الفصل الثامن

مواضيع إضافية (اختياري) (Additional Topics (optional))

سنعرض في هذا الفصل مواضيع متقدمة ومتخصصة بصورة أكثر. وسيقدم كلّ جزء من هذا الفصل نبذة سريعة لموضوع يستحق أنْ يكون فصلًا قائمًا بذاته (أو كتابًا). أمّا في نهاية هذا الفصل فهناك عدة أجزاء تعالج بعض المواضيع الأكثر صعوبة.

1.8 البيانات الكاملة (Perfect Graphs)

لقد ناقشنا الحدّ الأدنى $\chi(G) \ge \omega(G)$ للعدد اللوني. إنّ رؤوس العصبة تحتاج إلى ألوان مختلفة. في الجزء (الجزء) 3.5، ناقشنا بيانات، بحيث إنّ بياناتها الجزئية المستحدثة جميعها تحقق المساواة في هذا الحدّ.

1.1.8. تعريف: يُسمّى البيان G **بيانًا كاملاً** إذا تحقق أن $\chi(H) = \omega(H)$ لكلّ بيان جزئيّ مستحدث H من G.

عند الحديث عن البيانات الكاملة، فإنَّ من الشائع استخدام المصطلح (مجموعة مستقرة) لتعني مجموعة مستقلة من الرؤوس. وكما في السابق، فإنَّ العصبة تعني مجموعة من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا. وكالعادة، فإنَّ (أكبر) تعني أكبر حجمًا.

بما أنّ تركيزنا منصب على تلوين الرؤوس، فإنَّنا نحصر اهتمامنا بالبيانات البسيطة مرة أخرى في هذا الجزء. لاحظ أن إجراء عملية التتام يحوّل العصب إلى مجموعات مستقرة، والعكس صحيح. لذا، فإنَّ $\omega(\overline{H}) = \alpha(H)$. إن تلوين $\overline{H}$ تلويناً فعليًّا يعني التعبير عن $V(H)$ بوصفه اتحاد عُصَب في H؛ وتسمَّى مجموعة هذه العصب في H غطاء عصبة (أو عصب) لـ H. وبناءً على ذلك، فإنَّ لكلّ بيان G هناك 4 وسائط ذات أهمية، هي:

عدد الاستقلال	$\alpha(G)$	أكبر حجم لمجموعة مستقرة.
عدد العصبة (العصب)	$\omega(G)$	أكبر حجم لعصبة.
العدد اللوني	$\chi(G)$	أصغر عدد من الألوان.
عدد غطاء العصب	$\theta(G)$	أصغر حجم لغطاء العصب.

عرِّف بيرج (Berge) نوعين من الكمال، هما:

G **كامل بالنسبة** إلى γ إذا كان $\omega(G[A]) = \chi(G[A])$.

لكلّ $A \subseteq V(G)$. وG كامل بالنسبة إلى α إذا كان $\alpha(G[A]) = \theta(G[A])$ لكلّ $A \subseteq V(G)$.

تعريفنا للكمال هو تعريف كامل بالنسبة إلى γ نفسه (لقد استخدم بيرج الرمز $\gamma(G)$ للعدد اللوني). بما أنّ $\overline{G}\,[A]$ متمّمةُ $G[A]$، فيمكن صياغة نصّ كامل بالنسبة إلى α بدلالة $\overline{G}$ على الشكل "$\chi(\overline{G}[A]) = \omega(\overline{G}[A])$ لكلّ $A \subseteq V(G)$". لذا، فإنَّ المصطلح "كامل بالنسبة إلى α" له معنى أنّ "$\overline{G}$ كامل بالنسبة إلى γ" نفسه.

الآن، نستخدم تعريفًا واحدًا للكمال، وذلك لأنَّ لوفاس (Lova′sz [1972 a]) أثبت أنّ "البيان G يكون كاملاً بالنسبة إلى γ إذا وفقط إذا كان كاملاً بالنسبة إلى α". وبدلالة تعريفنا الأساس للكمال، فإنَّ التعريف يصبح: "يكون البيان G كاملاً إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ كاملاً".

هذه العبارة هي **نظرية البيانات الكاملة** (***PGT***).

دائمًا $\chi(G) \geq \omega\ (G)$ و $\theta\ (G) \geq \alpha\ (G)$؛ بسبب اشتراك عصبة ما ومجموعة مستقلة في رأس واحد على الأكثر. لذا، فإنَّ عبارة الكمال لصنف من البيانات هي علاقة أصغر – أكبر تكاملية. لقد لاحظنا في المثال 21.3.5 أنّ عدة علاقات أصغر – أكبر معروفة هي عبارات تنصّ على أنّ البيانات الثنائية الفرع، وبياناتها الخطية. ومتمّمات هذه البيانات هي بيانات كاملة.

إذا كان $k \geq 2$، فإنَّ $\chi(C_{2k+1}) > \omega(C_{2k+1})$ و $\chi(\overline{C}_{2k+1}) > \omega(\overline{C}_{2k+1})$ (تمرين 1). لذا، فإنَّ الحلقات الفردية ومتمماتها (ما عدا C_3 و $\overline{C}_3$) تكون غير تامة.

2.1.8. مخمنة : مُخَمَّنَة البيان الكامل القوي (SPGC) – Berge [1960].

يكون البيان G كاملاً إذا وفقط إذا خلا كلّ من G و $\overline{G}$ من بيان جزئيّ مستحدث يشكّل حلقة فردية طولها يساوي 5 على الأقل. ■

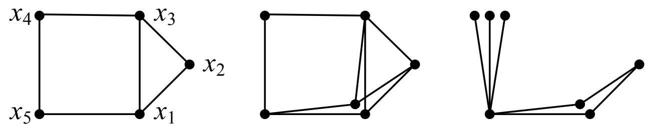
الـ SPGC تُبقي المسألة دون حلّ، وبما أنّ الشرط في المُخَمَّنَة ذاتيّ التتام، فإنَّ الـ SPGC تضمن الـ PGT.

بما أننا قد تعرضنا لعدة عائلات كلاسيكيّة من البيانات الكاملة في الجزء (الجزء) 3.5، فإنَّ هدفنا الآن هو أن نبرهن نظرية البيانات الكاملة. وفيما بعد، سندرس خصائص البيانات غير الكاملة الصغرى، وأصناف (صفوف) البيانات الكاملة. ولدراسة أعمق؛ يمكن الرجوع إلى (Golumbic [1980]) الذي يعطي تقديمًا شاملاً للموضوع، وكذلك إلى (Berge – chvàtal [1984]) الذي يجمع العديد من الأبحاث الكلاسيكيّة ويحدّثها.

نظرية البيان الكامل (The Perfect Graph Theorem)

في العام 1960م، خَمَّنَ بيرج أنّ الكمال بالنسبة إلى γ يكافئ الكمال بالنسبة إلى α (انظر Berge [1961]). وقد كان لوفاس (Lovàsz [1972a]) عالم الرياضيات التَّوافقيّة (التركيبية) مدهشًا من خلال إثباته لهذه المُخَمَّنَة المهمة والمعروفة وكان عمره حينها 22 عامًا. ودرس فولكرسون أيضًا هذه المُخَمَّنَة واختزلها في عبارة اعْتَقَدَ أنها قوية جدًّا لتكون صحيحة. وعندما أخبره بيرج أن لوفاس قد برهنها من قبل، أثبت خلال ساعات التمهيديّة المفقودة (التمهيديّة 4.1.8)، وهذا يوضِّح أن النظرية تصبح سهلة الإثبات إذا تأكدت صحتها (Fulkerson [1971])، سنبرهن نظرية البيان الكامل باستخدام عملية توسع البيان دون أنْ تؤثّر في خاصية الكمال.

3.1.8. تعريف: مضاعفة الرّأس x للبيان G تنتج بيانًا جديدًا $G \circ x$، وذلك بإضافة رأس x' حيث إن $N\ (x') = N\ (x)$. إنّ ضرب رؤوس G في المتجه $h = (h_1,\ \ldots..\ ,\ h_n)$ الذي إحداثياته أعداد صحيحة غير سالبة هو البيان $H = G \circ h$ الذي تتكون مجموعة رؤوسه من h_i نسخة من كلّ $x_i \in V(G)$، حيث تكون نسختا x_i و x_j متجاورتين في H إذا وفقط إذا كان $x_i \leftrightarrow x_j$ في G.



G $G \circ x_1$ $G \circ \mathbf{(2, 1, 0, 3, 1)}$

4.1.8. تمهيدية : ضرب الرؤوس يحافظ على الكمال بالنسبة إلى γ، والكمال بالنسبة إلى α.

الإثبات: نلاحظ أولاً أنه يمكن الحصول على البيان $G \circ h$ من بيان جزئيّ مستحدث من G بإجراء عمليات متتابعة من مضاعفة الرؤوس.

إذا كان h_i كلّه يساوي 0 أو 1، فإنَّ $G \circ h = G[A]$ حيث $A = \{i = h_i > 0\}$. وبخلاف ذلك، ابدأ بـ $G[A]$، ثمّ أجرِ عمليات مضاعفة الرؤوس حتى يكون موجودًا لديك h_i نسخة من x_i (لكلّ i).

إنّ كلّ مضاعَفة لرأس تحافظ على خاصية أنّ نسخًا من x_i و x_j تكون متجاورة إذا وفقط إذا تحقق أنّ $x_i x_j \in E(G)$. لذا، فإنَّ البيان الناتج هو $G \circ h$.

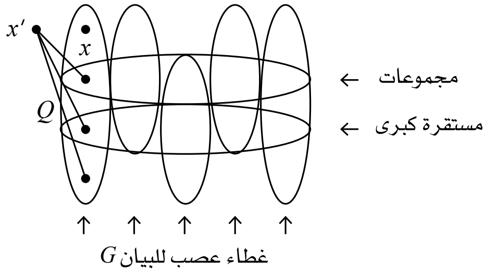
إذا كان G كاملاً بالنسبة إلى α ولم يكن $G \circ h$ كذلك، فإنَّ إحدى العمليات التي أُجريت للحصول على $G \circ h$ من $G[A]$ تنتج بيانًا غير كامل بالنسبة إلى α من بيانٍ كاملٍ بالنسبة إلى α. لذا، يكفي برهنة أنّ مضاعفة الرّأس تحافظ على الكمال بالنسبة إلى α.

الاختزال نفسه يتحقق للكمال بالنسبة إلى γ، وبما أنّ كلّ بيان جزئيّ فعليّ مستحدث من $G \circ x$ هو بيان جزئيّ مستحدث من G، أو مضاعفة رأس لبيان جزئيّ مستحدث من G، فإنَّنا نختزل ادعاءنا لإثبات أنّ $\chi(G \circ x) = w(G \circ x)$ عندما يكون G كاملاً بالنسبة إلى γ، وأنّ $\alpha(G \circ x) = \theta(G \circ x)$ عندما يكون G كاملاً بالنسبة إلى α.

عندما يكون G كاملاً بالنسبة إلى α، نأخذ في الحسبان حالتين، هما: 1- إذا كان x ينتمي إلى مجموعة مستقرة كبرى في G، فإنَّ إضافة x' إلى هذه المجموعة يعطينا أنّ $\alpha(G \circ x) = \alpha(G) + 1$، وبما أنّ $\theta(G) = \alpha(G)$، فإنَّنا نحصل على غطاء عصبة من هذا الحجم بإضافة الرّأس x' بوصفه عصبه برأس واحد إلى مجموعة $\theta(G)$ تشكل غطاء عُصَب لـ G.

2- إذا لم يكن x منتميًا إلى مجموعة مستقرة كبرى في G، فإنَّ $\alpha(G \circ x) = \alpha(G)$. افترض أنّ Q هي العصبة التي تحوي x في غطاء عُصب أصغر للبيان G. بما أنّ $\theta(G) = \alpha(G)$، فإنَّ Q تقطع كلّ مجموعة مستقرة كبرى في G، وبما أنّ x لا ينتمي إلى مجموعة مستقرة كبرى، فإنَّ $Q' = Q - x$ أيضًا تقطع كلّ مجموعة مستقرة كبرى. وهذا يعطينا أنّ $\alpha(G - Q') = \alpha(G) - 1$.

وبتطبيق كمال G بالنسبة إلى α على البيان الجزئي المستحدث $G - Q'$ (الذي يحوي x)، فإنَّنا نحصل على $\theta(G - Q') = \alpha(G - Q')$. إنّ إضافة $Q' \cup \{x'\}$ إلى مجموعة بها $\alpha(G) - 1$ غطاء عصبة لـ $G - Q'$ يعطينا مجموعة بها $\alpha(G)$ غطاء عصبة للبيان $G \circ x$. ■



5.1.8.تمهيدية : في البيان غير الكامل (الأصغر)، لا توجد مجموعة مستقرة تقطع كلّ عصبة كبرى.

الإثبات: إذا وُجِدَتْ مجموعة مستقرة S، بحيث تقطع S كلّ عصبة من الدرجة $\omega(G)$، فإنَّ كمال $G-S$ يعطينا أنّ $x(G-S) = \omega(G-S) = \omega(G)-1$، و$S$ تتمّم تلوينًا فعليًّا لـ G بـ $\omega(G)$ لونًا. وهذا يجعل G كاملاً. ■

6.1.8. نظرية : (نظرية البيان الكامل (PGT) – [Lovàsz [1972a, 1972b]). يكون البيان كاملاً إذا وفقط إذا كان بيان متمّمته كاملاً.

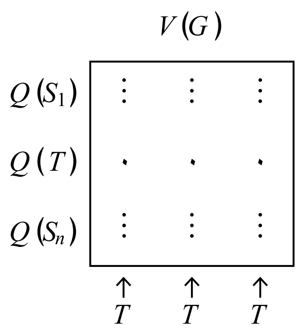
الإثبات: يكفي أنْ نبرهن كمال G بالنسبة إلى α لكي يعطينا كمالاً لـ G بالنسبة إلى γ. وبتطبيق هذا على $\overline{G}$ فإنّه يعطينا إثباتًا للعكس. إذا فَشِل الادعاء، فسنأخذ في الحسبان أصغر بيان G. بحيث يكون هذا البيان كاملاً بالنسبة إلى α، وغير كامل بالنسبة إلى γ. من التمهيديّة 5.1.8. نستطيع افتراض أن كلّ مجموعة مستقرة أعظمية S في G لا تقطع أحد العصب الكبرى $Q(S)$. سنصمّم ضرب رؤوس خاصًّا في G. افترض أنّ $\boldsymbol{S} = \{S_i\}$ هي قائمة بمجموعات G المستقرة الأعظمية، وسنزن كلّ رأس بعدد مرات تكراره في $\{Q(S_i)\}$، وذلك بجعل h_j تمثّل عدد المجموعات المستقرة $S_i \in \mathbf{S}$، بحيث إنّ $x_j \in Q(S_i)$. من التمهيديّة 4.1.8 نجد أنّ $H = Goh$ كامل بالنسبة إلى α، وهذا يعطي أنّ $\alpha(H) = \theta(H)$. سنستخدم تعليلات حسابية لـ $\alpha(H)$ و$\theta(H)$؛ للحصول على تناقض. افترض أنّ A مصفوفة، مدخلاتها 1,0، تمثّل علاقة الوقوع بين $\{Q(S_i)\}$ و$V(G)$، حيث إنّ $a_{i,j} = 1$ إذا وفقط إذا كان $x_j \in Q(S_i)$. من هذا البناء، نعلم أنّ h_j عددُ الواحدات في العمود j للمصفوفة A، وأنّ $n(H)$ عددُ الواحدات الكلّي في A. وبما أنّ كلّ صفّ يحوي $\omega(G)$ من الواحدات، فإنَّ $n(H) = \omega(G)\,|\,\mathbf{S}\,|$.

وبما أنّ مضاعفة الرؤوس لا توسّع العصب، فإنَّ $\omega(H) = \omega(G)$. واستنادًا إلى ذلك، فإنَّ

$$\theta(H) \geq n(H)/\omega(H) = |\,\mathbf{S}\,|$$

سنحصل على التناقض إذا برهنّا أنّ $\alpha(H) < |\,\mathbf{S}\,|$. تتألف كلّ مجموعة مستقرة في H من نسخ العناصر الموجودة في مجموعة مستقرة من G. لذا، فإنَّ أيّ مجموعة مستقرة عظمى في H تتألف من النسخ للرؤوس جميعها الموجودة في مجموعة مستقرة أعظمية في G. لذا، فإنَّ $\alpha(H) = max_{T\in S} \sum_{i:x\in T} h_i$. إنّ هذا المجموع يحسب عدد الواحدات في A التي تظهر في الأعمدة التي دليلها T. وإذا حسبنا هذه الواحدات بحسب الصّفوف بدلاً من الأعمدة، فسنحصل على أنّ $\alpha(H) = \mathrm{Max}_{T\in S} \sum_{S\in S} |T \cap Q(S)|$. وبما أنّ T مجموعة مستقرة، فإنَّ لها على الأكثر رأسًا واحدًا في كلّ عصبة مختارة. $Q(S)$ وأكثر من ذلك، فإنَّ T منفصلة عن $Q(T)$.

بما أنّ $|T \cap Q(S)| \leq 1$ لكلّ $S \in \mathbf{S}$، $|T \cap Q(S)| = 0$، فإنَّ $\alpha(H) \leq |\,\mathbf{S}\,| - 1$ ■



7.1.8. ملاحظة*. الأمثلية الخطية والثنويَّة. تظهر مصفوفات الوقوع بين الرؤوس والعصب عند تعبيرنا عن α وθ بوصفها مسائل أمثليّة (ذات أعداد صحيحة) صحيحة. يمكن كتابة البرنامج (تعظيم) الخطي كـ "عظِّم $c.x$ على المتجهات غير السالبة x بحيث إنّ $Ax \leq b$"؛ لأنَّ A مصفوفة وb وc متجهتان وأنّ كلّ صفّ لـ $Ax \leq b$ عبارة عن تقييد

خطّيّ $a_i x \le b_i$ على متجه المتغيرات x. المتجه x الذي يحقق القيود جميعها يكون **حلاً ملائمًا (عمليًا)**.

يتطلّب **البرنامج الخطّيّ الصحيح** أنْ يكون x_j كلّه أيضًا عددًا صحيحًا. افترض أنّ A هي مصفوفة الوقوع بين عصب أعظمية ورؤوس في بيان G. لدينا $a_{i,j} = 1$ عندما $V_j \in Q_i$. ومن التعريف، نعلم أنّ $a(G)$ هي الحلّ لـ "$\max 1_n . x$ حيث $Ax \le 1_m$" وذلك عندما نشترط أنْ تكون المتغيرات أعدادًا صحيحةً غير سالبة. في الحلّ، x_j تكون 1 أو 0 بالاعتمّاد على وجود v_j أو عدم وجوده في مجموعة مستقرة عظمى. إنّ القيود تمنع اختيار رؤوس متجاورة، وبالمثل عندما تكون B مصفوفة الوقوع بين المجموعة المستقرة الأعظمية والرؤوس، فإنَّ $w(G)$ الحلُّ لـ "$\max \boldsymbol{1}_n.x$ حيث $Bx \le \boldsymbol{1}_p$" وحيث إنّ المتغيرات أعداد صحيحة.

يوجد لكلّ برنامج تعظيم برنامج ثنوي للتصغير، فعندما يكون برنامج التعظيم "$\max c\,.x$ حيث $Ax \le b$"، فإنَّ البرنامج الثنوي للتصغير يكون "$\min y\,.\,b$ حيث $y^T A \ge c$". لهذا البرنامج متغير لكلّ قيد أصلي، وقيد لكلّ متغير أصلي x_j، وتتبادل $c, \max, \le b, \min \ge$. وعندما يكون النصّ بهذا الشكلّ، فإنَّ المتغيرات في البرنامجين يجب أنْ تكون غير سالبة، حيث إنّ البرامج الصحيحة الثنويَّة لـ w و a تبحث عن أقل عدد من المجموعات المستقرة التي تغطي الرؤوس، فضلًا عن أنها تبحث عن أقلّ عدد من العصب التي تغطي الرؤوس، على الترتيب، وهذا يصف $\chi(G)$ و $\theta(G)$.

وباستخدام حقيقة أنّ المتغيرات غير سالبة، فإنَّ القيود تعطينا

$$c \cdot x \le y^T A x \le y \cdot b.$$

العبارة "$c \cdot x \le y\, b$" للحلول الملائمة (العملية) x و y هي **ثنويَّة ضعيفة**. وتنصّ **نظرية الثنويَّة (القويّة) للبرمجة الخطّيّة** على أنّ البرامج الثنويَّة التي لها حلول ملائمة لها حلول مُثلى بالقيمة نفسها عندما لا تكون الحلول الصحيحة (ذات الأعداد الصحيحة) هي الحلول المنشودة.

إنّ العبارتين $\chi \ge \omega$، و $\theta \ge a$ هما عبارتان ثنويّتان ضعيفتان لأزواج ثنويَّة من البرامج الخطّيّة، إضافة إلى أنّ الضمانة للثنويَّة القوية باستخدام حلول قيمها صحيحة فقط هي علاقة أصغر – أكبر توافقية (تركيبية). لقد عرضنا للعديد من هذه العلاقات، ولاحظنا أنها تضمن براهين سريعة للأمثلية، فضلًا عن أنها غالبًا ما تقود إلى خوارزميات سريعة لإيجاد الحلول المثلى؛ وهذا هو أحد دوافع دراسة عائلات البيانات الكاملة. ■

8.1.8.* مثال: الحلول الكسريّة للبيانات غير الكاملة. للحلقة الخماسيّة، لاحظ أنّ للبرامج الخطية لكلّ من ω و χ و α و θ القيمة المثلى 5/2. هناك خمس عصب أعظمية، وخمس مجموعات مستقرة أعظمية حجم كلّ منها يساوي 2. وبوضع كلّ $x_j = 1/2$ نحصل على وزن قيمته تساوي 1 لكلّ عصبة ولكلّ مجموعة مستقرة، وبذلك تتحقق القيود لأيّ من مسألتي التعظيم هاتين. وبوضع $y_i = 1/2$ لكلّ y_i في البرنامج الثنوي، نحصل على غطاء لكلّ رأس بوزن كلّيّ يساوي 1، وبذلك، فإنَّ القيود تتحقق ثانيةً. لا يوجد لهذه البرامج حلول مثلى صحيحة. لذا، توجد "فجوة ثنويَّة" في البرامج الصحيحة: $\omega = 2 < 3 = \chi$ و $\omega = 2 < 3 = \theta$. ■

زيارة ثانية للبيانات الوتريّة (Chordal Graphs Revisited)

كالأشجار، يوجد للصّفّ الأعمّ من البيانات الوتريّة العديدُ من التَّوصيفات المميزة، والتعريف بمنع الحلقات اللاوتريّة هو توصيف بنية جزئية ممنوعة، فضلًا عن أنّ قائمة منتهية من البنى الجزئية المنوعة مثل البيانات الجزئية المستحدثة ينتج (يعطي) خوارزمية سريعة لاختبار العضوية في الصّفّ، ولكن القائمة غير منتهية للبيانات الوتريّة، لذا نحتاج إلى طرق أخرى.

يمكن بناء البيان الوتريّ من رأس منفرد بتكرار إضافة رأس مربوط (موصول) بعصبة، وهذه هي العملية العكسيّة لعملية ترتيب الحذف المبسطيّ. وقد رأينا أنّ التَّلوين الجشع بالنسبة إلى مثل هذا الترتيب البنائي يؤدي إلى تلوين أمثل، حيث يتمتع العديد من صفوف البيانات الكاملة بمثل طريقة البناء هذه التي تنتج البيانات التي في الصّف، ولا تنتج أيّ شيء آخر، وربّما تقود إنّ طريقة البناء أو عكسها وهي طريقة التفكيك إلى خوارزميات سريعة لإجراء بعض الحسابات على البيانات في الصّفّ.

سنعرض فيما يأتي لنوعٍ آخر من التَّوصيفات المميزة.

9.1.8. تعريف: نعرّف تمثيل التقاطع لبيان G على أنه عائلة من المجموعات $\{S_v : v \in V(G)\}$ حيث $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. إذا كانت $\{S_v\}$ تمثيل تقاطع للبيان G، فإنَّ G **هو بيان التقاطع** لـ $\{S_v\}$.

بيانات الفترة (الفترات)، هي البيانات التي لها تمثيل تقاطع حيث تكون كلّ مجموعة في العائلة فترة على خطّ الأعداد، بالإضافة إلى أنّ البيانات الخطّانية كذلك تشكّل صفّ تقاطع؛ حيث إنّ المجموعات المسموحة أزواج من الأعداد الطبيعية ترتبط بأضلاع البيان H، بحيث إنّ $G = L\ (H)$. لقد وجد والتر (Walter [1972, 1978])، وقافرل (*Gavril* [1974]) وبونمان(*Buneman* [1974]). كلّ على حدة توصيفًا مميزًا للتقاطع للبيانات الوتريّة.

10.1.8. تمهيدية: إذا كانت $T_1, \ \ldots.\ , \ T_k$ مجموعة أشجار جزئية من شجرة T، بحيث إنّ هذه المجموعة متقاطعة زوجًا زوجًا، فإنَّ هناك رأسًا ينتمي إلى T_i لكلّ $i = 1, \ \ldots\ , \ k$.

الإثبات: (Lenel) سنبرهن المكافئ العكسيّ لهذه العبارة؛ إذا كان كلّ رأس v غير موجود في مجموعة $T\,(v)$ من بين المجموعات $T_1, \ \ldots.\ , \ T_k$، فإنّنا نُعلّم (نضع إشارة أو علامة) على الضلع الذي يغادر v على المسار الوحيد إلى $T\,(v)$. إذا T حوت n رأسًا، فإنّنا نعمل n علامة. لذا، يجب أنْ يكون أحد الأضلاع قد عُلِّم مرتين. الآن، لا يوجد رأس مشترك بين $T\,(u)$ و $T\,(w)$. ■

11.1.8. نظرية: يكون البيان وتريًّا إذا وفقط إذا كان له تمثيل تقاطع بواسطة أشجار جزئية لشجرة (تمثيل بأشجار جزئية).

الإثبات: سنبرهن أنّ هذا الشرط يكافئ وجود ترتيب حذف مبسطيّ، وسنستخدم الاستقراء، حيث تمثّل K_1 الأساس البديهي له. افترض أنّ $v_n\ , \ \ldots.\ , \ v_1$ تمثل ترتيب حذف مبسطيّ للبيان G. بما أنّ $v_2, \ \ldots.\ , \ v_n$ ترتيبُ حذف مبسطيّ للبيان $G - v_1$، فإنَّ فرضية الاستقراء تعطينا تمثيلاً بأشجار جزئية من شجرة مضيفة T للبيان $G - v_1$، وبما أنّ v_1 مبسطيّ في G، فإنَّ المجموعة $S = N_G\,(v_1)$ تولّد عصبة في $G - v_1$. لذا، فإنَّ الأشجار الجزئية المعينة لرؤوس S تكون متقاطعة زوجًا زوجًا.

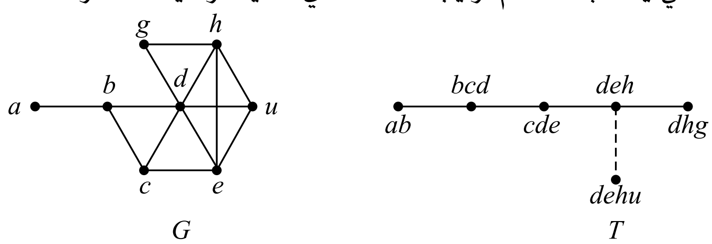
من التمهيديّة 10.1.8، نعلم أنّ لهذه الأشجار الجزئية رأسًا مشتركًا x. نُوسّع (نُكبّر) T إلى شجرة T' بإضافة ورقة y تجاور x، ونضيف الضلع xy إلى الشجرة الجزئية الممثلة لرؤوس S. ونمثّل v_1 بالشجرة المكوّنة فقط من y. وهذا يتمّ تمثيل G بأشجار جزئيّة في T'.

