باب الرياضيات

تربيع الدائرة

(تابع ما قبله)

من نيوتن حتى الوقت الحاضر

وقبل الشروع بذكر الطرق الحديثة المأخوذة من حساب التفاضل والتكامل وكيفية استخدامها وتطبيقها على مسألة تربيع الدائرة يجدر بنا ان نذكر اسماء بعض الذين ادعوا حلها منذ ايام نيوتن حتى عصرنا الحاضر غير ذاكرين الاحياء ومبتدئين بالفيلسوف هوبس الانكليزي الذي تعرض لحلها في كتاب لهُ يبحث عن الجاذبية والجزر والمد، وطريقتهُ بسيطة لكنها بعيدة عن الحقيقة بالنسبة الى مكانته في الفلسفة. تصدى لهُ اثنان من كبار الرياضيين هوجنس وولس (Wallis) واظهرا لهُ خطاءهُ فكبر عليهِ ذلك ولكي يخفي عجزهُ عمد الى السفسطة والمغالطة واخذ ينتقد مبادئ الهندسة الاولية ونظريات كبار المهندسين القدماء كفيثاغورس وارخميدس وغيرهما

وكم كان عدد المدعين في قرننا وما كان اختلف طرق بعضهم فاحدهم واسمهُ اوليفر اعتقد ان الدائرة تساوي مربعًا ضلعهُ يعادل ضلع مثلث متساوي الاضلاع مرسوم في الدائرة لان وزنهما متساويان(١) وآخر قدم حلاً ولاعتقاده الراسخ بصحتهِ وعد بجائزة مقدارها الف ريال لمن ينقض الحل ويظهر الخطاء. وكم راوغ ليتخلص من دفع المبلغ المذكور حتى اجبرتهُ المحكمة على القيام بوعده. وآخر وجد ان نتيجة رسمهِ تنطبق على القيمة ٣ ١/٧ فاعتقد بصحتهِ وحينما انتقدهُ معاصروهُ قال « انا اكبر تعزية لي ان ابناء المستقبل سوف يعرفون صحة ابحاثي وعندئذٍ يقدرونني حق قدري » وغيرهُ ارتكب في الحل الذي نشرهُ خطاء فظيعًا قد لا يقع فيهِ صغار الطلبة اعني بهِ « الجزء اكبر من الكل » وآخر عرف الدائرة بشكل قيامي ذي اضلاع كثيرة لكنها محدودة العدد فسهل عليهِ الحل المطلوب. ومن الامور التي بحث فيها وقررها حجم نقطة الملامسة بين دائرتين

(١) في هذه الحالة تكون النسبة ٣

ولم يكن حظ المانيا باقل من حظ فرنسا بكثرة اولئك المدعين وسخافة طرقهم . ونشر غير واحد منهم حلاً وعيَّن جائزة كما فعل الفرنسوي ولولا خوف الملل وضياع الوقت لاوردنا ذكر البعض منهم

وهنا لا بد لي من لفت الاذهان للتمييز بين هؤلاء الذين ذكرناهم او مَن هم على شاكلتهم وبين الذين بحثوا ونشروا نتائجهم التقريبية وهم يعلمون حق العلم انها تقريبية ليس الا . اما قيمة رسم كهذا فتتوقف على امرين الاول مقدار القيمة التي يتناولها الحل والثاني درجة سهولة رسمه بالمسطرة والبركار . ونعلم جيداً ان اكبر الرياضيين مثل يولر[1] جربوا ان يبرزوا حلولاً بسيطة تقريبية وهذه الرسوم التقريبية حسنة جداً لكنها قليلة الاهمية لان نتائجها تنطبق على الحقيقة لثلاثة او اربعة ارقام فقط من الكسر العشري بينما ان النتائج الحسابية تبلغ بنا اية درجة اردنا وزيادة على ذلك انها عقيمة الفائدة فلا تمكننا من تقرير امكان الحل او عدمهُ

وفي اوائل القرن السابع عشر قبل ان وضع ليبنتز ونيوتن مبادئ حساب التفاضل والتكامل ومثلاً النسبة بين المحيط والقطر بسلاسل القوى التي تمكن المشتغلين من الوصول الى مئات الارقام قام الرياضيان الانكليزيان ولس واللورد برونكر سابقا نيوتن ومثلاها بسلاسل اللانهاية المؤلفة من الارقام البسيطة فهدا السبيل لحسابها باقل عناءٍ من الطرق السابقة . فولس تمكن من تمثيل ربع النسبة بالحاصل الآتي

$$\frac{٣\times٣\times٥\times٥\times٧\times٧\times٩\times٩\cdots\text{الخ}}{٢\times٢\times٤\times٤\times٦\times٦\times٨\times٨\cdots\text{الخ}}$$

