,u) && \text{على } \Omega \\ u &= 0 && \text{على } \Gamma \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

حيث $f(x,u)$ دالة معطاة.

من بين ما تحوي هذه المجموعة، مسائل التفرع حيث ندرس تركيب مجموعة الحلول (λ, u) للمسألة

$$\left.\begin{aligned} -\Delta u &= f_\lambda(x,u) && \text{على } \Omega \\ u &= 0 && \text{على } \Gamma \end{aligned}\right\} \tag{92'}$$

حيث λ وسيط متغير.

ب) المسائل شبه خطية quasi – linear . ـ يتعلق الأمر بحل مسائل من الشكل

$$\left.\begin{aligned} -\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{ij}(x,u,\nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) &= f(x,u,\nabla u) && \text{على } \Omega \\ u &= 0 && \text{على } \Gamma \end{aligned}\right\} \tag{93}$$

حيث الدوال $a_{ij}(x,u,p)$ إهليلجية، مع احتمال أنها منحلة؛ لدينا مثلا

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x,u,p)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha(u,p)|\xi|^2 \qquad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

مع $\alpha(u,p) > 0$ ‏ $\forall u \in \mathbb{R}$ ، $\forall p \in \mathbb{R}$ ، و لكن $\alpha(u,p)$ غير محدودة بانتظام من الأسفل بثابت $\alpha > 0$. فهكذا، معادلة السطوح الصغرى تكتب على الشكل (93) مع $a_{ij} = \delta_{ij}(1 + |\nabla u|^2)^{-1/2}$. لتعميم أوسع، نتصور مسائل من الشكل

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \tag{94}$$

حيث المصفوفة $\dfrac{\partial F}{\partial q_{ij}}(x, u, p, q)$ إهليلجية (مع احتمال أنها منحلة). مثلا، معادلة Monge – Ampère تدخل في هذا الإطار.

جـ) المسائل ذات الحد الحر free boundary . ـ يتعلق الأمر بحل معادلة إهليلجية خطية على مجموعة مفتوحة Ω غير معطاة مسبقا. غالبا ما نتجاوز جهلنا لـ Ω بمعرفة شرطين حديين على Γ : مثلا ديريكليه و نيومان. تتعلق المسألة بإيجاد على التوالي مجموعة مفتوحة Ω و دالة u بحيث ...

أ) فيما يتعلق الأمر بالمسألتين (92) و ('92) بحوزتنا عدة تقنيات:

- طريقة الرتابة monotonicity ، انظر Browder [1] و Lions [3] .
- طرق طوبولوجية (مبرهنة النقطة الثابتة fixed point لـ Schauder ، نظرية الدرجة degree لـ Leray – Schauder إلخ.)؛ انظر J.T.Schwartz [1] ، M.Krasnoselskii [1] و L.Nirenberg [2], [3] .
- طرق تغيراتية (نظرية النقاط الحرجة critical points ، نظرية Morse إلخ.)؛ انظر Rabinowitz [1] ، Melvyn Berger [1] ، M.Krasnoselskii [1] و L.Nirenberg [3] .

ب) يتطلب حل المسائل من الشكل (93) أحيانا تقنية معتمدة على تقديرات[51] ؛ انظر أعمال De Giorgi ، Bombieri ، Miranda ، Giusti ، Ladyzhenskaya – Uraltseva ، Serrin إلخ ، وصفت في Ladyzhenskaya – Uraltseva [1] ، Serrin [1] ، Bombieri [1] و Gilbarg – Trudinger [1] . نتائج مهمة بخصوص معادلة Monge – Ampère قد حصل عليها مؤخرا؛ انظر Yau [1] .

[51] هذا هو الحال مثلا بالنسبة لمعادلة السطوح الصغرى.

obeikandi.com

جـ) فيما يخص مسائل الحد الحر، عدة نتائج جديدة قد ظهرت خلال السنوات الأخيرة، على علاقة أساسا مع نظرية المتباينات التغيراتية Variational inequality ؛ انظر Kinderlehrer – Stampacchia [1] ، Baiocchi – Capelo [1] (و أعمال مدرسة Pavie المذكورة في هذا الكتاب)، Free Boundary Problems [1], [2] .

obeikandl.com