عكس ذلك، افترض أنّ T أصغرُ شجرة مُضيفة للتمثيل بأشجار جزئية للبيان G، حيث إنّ $v \in V(G)$ كلّها قد مُثلت بـ $T\,(v) \subseteq T$. إذا كان $xy \in E\,(T)$، فيجب أنْ يكون لـ G رأس u بحيث تحتوي $T\,(u)$ على x، ولا تحتوي على y. وبخلاف ذلك، فإنَّ تقليص xy إلى y سيولّد تمثيلاً في شجرةٍ أصغر.

اجعل x ورقة في T، واجعل u رأسًا في G، بحيث تحتوي $T\,(u)$ على x، ولا تحتوي على جارها. إن الأشجار

الجزئية لجيران u في G يجب أنْ تحوي x، لذا، فهي متقاطعة زوجًا زوجًا.

وبناءً عليه، فإنَّ u يكون مبسطيًّا في G، وحذف $T(u)$ يعطي تمثيلاً بأشجار جزئية لـ $G-u$، ونقوم بإتمام ترتيب الحذف المبسطيّ في G باستخدام ترتيب $G-u$ الذي تعطيه فرضية الاستقراء. ■



بما أنّ صفّ البيانات الوتريّة وراثيّ، فإنَّ ترتيب الحذف المبسطي يمكن أنْ يبدأ من أيّ رأس مبسطيّ. لذا، فإنَّ استخدام طريق القوة الجبرية لإيجاد مثل هذا الترتيب يعني اختبار الجوارات حتى نحصل على رأس مبسطيّ، ثم نحذفه ونكرّر الخطوات السابقة نفسها.

لقد وجد روز، وترجان، ولوكر ([1976] Rose – Torjan – Lueker) طريقًا أسرع والتي سُهِّلت أكثر من قبَل ترجان ([1976] Tarjan)، والفكرة هنا هي ما يأتي: بما أنه يوجد دائمًا رأس مبسطيّ من بين الرؤوس الأَبعَد عن رأس معين (إثبات النظرية 17.3.5)، فإنَّ ترتيب الحذف المبسطيّ يمكن أنْ ينتهي عند أيّ رأس. لذا، فإنَّنا نبدأ عند أيّ رأس، ونضع قائمة بالرؤوس المتجّمعة حوله، وتكون النتيجةُ ترتيبَ بناء مبسطيّ (عكس ترتيب الحذف المبسطيّ) إذا وفقط إذا كان البيان وتريًّا. لقد نُشرت الخوارزمية مع العديد من التطبيقات في ([1984] Tarjan – yannakakis)؛ و جولمبك ([1984] Golumbic).

12.1.8. خوارزمية: البحث عن أكبر عد أصلي (كاردينالي) ((Maximum Cardilality Search (MCS))

المدخلات: بيان G.

المخرجات: ترقيم للرؤوس، بمعنى دالّة تناظر $f: V(G) \to \{1, 2, \dots, n(G)\}$.

الفكرة: لكلّ رأس v غير مرقّم، حافظ على علامة $l(v)$، وهي درجة هذا الرّأس من بين الرّؤوس التي تمَّ ترقيمها سابقًا، حيث إنّ الرّؤوس الموجودة في نهاية ترتيب حذف مبسطي هي الرؤوس المتجمعة حول الرّأس الأخير، لذا، يجب إضافة الرؤوس التي علاماتها الدالة أعلى أولاً في ترتيب البناء المبسطي.

البداية: عيّن العلامة 0 لكلّ رأس. وضع $i = 1$.

التّكرار: اختر أيّ رأس غير مرقّم علامته الدالة أكبر ما يمكن، وأعطِه الرقم i، وأضف 1 إلى العلامات الدالة الموجودة على جيرانه، ثم وسّع i، وكرّر الخطوات. ■

13.1.8. مثال: الرّأس الأول الذي نختاره في ترتيب MCS يكون اختياريًّا، ويمكن أنْ يبدأ تطبيق الـ MCS على البيان G الموضح للنظرية 11.1.8 بوضع $f(c) = 1$. واستنادًا إلى ذلك، فإنَّ $l(b) = l(d) = l(e) = 1$. بعد ذلك، اختر $f(e) = 2$، وحدِّث $l(h) = l(u) = 1$، $l(d) = 2$. عندها، d هو الرّأس الوحيد الذي علامته الدالة 2. لذا، فإنَّ $f(d) = 3$. والآن، حدِّث $l(b) = l(h) = l(u) = 2$، و $l(g) = 1$، سيقود الاستمرار بهذه العملية إلى الترتيب $c, e, d, b, h, u, g, a, u$ بترتيب متزايد للدّالة f. و هذا ترتيب بناء مبسطيّ، وبذلك يكون الترتيب $u, a, g, u, h, b, d, e, c$ ترتيب حذف مبسطيّ. ■

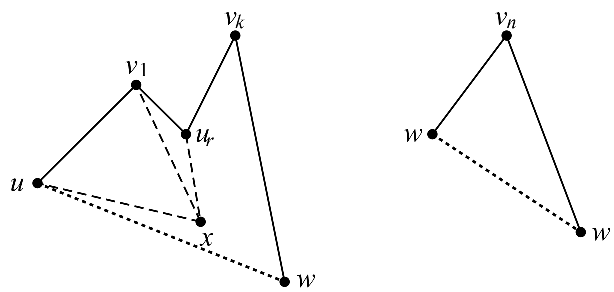
14.1.8. نظرية: ([1976] Tarjan) يكون البيان G وتريًّا إذا وفقط إذا كان التّرقيم $v_1, \dots, v_n$ الناتج عن

خوارزمية الـ MCS عبارة عن ترتيب بناء مبسطيّ للبيان G.

الإثبات: إذا أنتجت خوارزمية MCS ترتيب بناء مبسطيّ، فإنَّ G وتريّ. وبالعكس، افترض أنّ G بيان وتريّ، وافترض أيضًا أنّ $f: v(G) \to [n]$ الترقيمُ الناتج عن MCS. إنّ جسرًا لـ f يعني مسارًا غير وتريّ طوله يساوي 2 على الأقل تظهر أرقامه الصغرى عند طرفيه. سنبرهن أولاً عدم وجود جسر لـ f. وبخلاف ذلك، اجعل $P=u\ v_1,\ \dots\ ,\ v_k,\ w$ جسرًا يصغر $\max\{f(u), f(w)\}$. ومن التّماثل، يمكن افتراض أن $f(u) > f(w)$ (لقد استخدمت f كالإحداثي العموديّ لوضع الرّؤوس في التّوضيح).

بما أنه تمَّ ترقيم u بأفضلية على v_k عند زمن $f(u)$، وتمَّ سابقًا ترقيم w عند ذلك الزمن، فيوجد رأس x في $N(u)-N(v_k)$ حيث $f(x) < f(u)$. اجعل $v_0 = u$، وضع $r = \max\{j: x \leftrightarrow vj\}$. إنّ المسار $P' = x,\ v_r,\ \dots\ ,\ v_k,\ w$ غير وتريّ؛ لأنَّ $x \leftrightarrow w$ يمكن أن تتمَّ حلقة وتريّة، وبما أنّ كلًّا من $f(x)$ و $f(w)$ أقل من $f(u)$، فإنَّ P' يكون جسرًا يناقض خيارنا لـ P. لذا، فإنَّ f تخلو من الجسور.

بهذا الادعاء، فإنَّ الإثبات يتبع بالاستقراء على $n(G)$. يكفي برهنة أنّ v_n مبسطيّ، ولأنَّ تطبيق الـ MCS على $G - v_n$ ينتج التّرقيم $v_1,\ \dots\ ,\ v_{n-1}$ نفسه والذي يترك v_n عند الطرف النهائيّ. إذا كان v_n غير مبسطيّ، فإنَّه يوجد لـ v_n جاران n، w غير متجاورين، وفي الحالات جميعها، فإنَّ u، v_n، w تشكّل جسرًا لـ f. ■



خوارزمية MCS تشتغل في زمن $O(n(G) + e(G))$ مع وجوب الحذر عند التنفيذ. لكلّ j نحافظ على قائمة من الرّؤوس الموصولة وصلاً مضاعفًا وعلامتها الدالة j، ونُخَزِّنُ العلامة الدّالة لكلّ رأس بالإضافة إلى تخزين المؤشّرات (الأسهم) التي تشير إلى موقع ذلك الرّأس وجيرانه في القائمة، فعند ترقيم v بزمن $O(1 + d(v))$، فإنّنا نزيل v من قائمتها. ولإتمام اختبار الوتريّة؛ يجب أنْ نختبر ما إذا كان ترتيب الـ MCS ترتيب بناء مبسطيّ أم لا (التمرين 10)؛ حيث إنّ ترتيبات الحذف أو البناء المبسطيّ تعطينا نتائج مثلى بسرعة (أفضل ما يمكن) لكلّ من التّلوين والعصب، والمجموعات المستقرة، وأغطية العصب (التمرين 9).

الخوارزمية البديلة التي وجدها كلّ من روز، وترجان، ولوكر، والمعروفة باسم البحث الأفقي المعجمي أولاً نختصرها على الشكل (LBFS). بالنظر لقرب الـ (LBFS) من إثبات النظرية 17.3.5، فقد استُخدمت هذه الخوارزمية في العديد من تطبيقات اختبار خواص البيانات، وحساب وسطاء هذه البيانات. وهناك مقدمة جيدة عن هذا الموضوع في (Coneil – Olariu – Stewart [2000]).

إذا أُعطينا ترتيب حذف مبسطيّ، فإنَّ النظرية 14.1.8 تحسب التمثيل بواسطة الأشجار الجزئية. وعند معرفتنا لقائمة العصب الأعظمية، فإنَّنا نستطيع استخدام خوارزمية كروسكال (النظرية 3.3.2) لحساب التمثيل بأشجار جزئية دون معرفة ترتيب حذف مبسطيّ.

15.1.8. تعريف: تسمَّى الشجرة T شجرة عصبة للبيان G إذا وُجدَت دالّة تناظر بين $V(T)$ وعصب G الأعظمية، بحيث تولّد العصب التي تحوي v شجرة جزئيّة من T لكلّ $v \in V(G)$.

16.1.8. تمهيدية: كلّ شجرة رتبتها أقل ما يمكن بحيث يوجد فيها تمثيل بشجر جزئيّ لـ G تكون شجرة عصبة لـ G.

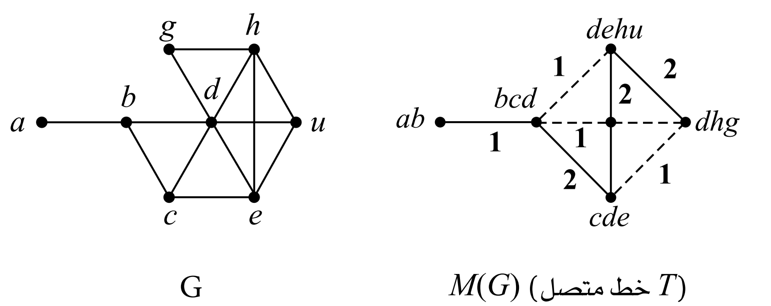
الإثبات: افترض أنّ T شجرة مضيفة لتمثيل البيان G بأشجار جزئيّة، بحيث إنّ لهذه الشجرة رتبة صغرى. من التمهيديّة 10.1.8، نعلم أنّ الرّؤوس لعصبة أعظمية Q في G تقع عند رأس مشترك q من رؤوس T. إذا كانت رؤوس G المعينة لرأس q' في $V(T)$ تشكل عصبة جزئية Q' من Q، فإنَّ الأشجار الجزئية لهذه الرؤوس تحوي كامل المسار من q' إلى q في T. يمكن تقليص أول ضلع من أضلاع T على ذلك المسار دون تغيير بيان التقاطع، وهذا يعطينا شجرة مضيفة أصغر. ■

بيان التقاطع الموزون لمجموعة $\boldsymbol{A}$ من المجموعات المنتهية هو عصبة موزونة رؤوسها عناصر $\boldsymbol{A}$، ووزن كلّ ضلع AA' هو $|A \cap A'|$.

17.1.8. نظرية: (Acharya – Las Vergnas [1982]). افترض أنّ $M(G)$ هو بيان التقاطع الموزون لمجموعة العصب الأعظمية $\{Q_i\}$ للبيان البسيط G. إذا كانت T شجرة مولدة لـ $M(G)$، فإنَّ $w(T) \le \sum n(Q_i) - n(G)$، وتتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت T شجرة عصبة.

الإثبات: (Mckee [1993]). افترض أنّ T شجرة مولّدة لـ $M(G)$. وافترض أيضًا أنّ T_v هو البيان الجزئيّ الذي تولّده $\{Q_i : v \in Q_i\}$. إنّ كلّ رأس $v \in V(G)$ يسهم مرة واحدة في وزن T لكلّ ضلع لـ T_v. لذا، فإنَّ $w(T) = \sum_{v \in V(G)} e(T_v)$.

Tv كلّه هو غابة. لذا، فإنَّ $e(T_v) \le n(T_v) - 1$، حيث تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كانت T_v شجرة، الحدّ $n(T_v)$ يسهم بـ 1 في حجم كلّ عصبة تحوي v. وبجمع المتباينة على الرؤوس جميعها، فإنَّنا نحصل على $w(T) \le \sum n(Q_i) - n(G)$. وتحصل المساواة إذا وفقط إذا كانت T_v جميعها شجرة، وهذا صحيح إذا وفقط إذا كانت T شجرة عصبة. ■



G $M(G)$ (T خط متصل)

$w(T) = 7 = 15 - 8 = \sum n(Q_i) - n(G)$.

بوصفها نتيجة من النظرية 17.1.8، نستطيع اختبار ما إذا كان G بيانًا وتريًّا بإيجاد أكبر وزن لشجرة مولّدة في $M(G)$.

فضلًا عن ذلك، عندما يكون G وتريًّا، فإنَّ أشجار العصب هي بالضبط الأشجار المولدة لـ $M(G)$ التي وزنها أكبر ما يمكن (Bernstein – Goodman [1981], Shibata [1988])، انظر (Mc kee, [1993]) للاطلاع على مادة ذات صلة.

أصناف (صفوف) أخرى من البيانات الكاملة (Other Class of Perfect Graphs)

بيانات الفترة هي بيانات تقاطع لمجموعة من الفترات على خطّ مستقيم، وقد برهنّا مباشرة في القضيّة 16.1.5 أنّ هذه البيانات كاملة؛ لأنَّها صفّ جزئيّ من البيانات الوتريّة (التمرين 26). تظهر بيانات الفترة في مسائل الجدولة الخطية التي يوجد لها قيود على وقوع الأحداث المتزامنة (تذكر المثال 15.1.5).

18.1.8. مثال: تطبيق كلاسيكيّ لبيانات الفترة.

تحليل سلاسل الـ DNA. لقد تمَّ إيجاد بيانات الفترة من أجل دراسة الـ DNA. وقد قام بنزر (Benzer) في العام 1959م بدراسة خطّانيّة (خطّيّة) السلسلة لكائنات حيّة أرقى. وتمَّ تشفير (ترميز) كلّ جين في صورة فترة، عدا أنّ الفترة ذات الصلة يمكن أنْ تحوي اثنتي عشرة قطعة أو أكثر من قطع السقط (الخردة) تسمَّى إنترونات (introns) وتكون عادة موجودة بين القطع ذات الصلة التي تسمَّى إكسونات (exons). وعلى افتراض أنّ الطفرات الوراثيّة تحدث من تغيير القطع المستقيمة المترابطة، فيمكن دراسة تغييرات صفات الأحياء الدقيقة لتحديد ما إذا كانت مجموعات الأحماض الأمينية تتقاطع، وإنّ هذا يؤسّس لبيان تمثّل الصّفاتُ فيه الرؤوسَ، في حين تمثّل "التغييراتُ الشائعة" الأضلاعَ، وبافتراض الخطّيّة والتجاور، فإنَّ هذا البيان بيان فترة، وهذا يساعد على تحديد مواقع الجينات على سلسلة الـ DNA.

توقيت الإشارات الضّوئيّة: ليكن معطى لدينا كيفية حركة السير عند تقاطع معين، يستطيع مهندس السّير (أو أيّ شخص عنده حسّ عام عاديّ) أنْ يحدّد أيّ زوج من مسارب السّيارات يمكن أن يسير في الوقت نفسه. فإذا أعطينا لحظة في الحلقة تكون فيها حركة السّير متوقّفة في الاتجاهات جميعها، فإنَّ بيان التقاطع لفترات الضّوء الأخضر يجب أنْ يكون بيان فترة، أضلاعُه هي المجموعاتُ الجزئية من الأزواج المسموحة (أزواج المسارب التي تكون فيها حركة السّير في الوقت نفسه)، يمكن دراسة هذه الحالات للحصول على أمثلية لمقياس معين مثل معدّل وقت الانتظار. انظر (Roberts [1978]).

التّسلسل الزّمنيّ للآثار: إذا وُجدت لدينا عينات من الفخّار في موقع تنقيب عن الآثار، فإنَّنا نبحث عن الفترة الزمنية التي استخدمت فيها هذه النوعيات من الفخار. افترض أنّ نوعًا واحدًا قد استخدم خلال فترة زمنية معينة، وإذا ظهر نوعان من الفخّار في القبر نفسه، فإنَّنا نفترض أنهما استُخدما في الفترة الزمنية نفسها. وإذا ظهر نوعان من الفخار في الحفرة نفسها، فإنَّنا نفترض أنّ هذا يمثّل ضلعًا. وإذا كان هذا البيان بيان فترة، فإنَّ فترات الزمن الممكنة تعطي تمثيلاً بفترات لهذا البيان، وبخلاف ذلك، فإنَّ المعلومات تكون ناقصة، ويكون بيان الفترة المنشود بحاجة إلى أضلاع إضافية. ■

سنعرض لخاصيتين مميزتين لبيانات الفترة، علمًا بأنّ الخاصية B في النظرية 20.1.8 تعود إلى جلمور وهوفمان (Gilmor and Hoffman [1964])، أمّا الخاصية C، فتعود لكلّ من فلكرسون وجروس (Fulkerson and Gross [1965]).

19.1.8. تعريف: المصفوفة – $0, 1$ هي المصفوفة التي مدخلاتها جميعها إما صفر أو واحد، ونقول إنّ للمصفوفة – $0, 1$ خاصية تتابع الواحدات (للأعمدة) إذا أمكن تبديل صفوفها، بحيث تظهر الواحدات في

كلّ عمود بالتتابع. ونعرف مصفوفة وقوع الرّأس والعصبة على أنّها مصفوفة الوقوع التي دُلِّلَ على صفوفها بالعصب الأعظمية، وعلى الأعمدة بـ$V(G)$.

20.1.8. نظرية : الشروط المتكافئة الآتية على بيان G تعطي توصيفًا مُميزًا لبيانات الفترة:

a) يوجد تمثيل بفترات للبيان G.

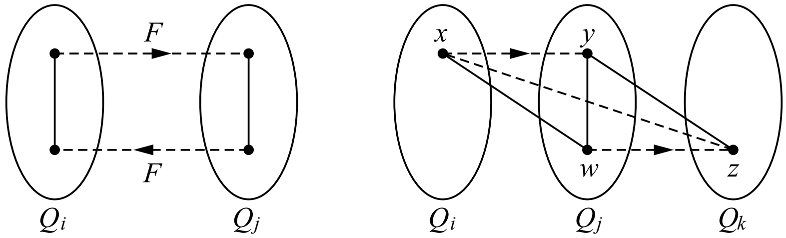
b) G بيان وتريّ، و $\overline{G}$ بيان مقارنة.

c) تمتلك مصفوفة وقوع الرّأس والعصبة خاصية تتابع الواحدات.

الإثبات: سنناقش $A \Rightarrow B$ و $C \Leftrightarrow A$ في التمرينين $27 - 26$. أمّا هنا فسنبرهن أنّ $B \Rightarrow C$. افترض أنّ G بيان وتريّ بحيث يوجد لـ $\overline{G}$ توجيه متعدّ F. نستخدم كلًّا من F وغياب الحلقات اللاوتريّة في G لإثبات وجود ترتيب على العصب الأعظمية لـ G بحيث يعطي هذا الترتيب خاصية الواحدات المتتابعة لمصفوفة وقوع الرّأس والعصبة M.

افترض أنّ Q_i و Q_j عصبتان عظيمان في G. من الأعظمية، نعلم أنّ لكلّ رأس في أيّ عصبة رأسًا آخر في العصبة الآخرى لا يجاوره. افترض أنّه تحت تأثير F يوجد ضلع في $\overline{G}$ يؤشّر من Q_i إلى Q_j، وضلع آخر في $\overline{G}$ يؤشّر من Q_j إلى Q_i.

إذا وُجد رأس مشترك لهذه الأضلاع، فإنَّ خاصية التعدي لـ F تجبر ضلعًا من عصبة في G ليكون موجودًا في $\overline{G}$. لذا، فإنَّ الحالة تكون كما هي موجودة في الشكل أدناه عن اليسار، حيث إنّ للأضلاع المنقطة في F أربعة رؤوس مختلفة. إذا كانت الأزواج المتبقية من هذه الرّؤوس الأربعة تشكل أضلاعًا في G، فإنَّ لـ G بيانًا جزئيًّا مستحدثًا هو C_4. واستنادًا إلى ذلك، فإنَّ أحد القطرين على الأقل يكون موجودًا في $\overline{G}$. ولكن كلّ توجيه ممكن لهذا القطر في F يناقض خاصية التعدي. وبذلك نستنتج أنّ أضلاع $\overline{G}$ كلّها التي تربط بين مجموعتي رؤوس Q_i و Q_j تشير إلى الاتجاه نفسه في F.



نستطيع الآن تعريف دوري T حيث ترتبط رؤوسه بالعصب العظمي في G. نضع $Q_i \to Q_j$ في T عندما تكون أضلاع F جميعها بين Q_i و Q_j تشير من Q_i إلى Q_j. من الفقرة السابقة، نجد أنّ T توجيه لبيان تام. ندعي أن T متعدٍّ. ولإثبات هذا، يجب إثبات أنّه إذا تحقق $Q_i \to Q_j$، و $Q_j \to Q_k$، فإنَّ $Q_i \to Q_k$. افترض أنّ $x \to y$، و $w \to z$ في F حيث $x \in Q_i$، $y, w \in Q_j$، و $z \in Q_k$. إذا كان $y = w$، فإنَّ خاصية التعدي لـ F تعطينا مباشرة أنّ $x \to z$. بخلاف ذلك، افترض زوجًا xz كما يظهر في الشكل أعلاه عن اليمين. إنّ ربط x و z في G يُحدث C_4 في G. لذا، فإنَّ $x \nleftrightarrow z$. وبناءً على ذلك، فإنَّ هذا الزوج يظهر في F، ويجب أنْ يكون موجهًا من x إلى z $x \to z$؛ لتجنب انتهاك خاصية التعدي. لذا، نستنتج أنّ $Q_i \to Q_k$ في T.

الدوري المتعدي يحدّد ترتيبًا خطّيًّا للرؤوس منسجمًا مع الأضلاع. استخدم الدوري المتعدي T لترتيب صفوف M على الشكل $Q_1 \to .... \to Q_m$. افترض أنّه تحت هذا الترتيب يوجد عمود x حيث لا تظهر فيه

الواحدات بالتتابع، لذا فلدينا Q_i، و Q_j، و Q_k بحيث إنّ $x \notin Q_i$ ، Q_k ، $x \in Q_i$، $i < j < k$، و $x \notin Q_j$. بما أنّ $x \notin Q_j$ ، فإنَّ العصبة Q_i يجب أنّ تحوي رأسًا y لا يجاور x. وبغير ذلك، فإنَّ Q_j يمتص x ولا يكون أعظميًّا. ومن هنا فإنَّ، $x \in Q_i$ تعطينا أنّ $y \to x$ في F في حين تعطينا $x \in Q_k$ أنّ $x \to y$ في F، ولكن حدوث هذا في الوقت نفسه مستحيل. ■

تشكّل بيانات الفترة عائلة صغيرة نسبيًّا من البيانات الكاملة. وفيما يأتي، سنناقش صفًّا أكبر من البيانات التي تحافظ على بعض الخواص الجميلة للبيانات الوتريّة، وبيانات المقارنة.

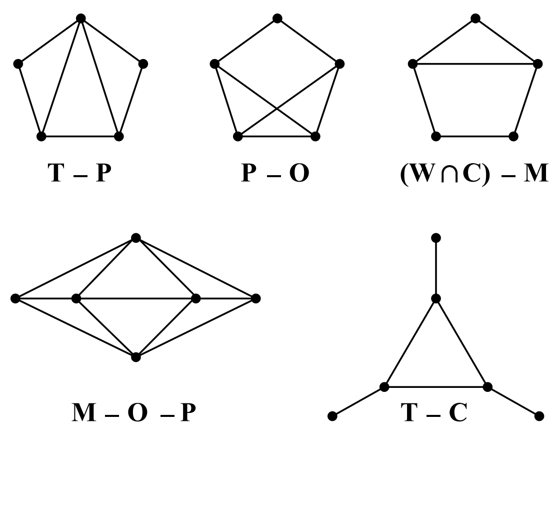
21.1.8. تعريف: صفوف (أصناف) البيانات الكاملة (تنطبق الشروط على الحلّقات الفردية إذا كان طول الحلقة يساوي 5 فقط على الأقل). **تثليث $- o$**: كلّ حلقة فردية لها وتران لا يتقاطعان . **نوعية**: لكلّ حلقة فردية وتران متقاطعان. **مينيل (Meyniel)**: يوجد وتران لكلّ حلقة فرديّة على الأقل **وتريّ ضعيف**: لا توجد حلقة مستحدثة طولها 5 على الأقل في G، أو في $\overline{G}$. **كامل بقوة**: توجد مجموعة مستقرة لكلّ بيان جزئيّ مستحدث تقطع كلّ عصبة أعظمية لهذا البيان الجزئيّ.

لقد أثبت جالاي (Gallai, [1962]) أنّ كلّ بيان من نوع تثليث $- o$ يكون بيانًا كاملاً. وكلّ بيان وتريّ هو تثليث $- o$ (التمرين 34) ووتريّ ضعيف (التمرين 40). وكلّ بيان تثليث $- o$، وكلّ بيان نوعية هو بيانات مينيل، وبيانات مينيل هي بيانات كاملة.

(Meyniel, [1976], Lova'sz, [1983]) وكذلك كاملة بقوة (Ravindra, [1982]).

لقد تمَّ إثبات أنّ البيانات النوعية بيانات كاملة من قِبَل كلٍّ من أولارو (Olaru, [1969]) وساشس (Sachs, [1970]). أمّا اسم البيانات النوعية الذي ينصُّ على أنّ البيان G بيان نوعية إذا وفقط إذا تحقق لكلّ زوج $x, y \in V(G)$، و أنّ المسارات اللاوتريّة من x إلى y كلّها زوجية أو كلّها فردية (التمرين 36)، فمأخوذ من التّوصيف المميّز لهذه البيانات من قِبَل كلٍّ من بورلت وأوري (Burlet and uhry, [1982]).