واللورد برونكر مثلها بكسر مستمر مخرجهُ الاثنان وصورهُ مربع الارقام الفردية . وبما ان نتائجها لم تفِ بالغرض المطلوب جعل الرياضيون يبحثون ويدرسون لعلهم يصلون الى طرق افضل واسهل فتمكن غريغوري ونيوتن وليبنتز الى تمثيلها (ربع النسبة) بالسلسلة الآتية

$$١-\frac{١}{٣}+\frac{١}{٥}-\frac{١}{٧}+\frac{١}{٩}-\frac{١}{١١}+\frac{١}{١٣}\cdots\text{الخ}$$

ولكن مع بساطتها وسهولة مناولتها والعمل بها وجد انها قاصرة عما توقعوا الوصول اليه وذلك لبطء اقترابها من « حدها » اعني به ان المشتغل بها يلزمهُ ان يتناول عدداً كبيراً من اجزائها لكي يتمكن من الوصول الى ارقام قليلة من كسرها العشري . وبعد الرجوع الى

(1) اول من استعمل الحرف اليوناني Π للدلالة على النسبة العددية بين الدائرة والمحيط

السلسلة الاساسية[١] ودرسها جيداً توصلوا الى سلاسل القوى[٢]

واول من استخدم سلسلة القوى وزاد عن الخمسة والثلاثين رقماً القديمة ابرهيم شارب الذي لبى طلب الفلكي المشهور هالي سنة ١٧٠٠ واوصل الكسر الى ٧٢ رقماً . ثم عقبهُ الاستاذ ماخن فاوصلهُ الى مئة رقم . وعام ١٨١٩ اوصلهُ الاستاذ لكني الى ١٢٧ رقماً وبعدهُ فيكا الى ١٤٠ ثم دايس الى ٢٠٠ واخر الجميع الاستاذ شنكس الذي انتهى به الى ٧٠٧ وذلك عام ١٨٧٣ وهاكم بعضها

٣٫١٤١ ٥٩٢ ٦٥٣ ٥٨٩ ٧٩٣ ٢٣٨ ٤٦٢ ٦٤٣ ٣٨٣ ٢٧٩ ٥٠٢ ٨٨٤ ١٩٧
١٦٩ ٣٩٩ ٣٧٥ ١٠٥ ٨٠٠ ٠٠٠

اما حساب نسبة المحيط الى القطر والوصول بها الى عدد من ارقام الكسر العشري هذا مقدارهُ فليس الأ للدلالة على ميزة الطرق الحديثة وافضليتها على الطرق القديمة ولكن لا قيمة لها لا من الوجهة النظرية العلمية ولا من الوجهة العملية لان اتخاذ خمسة عشر رقماً اكثر مما يحتاج اليهِ العلماء في كل زمان ومكان ولبيانهِ نضرب الامثلة الآتية

(١) لو رسمنا دائرة مركزها برلين بحيث يمر محيطها في همبرج التي تبعد عنها ١٧٨ ميلاً واستعملنا خمسة عشر رقماً من ارقام الكسر العشري لحساب المحيط لكان الفرق بينهُ وبين المحيط الحقيقي اقل من ١٨ ٠٠٠٠٠١ من المليمتر

(٢) لو حسبنا محيط الارض واستعملنا عشرة ارقام فقط لكان الفرق كسراً من القيراط

(٣) ولكي يتصور القارئ مقدار التدقيق فيما لو اخذنا مئة رقم من الكسر العشري نقول انهُ لو رسمنا كرة مركزها الارض ومحيطها مار في الشعرى اليمانية التي تبعد عنا ١٣٤٫٥ مليون مليون كيلو متر وتصورنا تلك الكرة العظيمة ملآنة بالميكروبات بحيث يوجد منها ملايين الملايين في المليمتر المكعب وان هذه الميكروبات أُخذت جميعها ووضعت في خط مستقيم بعد الواحد عن الآخر نفس البعد بين ارضنا والشعرى اليمانية اي ١٣٤٫٥ مليون مليون كيلومتر وجعلنا هذا الخط قطراً لدائرة وحسبنا محيطها متخذين مئة رقم من الكسر

(١) $ق = م - \frac{١}{٣} م^{٣} + \frac{١}{٥} م^{٥} - \frac{١}{٧} م^{٧} + \frac{١}{٩} م^{٩} + \cdots$ الخ حيث ق زاوية مركزية وم مماسها