22.1.8. مثال: تبيّن البيانات الموضّحة في الشّكل أدناه الفروق بين هذه الأصناف. هنا $\boldsymbol{T}$ و $\boldsymbol{C}$ و $\boldsymbol{O}$ و $\boldsymbol{P}$ و $\boldsymbol{M}$ و $\boldsymbol{W}$ على الترتيب ترمز إلى أصناف البيانات الوتريّة (المثلثاتيّة)، والمقارنة وتثليث $- o$، والنوعية، ومينيل، وبيانات وتريّة ضعيفة. ■



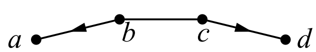
لقد عُرفت البيانات الكاملة بقوة من قِبَل كلّ من بيرج ودكت عام ([1984] Berge and Duchet) 1984.
حيث إنّ تغيير كلمة أعظمي إلى أكبر (أعظم) في التعريف يعطينا متطلبًا أضعف يكافئ الكمال بالنسبة إلى γ: يمكن استخدام المجموعة المستقرة التي تتقاطع مع كلّ العصب الكبرى كأول صفّ لونيّ في التّلوين بـ$w(G)$ لونًا الذي بُنيَ استقرائيًّا. لذا، فإنَّ البيانات الكاملة القوية تكون بيانات كاملة.

إنّ صفّ (تصنيف) البيانات الكاملة بقوة لا يحوي البيانات الوتريّة الضعيفة جميعها (التمرين 40)، إلا أنّه يحوي البيانات الوتريّة كلّها وكذلك بيانات المقارنة جميعها. (كما لاحظنا في القضية 25.3.5، عندما يكون للبيان G توجيه متعدٍّ، فإنَّ كلّ بيان جزئيّ مستحدث يرث توجيهًا متعديًا، وتشكّل الرؤوس التي درجتها الداخلة O في هذا التوجيه مجموعة مستقرة تقطع العصب الأعظمية كلّها.

صفّنا التالي من البيانات يكون محتوى فعليًّا في صفّ البيانات الكاملة القوية (التمرينين 37 − 38). وما زال يحوي كلًّا من البيانات الوتريّة وبيانات المقارنة، ولكنه لا يحوي بيانات مينيل جميعها (التمرين 39)، لقد عُرِّف هذا الصّفّ من قِبَلِ كفتال (Chva'tal) العام 1984، حيث قام هذا الصّفّ بدور مهم في نظرية البيانات الكاملة.

23.1.8. نعرِّف الترتيب الكامل للبيان G على أنه ترتيب لرؤوس هذا البيان بحيث ينتج التّلوينُ الجشع بالنسبة إلى الترتيب الموروث من قبل كلّ بيان جزئي مستحدث تلوينًا أمثل لهذا البيان الجزئي. يُسمّى البيان الذي له ترتيب كامل بيانًا كامل الترتيب.

يُعَرَّف العائق (السد) لتوجيه للبيان G على أنه مسار مستحدث له أربعة رؤوس هي: a، وb، وc، وd بحيث إنّ أول وآخر ضلع فيه يكونان موجهين نحو الأوراق. إنّ توجيه G المرتبط بترتيب L للرؤوس، يوجه كلّ ضلع نحو رأس يظهر أولاً في L: $u \to v$، إذا كان $u < v$. ونقول: إنّ ترتيب الرؤوس خالٍ من العائق، إذا خلا التوجيه المرتبط بذلك من العائق.



التوجيه المرتبط بترتيب كامل يخلو من العائق؛ لأنَّ التّلوين الجشع يستخدم 3 ألوان على العائق بدلاً من 2. لقد أثبت كفتال أنّ البيان يكون كامل الترتيب إذا وفقط إذا وُجِدَ لهذا البيان ترتيبٌ خالٍ من العائق. يعطينا هذا التوصيف أنّ البيانات الكاملة الترتيب تكون بيانات كاملة، وكذلك فإنَّ البيانات الوتريَّة وبيانات المقارنة تكون كاملة الترتيب.

24.1.8. مثال: تكون البيانات الوتريّة وبيانات المقارنة كاملة الترتيب. وأنّ توجيه البيانات الوتريّة المرتبطة بترتيب بناء مبسطي لا يحوي مسارًا مستحدثًا $u \leftrightarrow v \to w$، بالإضافة إلى أنّ التوجيه المتعدي لبيان المقارنة يخلو من مسار مستحدث $u \to v \to w$.

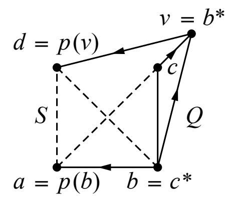
لكلّ توجيه يحوي إعاقةً مسارٌ مستحدثٌ $u \to v \to w$ ومسارٌ مستحدث $u \leftarrow v \to w$. ومن هنا، إذا كان G بيان مقارنة أو بيانًا وتريًّا، فإنَّ له ترتيبًا يخلو من العائق. وباستخدام توصيف كفتال، نعلم أنّ هذه البيانات قابلة للترتيب الكامل. ■

25.1.8. تمهيدية: ([1984] Chva'tal) افترض أنّ للبيان G عصبة Q ومجموعة مستقرّة S بحيث إن $S \cap Q = \theta$، وافترض أنّ $w \in Q$ كلّه يجاور $p(w) \in S$. إذا كان L ترتيبًا لـ G خالٍ من عائق، بحيث إنّ

$p(w) < w$ لكلّ $w \in Q$، فيوجد $p(w) \in S$ يجاور Q كلّها.

الإثبات: نستخدم الاستقراء على $n(G)$. إذا كان $n(G) = 1$، فلا يوجد ما نبرهنه. لذا، افترض أنّ $n(G) > 1$. لاحظ أنّه لكلّ $w \in Q$، فإنَّ البيان $G - w$ يحقّق الفرض باستخدام العصبة $Q - w$ والمجموعة المستقرّة $\{p(u) : u \in Q - w\}$. وباستخدام فرضية الاستقراء، يوجد رأس w^* في $Q - w$ بحيث إنّ $p(w^*) \leftrightarrow Q - w$. وبذلك نحصل على w^* في Q بحيث $p(w^*) \leftrightarrow Q$ إلا إذا تحقّق أنّ $p(w^*) \nleftrightarrow w$ لكلّ w في Q. إنّ هذا يحدد رأسًا وحيدًا w^* لكلّ w؛ لأنَّ $p(w^*)$ لا يجاور w فقط من بين الرؤوس الموجودة في Q. إن إرسال w إلى w^* يعرِّف تبديلة على Q. وبما أنّ $p(w) \nleftrightarrow w$، فإنّه لا يوجد عنصر مثبت تحت هذه التبديلة.

نبحث عن عائق (سد) في التوجيه المرتبط بـ L. اجعل v أصغرَ رأس لـ Q في L. افترض أنّ b, c في Q هما الرّأسان بحيث إنّ $b^* = v$، و $c^* = b$ (يمكن أنْ يكون $c = v$). افترض أنَّ $a = p(b)$، وأنّ $d = p(v)$. وبما أنّ $p(w^*) \nleftrightarrow w$، فلدينا $a \nleftrightarrow c$ و$d \nleftrightarrow b$، وهذا يعطينا أنّ $a \neq d$ في المجموعة المستقرّة S، ويعطينا الصورة الموضحة أدناه للتوجيه المرتبط بـ L.



بما أنّ $d = p(b^*)$، فإنَّ الرّأس الوحيد من Q الذي لا يجاور d هو b. إذن، فإنَّ $c \leftrightarrow d$. وبما أنّ $d = p(v) < v \le c$ في L، فسنحصل على أنّ $d \leftarrow c$. الآن، a، وb، وc، وd تحدث عائقًا، وهذا يناقض المفترض على L. لذا، فإنَّ $w \leftrightarrow p(w^*)$ لبعض w. وبذلك يكون $p(w^*)$ هو رأس S المنشود. ■

26.1.8. نظرية: ([Chva'tal [1984]). يكون ترتيب الرؤوس لبيان G ترتيبًا كاملاً إذا وفقط إذا خلا G من العوائق. ويكون كلّ بيان بمثل هذا الترتيب بيانًا كاملاً.

الإثبات: لاحظنا أنّ هذا الشرط ضروريّ؛ لأنَّ صفّ البيانات الذي له ترتيبات خالية من العوائق هو صفّ وراثيّ (يكون الترتيب الموروث للبيانات الجزئية المستحدثة خاليًا من العوائق أيضًا). لذا، يكفي برهنة أنّ التَّلوين الجشع للبيان G بالنسبة إلى ترتيب خالٍ من العوائق L يكون أمثليًّا. افترض أنّ k عددُ الألوان المستخدمة في تلوين جشع بالنسبة إلى L.

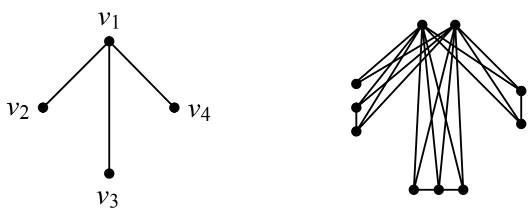
ولإثبات الأمثلية؛ سنبرهن وجودَ عصبة من الدرجة k للبيان G. ويبرهن هذا أيضًا صفة الكمال لهذه البيانات استقرائيًّا. افترض أنّ $f: V(G) \to [k]$ هو التَّلوين الناتج، اجعل i أقلَ عدد صحيح بحيث يوجد للبيان G عصبة $w_{i+1}, \dots, w_k$ بحيث إنّ $f(w_j) = j$ لـ $i < j \le k$. بما أنّ f تستخدم اللون k على رأس معين، فإنَّ i معرَّف جيدًا. إذا كان $i = 0$ فإن لـ G عصبة من الدرجة k.

إذا كان $i > 0$، فيوجد لكلّ w_j رأس $p(w_j)$، بحيث إنّ $p(w_j) < w_j$ في L و $f(p(w_j)) = i$، وبخلاف ذلك، فإنَّ التَّلوين الجشع يستخدم لونًا أقل على w_j. اجعل $S = \{p(w_{i+1}), \dots, p(w_k)\}$. بما أنّ كلّ رأس في S له اللون نفسه، فإنَّ S تشكّل مجموعة مستقرّة، وبذلك تتحقق شروط التمهيديّة 25.1.8 وهذا يعني أنه يمكن

إضافة أحد رؤوس S إلى العصبة ليصبح w_i، وهذا يناقض أصغرية i. ■

وسنأخذ فيما يأتي في الحسبان طريقة أخرى لتوليد البيانات الكاملة. إنّ العملية التي تحافظ على الكمال يمكن أنْ توسّع صفّ البيانات الكاملة. وأنّ عملية ضرب الرؤوس التي تمدّد الرّأس إلى مجموعة مستقلة هي مثال على هذه الخاصيّة. سنعمّم هذا، إذا كانت $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. وكانت $H_1, \ldots, H_n$ بيانات منفصلة، فإنَّ التركيب $G[H_1, \ldots, H_n]$ هو البيان $H_1 + \ldots + H_n$ بالإضافة إلى المجموعة $\{xy: x \in V(H_i), y \in V(H_j), v_i v_j \in E(G)\}$.
إنّ الحالة الخاصّة $G[\overline{K}_{h_1}, \ldots, \overline{K}_{hn}]$ هي $G \circ h$.

يستخدم المثال الموضح أدناه $H_1 = 2K_1$، و $H_2 = K_2 + K_1$، $H_3 = P_3$ و $H_4 = K_2$ و $G = K_{1,3}$ مع رأسٍ مركزي v_1.

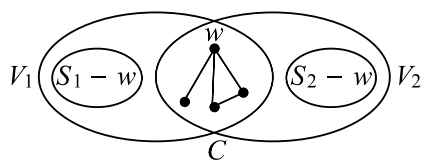


لقد أثبت لوفاز أنّ التركيب يحافظ على الكمال. و هذه إحدى النتائج التي تتبع من تمهيديّة كفتال المتعلقة بمجموعات قطع النجمة.

27.1.8. تعريف: نعرِّف مجموعة قطع النجمة على أنّها مجموعة قطع رؤوس S تحوي رأسًا x يجاور $S - \{x\}$ كلّها. ونعرّف **البيان الناقص (غير الكامل)** الأصغريّ على أنّه بيان غير كامل، بحيث تكون بياناته الجزئية المستحدثة جميعها بيانات كاملة.

28.1.8. تمهيدية: (تمهيديّة قطع النجمة). إذا خلا البيان G من المجموعات المستقرّة التي تقطع كلّ عصبة عظمى، وكان كلُّ بيان جزئيّ فعليّ مستحدث من G قابلاً للتلوين بـ $\omega(G)$ لونًا، فلا يوجد للبيان G أيّ مجموعة من قطع النجمة.

الإثبات: افترض أنّ C مجموعة قطع نجمة لـ G. بحيث يجاور الرّأس w $C - \{w\}$ كلّه. بما أنّ $G - C$ غير مترابط، فيمكننا تجزئة $V(G - C)$ إلى مجموعتين هما V_1 و V_2 حيث لا يربط بينهما أيّ أضلاع. اجعل $G_i = G[v_i \cup c]$، واجعل أيضًا f_i تلوينًا فعليًّا بـ $w(G)$ لونًا لـ G_i. افترض أنّ S_i هي مجموعة رؤوس G_i التي لها لون w نفسه في f_i. إنّ هذا يولّد w، ولكنه لا يولّد أيّ رأس آخر في C. وبما أنه لا يوجد أيّ ضلع من V_1 إلى V_2، فإنَّ $S = S_1 \cup S_2$ هي مجموعة مستقرّة.
إذا كانت عصبة في $G - S$، فإنَّها تكون محتواة في $G_1 - S_1$، أو أنها تكون محتواة في $G_2 - S_2$. وبما أنّ f_i يزودنا بتلوين بـ $\omega(G) - 1$ لونًا لـ $G_i - S_i$، فإنَّنا نحصل على أنّ $|Q| \le \omega(G) - 1$.
وبما أنّ هذا ينطبق على كلّ عصبة Q في $G - S$، فإنَّ المجموعة المستقرة S تقطع كلّ عصبة من الدرجة $\omega(G)$ في G، وهذا يناقض الافتراض. ■



29.1.8 نظرية: (تمهيديّة قطع النجمة، Chva'tal [1985b]) لا يوجد بيان كامل أصغريّ بحيث يحوي هذا

البيان مجموعة قطع نجمة.

الإثبات: إذا كان G بيانًا ناقصًا أصغريًّا، فإنَّ $\chi(G) > \omega(G)$، وحذف أيّ مجموعة مستقرّة S يترك بيانًا كاملاً. لذا، فإنَّ: $1 + \omega(G) \le \chi(G) \le 1 + \chi(G-S) = 1 + \omega(G-S) \le 1 + \omega(G)$.

وهذا يعطينا أنّ $\omega(G-S) = \omega(G)$، مما يعني عدم وجود مجموعة مستقرة تتقاطع مع كلّ عصبة عظمى. وأبعد من ذلك، بما أنّ G بيان غير كامل أصغريّ، فإنَّ كلّ بيان جزئيّ فعليّ مستحدث G' يحقق أنّ $\chi(G') = \omega(G') \le \omega(G)$، وهذا يجعل G قابلاً للتلوين بـ $\omega(G)$ لونًا. الآن، تعطينا التمهيديّة 28.1.8 أنّ G يخلو من مجموعة قطع النجمة ■

إنّ تمهيديّة الاستبدال تعمّم التمهيديّة 4.1.8.

30.1.8. نتيجة: (تمهيديّة الاستبدال – Lova'sz [1972b]). كلّ تركيب للبيانات الكاملة يكون بيانًا كاملاً.

الإثبات: يمكن بناء التركيب للبيانات بواسطة متتالية تعويضات، يستبدل فيها رأس واحد v في G_1 ببيان G_2، والأضلاع المضافة جميعها بين $V(G_2)$ و $U = N_{G1}(v)$ لتشكيل البيان G. لذا، يكفي أنْ نبرهن أنّ هذه العملية تحافظ على الكمال. إذا كان البيان الناتج ناقصًا (غير كامل)، فإنّه يحوي بيانًا جزئيًّا مستحدثًا F غير كامل أصغريًّا. إنّ مثل هذا البيان الجزئي لا يمكن أنْ يكون محتوى في G_1 أو في G_2، ومما يجبر هذا البيان ليكون له رأسان من G_2 على الأقل، ورأس واحد من G_1 على الأقل.

عند عدم احتواء F على أيّ رأس من رؤوس $G1$ خارج U، فإنَّ $F = F[U] \vee (F \cap G_2)$. إنّ عملية الوصل (Join) أو الضّم تحافظ على الكمال؛ لأنَّ $\chi(H \vee H') = \chi(H) + \chi(H')$ و $\omega(H \vee H') = \omega(H) + \omega(H')$ لكلّ H و H'. لذا، نستطيع أنْ نفترض وجود رأس في F من رؤوس G_1 غير الموجودة في U. في هذه الحالة، تشكّل $V(F) \cap U$ بالإضافة إلى رأس واحد من G_2 في F مجموعةَ قطع النجمة. لذا، فأن يحل G_2 محل U لا يعرف بيانًا جزئيًّا F غير كامل أصغريًّا. ■

تعطينا تمهيديّة مجموعة قطع النجمة كمالاً للبيانات الوتريّة الضعيفة. لقد أثبت هيوارد (Hayward [1985]) أنَّ G أو $\overline{G'}$ يحوي مجموعة قطع النجمة عندما يكون G بيانًا وتريًّا ضعيفًا مختلفًا عن العصبة وعن المجموعة المستقرّة أيضًا. يعطينا هذا بالإضافة إلى تمهيديّة مجموعة قطع النجمة، ونظرية البيانات الكاملة عدمَ وجود بيان وتريّ ضعيف بحيث يكون هذا البيان بيانًا ناقصًا أصغريًّا. وبما أنّ هذا الصّفّ وراثيّ، فإنَّ كلّ بيان وتريّ ضعيف يكون كاملاً.

البيانات الناقصة (غير الكاملة) (Imperfect Graphs)

البيانات الحرجة من الدرجة p هي بيانات ناقصة أصغرية. تنصّ مُخَمَّنَة البيانات الكاملة القوية (SPGC) على أنّ البيانات الوحيدة الحرجة من الدرجة p هي الحلقات الفرديّة (التي طولها على الأقل يساوي 5) ومتمماتها. ومع توافر كافٍ من الخصائص للبيانات الحرجة من الدرجة p، فلربما نستطيع برهنة أنّ الحلّقات الفرديّة فقط ومتمماتها هي التي تتمتّع بهذه الخصائص؛ وهذا سيبرهن الـ SPGC.

سنبدأ بملاحظات بسيطة عن البيانات الحرجة من الدرجة p، وقد استخدمت بعض هذه الملاحظات سابقًا عند مناقشة مجموعات قطع النجمة (لقد تمَّ نمذجة هذا العرض بالأصل بعد شمويس [1981] Shmoys).

31.1.8. تمهيدية : إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة p، فإنَّه يكون مترابطًا، و $\overline{G}$ يكون حرجًا من الدرجة p، و $\omega(G) \geq 2$، و $\alpha(G) \geq 2$، وأكثر من ذلك، لكلّ $x \in V(G)$، كون $\chi\ (G\text{-}x)=\omega(G)$، و $\theta\ (G-x) = \alpha(G)$.

الإثبات: يكون G بيانا كاملاً إذا وفقط إذا كانت كلّ مركبة من مركباته تشكّل بيانًا كاملاً. ويكون G كاملاً إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ كاملاً، الإضافة إلى أنّ العصب ومتمّماتها تكون كاملةً. وأخيرًا، لاحظنا عند إثبات النظرية 29.1.8 أنّ حذف مجموعة مستقلة من بيان حرج من الدرجة p لا ينقص عدد العصب. وبما أنّ $G-x$ كامل، فسنحصل على $\chi\ (G-x) = \omega\ (G-x) = \omega\ (G)$. إنّ الشرط $\theta\ (G-x) = \alpha(G)$ هو هذه العبارة لـ $\overline{G}$. ■

تتبع الخواص الدقيقة للبيانات الحرجة من الدرجة P من تعميم لوفاز لنظرية PGT.

32.1.8. نظرية : (Lova′sz [1972b]) يكون البيان G كاملاً إذا وفقط إذا كان $\omega\ (G\ [A])\ \alpha\ (G\ [A]) \geq |\,A\,|$ لكلّ $A \subseteq V(G)$. ■

اقتُرحت الخاصية " $\omega\ (G\ [A]\ \alpha\ (G\ [A]) \geq |\,A\,|$ لكلّ $A \subseteq V(G)$ " من قِبَل فولكرسون، ونسميها كمالاً بالنسبة إلى β (**β - perfection**). من المتضمن في الكمال بالنسبة إلى α، أو بالنسبة إلى γ أنه إذا استطعنا تلوين G لـ $\omega\ (G)$ مجموعة مستقرة، فإنَّ إحدى هذه المجموعات المستقرة تحوي $n\ (G)\ /\ \omega(G)$ رأسًا على الأقل. ويشتمل عكس ذلك على تعليلات حسابية كالتي أُعطيت لنظرية PGT، إلا أنها أكثر دقةً وكياسةً. وبما أنّ الكمال بالنسبة إلى b لا يتغير بأخذ المتمّمة، فإنَّ النظرية 32.1.8 تعطينا PGT مباشرة.

33.1.8. نظرية : إذا كان البيان G حرجًا من الدرجة p، فإنَّ $n(G) = a\ (G)\ \omega\ (G) + 1$ وأكثر من ذلك، لكلّ $x \in V(G)$، توجد تجزئة لـ $G-x$ إلى $\omega\ (G)$ مجموعة مستقرّة من الحجم $\alpha\ (G)$ وتجزئة إلى $\alpha\ (G)$ عصبة من الحجم $\omega\ (G)$.

الإثبات: عندما يكون البيان G حرجًا من الدرجة P، فإنَّ الشرط للكمال بالنسبة إلى b يفشل فقط لمجموعة الرؤوس الكلّيّة $A = V(G)$. لذا، فلكلّ $x \in V(G)$ نجد أنّ:

$n\ (G) - 1 \leq \alpha\ (G-x)\ \omega\ (G-x) = \alpha\ (G)\ \omega\ (G) \leq n\ (G) - 1$ لذلك، فإنّ $n\ (G) = \alpha\ (G)\ \omega\ (G) + 1$.

وبما أنّ $\chi\ (G-x) = \omega\ (G-x) = \omega\ (G)$ فيمكننا تغطية $G-x$ بـ $\omega\ (G)$ مجموعة مستقرّة. وبما أنّ حجم كلّ مجموعة من هذه المجموعات يساوي $\alpha\ (G)$ على الأكثر، فإنَّ هذه المجموعات تجزّئ الـ $\alpha\ (G)\ \omega\ (G)$ رأسًا لـ $G-x$ إلى $\omega\ (G)$ مجموعة مستقرّة، حجم كلّ منها يساوي $\alpha\ (G)$. وبالمثل، فإنَّ $\theta\ (G-x) = \alpha\ (G-x) = \alpha\ (G)$ يعطينا تجزئة لـ $V(G-x)$ إلى $\alpha\ (G)$ عصبة حجم كلّ منها يساوي $\omega\ (G)$. ■

إنّ دراسة البيانات الحرجة من الدرجة P قد استفادت من توسيع صفّ هذه البيانات ليشمل بيانات أخرى تحقق الخواص الموجودة في النظرية 33.1.8. إنّ الخواص البنيوية للصّف الأكبر تكون مفيدة عند إثبات الـ SPGC لصفوف خاصة من البيانات. لقد تمَّ اقتراح العديد من التعريفات لتوسيع صفّ البيانات الحرجة من الدرجة P، ولكن تبيّن أنّ هذه التعريفات ما هي إلا توصيفات بديلة للصفّ نفسه. لقد ظهر التعريف الذي نستخدمه في (Bland – Huang – Trotter [1979]).

34.1.8. تعريف: للأعداد الصحيحة $a,w \geq 2$، نقول: إنّ البيان G قابل للتجزئة من نوع $a\ ,\ w$ إذا وُجد له $aw + 1$ رأسًا، ولكلّ رأس $x \in V(G)$ يكون للبيان الجزئي $G-x$ تجزئة إلى a عصبة من الحجم w، وتجزئة إلى w مجموعة مستقرة من الحجم a.

35.1.8.نظرية : (Buckingham – Golumbic [1983]) يكون البيان G الذي رتبته $aw+1$ قابلاً للتجزئة من نوع a, w إذا وفقط إذا كان $\chi(G-x)=w$ و $\theta(G\text{-}x)=a$ لكلّ $x\in V(G)$، وأكثر من ذلك، $\alpha(G)=a$ و $\omega(G)=w$ لمثل هذه البيانات، وأنّ المتباينات $\chi(G\text{-}x)\le w$ ، و $\theta(G-x)\le a$ تكفي للحصول على التّجزئة.

الإثبات: افترض أنّ G قابل للتجزئة. بما أنّ $G-x$ قابل للتلوين بـ w لونًا، وله عصبة من الدرجة w، فإنّ $\chi(G-x)=w=\omega(G-x)$. وبما أنّ $a\ge 2$، فإنَّ G ليس بيانًا تامًّا. إنّ حذف رأس x خارج عصبة أكبر Q في G يعطي أنّ $\omega(G)=\omega(G-x)=w$. إنّ التعليل نفسه على $\overline{G}$ يعطي النتيجة لـ a.

وبالعكس، افترض أنّ $\chi(G-x)\le w$، و $\theta(G-x)\le a$ لكلّ x في $V(G)$. تعطي المتباينة الأخيرة أنّ $\alpha(H)\le a$. لذا، فإنّ تلوينًا أمثل لـ $G-x$ يستخدم w مجموعة مستقرة على الأكثر، حجم كلّ منها يساوي a على الأكثر. وبما أنّ $n(G-x)=aw$، فإنَّ مثل هذا التّلوين يجزّئ $V(G-x)$ إلى w مجموعة مستقرّة من الحجم a. وبالمثل، فإنَّ غطاء لـ $G-x$ بـ a عصبة يعطي تجزئة العصب المنشودة. ■

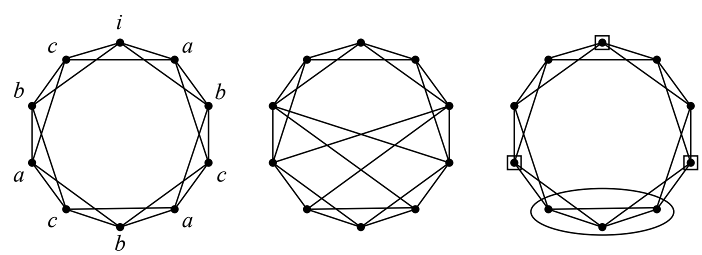
من المبرهنتين 33.1.8 و35.1.8. نعلم أنّ كلّ بيان حرج من الدرجة p يكون قابلاً للتجزئة، وكلّ بيان قابل للتجزئة يكون بيانًا ناقصًا، زِدْ على ذلك، فإنَّ G يكون قابلاً للتجزئة من نوع a, w إذا وفقط إذا كان $\overline{G}$ قابلاً للتجزئة من نوع a, w.

36.1.8. مثال: قوى (أسس) الحلقات. يمكن بناء البيان C_n^d بوضع n رأسًا على دائرة، وجعل كلّ رأس يجاور أقرب d رأسًا له في كلا الاتجاهين على الدائرة. عندما $d=1$، فإنّ $C_n^d=C_n$.

نتعامل مع الرؤوس على أنها أعداد صحيحة بمقياس n، مرتبة بطريقة معينة. إنَّ البيان C_{10}^2 الموضّح عن اليسار أدناه ليس بيانًا كاملاً وليس بيانًا حرجًا من الدرجة p أيضا (الرؤوس: 0، 2، 4، 6، 8 تولّد C_5، ولكن C_{10}^2 قابل للتجزئة من نوع 3، 3. وعندما نزيل i، فإنَّ التجزئة الوحيدة للرؤوس التسعة المتبقية إلى ثلاثة مثلثات، هي: $\{(i+1, i+2, i+3)$ و $(i+4, i+5, i+6)$ و $(i+7, i+8, i+9)\}$.

والتجزئة الوحيدة إلى ثلاث مجموعات مستقرّة هي: $\{(i+1, i+4, i+7)$، و $(i+2, i+5, i+8)$ و $(i+3, i+6, i+9)\}$.

يكون C_{aw+1}^{w-1} دائمًا قابلاً للتجزئة من نوع a، w. إنّ كلّ w رأسًا متتابعًا في $G-x$ تشكّل عصبة، ويشكّل كلّ a رأسًا مجموعة مستقرة بحيث تساوي المسافة بين أيّ اثنين منهما w. إنّ إثبات C_{aw+1}^{w-1} يكون حرجًا من الدرجة P إذا وفقط إذا كان $w=2$، أو $a=2$ يختزل الـ $SPGC$ في عبارة: إن البيانات الحرجة من الدرجة p جميعها تكون قوى حلقات. ■



37.1.8. مثال: بيانات أخرى قابلة للتجزئة. تظهر البيانات الأخرى القابلة للتجزئة عن طريق إضافة أضلاع غير مهمة إلى البيان C_{aw+1}^{w-1} في C_{10}^2. ونستطيع إضافة أيّ قطر دون تغيير مجموعة العصب الكبرى أو مجموعة المجموعات المستقرة الكبرى. لذا، فإنَّ البيان الناتج ما زال قابلاً للتجزئة. سنرى أنّ الـ SPGC تتبع إذا حصلنا

على البيانات القابلة للتجزئة جميعها من قوى حلقات عن طريق إضافة أضلاع غير مهمة من هذا النوع.

على الرّغم من ذلك، توجد بيانات أخرى قابلة للتجزئة، مثل البيان الموجود في وسط الشكل أعلاه. (Chva'tal – Graham – Perold – Whitesides [1979], Huang [1976]). ينتمي كلّ ضلع في هذا البيان إلى عصبة عظمى، ولكن يوجد له ضلعان أكثر من C_{10}^{2}. إنّ التجزئات تبرهن أنّ تجزئة هذا البيان تختلف عن تجزئة C_{10}^{2} (التمرين 42). ■

38.1.8. مثال: خواص إضافية للبيان C_{aw+1}^{w-1}.يوجد للبيان C_{aw+1}^{w-1} بالضبط n عصبة كبرى، كلّ منها يستخدم w رأسًا متتابعًا على الحلقة. وكلّ رأس يقع في w عصبة متتابعة من الدرجة w. وكذلك يوجد n مجموعة مستقرة كبرى تمامًا لكلّ منها $a-1$ فجوة بطول w، وفجوة واحدة طولها $w+1$ بين رؤوسها المتتابعة. يوجد للمجموعة المستقرة الكبرى التي تحوي x a مكانٌ للفجوة الكبرى. لذا، فإنَّ كلّ رأس يقع في a من المجموعات المستقرة الكبرى.

أخيرًا، يمكن للعصبة من الدرجة w أنْ تتفادى مجموعة مستقرة كبرى فقط من خلال وجودها في الفجوة التي طولها $w+1$ (كما يظهر في المثال 37.1.8 على الصفحة السابقة). وبناءً على هذا، توجد مزاوجة $\{(Q_i\,,\,S_i)\}$ بين المجموعات المستقرة الكبرى والعصب الكبرى بحيث إنّ $Q_i \cap S_j = \emptyset$ إذا وفقط إذا كان $i=j$. ■

تشمل هذه الخواص الإضافية التوصيف الآتي: إنّ التعليلات تعود إلى بادبيرج (Padberg [1974])، الذي استخدمها في إعطاء وصف للبيانات الكاملة بوصها كثيرات سطوح. لاحظ هنا أنّ الاستنتاجات التَّوافقيّة (التّركيبيّة) تتبع من خواص المصفوفات في الجبر الخطّيّ، وقد ظهرت بعض التَّوصيفات الأخرى للبيانات القابلة للتجزئة في (Bland – Huang–Trotter [1979]) وفي (Golumbic [1980, p 58 – 62]) وفي (Tuck-er [1977]) وفي (Chva'tal-Graham-perlod-whitesides [1979]) وفي (Buccigham [1980]).

39.1.8. نظرية: يكون البيان G الذي رتبته $n = aw+1$ قابلاً للتجزئة من النوع a,w إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

1) $\alpha(G)=a$، و $\omega(G)=w$، وكلّ رأس في G ينتمي بالضبط إلى w عصبة من الحجم w ولـ a مجموعة مستقرة من الحجم a.

2) يوجد لـ G بالضبط n عصبة كبرى $\{Q_i\}$، و n مجموعة مستقرة كبرى $\{S_j\}$، بحيث إنّ $Q_i \cap S_j = \emptyset$ إذا وفقط إذا كان $i=j$ (Q_i و S_j رفيقتان (**mates**)).

الإثبات: الضرورة، لقد برهنّا أنّ $\chi(G-x)=w=\omega(G)$، وأنّ $\theta(G-x)=a=a(G)$ لكلّ $\chi \in V(G)$. اختر عصبة Q حجمها يساوي w. لكلّ $x \in Q$، يوجد لـ $G-x$ تجزئة إلى a عصبة من الحجم w.

إن Q مع هذه الـ w تجزئة تشكل قائمة $n=aw+1$ من العصب العظمى $Q_1\,,\,\dots\,,\,Q_n$. ويظهر كلّ رأس خارج Q في عصبة واحدة في كلّ تجزئة. وكلّ رأس في Q يظهر في Q، ويظهر مرّة واحدة في w - 1 تجزئة. لذا، فإنَّ كلّ رأس يظهر في w عصبة بالضبط في هذه القائمة.

لكلّ Q_i، نحصل على مجموعة مستقرة كبرى S_i منفصلة عن Q_i. اختر $x \in Q_i$. إنّ الـ w من المجموعات المستقرة الكبرى التي تجزّئ $V(G-x)$ يمكن أنْ تقطع Q_i فقط عند الـ $w-1$ رأسًا المختلفة عن x. لذا، فإنَّ إحدى هذه المجموعات المستقرّة لا تقطع Q_i، ولتكن المجموعة S_i. سنبرهن أنّ هاتين القائمتين تحويان العصب والمجموعات المستقلة جميعها، ولهما خواص التقاطع المنشودة.

افترض أنّ A مصفوفة الوقوع التي فيها $a_{i,j} = 1$ كان $x_j \in Q_i$ و $a_{i,j} = 0$ بخلاف ذلك. افترض أنّ B هي المصفوفة التي بها $b_{i,j} = 1$ إذا كان $x_j \in S_i$ و $b_{i,j} = 0$ بخلاف ذلك. المدخلة رقم i, j في المصفوفة $A\,B^T$ تساوي حاصل ضرب صفّ i من A في صف j من B والتي تساوي $|\,Q_i \cap S_j\,|$. بإثبات أنّ $A\,B^T = J - I$ ، حيث J هي مصفوفة الواحدات كلّها، نحصل على أنّ $Q_i \cap S_j \neq \emptyset$ إذا وفقط إذا كان $i \neq j$. وبما أنّ $J - I$ مصفوفة غير منفردة، فهذا يضمن أنّ A و B مصفوفتان غير منفردتين أيضًا. ونعلم أنّ للمصفوفات اللا منفردة صفوفًا مختلفة، وبذلك فإنَّ $Q_1 , \ldots Q_n$ و $S_1 , \ldots S_n$ تكون مختلفة.

من البناء، $|\,Q_i \cap S_i\,| = 0$. بما أنّ العصب والمجموعات المستقرّة تتقاطع مرة واحدة على الأكثر، فلإثبات أنّ $A\,B^T = J - I$ يلزمنا فقط برهنة أنّ مجموع عناصر كلّ عمود من $A\,B^T$ يساوي $n - 1$. وبالضرب في متجه الصّفّ $\mathbf{1}_n^T$ عن اليسار، فإنَّنا نحصل هذه المجاميع. لقد بنينا A بحيث تحوي كلّ عمود w من الواحدات.

(لأنَّ كلّ رأس يظهر في w عصبة في القائمة) وبنينا B بحيث تحوي كلّ صفٍّ a من الواحدات (لأنَّ حجم كلّ مجموعة مستقرة يساوي a). ولذلك نجد أنّ:

$$\mathbf{1}_n^T\ (A\,B^T) = (\mathbf{1}_n^T\ A)B^T = w\mathbf{1}_n^T\ B^T = wa\mathbf{1}_n\ = (n-1)\mathbf{1}_n^T$$

ولبرهنة أنّ G لا يحوي عُصبًا كبرى أخرى، نجعل q متجهَ الوقوع لعصبة كبرى Q. ونبرهن أنّ q يجب أنْ يكون صفًّا في A. وبما أنّ A مصفوفة غير منفردة، فإنَّ صفوفها تولد $\mathbb{R}^n$ ، ونستطيع أنْ نكتب q كتركيب خطّيّ: $q = tA$. ولحلّ هذه المعادلة بالنسبة إلى t فإنَّنا بحاجة إلى A^{-1}. وبما أنّ مجموع كلّ صفّ في A يساوي ω، فسنحصل على أنّ: $A\ (\omega^{-1}\ J - B^T) = \omega^{-1}\ \omega J - (J - I) = I$، وبذلك فإنَّ $A^{-1} = \omega^{-1}\ J - B^T$ وبناءً عليه فإنَّ:

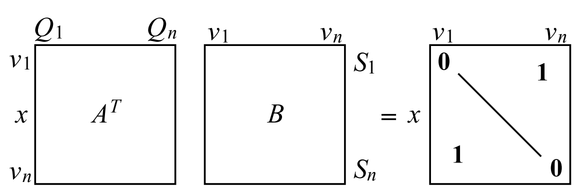
$$t = qA^{-1} = q\ (\omega^{-1} J - B^T) = \omega^{-1}\, qJ - qB^T = \omega^{-1}\, \omega\, \boldsymbol{I}^T{}_n - qB^T$$

العمود رقم i في B^T هو متجه الوقوع لـ S_i. لذا، فإنَّ الإحداثيّ i لـ $q\,B^T$ يساوي $|\,Q \cap S_i\,|$ والذي هو إما 0 أو 1. إذن، t متجه إحداثيّاه 0 و 1، أمّا q، فهو مجموع صفوف A. بما أنّ جمع q يساوي ω، عندها يمكن استخدام صفّ واحد فقط. لذا، فإنَّ q صفٌّ من صفوف A وأنّ $Q_1\ \ldots\ Q_n$ فقط هي العُصب العظمى. وتطبيق التعليل نفسه على $\overline{G}$ يثبت أنه يوجد للبيان G بالضبط n مجموعة مستقرة عظمى بحيث يظهر كلّ رأس في a من هذه المجموعات.

الكفاية: من النظرية 35.1.8 يلزمنا فقط برهنة أنّ $\chi\ (G - x) \leq w$، و $\theta\ (G - x) \leq a$ لكلّ $x \in V(G)$.
افترض أنّ العصب والمجموعات المستقرّة معطاة كما هو مضمون بالشّرط الثّاني، وعرِّفت مصفوفتا الوقوع A و B كما في الأعلى. نعلم من الشّرط رقم (1) أنّ كلّ عمود من B يحوي a من الواحدات، ولذلك فإنَّ $J\,B = a\,J = B\,J$. إنّ شرط التقاطع (2) يعطينا أنّ $A\,B^T = J - I$. إنّ هذه المصفوفة غير منفردة، لذا فإنَّ B غير منفردة وأنّ:

$$A^T\,B = B^{-1}\,B\,A^T B = B^{-1}\,(J - I)\,B = B^{-1}\,B\,J - I = J - I$$

في حاصل الضّرب $A^T\,B = J - I$ ، والصّفّ الذي يرتبط بالرّأس x في $V(G)$ ينصّ على أنّ $V(G - x)$ تُغطّى برفاق الـ w عصبة الكبرى التي تحوي x (موضّح في الرسم أدناه). لذا، فإنَّ $\chi(G - x) \leq w$. وبالمثل، فإنَّ العمود المرتبط بـ x ينصّ على أنّ $V(G - x)$ تُغطّى برفاق الـ a مجموعة المستقرة الكبرى التي تحوي x. لذا، فإنَّ $\theta\ (G - x) \leq a$. ■



40.1.8. نتيجة : إذا كان G قابلًا للتجزئة من نوع a, w، وكان $w = 2$، فإنَّ $G = G_{2a+1}$ ، إذا كان $a = 2$، فإنَّ $G = \overline{C}_{2\omega+1}$. لذا، فإنَّ الـ SPGC تختزل لإثبات أنّ $\omega = 2$، أو $\alpha = 2$ وذلك للبيانات الحرجة من الدرجة p.

الإثبات: إذا كان $\omega = 2$، فإنَّ كلّ رأس ينتمي إلى عصبتين من الحجم 2. لذا، فإنَّ G منتظم من الدرجة 2. وإضافة إلى ذلك، فإنَّ G مترابط وله رتبة فرديّة $(2\alpha + 1)$. لذا، فإنَّ G حلقة فرديّة. لـ $a = 2$، افترض $\overline{G}$. ■

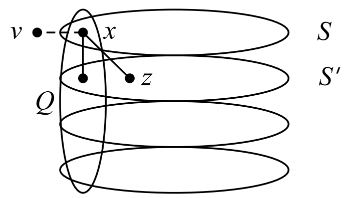
من الآن فصاعدًا، سنستخدم w، $\omega(G)$، ω بالتبادل، و a، $\alpha(G)$، و α بالتبادل وذلك للبيانات القابلة للتجزئة.

41.1.8. نظرية : (Tucker [1977]) افترض أنّ x رأس في بيان G قابل للتجزئة. يوجد للبيان الجزئي $G - x$ تلوين وحيد أصغر رُمز إليه بالرمز $X(G - x)$، ويتألف من رفقاء العُصَب العظمى التي تحوي x. وبالمثل، يوجد لـ $G - x$ غطاء عُصَب وحيد أصغر رُمز إليه بالرمز $X(G - x)$، ويتألف من رفقاء المجموعات المستقرة العظمى التي تحوي x.

الإثبات: بما أنّ G قابل للتجزئة من نوع a, w، فإنَّ $G - x$ قابل للتلوين بـ w لونًا مستخدمًا w مجموعة مستقرة من الحجم a. إنّ كلّ عصبة من الدرجة w تفتقد صفًّا لونيًّا؛ لأنَّ للعصبة $w - 1$ رأسًا في $G - x$. لذا، يوجد للعصب من الدرجة w التي تحوي x كلّها رفقاء بوصفها صفوفًا لونيّة في التّلوين. وبالتحديد، يوجد w من هذه العصب تمامًا. لذا، فإنَّ التّلوين وحيد. إنّ العبارة الأخرى تتبع من أخذ المتمِّمة. ■

42.1.8. نظرية : (Buchkingham – Golumbic [1983]). إذا كان x رأسًا في بيان G قابل للتجزئة من نوع ω، α، فإنَّ $2\omega - 2 \le d(x) \le n - 2\alpha + 1$.

الإثبات: اختر رأسًا $x \nleftrightarrow v$ (انظر التّوضيح أدناه). اجعل S مجموعة مستقرة في $X(G - v)$ بحيث إن S تحوي x، واجعل S' مجموعة مستقرة أخرى في $X(G - v)$. اختر $z \in N(x) \cap S_2$.توجد عصبة Q في $\Theta(G - z)$ تحوي x. بما أنّ $x \nleftrightarrow v$، فإنَّ لـ Q رأسًا في كلّ مجموعة مستقرة لـ $X(G - v)$، وهذا يعطي جارًا ثانيًا لـ x في S'. لذا، يوجد لـ x جاران على الأقل في كلّ مجموعة مستقرّة من الـ $\omega - 1$ مجموعة المحتواة في $X(G - v)$، وهذا يعطينا أنّ $d(x) \ge 2\omega - 2$. يعطي التعليل نفسه على $\overline{G}$ أنّ: $n - 1 - d(x) = |N_{\overline{G}}(x)| \ge 2\alpha - 2$. ■



إنّ الحدود على درجات الرّؤوس في البيانات القابلة للتجزئة من نوع α, ω حادّة، حيث تتحقّق بالمساواة لقوى الحلقات.

43.1.8. تعريف: نقول: إنّ ضلعًا في البيان يكون ضلعًا حرجًا إذا كان حذفه يؤدي إلى زيادة عدد الاستقلال. يُسمّى الرّأسان غير المتجاورين متحارجين **(co – critical)** إذا كانت إضافة ضلع يربط بينهما تؤدي إلى زيادة عدد العصب. إن التوصيف المميّز للأضلاع الحرجة في البيانات القابلة للتجزئة موجود ضمنيًّا في عمل العديد من الباحثين.

44.1.8. نظرية : إذا كان xy ضلعًا في بيانٍ قابلٍ للتجزئة G، فإنَّ العبارات الآتية متكافئة:

(a xy ضلع حرج.

(b $S \cup \{x\} \in X(G-y)$

(c xy ينتمي إلى $\omega - 1$ عصبة عظمى.

الإثبات: $A \Leftarrow B$. لاحظ أنّ $S \cup \{x, y\}$ هي مجموعة مستقرة عظمى حجمها $\alpha + 1$ في $G - xy$.

$A \Rightarrow C$. إذا كان xy حرجًا، فتوجد مجموعة S، بحيث إنّ $S \cup \{x\}$ و $S \cup \{y\}$ عبارة عن مجموعات مستقرّة عظمى في G. لذا، فإنَّ كلّ عصبة عظمى تحوي x ولا تحوي y تكون منفصلة عن $S \cup \{y\}$.

بما أنّه يوجد ω عصبة عظمى تحوي x، وعصبة عظمى واحدة فقط لا تتقاطع مع $S \cup \{y\}$، فإنَّ الـ $\omega - 1$ عصبة العظمى المتبقية والحاوية لـ x يجب أنْ تحويَ y أيضًا.

$C \Longrightarrow B$. إنّ المجموعات المستقرّة في التّلوين الوحيد لـ $G - x$ هي رفقاء العصب التي تحوي x. وبما أنّ xy موجود في $w - 1$ عصبة عظمى، فإنَّ رفقاء هذه الـ $\omega - 1$ عصبة تنتمي إلى كلّ من $X(G-x)$ و$X(G-y)$، وهذا يترك $a + 1$ رأسًا فقط في البيان مؤلفة من الرؤوسx وy ومجموعة مستقرة S، بحيث إنّ $S \cup \{x\} \in X(G-y)$ و $S \cup \{y\} \in X(G-x)$ ∎

45.1.8. نتيجة: افترض أنّ G بيان قابل للتجزئة. إذا كان xy ضلعًا لا يظهر في أيّ عصبة عظمى، فإنَّ $G - xy$ يكون قابلاً للتجزئة. وإذا كان x و y زوجًا غير متجاور لا يظهر في أيّ مجموعة مستقرّة عظمى، فإنَّ $G + xy$ يكون قابلاً للتجزئة.

الإثبات: من خواص المتمّمة (التتام)، فإنّنا نحتاج إلى إثبات العبارة الأولى فقط. إذا حذفنا ضلعًا لا يظهر في أيّ عصبة عظمى، فباستخدام النظرية 44.1.8 نعلم أنّ هذا الضلع ليس ضلعًا حرجًا، ونحصل على أنّ $\omega(G-xy) = \omega(G)$ و$\alpha(G-xy) = \alpha(G)$. وبما أننا لم نُدمِّر أيّ عصبة عظمى ولم نُحدِّث أيّ مجموعة مستقرة أكبر، فإنه يمكننا استخدام التّلوين الأمثل، وتجزئة العصب للبيان $G - u$ لاستنتاج أنّ $\omega \le X(G-xy-u)$، وأنّ $\theta(G-xy-u) \le \alpha$. ولهذا، فإنَّ $G - xy$ قابل للتجزئة باستخدام النظرية 35.1.8. ∎

يقترح النقاش الذي ذُكِرَ في المثال 37.1.8 أنّ الأضلاع التي لا تظهر في أيّ عصبة عظمى أضلاع غير مهمة، وتؤكد النتيجة 45.1.8 لنا أن هذه الأضلاع هي " خردة" ولا يوجد أيّ خردة لقوى الحلقات القابلة للتجزئة.

مُخَمَّنَة البيان الكامل القوي (The Strong Perfect Graphs Conjecture)

كنا نبرهن خواص البيانات القابلة للتجزئة معتمدين طريقة الاقتراب من "أعلى إلى أسفل" لنظرية الـSPGC، محاولين إيجاد خواص كافية لحذف البيانات الحرجة جميعها من الدرجة P ما عدا الحلقات ومتمّماتها. وتعني هذه الطريقة إثبات أنّ الـ SPGC تتحقق لصفوف أكبر وأكبر من البيانات حتى تشمل هذه البيانات جميعها.

46.1.8. تعريف: الفجوة الفرديّة أو عكسها في البيان G بيان جزئيّ مستحدث من G بحيث يكون C_{2k+1} أو $\overline{C}_{2k+1}$ (لبعض $k \ge 2$) على الترتيب، إنّ البيان الذي يخلو من فجوة فرديّة أو عكسها يُسمّى بيان بيرج (Berge).

إحدى الطرق لإثبات أنّ الصّفّ G يحقق الـ SPGC، هي برهنة أنّ كلّ بيان بيرج في $\boldsymbol{G}$ يكون كاملاً، ويحقّق الصّفّ الوراثيّ $\boldsymbol{G}$ الـ SPGC إذا كانت الحلقات الفرديّة ومتمّماتها هي فقط البيانات الحرجة من الدرجة P في $\boldsymbol{G}$.

تتحقق الـ SPGC لكلٍّ من البيانات السويّة ([1973] Tucker)، و الطّاريّة (التي تقع على طارة دون تقاطعات) ([1981] Grinstead)، وللبيانات التي لها [1978] Grinstead) $\Delta(G) \le 6$)، أو التي لها

Tucker [1977]) $\omega(G) \le 3$)، فضلًا عن أنها تتحقق لصفوف مختلفة من البيانات المعرفة من خلال منع بعض البيانات الجزئية المستحدثة المثبتة (-Meyniel [1976], Tucker [1977], Parthasarathy – Ra vindra [1976, 1979], Chva'tal – shihi [1988], Olariu [1989], Sun [1991]).

سنأخذ في الحسبان ثلاث عائلات.

47.1.8. تعريف: نعرِّف بيان أقواس الدائرة على أنه بيان التقاطع لعائلة من بيانات الدائرة، أمّا بيان الدائرة، فهو بيان التقاطع لعائلة من أوتار الدائرة. ويُسمّى كلّ بيان خالٍ من $K_{1,3}$ بيانًا خاليًا من المخالب (انظر التعريف 22.3.1).

كلّ حلقة تكون بيانَ دائرة وبيانَ أقواس دائرة، إلا أنّ أيًّا من هذه الصّفّوف غير محتوى في الآخر (التمرين 47).

وإحدى الطرق لإثبات الـ SPGC لصفّ $\boldsymbol{G}$ هي برهنة أنّ كلّ بيان قابل للتجزئة في $\boldsymbol{G}$ ينتمي إلى صفّ $\boldsymbol{H}$ تتحقق فيه الـ SPGC. ونستخدم العائلة $\{C_n^d\}$ للقيام بهذا الدور.

48.1.8. نظرية: (Chva'tal [1976]). قوى الحلقات تحقِّق الـ SPGC. وبالتحديد، فإنَّ البيان C_{aw+1}^{w-1} يكون حرجًا من الدرجة p إذا وفقط إذا كانت $w = 2$، أو $a = 2$، ويكون البيانُ في الحالتين فجوةً فرديّة، أو عكسَ فجوةٍ فرديّة.

الإثبات: يكفي افتراض البيانات القابلة للتجزئة $G = C_{aw+1}^{w-1}$. يُعَدُّ هذا بيانًا حرجًا من الدرجة p عندما $a = 2$، أو $w = 2$. لذا، يمكن افتراض أنّ $a,\ w > 2$، لتكن الرّؤوس هي: $\{v_o,\ \dots,\ v_{aw}\}$، واجعل $S = \{v_{iw}+1\ ,\ v_{(i+1)w}\colon 0 \le i \le a-1\}$. إنّ البيان الجزئي $G\,[S]$ هو حلقة، وبما أنّ أدلة الرؤوس المتتابعة في S تكون مفصولة بعضها عن بعض، إما بواحد أو بـ $w-1$ (ما عدا الرّأسين v_{aw} و v_1 المفصولين بـ 2)، فإنَّ أدلة الرؤوس غير المتتابعة تختلف على الأقل بـ w.

وللحصول على C_{2a-1} بوصفها بيانًا جزئيًّا فعليًّا مستحدثًا، فإنّنا نستبدل:

$\{v_{(a-1)w+1}\ ,\ v_{aw}\ ,\ v_1\ ,\ v_w\}$ بـ $\{v_{(a-1)\,(w+2)}\ v_0\ ,\ v_{w-1}\}$ في S.

وبذلك نستنتج أنّ G ليس حرجًا من الدرجة P. ■

49.1.8. نظرية: (Tucker [1975]). تتحقّق الـ SPGC لبيانات أقواس الدائرة.

الإثبات: تذكر أنّ $\mathrm{N(v)} \cup \{\mathrm{v}\}$ تعريف الجوار المغلق لـ v (التعريف 29.1.3). عندما يكون G بيانًا قابلاً للتجزئة ورؤوسه المختلفة x و y، فإنّنا ندعي أنّ $N[x] \nsubseteq N[y]$. خذ في الحسبان العصبة Q التي تحوي x في $\Theta(G-y)$، لدينا $Q \subseteq N\,[x]$. إذا كان $N\,[y]$ يحوي $N\,[x]$، فإنَّ $Q \cup \{y\}$ عصبة من الحجم $\omega(G)+1$.

الآن، إذا كان G بيان أقواس دائرة قابلاً للتجزئة، فيكفي برهنة أنّ $\mathrm{G} = C_n^{\omega(G)-1}$؛ لأنَّ الـ SPGC تتحقق لقوى الحلقات (النظرية 48.1.8). افترض تمثيل أقواس دائرية تحدّد القوس A_x لـ $x \in V$. بما أنّ $N\,[y]$ لا يمكن أنْ يحوي $N\,[x]$، فإنَّ القوس A_x لا يمكن أنْ يقع ضمن قوس آخر A_y في هذا التمثيل. وإذا لم يوجد أيّ قوس يحوي قوسًا آخر، فإنَّ كلّ قوس يقطع A_x يحوي على الأقل نقطة طرفية واحدة لـ A_x. بما أنّ الرؤوس المرتبطة بالأقواس التي تحوي نقطة واحدة تستحدث عصبة، فيوجد على الأكثر $\omega - 1$ قوسًا آخر تحوي كلّ نقطة طرفية لـ A_x. تتحقق المساواة (ولا يوجد أيّ قوس آخر يحوي طرفي A_x) لأنَّ النظرية 42.1.8 تتطلب أنّ $\delta\ (G) \ge 2\omega - 2$.