(٢) $\frac{ن}{٤} = (ا + ب + س + \cdots) - \frac{١}{٣}(ا^{٣} + ب^{٣} + س^{٣} + \cdots) + \frac{١}{٥}(ا^{٥} + ب^{٥} + س^{٥} + \cdots) - \frac{١}{٧}(ا^{٧} + ب^{٧} + س^{٧} + \cdots) + \cdots$ حيث ن النسبة بين المحيط والقطر وا وب وس مماسات زوايا صغيرة مجموعها ٤٥ درجة

العشري لكان الفرق بينهُ وبين المحيط الحقيقي اقل من جزء من المليون من المليمتر

وبالرغم عن النتائج المهمة التي حصل عليها الرياضيون بفضل ليبنتز ونيوتن فان مسألة تربيع الدائرة وحلها بالمسطرة والبركار بقيت على ما تركها عليهِ الاقدمون اي انهم لم يتقدموا فيها خطوة واحدة . وقد شعر بذلك ولس وليبنتز ونيوتن ومن قام بعدهم : والخلاصة ان حل المسألة بطرق ومبادىء الهندسة الابتدائية امر مستحيل ولكن اقامة البرهان الرياضي عليهِ اعجز الجميع . وبما ان القضية الهندسية تثبت او تنقض بالبرهان العلمي فقط لا بمجرد الاعتقاد والشعور والتحكم فلذلك اتجهت عقول الرياضيين الى اثبات استحالة رسم مربع يعادل دائرة مفروضة بالخطوط والدوائر واقامة البرهان عليهِ . وهو ليس بالامر السهل بل هو اصعب بكثير من وجود الحل فيما لو كان لها حل بسيط

واول خطوة خطاها العلماء في هذا السبيل كانت على يد الرياضي الافرنسي لامبرت الذي اثبت عام ١٨٦١ ان النسبة بين المحيط والقطر ليست عدداً كاملاً (Rational) ولا هي الجذر المالي لعدد كامل اي لا يمكن تمثيل النسبة ولا مربعها بكسر صورتهُ ومخرجهُ عددان صحيحان مهما كانت تلك الاعداد كبيرة ومع ان برهانهُ اثبت عدم امكان الحل بطرق خصوصية بسيطة لكنهُ لم ينفِ امكان حلها بطرق اصعب واكثر تعقيداً واستعمال ادوات غير المسطرة والبركار

وسار البحث سيراً بطيئاً ثابتاً متوخياً ايجاد الصفات الجوهرية الفارقة بين المسائل التي تحل بالخطوط والدوائر وغيرها التي لا تحل بالطرق الابتدائية اي بالممكنات . وتجلى للباحثين ان المسائل التي تحل بالطرق الابتدائية هي التي تكون الملاءمة في صورها (رسومها الهندسية) بين الخطوط المجهولة والمعلومة مما يمكن وضعهُ في معادلة جبرية من الدرجة الاولى والثانية فقط ويشترط فيها امكان قياس الخطوط المعلومة والتعبير عنها بالاعداد الصحيحة واستنتجوا من ذلك انهُ لو كان لتربيع الدائرة حل بسيط لكانت النسبة بين المحيط المجهول والقطر المعلوم جذر معادلة جبرية مسمياتها اعداد صحيحة وبعبارة ابسط لوجدت معادلة جبرية مؤلفة من اعداد صحيحة لا يطرأ عليها ادنى خلل لو عوضنا عن الكمية المجهولة بقيمة النسبة بين المحيط والقطر

ومنذ اوائل القرن التاسع عشر انصرف هم الرياضيين الى اقامة البرهان على ان تلك النسبة ليست جبرية اي ليست جذر معادلة جبرية مسمياتها اعداد صحيحة واقتضى ذلك عناء طويلاً وتوسعاً زائداً في العلوم الرياضية وتقدمها واكتشاف مبادىء وقوانين غاية

في الاهمية قبل ان تمكنوا من الوصول الى تحقيق القضية . وبعد ان نشر العلامة الافرنسي الاستاذ هرمت مباحثهُ المشهورة في « الكميات والقوى » سهل على الاستاذ لندمن الالماني اقامة البرهان على ان النسبة ليست جبرية وذلك في شهر حزيران عام ١٨٨٢ كما سبقت اليهِ الاشارة فكان اول من اثبت رياضياً عدم امكان تربيع الدائرة بالمسطرة والبركار ونشرت ابحاثهُ تباعاً في مذكرات اكادمية برلين وباريس والمجلة الالمانية الرياضية

وخلاصة الامر انهُ من المستحيل رسم مربع يساوي دائرة بالمسطرة والبركار — تلك خاتمة اعظم بحث شغل عقل الانسان واستولى عليهِ مدة تزيد على اربعة آلاف سنة ولكن سيقوم في كل امة وعصر قوم يدعون بالرغم مما اثبتهُ فطاحل العلماء انهم تمكنوا من حل هذه القضية