بدءًا من نقطة معينة p على الدائرة، اجعل v_i تمثّل الرّأس المتمثّل بالقوس رقم i الذي نصادفه في أثناء حركتنا مع اتجاه عقارب الساعة بدءًا من P. وبما أنّ كلّ قوس يقطع بالضبط $\omega - 1$ قوسًا آخر عند كلّ نقطة طرفية، فإنَّ v_i تجاور $v_{i+1}, \ldots, v_{i+\omega-1}$ (جمع بمقياس n) لكلّ i. لذا فإنَّ $G = C_n^{\omega-1}$. ■

إن الإثبات الأصلي لنظرية الـ SPGC الخاص بالبيانات الخالية من المخالب (Parthasarathy – Ravindra [1976]) كان معقّدًا وصعبًا جدًّا. إن الدراسات للبيانات الحرجة من الدرجة p أسهمت في تقصير هذا الإثبات، إضافة إلى ذلك فقد أسهمت أيضًا في تقصير إثبات النظرية الآتية الذي سنطبّقه.

50.1.8. نظرية : (Giles – Trotter - Tucker [1984]). إذا وُجد للبيان G القابل للتجزئة حلقة مؤلّفة من أضلاع حرجة، فإنَّ البيان الجزئيّ G' الذي نحصل عليه بحذف الأضلاع التي لا تنتمي إلى أيّ عصبة عظمى هو $C_n^{\omega-1}$.

الإثبات: (Hartman [1995]) افترض أنّ G قابل للتجزئة من نوع $a_1\ w$. إنّ حذف الأضلاع لا يدمّر المجموعات المستقرة، بالإضافة إلى أنَّ حذف الأضلاع من أيّ عصبة غير عظمى لا يدمّر أيّ عصبة عظمى. لذا، فإنَّ التّلوين وتغطية العصب لـ $G-x$ يعطينا أنّ $\chi(G'-x) \leq w$ وأنّ $\theta(G'-x) \leq a$ (بصرف النظر عما إذا كانت $(\alpha(G') > \alpha(G)$). ومن النظرية 35.1.8، نجد أنّ G' قابل للتجزئة من نوع $a,\ w$. كذلك فإنَّ أعظمية العصب لـ $G' - x$ لقيم x المختلفة يجبر G' ليكون مترابطًا.

فيما يأتي سنبرهن أنه إذا وُجد لـ G مسارٌ من u إلى v يتألف من k ضلعًا حرجًا، فإنَّ u وv ينتميان إلى $\omega - k$ عصبة عظمى مشتركة على الأقل. نستخدم الاستقراء على k. حيث إنّ النظرية 44.1.8 تعطينا الخطوة الأساس $k = 1$. لـ $k > 1$، إذا كان y الرّأس قبل v على هذا المسار، فإنَّ فرض الاستقراء يضع u و y على $\omega - k + 1$ عصبة عظمى مشتركة. وبما أنّ y ينتمي إلى ω عصبة عظمى بالضبط (باستخدام النظرية 39.1.8)، وأنّ $\omega - 1$ من هذه العصب تحوي v (من النظرية 44.1.8)، فإنَّ واحدة على الأكثر من الـ $\omega - k + 1$ عصبة التي تحوي u و y يمكن ألا تحوي v. افترض أنّ C حلقة أضلاع حرجة في G. إنّ الأضلاع الحرجة تنتمي إلى عصبة عظمى. لذا، فإنَّ C تبقى في G'. كما برهنّا أعلاه أنّ أيّ ω رأسًا تشكّل مسارًا في G' تستحدث عصبة عظمى في G'. إذا كان طول C يزيد على ω، فإنَّ هذا يعطي ω عصبة عظمى متتابعة تحوي رأسًا معينًا x في C. ومن النظرية 39.1.8، فإنَّ هذه هي أضلاع G' جميعها التي تقع على x. إذن، تشكّل C مركبة من مركبات G'، وهذا يعبّر عن G' بـ $C_n^{\omega-1}$.

إذا كان طول C يساوي ω على الأكثر، فإنَّ $V(C)$ نفسها تكون عصبة. وإذا كان $x \in V(C)$، فإنَّ رؤوس $C - x$ تنتمي إلى مجموعات مستقرة مختلفة في التّلوين $X\ (G - x)$ المعرَّف في النظرية 41.1.8. افترض أنّ $x_0, \ldots, x_k$ هو ترتيب لرؤوس C، وافترض أيضًا أنّ $S_1, \ldots, S_k$ هي المجموعات المستقلة في $G - V(C)$ بحيث $Si \cup \{x_i\} \in X\ (G - x_0)$. بما أنّ $x_i\, x_{i+1}$ ضلع حرج، فإنَّ x_i و x_{i+1} ينتميان إلى $\omega - 1$ عصبة عظمى مشتركة (النظرية 44.1.8). لذا، وباستخدام النظرية 41.1.8، فإنَّ التّلوين $X\ (G - x_i)$ والتّلوين $X\ (G - x_{i+1})$ يشتركان في $\omega - 1$ مجموعة مستقرة. إنّ المجموعة المتبقية تختلف فقط من حيث احتواؤها لـ x_i أو x_i+1. لذا، فإنَّ $X\ (G - x_1)$ تحوي $S_i \cup \{x_i\}$ لكلّ $i \geq 2$، وكذلك فهي تحوي $S_1 \cup \{x_0\}$.

وبالاستمرار في هذه التعويضات في أثناء تتبعنا لأضلاع C، نجد أنّ $X\ (G - x_k)$ تحوي $S_i \cup \{x_i\text{-}1\}$ لكلّ $1 \leq i \leq k$. وبأخذ خطوة أخرى للعودة إلى x_0، نجد أنّ $X\ (G - x_0)$ تحوي $S_i \cup \{x_i\text{-}1\}$ لكلّ $2 \leq i \leq k$، وتحوي $S_1 \cup \{x_k\}$، بما أنّ $k \geq 2$ و $\alpha \geq 2$، فإنَّ هذه المجموعات تختلف عن المجموعات التي بدأنا بها في $X\ (G - x_0)$. وبما أنّ التّلوين $X\ (G - x_0)$ وحيد، فنكون قد حصلنا على تناقض. وبذلك، فإنَّ الحالة $n\ (C) \leq \omega$ لا تظهر. ■

51.1.8. نظرية : (Chva'tal [1976]). إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة p، بحيث إنّ البيان الجزئي المولد G' الذي نحصل عليه بحذف أضلاع G التي لا تنتمي إلى أيّ عصبة عظمى هو قوة حلقة C_n^d، فإنَّ G يكون فجوة فردية أو عكس فجوة فردية (ويساوي G').

الإثبات: البيان الحرج من الدرجة p قابل للتجزئة. إنّ المجموعات المستقرة والعصب العظمى في G تكون مجموعات مستقرة وعصبًا في G'، ومن النظرية 35.1.8، نستنتج ثانيةً أنّ G' قابل للتجزئة وفيه $\alpha(G') = \alpha(G) = a$، و $\omega(G') = \omega(G) = w$. لذا، فإنَّ $G' = C^{w-1}_{aw+1}$.

نعيّن أدلّة للرؤوس بحيث تتألف العصب العظمى لـ G' (ولـ G) من w رأسًا متتابعة حلقيًّا، وأنّ المجموعات العظمى المستقرة لها الشّكل $\{v_{i+jw}: 1 \leq j \leq a\}$ (حيث أُخذَت الأدلة بمقياس $aw + 1$). وعلى وجه الخصوص، فإنَّ الرؤوس المفصولة بعضها عن بعض بمضاعفات w علَى الحلقة $v_0 , \ldots , v_{aw}$ تكون غير متجاورة في G' وفي كامل البيان G.

إذا كان $G' = G$، فإنَّ النظرية 48.1.8 تعطينا أنّ G فجوة فردية أو عكس فجوة فردية. وإذا كان $G' \neq G$، فإنَّ $a, w > 2$؛ لأنّه بخلاف ذلك فإنَّ حذف ضلع يزيد عدد المجموعات المستقرة العظمى، أو يقلل عدد العصب العظمى. إذا كان كلٌّ من $a, w \geq 3$، فسنعطي بيانًا جزئيًّا مستحدثًا فعليًّا H من G (إنّ الحلقة الفرديّة المستحدثة في G' التي تمَّ تحصيلها في النظرية 48.1.8 ربما يكون لها وترٌ في G).

افترض أنّ $S = \{v_{aw} , v_1 , v_w , v_{w+2}\} \cup \{v_{iw+1}: 2 \leq i \leq a - 1\}$.

وأنّ $T = \{v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w\} \cup \{v_{w+i}: 2 \leq i \leq w - 1\}$. إنّ حجم S يساوي $a + 2$ وحجم T يساوي $w + 2$. لذا، فإذا كان كلّ من $a, w \geq 3$ فإنّهما يشتركان في خمسة رؤوس هي $\{v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w, v_{w+2}\}$ تمامًا. إضافة إلى أنَّ S تقطع كلّ عصبة عظمى في G' (وكذلك في G)، و T تقطع كلّ مجموعة مستقرة عظمى في G' (وكذلك في G) (التمرين 49). إجعل $H = G - (S \cup T)$، هذا يعطينا أنّ $\alpha(H) = a - 1$، و $\omega(H) = w - 1$

الآن، يتبع النقصان (عدم الكمال) من

$n (H) \geq n (G) - (a + w + 4 - 5) > (a - 1) (w- 1)$. ■

52.1.8. نتيجة: (Giles – Trotter - Tucker [1984]). إذا كان G بيانًا حرجًا من الدرجة p بحيث إنه لكلّ $v \in V(G)$، يوجد للتلوين الأصغر $X (G - v)$ مجموعتان (على الأقل) بحيث تحوي كلّ منهما جارًا لـ v، فإنَّ G يكون فجوة فردية أو عكس فجوة فردية.

الإثبات: عندما توجد مجموعة في $X(G-v)$ تحوي جارًا واحدًا u لـ v بالضبط، فإنَّ الضلع uv يكون حرجًا. لذا، فإنَّ الفرض يضمن أنّ الدرجة الصغرى للبيان الجزئيّ للأضلاع الحرجة تساوي 2 على الأقل. ولذا، فإنَّ هذا البيان يحوي حلقة. من النظرية 50.1.8، نعلم أنّ البيان الجزئيّ G' الذي نحصل عليه بحذف الأضلاع التي لا تنتمي إلى أيّ عصبة عظمى هو $C_n^{\omega-1}$. ومن النظرية 51.1.8، نجد أنّ G فجوةٌ فردية أو عكس فجوة فردية. ■

53.1.8. نتيجة: (Parthasarathy - Tavindra [1976]). تتحقّق الـ SPGC للبيانات التي تخلو من $K_{1,3}$.

الإثبات: (Giles – Trotter – Tucker [1984]) افترض أنّ G بيان حرج من الدرجة p خالٍ من $K_{1,3}$. لكلّ $\omega \in V(G)$ لاحظ أنّ $N(v)$ يستحدث بيانًا جزئيًّا كاملاً ليس له مجموعة مستقرة من الحجمَ 3، وهذا يعني أنّه يمكن تغطية $N (v)$ بعصبتين، ويعطينا أنّ $d(v) \leq 2\ \omega(G) - 2$. كلّ واحدة من المجموعات المستقرة التي عددها $\omega\ (G)$ والموجودة في $X\ (G - v)$ تحوي جارًا لـ v. وبغير ذلك، فإنَّ إضافة v تحدث مجموعة مستقرة أكبر. وبما أنّ $d\ (v) \leq 2\ \omega\ (G) - 2$، فعلى الأقل هناك مجموعتان من هذه المجموعات تحويان جارًا لـ v. لذا، فإنَّ G يحقق فرضيات النتيجة 52.1.8، وبذلك، فإنَّ G فجوة فردية أو عكس فجوة فردية. ■

لاحظ أنّ النتيجة 53.1.8 أيضًا تعطينا الـ SPGC لبيانات الدائرة (التمرين 50). إنّ الـ SPGC العامة تبقى مسألة دون حلّ، ولكن النتيجة المتوسطة بين الـ SPGC والـ PGT نتيجةٌ معروفة (حيث نحصل عليها مباشرة من الـ $SPGC$ وتعطينا الـ PGT مباشرةً أيضًا). لقد خَمَّنَ كفتال (Chva'tal) المُخَمَّنَة الآتية: إذا كان لـ G و H مجموعة الرؤوس نفسها، وكان لهما الرّباعيات المرتبة من الرّؤوس التي تستحدث P_4 نفسها أيضًا، فإنَّ G يكون

كاملاً إذا وفقط إذا كان H كاملاً. لقد أثبت ريد (Reed) هذه المُخَمَّنَة "نظرية البيانات الكاملة شبه القوية".

تمارين (Exercises)

8.1.1. (-) احسب $\chi(G)$ و $\omega(G)$ لمتمّمة الحلقة الفرديّة C_{2k+1}.

8.1.2. (-) جد أصغر بيان ناقص، G بحيث إنّ $\chi(G) = \omega(G)$.

8.1.3. (!) تُسمَّى البيانات التي تخلو من P_4 مرافقات البيانات (**Cographs**) والتي ترمز إلى "تصغير المتمّمة" نقول: إنّ البيان هو تصغير متمّمة إذا أمكن تصغير هذا البيان إلى البيان الخالي عن طريق أخذ متمّمات المركبات (مركبات البيان) بالتتابع:

a) أثبت أنّ البيان G يخلو من P_4 إذا وفقط إذا كان تصغير متمّمة.

b) استخدم الفرع (a) ونظرية البيان الكامل لتبرهن أنّ كلّ بيان خالٍ من P_4 يكون كاملاً. (Seinsche [1974])

8.1.4. تحديد العصب. افترض أنّ $G = G_1 \cup G_2$، وأنّ $G_1 \cap G_2$ عصبة، وأنّ G_1 و G_2 بيانات كاملة. أثبت أنّ G يكون بيانًا كاملاً دون استخدام تمهيديّة مجموعة قطع النجمة.

8.1.5. جد بيانًا ناقصًا G له مجموعة قطع النجمة C بحيث إنّ الفلق $-C$ للبيان G هو بيانات كاملة (تعليق: التحديد عند مجموعات قطع النجمة لا يحافظ على الكمال، على الرّغم من عدم وجود مجموعة قطع النجمة للبيانات الحرجة من الدرجة p).

8.1.6. افترض أنّ G حاصل الضرب الكارتيزي لبيانات تامّة. أثبت أنّ $\alpha(G) = \theta(G)$، وبرهن كذلك أن $k_2 \square k_2 \square k_3$ غير كامل.

8.1.7. أثبت أنّ $C_5 \vee k_1$ هو البيان الوحيد الحرج لونيًّا الذي درجته اللونية تساوي 4، وله ستة رؤوس.

8.1.8. (+) أثبت أنّ G حلقة فرديّة إذا وفقط إذا كان $\alpha(G) = (n(G)-1)/2$ و $\alpha(G-u-v) = \alpha(G)$ لكلّ $u, v \in V(G)$ (Melnikov – vizing [1971], Greenwell [1978]).

8.1.9. افترض أنّ $v_1, \ldots, v_n$ ترتيب حذف مبسطيّ للبيان G، وافترض أيضًا أنّ $Q(v_i) = \{v_j \in N(v_i) : j > i\}$. لاحظ أنّ $Q(v_i)$ عصبة جيران v_i عندما يتمّ حذف v_i خلال ترتيب الحذف. افترض أنّ $S = \{y_1, \ldots, y_k\}$ هي المجموعة المستقرة التي نحصل عليها " بجشع " من الترتيب $v_1, \ldots, v_n$، أيّ؛ ضع $y_1 = v_1$، أهمل $N(y_1)$ من بقية الترتيب، ثمّ واصل العمل بخطوات مكرّرة. وفي كلّ خطوة، أضف العنصر x الذي ترتيب دليله أقلّ ما يمكن من بين العناصر المتبقية للمجموعة المستقرة، وأهمل ما تبقى من $Q(x)$:

a) أثبت أنّ تطبيق خوارزمية التّلوين الجشع على بناء الترتيب $v_1, \ldots, v_n$ يقود إلى الحصول على تلوين أمثل، وأنّ $\omega(G) = 1 + \max \sum_{x \in V(G)} |Q(x)|$ .Fulkerson – Gross [1965]

b) أثبت أنّ S مجموعةٌ مستقرة عظمى، وأنّ المجموعات $\{y_i\} \cup Q\{y_i\}$ تشكّل غطاء عصب أصغر. (Gavril [1972]).

8.1.10. أضف اختبارًا لخوارزمية الـ MCS؛ لتختبر ما إذا كان الترتيبُ الناتج ترتيبَ حذف مبسطيّ (Tarjan – Yannakakis [1984]).

8.1.11. أثبت مباشرة (دون استخدام ترتيب الحذف المبسطيّ) أنّ بيان التقاطع لعائلة أشجار جزئيّة من شجرة معينة لا يحوي حلقة غير وتريّة.

8.1.12. (-) أثبت أنّ كلّ بيان هو بيان التقاطع لعائلة من الأشجار الجزئيّة لبيان معيّن.

8.1.13. أثبت أنه يوجد لكلّ بيان وتريّ تمثّيلُ تقاطع بأشجار جزئية لشجرة مُضيفة درجتها الكبرى تساوي 3.

8.1.14. افترض أنّ Q عصبة عظمى في بيان وتريّ G، لكلّ $x \in V(G)$، أثبت أنه يوجد لـ Q رأسان، بحيث إنّ بُعدَ كلّ منهما عن x يكون مختلفًا عن بُعدِ الآخر، (Voloshin [1982]).

15.1.8. بيانات تقاطع الأشجار الجزئية لبيان. يعرَّف التوجيه الأخوي (الودي) لبيان على أنه توجيه للبيان، بحيث يكون كلّ زوج من الرؤوس التي لها تابع (خلف) مشترك متجاورًا:

a) (−) أثبت أنّ البيان يكون بيانًا وتريًّا إذا وفقط إذا وُجِدَ له توجيه أخوي غير حلقي.

b) (−) احصل على بيان ليس له توجيه أخوي.

c) تُعَدُّ عائلةٌ من الأشجار في بيان معين قابلةً للتجذير إذا أمكن تعيين جذور لهذه الأشجار بحيث يتقاطع زوج منها إذا وفقط إذا انتمى أحد الجذرين على الأقل إلى كلتا الشجرتين الجزئيّتين. أثبت أنّ للبيان G توجيهًا أخويًّا إذا وفقط إذا كان G بيان تقاطع لعائلة أشجار جزئية لبيان معين، وبحيث تكون هذه العائلة قابلة للتجذير.

16.1.8. (!) أثبت أنّ البيان البسيط G يكون غابة إذا وفقط إذا وجد رأس مشترك لكلّ عائلة مسارات متقاطعة زوجًا زوجًا في G. (مساعدة: لإثبات الكفاية؛ استخدم الاستقراء على عدد المسارات في العائلة).

17.1.8. (!) توصيف بيانات الانشقاق بمنع بعض البيانات الجزئية. نقول: إنّ البيان بيان انشقاق إذا أمكن تجزئة رؤوسه إلى عصبة ومجموعة مستقرة:

a) أثبت أنه إذا كان G بيان انشقاق فإنَّ G و $\overline{G}$ يكونان بيانين وتريّين. لاحظ أنه إذا كان كلّ من G و $\overline{G}$ بيانًا وتريًّا، فلا يوجد للبيان G بيانات جزئية مستحدثة ضمن المجموعة $\{C_4\ ,\ 2\ K_2\ ,\ C_5\}$.

b) أثبت أنه إذا كان G بيانًا بسيطًا بحيث لا يوجد له بيان جزئيّ مستحدث ضمن المجموعة $\{C_4\ ,\ 2\ K_2\ ,\ C_5\}$، فإنَّه يكون بيان انشقاق. (مساعدة: من بين العصب ذات الحجم الأكبر، افترض أنّ Q أحدُ هذه العصب بحيث يكون عدد أضلاع $G - Q$ أقل ما يمكن. أثبت أنّ $G - Q$ تكون مجموعة مستقرة من خلال استخدام خيار Q، وشروط البيانات الجزئية الممنوعة)، ([Hammer – Simeone [1981]).

18.1.8. افترض أنّ $d_1 \geq ... \geq d_n$ متتالية الدرجات لبيان بسيط G، وافترض أيضًا أنّ m أكبرُ قيمة لـ k بحيث إنّ $d_k \geq k - 1$. أثبت أنّ G يكون بيان انشقاق إذا وفقط إذا كان $\sum_{i=1}^{m} di = m(m-1) + \sum_{i=m+1}^{n} di$.

(تعليق: قارن بتمرين [Hammer – Simeone [1981])، (28.3.3).

19.1.8. (−) حدّد الأشجار التي تكون بيانات انشقاق، وابنِ زوجًا من بيانات الانشقاق غير المتشاكلة التي لها متتالية الدرجات نفسها.

20.1.8. تعرّف الأشجار من نوع k على أنّها البيانات التي تظهر من عصبة من الدرجة K بتكرار إضافة 0 أو أكثر من الرّؤوس الجديدة التي تربط بالعصبة في البيان القديم. أثبت أنّ G يكون شجرة من نوع K إذا وفقط إذا حقق الخواص الثلاث الآتية:

a) إذا كان مترابطًا.

b) إذا كانت له عصبة من الدرجة k، ولكن لا توجد له عصبة من الدرجة $k + 2$.

c) إذا كان كلُّ فاصل رؤوس أصغريّ له عصبةً من الدرجة k.

21.1.8. افترض أنّ G بيان وتريّ على n من الرؤوس ليس له عصبة من الدرجة $k + 2$. أثبت أنّ $e\ (G) \leq kn - \binom{k+1}{2}$ حيث تتحقق المساواة إذا وفقط إذا كان G شجرةً من نوع k.

22.1.8. (+) عمّم النظرية 3.2.2 (صيغة كيلي) من خلال إثبات أنّ عدد الأشجار من نوع k التي رؤوسها المجموعة $[n]$ يساوي $\binom{n}{k}[k\ (n-k) + 1]^{n-k-2}$. (مساعدة: عمّم شفرة برفر الخاصة بالأشجار المجذّرة التي تولّد قائمة تحوي $n - 1$ مدخلة ولا تحذف الجذر مطلقًا. في الشجرة من نوع k، الرّؤوس التي تنتمي بالضبط إلى عصبة واحدة من الدرجة $k + 1$ هي الأوراق. يمكن إنبات شجرة من نوع k باستخدام أيّ عصبة من الدرجة k التي تمّ تثبيت جذرها بحيث تمتلك 0 بوصفها رمزًا، ولها أزواج ij، حيث i تأتي من مجموعة عدد عناصرها k، أمّا j فتأتي من مجموعة عدد عناصرها $n - k$)، (Greene – Iba [1975]، ويوجد براهين أخرى في Bieneke – Pippent [1969] و [Moon [1969]).

23.1.8. افترض أنّ G بيان وتريّ حيث $\omega\ (G)=r$. أثبت أنه توجد للبيان $\binom{r}{j}+\binom{r-1}{j-1}(n-r)$ عصبة من الحجم j، حيث تتحقق المساواة (لـ j كلّها في الوقت نفسه) إذا وفقط إذا كان G شجرة من نوع $r-1$.

24.1.8. خاصية هيلي لخطّ الأعداد الحقيقية. افترض أنّ $I_1\ ,\ \dots\ ,\ I_k$ فتراتٌ حقيقية متقاطعة زوجًا زوجًا. أثبت أنه توجد نقطة مشتركة بين $I_1\ ,\ \dots\ ,\ I_k$.

25.1.8. أثبت مباشرة أنّ الشجرة تكون بيان فترة إذا وفقط إذا كانت جرارة (شجرة تحوي مسارًا يحوي الأقل رأسًا لكلّ ضلع).

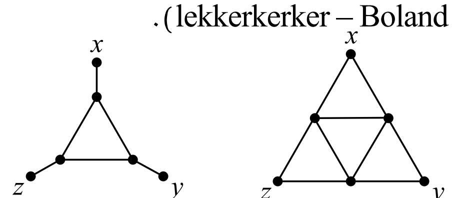
26.1.8. (!) افترض أنّ G بيان فترة. أثبت أنّ $\overline{G}$ بيان مقارنة، وأنّ G بيان وتريّ. (مساعدة: جدْ ترتيب حذف مبسطيّ).

27.1.8. أثبت أنّه يوجد للبيان G تمثيلٌ بفترات إذا وفقط إذا كان لمصفوفة وقوع العصبة والرؤوس لـ G خاصية الواحدات المتتابعة.

28.1.8. أثبت أنّ البيان G بيان فترة إذا وفقط إذا أمكن ترتيب رؤوسه على الشّكل $v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_n$، حيث إنّ $v_i \leftrightarrow v_k$ تعطي $v_j \leftrightarrow v_k$ عندما $i<j<k$.
انظر (Jacobson – McMorris – Mulder [1991]) على سبيل المثال.

29.1.8. يُعرّف الثلاثيّ النجميّ في البيان على أنّه ثلاثة رؤوس هي: x، وy، وz، حيث يوجد مسار بين أي رأسين منها يتفادى جوار الثالث.

أثبت أنّه لا يوجد ثلاثيّ نجميّ في بيان الفترة. (تعليق: إنّ بيانات الفترة هي البيانات الوتريّة التي تخلو من ثلاثيّ نجميّ تمامًا)، (lekkerkerker – Boland [1962]).



30.1.8. دخل ستة أساتذة إلى مكتبة في يوم سُرِقَ فيه كتاب نادر، حيث دخل كلّ منهم مرة واحدة، فجلس في المكتبة بعضًا من الوقت ثمّ غادر. لأيّ اثنين كانا موجودين في الوقت نفسه، افترض أنّ أحدهما على الأقل قد رأى الآخر. قام التّحرّي باستجواب الأساتذة، وحصل منهم على الشهادات الآتية:

الأستاذ		ما أدعى رؤيته	
Abe	آب	Burt, Eddie	بيرت وإيدي
Burt	بيرت	Abe, Ida	اب وإيدا
Charlotte	شارلوت	Desmond, Ida	ديزموند وإيدا
Desmond	ديزموند	Abe, Ida	آب وإيدا
Eddie	إيدي	Burt, Charlotte	بيرت وشارلوت
Ida	إيدا	Charlotte, Eddie	شارلوت وإيدي

في هذه الحالة، فإنّ "يكذب" تعني إعطاء معلومات غير صحيحة، ولكن دون حذف معلومات. افترض أنّ المجرم حاول إلصاق التهمة بمشتبه آخر، فإذا علمت أنّ أحد الأساتذة كان كاذبًا، فمنْ هو؟ (Golumbic [1980, p 20]).

31.1.8. (+) أثبت أنّ G بيانَ فترة وحدة (يمكن تمثيله بفترات لها الطول نفسه) إذا وفقط إذا امتلك $A\ (G)+I$ خاصية الواحدات المتتابعة (Roberts [1968]).

32.1.8. (+) أثبت أنّ G يكون بيان فترات فعليّ (قابل للتمثيل بفترات بحيث لا توجد أي فترة تحوي فعليًّا فترة أخرى) إذا وفقط إذا كان لمصفوفة الوقوع للعصب والرؤوس له خاصية الواحدات المتتابعة لكلّ من الصّفّوف والأعمدة، (Fishburn [1985]).

33.1.8. (-) أثبت أنّ كلّ بيان خالٍ من P_4 يكون بيان مينيل.

34.1.8. أثبت أنّ كلّ بيان وتريّ يكون تثليثًا $- o$.

35.1.8. افترض أنّ C حلقة في بيان ليس له حلقة فردية مستحدثة. أثبت أنّ لـ $V(C)$ ثلاثة رؤوس متجاورة زوجًا زوجًا بحيث إنّ المسارات جميعها التي تربط بين هذه الرؤوس في C لها طول فردي.

36.1.8. (+) أثبت أنّ الشروط الآتية متكافئة:

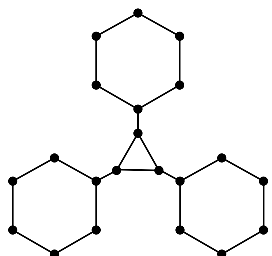
a) يوجد لكلّ حلقة فرديّة طولها 5 على الأقل زوج من الأوتار المتقاطعة.

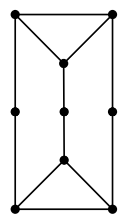
b) لكلّ زوج $x, y \in V(G)$ ، تكون المسارات اللاوتريّة من x إلى y إما زوجية كلّها أو فردية كلّها.

(مساعدة: لـ $A \Leftarrow B$ ، خذ في الحسبان زوجًا P_1 و P_2 من المسارات من x إلى y لها نوعيات متضادة، بحيث يكون مجموع أطوالها أصغريّ)، ([Burlet – Uhry [1984]).

37.1.8. أثبت أنّ كلّ بيان قابل للترتيب ترتيبًا كاملاً يكون كاملاً بقوة (مساعدة: استخدم التمهيديّة **25.1.8**)، .(Chva'tal [1984])

38.1.8. (!) أثبت أنّ البيانات أدناه كاملة بقوة، إلا أنها غير قابلة للترتيب ترتيبًا كاملاً.



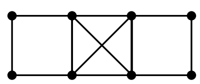


39.1.8. (-) أثبت أنّ البيان الموجود أعلاه عن اليسار هو بيان مينيل، إلا أنّه غير قابل للترتيب ترتيبًا كاملاً. أثبت أنّ $\overline{P_5}$ عن بيان قابل للترتيب ترتيبًا كاملًا إلا أنّه ليس بيان مينيل.

40.1.8. (!) البيانات الوتريّة الضعيفة. أثبت أنّ:

a) كلّ بيان وتريّ يكون وتريًّا ضعيفًا.

b) البيان أدناه وتريّ ضعيف، إلا أنه ليس كاملاً بقوة.



41.1.8. (-) نعرِّف التجزئة التخالفية (المتخالفة) للبيان G على أنها تجزئة لـ $V(G)$ إلى مجموعتين غير خاليتين X و Y. بحيث إنّ كلًّا من $G[X]$، و $\overline{G}[Y]$ غير مترابط. لقد خَمَّنَ كفتال ([Chva'tal [1985 *b*]) أنه لا توجد تجزئة تخالفية لأيّ بيان ناقص أصغريّ. أثبت أنّ هذا يعطي تمهيديّة مجموعة قطع النجمة وأنّ الـ SPGC تعطي هذه المُخَمَّنَة.

42.1.8. أثبت أنّ البيانَ ذا الرّؤوس العشرة الموجود في المثال 37.1.8 قابلٌ للتجزئة من النوع 3,3، .(Chva'tal – Graham – Perlod - Whitesides [1979])

43.1.8. (-) افترض أنّ x و v رأسان لبيان قابل للتجزئة G، أثبت أنه إذا كانت $x \nleftrightarrow v$، فإنَّ كلّ عصبة عظمى تحوي x تتكون من رأس واحد من كلّ مجموعة مستقرة، بحيث تكون هذه المجموعة رفيقًا لعصبة تحوي v. أعطِ النصّ المتمّم عندما $x \leftrightarrow v$. .(Buckingham – Golumbic [1983])

44.1.8. (+) أثبت أنّه لا يوجد لأيّ بيان حرج من الدرجة p مضاد توائم؛ أيّ زوج من الرؤوس، بحيث يجاور أيُّ رأس آخر أحدَهما. (مساعدة: إذا أعطيت بيانًا حرجًا من الدرجة p، وكان الزوج $\{x , y\}$ مضاد توائم،

فاجعل S تمثل المجموعة المستقرة التي تحوي y في التّلوين الأمثل الوحيد لـ $G-x$. ثم جدْ من بين رؤوس البيان الجزئي $G-x-S$ القابل للتلوين بـ $\omega-1$ لونًا عصبةً حجمها $\omega-1$ في $N(x)$، بحيث لا تمتدّ (لا يمكن توسيعها) إلى $N(y)$. وبالمثل، جدْ مجموعة مستقرة في $N(y)$ لا تمتدّ إلى $N(x)$. الآن، ابنِ حلقة خماسيّة مستحدثة) (لاحظ: يوجد مضاد توائم للبيان القابل للتجزئة في المثال Olariu [1988]). (37.1.8).

45.1.8 نقول: يشكّل الرّأسان x و y زوجًا زوجيًّا إذا كان لكلّ مسارٍ لا وتريّ من x إلى y طول زوجي (بمعنى أنّ عددَ أضلاع هذا المسار زوجيٌّ). تعدّ التوائم (الرّؤوس غير المتجاورة التي لها الجوار نفسه) حالة خاصة:

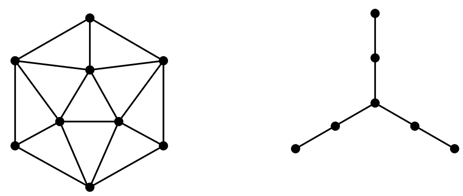
a) افترض أنّ S_1 و S_2 مجموعتان مستقرّتان كبريان في بيان قابل للتجزئة G. أثبت أنّ البيان الجزئيّ المولد من الفرق التماثلي لـ $S1$ و S_2 يكون مترابطًا. (Bland – Huang – Trotter [1979]).

b) استخدم فرع (a) لتبرهن أنّه لا يوجد زوج زوجيّ لأيّ بيان حرج من الدرجة p.

(تعليق: إذن، لا يوجد توائم لأيّ بيان حرج من الدرجة p، وهذا يبرهن ثانية أنّ مضاعفة الرّؤوس يحافظ على الكمال)، (Meyniel [1987], Bertschi – Reed [1988]).

46.1.8 افترض أنّ G بيان قابل للتجزئة، وأنّ S_1 و S_2 مجموعتان مستقرّتان في التّلوين الأمثل لـ $G-x$. استخدم فرع (a) من المسألة السابقة لتبرهن أنّ البيان الجزئيّ الذي تولّده $S_1 \cup S_2 \cup \{x\}$ يكون ثنائيّ التّرابط (مترابط من الدرجة 2). (Buckingham – Golumbic [1983]).

47.1.8 أثبت أنّ أحدَ البيانين أدناه بيانُ دائرة، وليس بيانَ أقواس دائريّ، وأنّ الآخر بيان أقواس دائري، وليس بيان دائرة.



48.1.8 (١) إنّ البيان $K_{1,3}+e$ هو البيان الذي له أربعة رؤوس، ونحصل عليه بإضافة ضلع e إلى البيان $K_{1,3}$. باستخدام خاصية الكمال لبيانات مينيل، أثبت أنّ البيانات الخالية من $K_{1,3}+e$ تحقق الـ SPGC (Meyniel [1976]).

49.1.8 افترض أنّ $G=C_{aw+1}^{w-1}$. وافترض كذلك أنّ:

$S=\{v_{aw}, v_1, v_w, v_{w+2}\} \cup \{v_{iw+1}: 2 \le i \le a-1\}$، وأنّ:

$T=\{v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w\} \cup \{v_{w+i}: 2 \le i \le w-1\}$. أثبت أنّ S يتقاطع مع كلّ عصبة كبرى في G، وأنّ T تتقاطع مع كلّ مجموعة مستقرة كبرى في G،

(Chva'tal [1976]).

50.1.8 (١) SPGC لبيان الدائرة. (Buckingham – Golumbic [1983]):

a) استخدم التمهيديّة 28.1.8 لتبرهن أنّه إذا كان x رأسًا في بيان قابل للتجزئة G، فإنَّ $G-N[x]$ يكون مترابطًا حيث $N(x)=N[x] \cup \{x\}$:

b) استخدم فرع a لتبرهن أنّ بيانات الدائرة القابلة للتجزئة تكون خالية من $k_{1,3}$.

c) استنتج من فرع (b) والنتيجة 53.1.8 أنّ الـ SPGC تتحقق لبيانات الدائرة.

2.8 الماترويدات (Matroids)

العديد من نتائج نظرية البيان يُعَمَّمُ أو يُبَسَّطُ في نظرية الماترويدات. ويشمل هذا كلًّا من: الخوارزمية

الجشعة للأشجار المولدة الصغرى، والثنوية بين المواءمة الكبرى وغطاء الرؤوس الأصغر في البيانات الثنائية الفرع، وكذلك الثنوية الهندسية التي تربط بين البيان وبيانه الثنوي.

تظهر الماترويدات في العديد من السياقات، إلا أنها خاصة؛ لأنها غنية جدًّا بخواص بنائية تركيبية (توافقية). عندما تُعمم نتيجة في نظرية البيانات إلى الماترويدات، يمكن تفسيرها والاستفادة منها في بعض الحالات الخاصة الأخرى. لقد وجدت براهين بسيطة للعديد من المبرهنات الصعبة في نظرية البيانات باستخدام الماترويدات.

عرّف ويتني ([1935] Whitney) الماترويدات وعرضها من أجل دراسة السّويّة والجوانب الجبرية للبيانات، وعرّفها ماكلين ([1936] Maclane) أيضًا لدراسة الشبكيات الهندسية، وكذلك فان ديرويردن ([1937] Van der waerden) لدراسة الاستقلال في فضاءات المتجهات. إن معظم اللغة المستخدمة تأتي من هذه السياقات. وسنركز هنا على تطبيقات الماترويدات على البيانات.

الأنظمة الوراثية، وأمثلة (Hereditary Systems and Examples)

نستخدم المجموعات في العديد من سياقات الرياضيات لتجنب أي تعارض؛ وغالبًا ما يُسَمَّى هذا استقلالًا. إنَّ الشيء المتأصل في هذا المفهوم هو أنَّ المجموعة الجزئية لمجموعة مستقلة تكون مستقلة، فضلًا عن أن المجموعة الخالية تكون مستقله أيضًا.

1.2.8. مثال: مجموعات الأضلاع اللاحلقية. افترض أن E مجموعة أضلاع في بيان G وافترض كذلك أن $X \subseteq E$ تكون مجموعة "مستقلة" إذا خلت من أي حلقة. لاحظ أن أي مجموعة جزئية من مجموعة مستقلة تكون مستقلة، بالإضافة إلى أن المجموعة الخالية أيضًا مستقلة. وأنّ الحلقات هي المجموعات المستقلة الصغرى.

خذ في الحسبان الطائرة الورقية $K_4 - e$ التي لها خمسة أضلاع. بما أن للأشجار المولدة لهذا البيان ثلاثة أضلاع، فإن كل مجموعة لها أكثر من ثلاثة أضلاع تكون مجموعة غير مستقلة. وكذلك فإن المثلثين غير مستقلين، وهذا يعطينا ثماني مجموعات غير مستقلة، و 24 مجموعة مستقلة من بين المجموعات الجزئية لـ E. وهناك ثلاث مجموعات غير مستقلة أصغرية (الحلقات) وثماني مجموعات مستقلة أعظمية (الأشجار المولدة). ■

2.2.8. تعريف: نعرف العائلة الوراثية أو المثالية على أنها جمع من المجموعات $\mathbf{F}$، بحيث إن كل مجموعة جزئية من $\mathbf{F}$ تكون أيضًا موجودة في $\mathbf{F}$. أما في النظام الوراثي M على E، فإنه يتألف من مثالية غير خالية $\mathbf{I}_M$ لمجموعات جزئية من E والطرق المختلفة لتحديد هذه المثالية وتعيينها، والتي تُسمى أوجه M.

إن عناصر $\mathbf{I}_M$ هي مجموعات M المستقلة. أما المجموعات الجزئية الأخرى لـ E (التي تشكل العائلة $\mathbf{D}_M$) فإنها غير مستقلة. إن الأساسات هي المجموعات المستقلة الأعظمية، أما الحلقات فهي المجموعات المستقلة الأصغرية. ونرمز إلى هذه العائلات بالرمزين $\mathbf{B}_M$ و $\mathbf{C}_M$ على الترتيب.

نعرِّف رتبة المجموعة E على أنها حجم أكبر مجموعة مستقلة فيها. ونعرِّف دالة الرتبة r_M على الشكل $r(x)=\max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \boldsymbol{I}\}$.

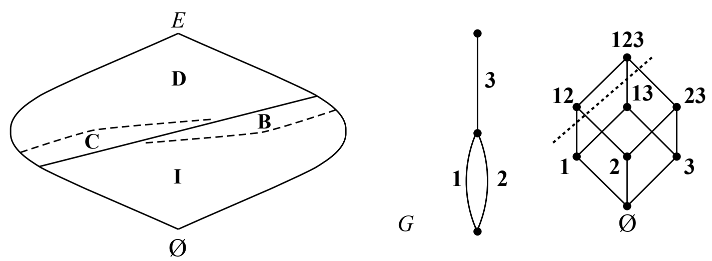
3.2.8. مثال: الأنظمة الوراثية.

ضع علامة دالة على كل رأس $a=(a_1,\ldots,a_n)$ من رؤوس المكعب الزائدي Q_n باستخدام المجموعة

المرتبطة $X_a = \{i : a_i = 1\}$. ارسم Q_n في المستوى، بحيث تكون الإحداثيات العمودية للرؤوس مرتبة بحسب حجم المجموعات المستخدمة لوضع العلامات الدالة على هذه الرؤوس.

يوضح الشكل أدناه العلاقات بين المجموعات المستقلة، والأساسات، والحلقات والمجموعات غير المستقلة لنظام وراثي. إن الأساسات هي المجموعات الأعظمية للعائلة **I**، أما الحلقات فهي المجموعات الأصغرية غير الموجودة في **I**. في كل نظام وراثي، تنتمي Ø إلى **I**. وإذا كانت كل مجموعة مستقلة، فهذا يعني عدم وجود حلقات، ولكن هناك أساسًا واحدًا على الأقل موجود دائمًا.

في المثال الذي عن اليمين، تجد أن المجموعات المستقلة هي مجموعات الأضلاع اللاحلقية في البيان الذي له ثلاثة أضلاع، وأن المجموعتين غير المستقلتين هما: $\{1, 2\}$ و $\{1, 2, 3\}$ فقط. وأن الحلقة الوحيدة هي: $\{1, 2\}$، أما الأساسات فهما: $\{1, 2\}$ و $\{2, 3\}$. إن رتبة المجموعة المستقلة هي حجمها. وللمجموعات غير المستقلة، نجد أن $r(\{1, 3\}) = 1$، و $r(\{1, 2, 3\}) = 2$. ■



4.2.8. ملاحظة. أوجه النظام الوراثي. يُحدّدُ النظام الوراثي M بأي من: $\mathbf{I}_M$، و $\mathbf{B}_M$، و $\mathbf{C}_M$، و r_M .... إلخ؛ وذلك لأن كل سمة من هذه السمات تُحدد السمات الأخرى. لقد عبّرنا عن $\mathbf{B}_M$، و $\mathbf{C}_M$ و r_M بدلالة $\mathbf{I}_M$. وبالعكس، إذا عرفنا $\mathbf{C}_M$، فإن $\mathbf{I}_M$ تتألف من المجموعات التي لا تحوي عضوًا من $\mathbf{C}_M$. وإذا علمنا r_M، فإن $\mathbf{I}_M = \{X \subseteq E : r_M(X) = |X|\}$. ■

الأنظمة الوراثية عامة جدًّا. لذا، لا نتوقع منها سلوكًا جميلاً، إلا أننا نركز اهتمامنا على الأنظمة الوراثية التي لها خاصية إضافية أخرى، وهذا ما نطلق عليه اسم الماترويدات. يمكننا أن نترجم أي حصر على $\mathbf{I}_M$ إلى حصر مناظر على وجه من أوجه النظام الوراثي. يوجد لدينا العديد من التعريفات المتكافئة للماترويدات؛ لأنه يمكن تحديد الأنظمة الوراثية من خلال عدة طرق. وباستخدامنا للعديد من الأمثلة المحفزة، سنعطي نصوصًا للعديد من الخواص المميزة للماترويدات. وبعد ذلك، سنبرهن تكافؤ هذه النصوص. وسنبدأ بإعطاء مثال أساسي من البيانات.

5.2.8. تعريف: نعرِّف ماترويد الحلقة $M(G)$ للبيان G على أنه النظام الوراثي على $E(G)$، حيث إن حلقاته هي حلقات G. وأن النظام الوراثي الذي هو $M(G)$ لبيان G يسمى ماترويد بيانيًّا.

6.2.8. مثال: الأساسات في ماترويدات الحلقات. إن الأساسات لماترويد الحلقة $M(G)$ هي مجموعات أضلاع الغابات الأعظمية في G. وكل غابة منها تحوي شجرة مولدة من كل مركبة. لذا، يكون لكل منها الحجم نفسه. خذ في الحسبان $\mathbf{B} \in B_1, B_2$ حيث $e \in B_1 - B_2$ إن حذف e من B_1 يجعل أحد مركبات B_1 غير مترابطة،

وبما أن B_2 يحوي شجرة مولدة لهذه المركبة لـ G ، فإن ضلعًا f في B_2 - B_1 يمكن أن يُضاف إلى B_1 - e لإعادة ترابطها.

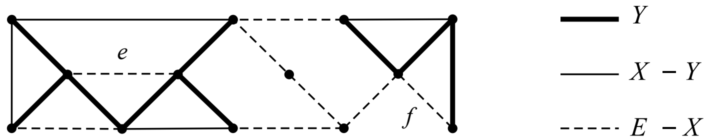
لنظام وراثي M، نعرف خاصية تبديل الأساس على الصورة الآتية: إذا كان $B_1, B_2 \in \mathbf{B}_M$، فإن لكل $e \in B_1\text{-}B_2$ ضلعًا f في $B_2\text{-}e$، بحيث $B_1-e+f \in \boldsymbol{B}_M$. الماترويدات أنظمة وراثية تحقق خاصية تبديل الأساس. ■

7.2.8. ملاحظة. في هذا الموضوع، غالبًا ما نناقش إضافة عناصر منفردة من بعض المجموعات أو حذفها، وللتماثل والسهولة؛ فإننا نستخدم الرمزين + و − بدلاً من ∪ و -، وكذلك نُسقط الأقواس على المجموعات التي تحوي عنصرًا واحدًا فقط. ■

8.2.8. مثال: دالة الرتبة في ماترويدات الحلقات. افترض أن G بيان له n من الرؤوس. لـ $X \subseteq E(G)$، افترض أن G_X ترمز إلى البيان الجزئي المولد للبيان G الذي أضلاعه هي المجموعة X. في $M(G)$، المجموعة الجزئية المستقلة من X مجموعات أضلاع غابة في G_X وعندما يكون لـ G_X مركبة، فإن أكبر حجم لمثل هذه الغابة هو $n\text{-}k$. لذا، فإن $r(X)=n-k$. في الشكل أدناه تظهر الغابة y (اللون الغامق) داخل X (اللون الغامق المتصل)

إذا كانت $r(X+e)=r(X)$ لبعض $e \in E-X$، فإن أطراف e تقع في مركبة واحدة فقط من مركبات G_X. وأن إضافة e لا تربط بين المركبات. وإذا أضفنا ضلعين من هذه الأضلاع، فإننا لا نربط بين المركبات أيضًا. لذا، فإن $r(X)=r(X+e)=r(X+f)$ وهذا يعطينا أن $r(X)=r(X+e+f)$.

لنظام وراثي M على E، نعرف خاصية الامتصاص (الضعيفة) على الصورة الآتية: إذا كانت $X \subseteq E$، وكان $e,f \in E$، فإن $r(X)=r(X+e)=r(X+f)$ يضمن أن $r(X+e+f)=r(X)$. وتعرف الماترويدات على أنها أنظمة وراثية لها خاصية الامتصاص (اقتُرح الاسم من قبل كزدي (A.kézdy). ■



نعلم أن البيانات يمكن أن تحوي عُرى أو أضلاعًا مكررة. وفي ماترويدات الحلقات، نجد أن هذا يقود إلى حلقات من الحجمين 1 و 2. ونستخدم هذه المصطلحات للأنظمة الوراثية عمومًا.

9.2.8. تعريف: في النظام الوراثي، نعرِّف العروة على أنها عنصر يشكل حلقة حجمها يساوي 1. وتعرف العناصر المتوازية على أنها عناصر مختلفة وليست عُرى، وتشكل حلقة حجمها 2. ويعدّ النظام الوراثي بسيطًا إذا خلا من العرى والعناصر المتوازية.

10.2.8. تعريف: نعرِّف الماترويد المتجه على مجموعة E من المتجهات في فضاء متجه على أنه نظام وراثي؛ لأن مجموعاته المستقلة هي مجموعات جزئية من متجهات في E، بحيث تكون هذه المجموعات مستقلة خطيًّا. إن الماترويد الذي نعبر عنه بهذه الطريقة يسمى ماترويد خطيًّا (أو ماترويد قابلًا للتمثيل)، وماترويد الأعمدة $M(A)$ للمصفوفة A هو الماترويد المتجه المعرّف على أعمدة هذه المصفوفة.

11.2.8. مثال: الحلقات في الماترويدات المتجهة. لاحظ أن المجموعة E ربما تحوي متجهات مكررة، وأن هذه المتجهات تشكل العناصر المتوازية، والحلقات هي مجموعات أصغرية $\{x_1,\dots x_k\} \subseteq E$ بحيث إن $\sum c_i x_i = 0$ لأن المعاملات ليست أصفارًا كلها. إن الأصغرية تجبر أن $c_i \neq 0$ لكل i.

افترض أن C_1 و C_2 حلقتان مختلفتان تحويان x، وباستخدام معادلة عدم الاستقلال (الاعتماد) لـ C_1 و C_2 نستطيع كتابة x بوصفها تركيبًا خطيًّا بدلالة C_1-x، و بدلالة C_2-x. وبمساواة هذه التعابير، نحصل على معادلة الاعتماد x-. $C_1 \cup C_2$-x. لذا، فإن $C_1 \cup C_2$-x يحوي حلقة.

لنظام وراثي على E، نعرِّف خاصية الحذف الضعيفة على الشكل التالي: عندما C_1 و C_2 حلقتان مختلفتان، و $x \in C_1 \cup C_2$ فإن عنصرًا آخر من C_M يكون محتوى في $C_1 \cup C_2$-x. والماترويدات أنظمة وراثية تحقق خاصية الحذف الضعيفة.

وماترويد الأعمدة للمصفوفة أدناه هو كذلك ماترويد الحلقة $M\left(k_4-e\right)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ■

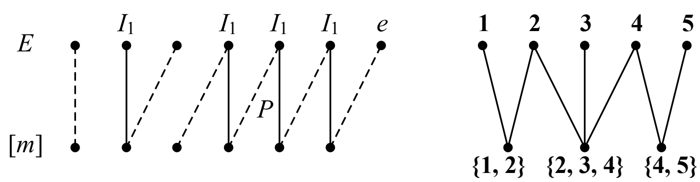
12.2.8. تعريف: الماترويد المستعرض المولد من قبل المجموعات $A_1,\ldots,A_m$ التي اتحادها E هو نظام وراثي على E، بحيث إن مجموعاته المستقلة هي أنظمة التمثيلات المختلفة للمجموعات الجزئية لـ $\left\{A_1,\ldots\ldots A_m\right\}$. مكافئًا لذلك، اجعل G البيانَ الثنائيَّ الذي أضلاعه E، ورؤوسه $[m]$، والمعرف على الشكل $i \leftrightarrow e$ إذا وفقط إذا كانت $e \in A_1$. إن المجموعات المستقلة هي المجموعات الجزئية من E المشبعة من خلال المواءمة في G.

13.2.8. مثال: المجموعات المستقلة في الماترويدات المستعرضة. عندما تكون كلّ من M و M' متوائمتين في G بحيث إن $|M'| > |M|$، فإن الفرق التماثلي $M \Delta M'$ يحوي مسارًا موسعًا P بالنسبة إلى M (النظرية 10.1.3). وباستبدال $M' \cap P$ بـ $M \cap P$، فإننا نحصل على مواءمة من الحجم $|M| + 1$ والتي تشبع رؤوس M جميعها بالإضافة إلى طرفي P.

افترض المجموعتين المستقلتين I_1 و I_2 في الماترويد المستعرض الذي تولده $\left\{A_1,\ldots\ldots A_m\right\}$. وفي البيان الثنائي الفرع المرافق، اجعل M_1 و M_2 متوائمتين تشبعان I_1 و I_2 على الترتيب (عن اليسار أدناه، M_1 مرسومة بخط غامق، وM_2 مرسومة بخط متقطع). إذا كان $\left|I_2\right| > \left|I_1\right|$، فإن المواءمة التي تحصل عليها من M_1 باستخدام مسار موسع بالنسبة إلى M_1 في $M_2 \Delta M_1$ تشبع I_1 إضافة إلى عنصر $e \in I_2 - I_1$، وهذا "يوسع" I_1.

لنظام وراثي على E، نعرِّف خاصية التوسيع على الشكل التالي: إذا كانت $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ بحيث إن، $\left|I_2\right| > \left|I_1\right|$ فإن $e \in I_2 - I_1$، بحيث $I_1 \cup \{e\} \in \boldsymbol{I}$. الماترويدات أنظمة وراثية تحقق خاصية التوسيع.

الماترويد المستعرض للعائلة $\boldsymbol{A}=\{1,2\},\{2,3,4,\},\{4,5\}$ موضح بواسطة البيان الثنائي الفرع في الشكل أدناه عن اليمين هو أيضًا $M\left(k_4-e\right)$. ■



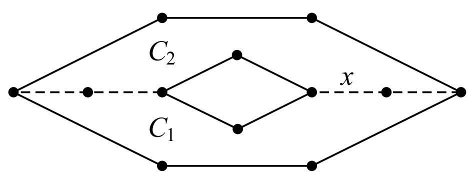
إن إسم ماترويد مستعرض يظهر من استخدام "مستعرض" في أنظمة التمثيلات المختلفة. ونعرف الـ SDR لمجموعة جزئية من $\left\{A_1,\ldots\ldots A_m\right\}$ على أنه مستعرض جزئي للنظام الكلي. والمجموعات المستقلة للماترويد المستعرض على $\cup A_i$ هي المستعرضات الجزئية $\left\{A_1,\ldots\ldots A_m\right\}$. وقد اكتُشفت هذه الماترويدات من

قبل إدموند وفولكرسون في العام 1965م وكذلك من قِبَل ميرسكي (Mirsky)، وبيرفكت (Perfect) في العام 1967م اللذين عمّما النتيجة لتشمل المجموعات اللامنتهية، علمًا بأن إسهام الآخرين كان مستقلًا تمامًا عن إسهامات من سبقوهم.

كل ماترويد يجب أن يحقق خواص الماترويدات جميعها، وعندما نثبت أن الخواص المعرفة أعلاه متكافئة للأنظمة الوراثية، يلزمنا عند ذلك أنّ نثبت أنَّ واحدة منها فقط متحققة لنستخدمها جميعًا، وسنختبر في البداية أنها جميعًا متحققة لماترويدات الحلقات.