منصور حنا جرداق م . ع

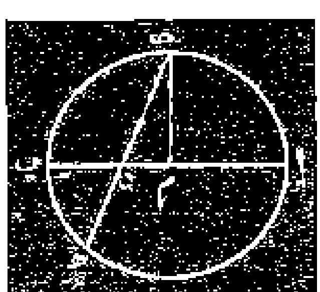
استاذ الرياضيات في الكلية السورية الانجيلية

تربيع الدائرة

جناب الدكاترة اصحاب المقتطف المحترمين

قرأت في مقتطف شهر يونيه عن مسألة « تربيع الدائرة » لحضرة الاستاذ منصور جرداق وبعد ما قرأت ما كتبهُ بامعان عن الاهتمام بالمسألة وتاريخها تذكرت اني اطلعت على حل لها في كتاب من كتب الهندسة القديمة ولكني ما وجدت برهاناً للحل المذكور واني قد وجدت انهُ يوجد فرق بسيط ناشئ من النسبة التقريبية فاجتهدت ان آتي باثبات الحل ولما تعذر عليَّ استيفاء البرهان رأيت ان ارسل الى حضرتكم هذا الحل راجياً اثباتهُ وابداء رأيكم فيهِ ولكم مني مزيد الشكر

الحل



الفرض ا ب قطر الدائرة المفروضة التي مركزها م

العمل نرسم من م العمود م حـ يقطع المحيط حـ ثم نركز البركار في نقطة ا ونفتحهُ تساوي ا حـ نقطع من القطر ا ب البعد ا د ثم نركز في نقطة ب ونفتحهُ تساوي ب د نقطع المحيط في نقطة مثل هـ ثم نصل حـ هـ فيكون البعد حـ هـ هو طول ضلع المربع المطلوب

يسى ابرهيم مرزوق

[المقتطف] كيف علمتم ان الخط المرسوم من حالى د يصل الى ه او الخط المرسوم بين ح و ه يمر بالنقطة د ثم اذا كان نطر الدائرة واحداً فالخط حه يعدل ٧٦٦٤، ٠ وعليه فنسبة المحيط الى القطر ١٢٠١٦٨٩، ٣ وهي ابعد عن الحقيقة من النسبة التي استعملها الهنود منذ الفين واربع مئة سنة وهي ١٤١٦، ٣ فان العدد المستعمل الآن هو ١٤١٥٩، ٣ وحبذا لو ذكرتم هل الكتاب عربي او افرنجي

باب الزراعة

جمع القطن

احضرنا مرةً « عينة » من القطن ار يناها لتاجر فقال ان كان القطن كلهُ نظيفاً مثل هذه العينة فاني اشتريهِ بكذا من الثمن. وكنا واثقين ان القطن كلهُ مثل تلك العينة وظهر لدى رؤيتهِ انهُ مثلها تماماً من حيث نوعهُ ولكن يفرق عنها في ما يخالطهُ من كسر الورق واللوز فان الذين جمعوهُ لم يعتنوا بتنظيفهِ مما يعلق بهِ احياناً من هذه الكسر فكانت خسارتنا بسبب ذلك ستة غروش في كل قنطار . واذا جرى كل جامعي القطن على هذه الصورة بلغت خسارة القطر المصري نصف مليون من الجنيهات

نصف مليون من الجنيهات تزيد في ثمن القطن المصري اذا اعتُني بجمعهِ وتنقص اذا لم يعتنَ . والاعتناء لا يكلف شيئاً يذكر . واذا اضفنا الى ذلك الاعتناء بفرز المدودة والمخزورة والتي لوَّثها البق وما اشبه فلا يبعد ان يصير الفرق في ثمن القطن نحو مليون جنيه تزيد فيهِ بالاعتناء وتنقص بالاهمال وهو مبلغ طائل جداً اذا انفق على التعليم انتشرت بهِ المدارس في كل القطر واذا انفق على المصارف لم تبقَ ارض محتاجة الى الصرف واذا اصلحت بهِ الاطيان البور اصلح كل سنة نحو مئة الف فدان

ومما يجري هذا المجرى مزج الجمعات كلها بعضها ببعض ولا سيما الجمعة الاخيرة التي يندر ان لا تصاب بدود اللوز والبق فان هذا المزج يحط من قيمة القطن جداً. الأ ان الاكثرين ينتبهون الى جمع قطنهم حتى يكون نظيفاً ومفروزاً كل جمعة على حدة . والقطن المصري مشهور في أوربا بنظافتهِ وحسن رزم بالاتهِ وهو افضل من القطن الاميركي من هذا القبيل