14.2.8. مثال: التوسيع في ماترويدات الحلقات. خذ في الحسبان $I_1, I_2 \in \mathbf{I}_{M(G)}$. كما في المثال 8.2.8، يوجد للبيان الجزئي المولد G_{I_1} $k = n - |I_1|$ مركبة، بالإضافة إلى أنه يوجد $n - k = |I_1|$ ضلعًا لغابته الكبرى. لذا، فإنه يوجد للغابة I_2 ضلعًا، حيث يكون طرفاه في مركبتين من مركبات G_{I_1}. ويمكن أن يضاف هذا الضلع إلى I_1 للحصول على مجموعة مستقلة أكبر. لذا، تتحقق خاصية التوسيع. ■

15.2.8. مثال: الحذف الضعيف في ماترويدات الحلقات. الحلقات في $M(G)$ هي مجموعات أضلاع حلقات G، وتوجد للحلقات درجة زوجية عند كل رأس. فإذا كان $C_1, C_2 \in \mathbf{C}$، فإن للفرق التماثلي $C_1 \Delta C_2$ أيضًا درجة زوجية عند كل رأس. وإذا كانت $C_1 \neq C_2$، فهذا يشير إلى أن $C_1 \Delta C_2$ يحوي حلقة (انظر القضية 27.2.1). وهذا أقوى من خاصية الحذف الضعيف؛ لأن $C_1 \Delta C_2 \subseteq C_1 \cup C_2 - X$. في الشكل أدناه، تجد أن C_1 و C_2 حدّان لوجوه طول كل منها 9، تشترك في الأضلاع غير المتصلة (المنقطة)، كما أن اتحاد $C_1 \Delta C_2$ لحلقتين غير متقاطعتين. ■



لاحظ أن خاصية تبديل الأساس في الماترويدات المستعرضة تشبه خاصية التوسيع. ويتناول تمرين 9 خاصية الحذف الضعيف. والتحقق مباشرة من خاصية كل من التوسيع أو تبديل الأساس في الماترويدات الخطية يتطلب النتيجة الجبرية التي تقول: إذا كان لدينا k من المتجهات المستقلة خطيًّا، فإنه لا يمكن كتابة كل منها بوصفها تركيبًا خطيًّا لمجموعة أصغر. وبدلاً من ذلك، نستطيع استخدام النظرية 20.2.8. وبما أن خاصية الحذف الضعيف تتحقق للمجموعات المستقلة من المتجهات، فإن العديد من مبرهنات الجبر الخطي تتبع من النظرية 20.2.8!

16.2.8. ملاحظة. اصطلاحات للرموز. تستخدم الحروف الغامقة $\mathbf{I}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ لعائلات المجموعات الجزئية من E، وهذا يسمح بكتابة $I \in \mathbf{I}$، $B \in \mathbf{B}$، $C \in \mathbf{C}$ للتدليل على أعضاء هذه العائلات أو عناصرها. ترمز الحروف الرومانية I,B,C,R إلى الخواص التي تعطينا ماترويدات. ونستخدم e, f, x, y بوصفها عناصر في E و $X, Y,$ F للتدليل على المجموعات الجزئية من E. ■

كل عائلة وراثية مع من المجموعات المستقلة لنظام وراثي. ونقول: إن الجمع $\mathbf{B}$ قابل للتحقيق بوصفه مجموعة أساس لنظام وراثي إذا وفقط إذا كان $\mathbf{B}$ غير خالٍ، وكان كل عنصر في $\mathbf{B}$ لا يحوي أي عنصر آخر من عناصرها، إضافة إلى أن الجمع $\mathbf{C}$ يكون قابلاً للتحقيق بوصفه مجموعة حلقات لنظام وراثي إذا وفقط إذا كانت عناصر هذا الجمع غير خالية، وكان كل عنصر فيه لا يحوي أي عنصرٍ آخر من عناصره.

إن توصيف دالة الرتبة يكون أكثر دقةً؛ لأنه يشمل الخاصيتين ($r1$ و r2 أدناه) اللتين نحتاج إليهما، بالإضافة

إلى شرط تقني آخر يجبر r أن تكون دالة رتبة لنظام وراثي M معرف على $I_M = \{X \subseteq E : r(X) = |X|\}$.

17.2.8. تمهيدية: لدالة الرتبة r على نظام وراثي E يكون:

(r1) $r(\varnothing) = 0$.

(r_2) $r(x) \le r(X+e) \le r(X) + 1$ عندما $X \subseteq E$ و $e \in E$

الإثبات: من تعريف $r(X) = \max\{|Y| : Y \subseteq X, Y \in \mathbf{I}\}$، نجد أن $r(\varnothing) = 0$. وبما أن $X+e$ تحوي كل مجموعة مستقلة من X، فإن $r(X+e) \ge r(X)$، وبما أن المجموعات الجزئية المستقلة من $X+e$ وغير المحتواة في X تتألف من e بالإضافة إلى مجموعة جزئية مستقلة من X، فإن $r(X+e) \le r(X) + 1$. ■

خواص الماترويدات (properties of Matroids)

لقد لاحظنا أن العديد من الشروط المتكافئة على الأنظمة الوراثية تعطي ماترويدات. وبإمكاننا أن نبرهن أن نظامًا وراثيًّا يكون ماترويد، من خلال إثبات تحقق أحد هذه الشروط، ونستطيع بعد ذلك استخدام هذه الشروط المتكافئة جميعها دون إعطاء أي براهين إضافية. ولقد حصلنا على الفائدة نفسها من التوصيفات المتكافئة للأشجار.

إن إضافة ضلع واحد إلى غابة يولد حلقةً واحدةً على الأكثر، وبعمومية أكثر، فإن إضافة عنصر واحد إلى مجموعة مستقلة في ماترويد يعطينا حلقة واحدة على الأكثر، ولبرهنة الخوارزمية الجشعة للأشجار المولدة (النظرية 3.3.2.)، استخدم هذه الخاصية فقط. إن خاصية «الحلقات المستحدثة» هي أحد الشروط المميزة للماترويدات، وذلك كما في تأثير الخوارزمية الجشعة نفسها! الخاصيتان تظهران في قائمتنا.

إذا أعطينا أوزانًا لعناصر الماترويد، فإن الخوارزمية الجشعة هي عبارة عن ضم عنصر له وزن أكبر غير سالب؛ لأن إضافة هذا العنصر إلى مجموعة مستقلة تم اختيارها سابقًا يعطينا مجموعة مستقلة أكبر. لقد أثبت رادو (Rado (1957)) أن الماترويدات هي الأنظمة الوراثية تمامًا التي تختار فيها الخوارزمية الجشعة مجموعة مستقلة موزونة كبرى بصرف النظر عن اختيار الأوزان.

18.2.8. تعريف: يكون النظام الوراثي M على E ماترويد إذا حقق الخواص الإضافية الآتية، حيث تمثل $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, وr مجموعات مستقلة، وأساسات، وحلقات، ودالة رتبة لـ M على الترتيب:

I: **التوسيع:** إذا كانت كلّ من $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ حيث $|I_2| > |I_1|$، فإن $I_1 + e \in \mathbf{I}$ لبعض $e \in I_2 - I_1$.

U: **الانتظام** لكل $X \subseteq E$: إن المجموعات الجزئية الأعظمية من X التي تنتمي إلى $\mathbf{I}$ لها الحجم نفسه.

B: **تبادل الأساس:** إذا كانت كلّ من $B_1 B_2 \in \boldsymbol{B}$، فإن لكل $e \in B_1 - B_2$ يوجد $f \in B_2 - B_1$ بحيث إن $B_1 - e + f \in \boldsymbol{B}$.

R: **المقياسية الجزئية:** $r(X \cap Y) + r(X \cup Y) \le r(X) + r(Y)$ وذلك عندما $X, Y \subseteq E$.

A: **الامتصاص الضعيف:** إن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$ يعطي $r(X+e+f) = r(X)$ عندما $X \subseteq E$ و $e, f \subseteq E$.

A′: **الامتصاص القوي:** إذا كانت كلّ من $X, Y \subseteq E$ و $r(X+e) = r(X)$ لكل $e \in Y$، فإن $r(X \cup Y) = r(X)$

C: **الحذف الضعيف:** للحلقات المستقلة $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C}$ و $x \in C_1 \cap C_2$، عندها يوجد عضو آخر في C محتوى في $C_1 \cup C_2 - x$.

J: **الحلقات المستحدثة:** إذا كانت $I \in \mathbf{I}$، فإن $I + e$ تحوي حلقة واحدة على الأكثر.

G: **الخوارزمية الجشعة:** لكل دالة وزن غير سالب على E، تختار الخوارزمية الجشعة مجموعة مستقلة ذات وزن كلي أعظم. وتشير خاصية تبديل الأساس إلى أن الأساسات جميعها لها الحجم نفسه؛ فإذا كانت $|B_1| < |B_2|$ لبعض $B_1,B_2 \in \boldsymbol{B}$، فبإمكاننا القيام بتكرار خطوات لتبديل عناصر B_1-B_2 بعناصر B_2-B_1 للحصول على أساس حجمه $|B_1|$ محتوى في B_2، ولكن لا يوجد أي أساس محتوى في أساس آخر.

19.2.8.* ملاحظة. رتبة المجموعة X في ماترويد متجه هي بعد الفضاء الذي تولده X. وأن المقياسية الجزئية تتصل بصيغة البعد للفضاءات الجزئية: $\dim U \cap V + \dim W = \dim U + \dim V$، حيث إن W هي الفضاء الذي تولده $U \cup V$. عندما تكون X و Y مجموعتين مولدتين في U و V، فإن بعد الفضاءات الذي تولده $X \cap Y$ ربما يكون أقل من $\dim U \cap V$. وعلى الرغم من ذلك، فإن $\dim U \cap V + \dim W \leq \dim U + \dim V$ تتحقق لفضاءات المتجهات باستخدام إثبات $U \Leftarrow R$ أدناه. لاحظ أن التمرين العاشر يحصل على المقياسية الجزئية مباشرة لماترويدات الحلقات.

لقد استُخدم العديد من هذه الخواص (بالإضافة الى متطلبات الأنظمة الوراثية) بوصفها شرطًا معرفًا للماترويدات تشمل الأمثلة I.(حتى تظهر) Schrijver [1976] Welsh. و Bixby [1981] UEdmonds 1965b,c، و [1988] Nemhauser– wolsey و A [1935] Whitney و [1970] C Tutte و G Papadimitrious- steiglitz [1982] وآخرون مثل [1937] Van der Waerden و [1964] Rota و[1970] Crapo-Rota و [1979] Aigner. ■

يضمُّ العديد من الكتاب الخواص الأساسية للأنظمة الوراثية في مجموعة الفرضيات التي تصف وجهًا معينًا للماترويد. قد يصرف هذا الذهنَ عن الخواص الإضافية للماترويدات، مما يؤدي إلى القيام بشغل إضافي. إن البدء بالأنظمة الوراثية يعطينا أدق البراهين، فضلًا عن أن خواص الأنظمة الوراثية متوافرة دائمًا.

20.2.8. نظرية: لنظام وراثي M، الشروط المعرِّفة للماترويدات في التعريف 18.2.8 متكافئة.

الإثبات: $U \Leftarrow B$. من خاصية الانتظام (الاتساق) لـ $X{=}E$، فإن للأساسات جميعها الحجم نفسه. الآن، طبق الانتظام على المجموعة $(B_1 - e) \cup B_2$، وهذا يؤدي إلى توسيع المجموعة المستقلة B_1-e من B_2 لتصل إلى حجم $|B_2|$.

$B \Leftarrow I$ إذا أعطينا مجموعتين مستقلتين $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ حيث $|I_2| > |I_2|$، فإننا نختار $\mathbf{B_1, B_2 \in B}$، بحيث إن $I_2 \subseteq B_2$ و $I_2 \subseteq B_2$. نستخدم تبديل الأساس بحيث تحلّ عناصر $B_1 - I_1$ خارج B_2 محلّ عناصر B_2. لذا، يمكننا أن نفترض أن $B_1 - I_1 \subseteq B_2$. إذا كانت $B_1 - I_1 \subseteq B_2 - I_2$، فإن $|B_1| < |B_2|$، وهذا ممنوع من قبل خاصية تبديل الأساس كما لاحظنا أعلاه. لذا يوجد لـ I_2 عنصر في $B_1 - I_1$، حيث نستخدم هذا العنصر لتوسيع I_1.

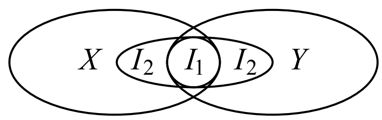
$I \Leftarrow A$. أفترض أن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$. إذا كانت $r(X+e+f) > r(X)$، فافترض أن I_1,I_2 عبارة عن مجموعتين جزئيتين مستقلتين عظميين من X ومن $X+e+f$. الآن، $|I_2| > |I_1|$، وبإمكاننا توسيع I_1 من I_2. وبما أن I_1 مجموعة جزئية مستقلة عظمى من X، فإن التوسيع يمكن أن يضيف e أو f فقط، وهذا يناقض افتراض أن $r(X) = r(X+e) = r(X+f)$.

$A \Leftarrow A'$. نستخدم الاستقراء على $|Y - X|$. إن النتيجة تمهيدية عندما $|Y - X| = 1$. عندما $|Y - X| > 1$، اختر $e,f \in Y - X$، وافترض أن $Y' = Y - e - f$. وبتطبيق فرضية الاستقراء على المجموعات الجزئية الفعلية لـ Y، نجد أن $r(X) = r(X \cup Y') = r(X \cup Y' + e) = r(X \cup Y' + f)$. الآن، لاحظ أن الامتصاص الضعيف يعطينا أن $r(X) = r(X \cup Y)$.

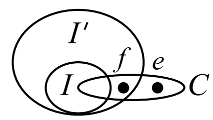
$A' \Leftarrow U$. وإذا كانت y مجموعة جزئية مستقلة عظمى من X، فإن $r(Y+e) = r(Y)$ لكل $e \in X - Y$ ومن الامتصاص القوي، نجد أن $|Y| = r(Y) = r(X)$. لذا، فإن كل مجموعة مثل Y لها الحجم نفسه.

$U \Leftarrow R$. إذا أُعطيت $X, Y \subseteq E$، فاختر مجموعة مستقلة عظمى I_1 من $X \cap Y$ من الانتظام، يمكن تكبير I_1 لتكون مجموعة جزئية مستقلة كبرى من $X \cup Y$، ولتكن هذه المجموعة I_2، خذ في الحسبان $I_2 \cap X$ و $I_2 \cap Y$، وهذه مجموعات جزئية مستقلة من X و Y، وكل منها يحوي I_1. لذا، فإن:

$$r(X \cap Y) + r(X \cup Y) = |I_1| + |I_2| = |I_2 \cap X| + |I_2 \cap Y| \leq r(X) + r(Y).$$



U⇒R



J⇒G

$R \Leftarrow C$ لتكن $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C}$، و $x \in C_1 \cap C_2$. لدينا $r(C_1) = |C_1|-1$، و $r(C_2) = |C_2| -1$، وكذلك $r(C_1 \cap C_2) = |C_1 \cap C_2|$؛ لأن كل مجموعة جزئية فعلية من حلقة تكون مجموعة مستقلة. إذا خلت $(C_1 \cup C_2)\text{-}x$ من حلقة، فإن $r((C_1 \cup C_2) - x) = |C_1 \cup C_2| -1$. ولذلك فإن $r(C_1 \cup C_2) \geq |C_1 \cup C_2|-1$، وبتطبيق المقياسية الجزئية على C_1 و C_2 نحصل على التناقض:

$$|C_1 \cap C_2|+|C_1 \cup C_2|-1 \leq |C_1|+|C_2|-2$$

$C \Leftarrow J$. إذا كانت $I+e$ تحوي C_1، و C_2 في $\boldsymbol{C}$ لبعض $I \in \boldsymbol{I}$، فإن كلًّا من C_1 و C_2 تحوي $\boldsymbol{e}$. الآن، يضمن الحذف الضعيف وجود حلقة في $(C_1 \cup C_2)\text{-}e$. ومن جهة أخرى، فإن $(C_1 \cup C_2)\text{-}e$ تكون مستقلة لكونها محتواة في I.

$J \Leftarrow G$. لدالة الوزن w، افترض أن I هي مُخرَج الخوارزمية الجشعة. من بين المجموعات المستقلة ذات أكبر وزن، اجعل I^* واحدة لها أكبر تقاطع مع I. إن الخوارزمية لا تنتهي بـ $I \subset I^*$. إذا كانت $I \neq I^*$، فافترض أن e هي أول عنصر في $I - I^*$ تم اختياره من قبل الخوارزمية. ومن خيار I^*، نجد أن I^*+e مجموعة غير مستقلة. لذا، توجد فيها حلقة وحيدة C. وبما أن $C \nsubseteq I$، فبإمكاننا اختيار $f \in C - I$. وبما أن I^*+e لا تحوي أي حلقة أخرى، فإن $I^* + e\text{-}f \in \boldsymbol{I}$. إن **أمثلية** $\boldsymbol{I^*}$ تعطينا أن $w(f) \geq w(e)$. وبما أن f وعناصر I التي تم اختيارها قبل e جميعها تقع في I^*، فإن f لا تُكمل حلقة مع هذه العناصر. وإذا كانت $\boldsymbol{f}$ متوافرة عند قيام الخوارزمية باختيار $\boldsymbol{e}$، فهذا يعطي أن $w(f) \leq w(e)$. الآن، $w(f) = w(e)$ و $w(I^* + e\text{-}f) = w(I^*)$. ومع $\left| I^* + e - f \cap I \right| > \left| I^* \cap I \right|$، فإن هذا يناقض خيار I^*. لذا، فإن $I = I^*$.

$G \Leftarrow I$ افترض أن $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ حيث $k = |I_1| < |I_2|$.

سنصمّم دالة وزن بحيث إن نجاح الخوارزمية الجشعة بالنسبة إلى هذه الدالة يعطينا التوسعة المنشودة. افترض أن $w(e) = k + 2$ حيث $e \in I_1$، وإجعل $w(e) = k + 1$ إذا كانت $e \in I_2\text{-}I_1$. واجعل $w(e) = 0$ إذا كانت $e \notin I_1 \cup I_2$. الآن $w(I_2) \geq (k + 1)^2 > k(k + 2) = w(I_1)$ لذا، فإن I_1 ليست مجموعة مستقلة ذات وزن أكبر. على أيّ حال، فإن الخوارزمية الجشعة تختار كل عنصر من عناصر I_1 قبل أي عنصر من عناصر $I_2 - I_1$. وبما أنها تجد مجموعة مستقلة لها وزن أكبر، فإنها تستمر بعد امتصاص I_1، وتضيف عنصرًا $e \in I_2 - I_1$، حيث $I_1 + e \in \mathbf{I}$. ■

تنويه: غالبًا ما نستخدم خاصية التوسيع في برهنة أن نظامًا وراثيًّا هو ماترويد.

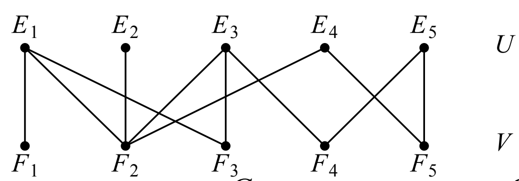
21.2.8. مثال: يعرف الماترويد الموحد الذي رتبته k، والذي يرمز إليه بالرمز $U_{k,n}$ عندما $|E| = n$ على الشكل $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E: |X| \leq k\}$. هذا التعريف يحقق مباشرة خواص التوسيع وتبادل الأساسات، وتستخدم الماترويدات الموحدة في بناء ماترويدات ممتعة أكثر، وفي توصيف صفوف الماترويدات. تكون بعض الماترويدات الموحدة بيانية، وبعض الماترويدات البيانية تكون موحدة (تمرين 6). لاحظ أن لا $M(K_4 - e)$ ولا $M(K_4)$ ماترويد موحد (منتظم أو متسق).

الماترويد الخطي القابل للتمثيل على الحقل Z_2 أو على الحقل Z_3 يكون ثنائيًّا أو ثلاثيًّا على الترتيب. ويكون كل ماترويد بياني ثنائيًّا (التمرين 43) فضلًا عن أن $U_{2,4}$ هو ماترويد ثلاثي (التمرين 44) وليس ثنائيًّا. وبناءً على ذلك، فهو ليس بيانيًّا). ■

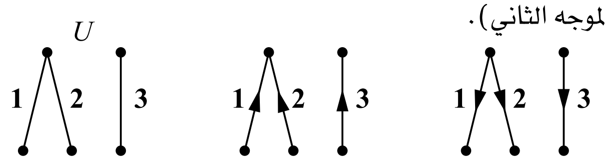
22.2.8. مثال: يعرف ماترويد التجزئة على E المستحدث عن طريق تجزئة E إلى قوالب $E_1, \dots\dots, E_k$ على الشكل $\mathbf{I} = \{X \subseteq E: |X \cap E_i| \leq 1, \forall\, i\}$.

وبما أن $\emptyset \in \mathbf{I}$ ، وأن $X \in \mathbf{I}$ عندما تقع عناصرها في قوالب مختلفة، فإن I عائلة وراثية. إذا أُعطينا $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ حيث $|I_2| > |I_1|$، فإن المجموعة I_2 يجب أن تتقاطع مع قوالب أكثر من القوالب التي تتقاطع معها I_1؛ لاحظ أننا نحصل على التوسعة المنشودة لـ I_1 عن طريق أحد عناصر I_2 الموجودة في قالب لا يتقاطع مع I_1. ومن جانب آخر، فإن $r(X)$ هي عدد القوالب التي لها عناصر في X، وهذا يحقق خاصية الامتصاص. (لاحظ أن $M(K_4 - e)$ ليس ماترويد تجزئة).

إذا أعطينا بيانًا ثنائيًّا G، مجموعتا رؤوسه هما: U, V، فإن الوقوعات (الأضلاع التي تقع) على $U = u_1, \dots, u_k$ تُعرِّف ماترويد تجزئة على $E(G)$ (يختلف هذا عن الماترويد المستعرض على U المستحدث من قِبل G). إن القوالب هي المجموعات $E_i = \{e \in E(G): u_i \in e\}$. وأن المجموعة $X \subseteq E(G)$ تكون متوائمة في G إذا وفقط إذا كانت X مستقلة في ماترويد التجزئة الذي تُحدثه U، وفي ماترويد التجزئة الذي تُحدثه V كذلك. وهذا هو الدافع لمناقشة ماترويد التقاطع فيما بعد.



وفي الحالة التي يكون فيها G حلقة فردية، فلا توجد لـ G مجموعة رؤوس، حيث إن مجموعات وقوعها تجزئ $E(G)$. وعلى أي حال، فإن لكل ضلع في البيان الموجه رأسًا وذيلاً. وبإمكاننا تعريف كلٍّ من ماترويد تجزئة الرؤوس، وماترويد تجزئه الذيول باستخدام تجزئة الأضلاع التي تُحدثها الوقوعات على كل من الرؤوس والذيول. (مثال: إن الماترويد الموجود في المثال 3.2.8. يظهر بوصفه ماترويد التجزئة على E الذي تحدثه U في البيان الثنائي الفرع الموضح أدناه، وبوصفه ماترويد تجزئة الرؤوس في البيان الموجه الأول، وبوصفه ماترويد تجزئة الذيول في البيان الموجه الثاني). ■



الدالة المولدة (The Span Function)

سَنُقدم فيما يأتي العديد من الجوانب الإضافية للأنظمة الوراثية وخواص الماترويدات المتعلقة بها. وسنستخدم هذه الجوانب لتوضيح ثَنوية الماترويدات التي تؤدي إلى توصيف البيانات السوية باستخدام الماترويدات.

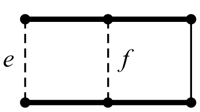
يعمم المفهوم الجبري للفضاء الذي "توله" مجموعة من المتجهات على الأنظمة الوراثية. إن التعريف مستوحى من ماترويدات الحلقات؛ أيُّ مجموعة تولد نفسها، وتولد العناصر التي تُتم حلقات مع مجموعاتها الجزئية أيضًا.

23.2.8. تعريف: إن الدالة المولدة لنظام وراثي M هي عبارة عن الدالة σ_M المعرّفة على المجموعات الجزئية من E على الشكل الآتي:

$\sigma_M(X) = X \cup \{ e \in E : y + e \in C_M \}$ لبعض $Y \subseteq X$. إذا كان $e \in \sigma(X)$، فإن X تولد e

في نظام وراثي، تكون X غير مستقلة إذا وفقط إذا كانت تحوي حلقة، ومن التعريف **23.2.8**. تعلم أن هذا يتحقق إذا وفقط إذا تحقق أن $e \in \sigma(X\text{-}e)$ لبعض $e \in X$. لذا، نستطيع إيجاد المجموعات المستقلة من الدالة المولدة عن طريق $\boldsymbol{I} = \{X \subseteq E : (e \in X) \Rightarrow (e) \notin \sigma(X - e)\}$ إن خواص الدوال المولدة التي نستخدمها في دراستنا للماترويدات هي: (s1,s2,s3) أدناه (بالإضافة أننا نحتاج إلى شرط تقني إضافي لتوصيف الدوال المولدة للأنظمة الوراثية). سنوضح أولًا الخاصية s3 باستخدام البيانات.

24.2.8. مثال: في ماترويد الحلقات $M(G)$، إن معنى $e \notin \sigma(X)$ هو عدم وجود مسار في X بين طرفي e. وإذا كانت $e \in \sigma(X+f)$، فإن إضافة f تُتم مثل هذا المسار. ويُتم المسار حلقةً مع e، وكذلك فإن $f \in \sigma(X+e)$. في الشكل أدناه، تتألف X من أربعة أضلاع غامقة. ■



25.2.8. قضية. تتحقق الخواص الآتية إذا كانت σ هي الدالة المولدة لنظام وراثي على E، وكانت $X, Y \subseteq E$:

(a $X \subseteq \sigma(X)$ (σ قابلة للتمدد).

(b $Y \subseteq X$ تعطي أن $\sigma(Y) \subseteq \sigma(X)$ (σ تحافظ على الترتيب).

(c $e \notin \sigma(X)$ و $e \in \sigma(X+f)$ تعطي أن $f \in \sigma(X+e)$ (تبادل ستاينتز) **(Stintiz exchange).**

الإثبات: يعطينا التعريف 23.2.8. فورًا أن σ قابلة للتمدد، فضلًا عن أنها تحافظ على الترتيب. فإذا كان $e \in \sigma(X+f)$، فإن e ينتمي إلى حلقة C في $X+f+e$ وإذا كان $e \notin \sigma(X)$، فإن $f \in C$. إن هذه الحلقة تعطي أن $f \in \sigma(X+e)$. إذن، فإن σ تحقق خاصية تبادل ستاينتز. ■

إن خواص الدالة المولدة تقود إلى إثبات قصير لصورة أقوى من خاصية الحذف. وتنص خاصية الحذف الضعيف على أنه عندما تكون $e \in C_1 \cap C_2$، فهذا يعني وجود حلقة في $(C_1 \cup C_2)\text{-}e$. إن ماترويدات الحلقات

تتمتع بالخاصية الأكثر قوة التي تقول بأن $C_1\Delta C_2$ يكون اتحادًا لحلقات منفصلة ضلعيًّا؛ لأن درجةَ كل رأس في $C_1\Delta C_2$ زوجيةٌ. إن الماترويدات العامة تتمتع بالخاصية المتوسطة التي تقول إن عناصر الفرق التماثلي جميعها تنتمي إلى حلقات في $(C_1 \cup C_2)\text{-}e$ عندما يكون $e \in C_1 \cap C_2$ (خاصية C' أدناه). ونحتاج إلى خاصية تربط بين الرتبة والتوليد في الأنظمة الوراثية. إن صحة العكس هي توصيفنا التالي للماترويدات.

26.2.8.* تمهيدية. في نظام وراثي، $[r(x + e) = r(x)] \Rightarrow e \in \sigma(x)$.

الإثبات: افترض أن Y مجموعة جزئية مستقلة كبرى من X. وبما أن $|Y| = r(X) = r(X + e)$، فإن Y تكون مجموعة جزئية مستقلة كبرى من $X + e$. لذا، فإن e تتم حلقة مع مجموعة جزئية من X محتواة في Y، و$e \in \sigma(X)$. ■

27.2.8. نظرية*. إذا كان M نظامًا وراثيًّا، فإن كل شرط من الشروط المعطاة أدناه شرط ضروري وكافٍ ليكون M ماترويد.

P: **الشراكة (الاندماج)** - $r(\sigma(X)) = r(X)$ لكل $x \subseteq E$

S: **جمود (حيود):** $\sigma^2(X) = \sigma(X)$ لكل $X \subseteq E$

T: **تعدي الاعتماد** (عدم الاستقلال): إذا كان $e \in \sigma(X)$ و $X \subseteq \sigma(Y)$، فإن $e \in \sigma(Y)$.

C': **الحذف القوي:** عندما $C_1, C_2 \in \boldsymbol{C}$ ، و $e \in C_1 \cap C_2$، و $f \in C_1 \Delta C_2$ فإنه يوجد $C \in \boldsymbol{C}$ بحيث إن $f \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

الإثبات: $U \Leftarrow P$. يتم كل عنصر في $\sigma(X) - X$ حلقة مع مجموعة جزئية من X، وبذلك يقع في مُولِّد كل مجموعة بين X و $\sigma(X)$. لذا، يكفي أن نبرهن أن $r(Y + e) = r(Y)$ عندما $e \in \sigma(y)$. افترض أن Z مجموعة جزئية من Y، بحيث إن $\boldsymbol{C} \in Z+e$. وسع Z إلى مجموعة جزئية I مستقلة كبرى من $Y + e$ من خاصية الانتظام $|I| = r(Y + e)$. وبما أن $\boldsymbol{C} \in Z + e$، فإن $e \notin I$. لذا، $I \subseteq Y$، و $r(Y) \geq |I| = r(Y + e)$، (يمكن استخدام خاصية الامتصاص بدلاً من ذلك).

$S \Leftarrow P$. بما أن σ قابلة للتمدد، فإن $\sigma^2(X) \subseteq \sigma(X)$، ونحتاج فقط إلى برهنة تعطينا أن $e \in \sigma^2(X)$. من خاصية الاندماج (الشراكة) $r(\sigma(X) + e) = r(\sigma(X))$ و $r(\sigma(X)) = r(X)$. وبما أن المساواة تتحقق في كل ما سبق، فإن التمهيدية 26.2.8 تعطينا أن $e \in \sigma(X)$.

$T \Leftarrow S$. إذا كانت $X \subseteq \sigma(Y)$، فإن خواص الجمود والمحافظة على الترتيب لـσ تعطينا أن $\sigma(X) \subseteq \sigma^2(Y) = \sigma(Y)$.

$C' \Leftarrow T$. إذا أعطينا C_1 و C_2، في $\boldsymbol{C}$، بحيث إن $C_1 \neq C_2$، و $e \in C_1 \cap C_2$، و $f \in C_1 - C_2$، نريد أن تكون f في $\sigma(Y)$، حيث $Y = (C_1 \cup C_2) - e - f$. نعلم أن $f \in \sigma(X)$ حيث $X = C_1 \text{-} f$.

من T، يكفي أن نبرهن أن $X \subseteq \sigma(Y)$. وبما أن $X - e \subseteq Y \subseteq \sigma(Y)$، فإننا نحتاج فقط إلى برهنة أن $e \in \sigma(Y)$، وبما أن σ تحافظ على الترتيب، فإن $e \in \sigma(C_2 - e) \subseteq \sigma(Y)$.

$C' \Leftarrow C$ إن C أقل تقييدًا (حصرًا) من العبارة C'. ■

كمثل خاصية وحدانية الحلقات المستحدثة (J)، فإن خاصية الاندماج (P) تربط بين وجهين من أوجه الأنظمة الوراثية، وهذه الخواص معروفة للماترويدات، ومن خلال الاقتراب عن طريق الأنظمة الوراثية تصبح هذه الخواص توصيفات مُميزة. ويعدُّ لهمان (Lehman (1964)) أول من أثبت تكافؤ C و C'.

إن الجمود (الحيود) يحصل بصورة طبيعية للماترويدات الخطية والبيانية. وأن مولِّد مجموعة متجهات لا يحوي أي شي إضافي فيما يولده. وبالمثل، فإنه يمكن إضافة كل ضلع لمولّد مجموعة أضلاع تربط بين مركبتين.

وهذا يقترح السماتِ المتقاربةَ للأنظمة الوراثية.

28.2.8. تعريف: المجموعات المولدة لنظام وراثي على E هي المجموعات $X \subseteq E$ بحيث إن $\sigma(X) = E$. أما المجموعات المغلقة، فهي المجموعات $X \subseteq E$ بحيث إن $\sigma(X) = X$ (تسمى أيضًا مُسطحات أو فضاءات جزئية). في حين تشير المستويات الزائدية إلى المجموعات الجزئية فعلاً المغلقة الأعظمية لـ E.

29.2.8.* ملاحظة: تسمى الدالة المولدة لماترويد دالةَ غُلاقة، ومؤثر الغلاقة هو دالةَ قابلة للتمدد، ومحافظة على الترتيب، وجامدة من عائلة المجموعات الجزئية إلى نفسها. ويكون مؤثر الغلاقة دالة مولدة لماترويد إذا وفقط إذا كانت له خاصية تبادل ستاينتز.

في كل نظام وراثي، نعلم أن الدالة المولدة تحقق خاصية تبادل ستاينتز. لذا، فإن معاملة الماترويدات بوصفها أنظمة وراثية ذات خواص إضافية غير مناسبة لدراسة مؤثرات الإغلاق، حيث إن الدالة المولدة لنظام وراثي M تكون مؤثر إغلاق إذا وفقط إذا كان M ماترويد. لقد طُورت الماترويدات من نظرية الشبكيات من قبل ماكلين ([1936]Maclane) وروتا Rota [1964]) وإيجنر (Aigner [1979]).

لم نأخذ في الحسبان العلاقات جميعها بين سمات الماترويدات، وقد قدّم بريلاوسكي (Brylawski,[1986]) مصفوفة تصف التحويلات بين حوالي اثنتي عشرة سمة من سمات الماترويدات، وقد سمى هذه التطبيقات (Maps) باسم الاقترانات السرية (المشفرة). (Cryptomorphism) ■

ثنوي الماترويد (The Dual of a Matroid)

الثنوية (الازدواجية) في الماترويدات تُعمم هذه الصفة في البيانات السوية، يوجد لكل بيان مستوى مترابط G بيان ثنائي طبيعي G^*، بحيث إن $(G^*)^* = G$. يمكن تشكيل الثنوي G^* من خلال ربط رأس لـ G^* أو تحديده مع كل وجه من أوجه G، وشمول ضلع ثنوي e^* لكل ضلع من أضلاع G. بحيث إن طرفي الضلع e^* هما الرأسان المرتبطان بالوجهين الموجودين على جانبي e.

إن مجموعة من الأضلاع في بيان مستوى G تشكل شجرة مولدة إذا وفقط إذا شكلت الأضلاع الثنوية للأضلاع المتبقية في G شجرة مولدة في G^* (التمرين 21.2.6.). لذا، فإن الأساسات في ماترويد الحلقات $M(G^*)$ هي متممات الأساسات في $M(\boldsymbol{G})$، نعرِّف الثنوية لكل من الماترويدات والأنظمة الوراثية بحيث يمكن تعميم هذه الخصائص على البيانات السوية.

30.2.8. تعريف: الثنوي لنظام وراثي M على E هو النظام الوراثي M^*، حيث أساساته متممات أساسات M، والسمات $\mathbf{B}^*(\mathbf{B}_{M^*}), \mathbf{C}^*, \mathbf{I}^*, r^*, \sigma^*$ لـ M^* هي مرافقات الأساسات، ومرافقات الحلقات ...إلخ لـ M أيضًا.

الأساسات الجزئية S لـ M هي المجموعات التي تحوي أساسًا. أما التحت أساسات (hybobases) H فهي مجموعات أعظمية لا تحوي أي أساس. ونكتب $\overline{X}$ للتدليل على E - X.

31.2.8. تمهيدية: إذا كان M نظامًا وراثيًّا، فإن:

a) $\mathbf{B}^* = \{\overline{B} : B \in \mathbf{B}\}$ و $(M^*)^* = M$.

b) $\boldsymbol{I}^* = \{\overline{S} : S \in \mathbf{S}\}$ و $\boldsymbol{S}^* = \{\overline{\mathrm{I}} : \mathrm{I} \in \mathbf{I}\}$

c) $\boldsymbol{C}^* = \{\overline{H} : H \in \mathbf{H}\}$ و $\boldsymbol{H}^* = \{\overline{C} : C \in \mathbf{C}\}$

الإثبات: العبارة حول $\mathbf{B}^*$ هي تعريف M^*، وهذا يعطينا فورًا أن $M = (M^*)^*$، وكذلك يبرهن فرعي الفرع (b). كذلك، فإن X تكون مجموعة جزئية (فعلية) أعظمية من E لا تحوي أي أساس (تحت أساس) إذا وفقط إذا كانت $\overline{X}$ مجموعة غير خالية أصغرية وغير محتواة في مرافق أساس، وهي حلقة في M^*. وبالمثل، فإن تحت الأساسات لـM^* هي متممات حلقات M. ■

لقد اخترنا "الأساس الجزئي" و "التحت أساسي" لتشترك في الأحرف الأولية من "مولدة" و "مستوى زائدي"؛ لأن المجموعات المولدة والأساسات الجزئية هي نفسها للماترويدات، وكذلك الأمر بالنسبة إلى المستويات الزائدية والتحت أساسات.

32.2.8. تمهيدية: إذا كان M ماترويد ، فإن الأساسات الجزئية هي الأشجار المولدة، والتحت أساسات هي المستويات الزائدية.

الإثبات: نعلم أن مجموعة X تكون مولدة إذا وفقط إذا تحقق أن $\sigma(X) = E$. ومن خاصية الاندماج، فإن هذا يكافئ $r(X)= r(E)$، وأما من خاصية الانتظام، فإن هذا يكافئ أن X تحوي أساسًا، بالنسبة إلى المستويات الزائدية؛ انظر التمرين 32.

افترض أن $B_1,B_2 \subseteq E$. إذا لم تكن أي من B_1 أو B_2 تحوي الأخرى، فإن الأمر ينطبق أيضًا على $\overline{B}_1$ و $\overline{B}_2$. لذا، فإن ثنوي النظام الوراثي يكون نظامًا وراثيًا، ويصبح مفهوم الثنوية مفيدًا عندما نبرهن أن ثنوي الماترويد هو ماترويد. وهذا يتبع بسهولة من نسخة الثنوية المتعلقة بخاصية تبديل الأساس.

33.2.8. تمهيدية : إذا كان M ماترويد، وكانت كلّ من $B_1,B_2 \in \mathrm{B}$، فلكل $e \in B_1 - B_2$ يوجد $f \in B_2$ بحيث إن B_2+e-f أساس.

الإثبات: بما أن B_2 أساس، فإن B_2+e تحوي حلقة C. وبما أن B_1 مستقلة، فإن C تحوي عنصرًا $f \in B_2 - B_1$. الآن، B_2+e-f لا تحوي أي حلقة، وحجمها يساوي $r(E)$. ■

34.2.8. نظرية. (Whitney [1935]) الثنوي لماترويد M على E هو ماترويد دالة رتبته $r^*(X) = |X| - (r(E) - r(\overline{X}))$.

الإثبات: لقد لاحظنا أن M^* نظام وراثي. الآن، سنبرهن خاصية تبادل الأساس لـM^*. إذا كانت كل من $B^*_1 + B^*_2 \in \mathbf{B}^*$، و $e \in \overline{B}_1 - \overline{B}_2$، فإن $B_1 + B_2 \in \mathbf{B}$ حيث $e \in B_2 - B_1$. من التمهيدية 23.2.8، يوجد $f \in B_1 - B_2$، بحيث إن $B_1 + e - f \in \mathbf{B}$. الآن، $\overline{B}_1 - e + f \in \mathbf{B}^*$ تمثل التبادل المنشود.

لحساب $r^*(X)$، اجعل Y تساوي مرافق مجموعة جزئية مستقلة أعظمية من X. لذا، فإن $r^*(X) = r^*(Y) = |Y|$ من التمهيدية 31.2.8، نجد أن $\overline{Y}$ مجموعة أصغرية حاوية لـ $\overline{X}$ تحوي أساسًا لـ M. وبما أن $\overline{Y}$ تظهر من $\overline{X}$ عن طريق توسيع مجموعة جزئية مستقلة أعظمية من $\overline{X}$ لتصبح أساسًا، فسنحصل على $|\overline{Y}| - |\overline{X}| = r(E) - r\,|\overline{X}|$. إن العبارة $|Y| - |X| = |\overline{X}| - |\overline{Y}|$ تعطينا الصيغة المنشودة وهي:

$$r^*(X) = |Y| = |X| - (|\overline{Y}| - |\overline{Y}|) = |X| - (r(E) - r(|\overline{X}|)).$$ ■

بإمكاننا إعادة نص كل خاصية من خواص الماترويد باستخدام مفهوم الثنوية. يطلب التمرينان 34–33 إعطاء توصيفات مميزة للمستويات الزائدية والمجموعات المغلقة باستخدام هذه الطريقة. وتشمل النتائج الأكثر دقة على العلاقات بين الماترويد من جهة، والثنوي الخاص به من جهة أخرى.

35.2.8. قضية. (ثنوية خاصية التوسيع). افترض أن M ماترويد. إذا كانت $X \in \mathbf{I}$ و $X' \in \mathbf{I}^*$ منفصلتين، فإن $B \in \mathbf{B}$، و $B' \in \mathbf{B}^*$ منفصلان بحيث إن $X \subseteq B$ و $X' \subseteq B'$.

الإثبات: بما أن X' هي مرافق مجموعة مستقلة في M، فإن $\overline{X'}$ مجموعة مولدة في M. لذا، فكلّ مجموعة جزئية مستقلة كبرى من $\overline{X'}$ تكون أساسًا. ونوسع $X \subseteq \overline{X'}$ لتكون أساسًا لـ B محتوى في $\overline{X'}$. إن مرافق الأساس $B' = \overline{B}$ يحوي X'. ■

نستخدم ماترويدات الحلقات لتوصيف البيانات السوية، والنتيجة الآتية تساعدنا على توصيف مرافقات حلقات ماترويد الحلقات.

36.2.8. قضية. مرافق حلقات الماترويد هو مجموعات أصغرية تقطع كل أساس، أما الأساسات، فهي مجموعات أصغرية تقطع مرافق كل حلقة.

الإثبات: مرافقات الحلقات هي المجموعات الأصغرية غير المحتواة في مرافق أي أساس، وبما أن مرافقات الأساسات هي متممات هذه الأساسات، فإن المجموعة تكون غير محتواة في مرافق أساس إذا وفقط إذا كانت تقطع كل أساس. وبالمثل، فإن مرافقات الأساسات هي المجموعات الأعظمية التي لا تحوي أي مرافق حلقة. لذا، فإن متممات مرافقات الأساسات هي المجموعات الأصغرية التي تقطع مرافق كل حلقة. ■

37.2.8. نتيجة: مرافقات حلقات ماترويد الحلقات $M(G)$ هي روابط G.

الإثبات: من القضية 36.2.8، نجد أن مرافقات الحلقات هي المجموعات الأصغرية التي تقطع كل غابة أعظمية. لذا، فإنها مجموعات أصغرية. وبحذفها، يزيد عدد المركبات؛ وهذه هي الروابط. ■

38.2.8. تعريف: نُعرِّف ماترويد الروابط أو ماترويد مرافق الحلقات لبيان G على أنه نظام وراثي، حلقاته روابط G.

من النتيجة 37.2.8، نعلم أن ماترويد روابط لـ G هو ثنوي ماترويد الحلقات $M(G)$. الآن، ينطبق الحذف الضعيف على الروابط. وبما أن كل حلقة يجب أن تعود إلى نقطة بدايتها، فإنها لا تستطيع قطع رابطة في ضلعٍ واحد فقط. وهذا يُعمّم على الماترويدات بوصفه توصيفًا مميزًا آخر لمرافقات الحلقات.

39.2.8. نظرية. إن مرافقات حلقات الماترويد M على E هي المجموعات الأصغرية غير الخالية $C^* \subseteq E$ بحيث إن $|C^* \cap C| \neq 1$ لكل $C \in \mathbf{C}$.

الإثبات: لبرهنة أن لكل مرافق حلقة هذه الخاصية، افترض أن $C \in \mathbf{C}$، $C^* \in \mathbf{C}^*$، $C^* \cap C = e$. لذا، فإن $C\text{-}e \in I$، و $C^*\text{-}e \in I^*$، وأن خاصية ثنوية التوسيع تعطي أن $\boldsymbol{B} \in B$ و $\overline{B} \in \mathbf{B}^*$ بحيث إن $B \subseteq C - e$، و $\overline{B} \subseteq C^* - e$، وبما أن e يجب أن تظهر في B أو في $\overline{B}$، فإننا نحصل على $\boldsymbol{I} \in C$ أو $\boldsymbol{I}^* \in C^*$. وبالعكس، سنبرهن أن كلَّ مجموعة غير خالية في $\mathbf{I}^*$ تقطع بعض C في C^* في عنصرٍ واحد، ولأنَّ مرافقات الحلقات ليست كذلك، فإن كل مجموعة أصغرية ليست كذلك تكون مرافق حلقة. اخترً $X^* \in \mathbf{I}^*$، واجعل B^* مرافقَ أساس يحوي X^*، وإجعل $B = \overline{B}^*$. لاحظ أن لكلٍّ $e \in X^*$، فإن $B+e$ تحوي حلقة C، وأن $X^* \cap C = \{e\}$. ■

فروع الماترويد والثنويات السَّويَّة (Matroid Minors and Planar Graphs)

من بيان G، يمكننا الحصول على بيانات أصغر عن طريق تكرار حذف الأضلاع أو تقليصها. تسمَّى البيانات الناتجة بفروع G. لقد أثبت واجنر (wagner [1937]) أن البيان G يكون سويًّا إذا وفقط إذا كان G لا يحوي K_5 أو $K_{3,3}$ بوصفه بيانًا فرعيًّا (التمرين 12.2.6). لقد خمَّن هادوايجر (Hadwiger [1943])

أن G يكون قابلاً للتلوين بـK من الألوان إذا خلا من فرع يشاكل K_{k+1}. لاحظ أن البيان البسيط يكون غابةً إذا وفقط إذا خلا من C_3 بوصفه فرعًا.

لتعميم هذه العمليات للماترويدات، نحتاج إلى معرفة تأثير كلٍّ من الحذف والتقليص في ماترويدات الحلقات. إن المجموعات الجزئية اللاحلقية لـ$E(G\text{-}e)$ هي بالضبط المجموعات الجزئية اللاحلقية لـ$E(G)$ التي تحذف (تتجنب) e. وعندما لا يكون e عروة، فإن المجموعات الجزئية اللاحلقية لـ$E(G.e)$ هي المجموعات الجزئية لـ$E(G)\text{-}e$ والتي اتحادها مع e يكون غير حلقيٍّ في G، والوصف الثنوي للتقليص أسهل، وهو أن: المجموعات المولدة لـ $G.e$ هي المجموعات التي اتحادها مع e يكون مولِّدًا في G (تعدّ المجموعة مولِّدة إذا احتوت على شجرة مولِّدة من كلٍّ مركبة).

نرغب أيضًا في تعميم الرموز المستخدمة بطريقة طبيعية، إلا أنَّ هذا يسبب صعوبة لأن النقاش عن فروع البيانات غالبًا ما يتحدث عن الأضلاع المحذوفة، أما النقاش عن فروع الماترويدات، فإنه يتناول العناصر المتبقية. لذا، سنوائم بينهما من خلال استخدام رموز الماترويد للماترويد على المجموعة المتبقية، في حين نعمِّم الرموز المستخدمة للبيانات لوصف الماترويدات التي نحصل عليها بحذف عنصر واحد.

40.2.8. تعريف: افترض أن M نظام وراثيّ على E. إن حصر M على $F \subseteq E$ والذي نرمز إليه بالرمز $M|F$، ونحصل عليه بحذف $\overline{F}$، هو نظام وراثي معرَّف على الشكل $\boldsymbol{I}_{M|F} = \{X \subseteq F : X \in \boldsymbol{I}_M\}$ وإن تقليص M على $F \subseteq E$ الذي نرمز إليه بالرمز $M.F$ ونحصل عليه بتقليص $\overline{F}$ هو نظام وراثي معرَّف على الشكل $\boldsymbol{S}_{M.F} = \{X \subseteq F : X \cup \overline{F} \in \boldsymbol{S}_M\}$. وعندما $F=E\text{-}e$، فإننا نكتب $M-e = M|F$ و $M.e = M.F$. إن فروع M هي الأنظمة الوراثية التي تظهر من M باستخدام كلٍّ من الحذف والتقليص.

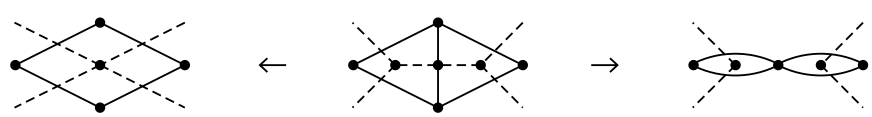
تشير التعريفات إلى أن $M|F$ و $M.F$ نظامان وراثيّان، بالإضافة إلى أن عمليات الحصر والتقليص تبديلية (التمرين 41). تعريف التقليص عن طريق الأساسات الجزئية يعطينا ثنوية طبيعية بين هذه العمليات.

41.2.8. قضية. للأنظمة الوراثية، فإن عمليات الحصر والتقليص هي عمليات ثنوية بمعنى $(M|F)^* = (M^*.F)$ و $(M.F)^* = (M^*|F)$.

الإثبات:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}_{(M.F)^*} &= \{X \subseteq F : F - X \in \boldsymbol{S}_{M.F}\} = \{X \subseteq F : (F - X) \cup \overline{F} \in \boldsymbol{S}_M\} \\ &= \{X \subseteq F : \overline{X} \in \boldsymbol{S}_M\} = \{X \subseteq F : X \in \boldsymbol{I}_{M^*}\} = \boldsymbol{I}_{M^*/F}\end{aligned}$$

لبرهنة العبارة الثانية؛ طبِّق الأولى على M^*، وخذ الثنوية (الازدواجية). الثنوية بين الحذف والتقليص حدسيّة أكثر لبيانات المستوى، وحذف ضلع e في بيان مستَوى G يقلص الضلع الثنوي المرتبط به في G^*، فضلًا عن أن تقليص e يحذف الضلع في البيان الثنوي لهذا البيان.



42.2.8. نتيجة: في عمليات الحذف أو التقليص لضلع في بيان G، يكون سلوك ماترويد الحلقات وماترويد الروابط كالآتي:

$$M(G - e) = M(G) - e \qquad M^*(G - e) = M^*(G).e$$
$$M(G.e) = M(G).e \qquad M^*(G.e) = M^*(G) - e$$

الإثبات: لقد تم تعريف حذف الماترويد وتقليصه بحيث تصف العبارات في العمود الأول سلوك ماترويدات الحلقات. وباستخدام هذه وقضية 41.2.8. نجد أن :

$$M^*(G - e) = [M(G) - e]^* = [M(G) - e]^* = M^*(G).e$$
$$M^*(G.e) = [M(G.e)]^*=[M(G).e]^*= M^*(G) - e \qquad \blacksquare$$

وكما نرغب، فإن حصر الماترويدات وتقليصها يعدّ ماترويدات.

43.2.8. نظرية. افترض أن $F \subseteq E$، وأن M ماترويد على E، إن كلًّا من $M|F$ و $M.F$ يكون ماترويد على F. وبدلالة r_M، فإن دوال الرتبة هي: $r_{M|F}(X) = r_M(X)$ و $r_{M.F}(X) = r_M(X \cup \overline{F}) - r_M(\overline{F})$.

الإثبات: إن خاصية التوسيع من M تنطبق على أيٍّ زوج من المجموعات في $I_{M/F}$. لذا، فإن $M|F$ يحقق خاصية التوسيع ويكون ماترويد. وباستخدام مبدأ الثنوية (الازدواجية) نجد أن $M.F=(M^*|F)^*$ يكون أيضًا ماترويد. تتبع دالة الرتبة لـ$M|F$ من تعريف $I_{M/F}$. إن وجود هذا مع تكرار تطبيق النظرية 34.2.8. على $(M^*/F)^*$ يعطينا دالة الرتبة لـ$M.F$ (التمرين 42).

تعطي الصيغة لـ$r_{M.F}$ وصفًا للمجموعات المستقلة: $X \in \boldsymbol{I}_{M.F}$ إذا وفقط إذا كانت إضافة X لـ $\overline{F}$ تزيد بمقدار $|X|$.

إن مجموعة أضلاع في بيان سويٍّ G تشكّل حلقة إذا وفقط إذا كانت الأضلاع الثنوية المرتبطة بهذه الأضلاع تشكل رابطةً في G^* (النظرية 14.1.6). وباستخدام التناظر الطبيعي بين الأضلاع والأضلاع الثنوية، فهذا يشير إلى أن ماترويد الحلقات لبيان سوي يكون متشاكلًا مع ماترويد الروابط G^*. ومن النتيجة 37.2.8، نعلم أن ماترويد الروابط لبيان H هو $(M(H))^*$. أما تطبيق هذا على G و G^*، فيشير إلى أن ماترويد الروابط لـ G يكون متشاكلاً مع ماترويد الحلقات لـG^*. لذا، فإن ماترويد الروابط لبيان سويٍّ G يكون بيانيًّا. وباستخدام نظرية كوراتوسكي، سنبرهن أن الشرط يعطي توصيفًا مميزًا للسَّويَّة.

لقد تناول ويتني (Whitney [1933a]) هذه المسألة عن طريق إعطاء مفهوم غير هندسي للثنوية. وبتغيير تعريفه قليلاً، سنقول إنَّ H هي الثنوي المجرد للبيان G إذا وُجِدتْ دالة تناظر $\phi:E(G)\rightarrow E(H)$ بحيث إن $X \subseteq E(G)$ تكون رابطة في G إذا وفقط إذا كانت $\phi(X)$ مجموعة أضلاع حلقة في H. ومع هذا التعريف، فإن القول أنه يوجد لـG ثنوي مجرد هو القول نفسه أن ماترويد الرابطة لـG يتحقق بيانيًّا. إن دالة التناظر ϕ تبرهن وجود تشاكل بين $M^*(G)$ و $M(H)$.

44.2.8. نظرية. (Whitney [1933a]) يكون البيان G سويًّا إذا وفقط إذا كان ماترويد روابطه بيانيًّا.

الإثبات: سنبرهن أولاً أن حذف الأضلاع وتقليصها يحافظ على وجود الثنوي المجرد. افترض أن لـG ثنويًّا مجردًا H، بحيث إن. $M(H) \cong M^*(G)$ وافترض أن e' ضلعًا H المرتبط بالضلع e تحت التناظر. ولإثبات أن $H.e'$ ثنوي مجرد لـ$G - e$، وأن $H - e'$ ثنوي مجرد لـ $G.e$، فإننا نستخدم النتيجة 42.2.8. في حساب أن:

$$M^*(G - e) = M^*(G).e \cong M(H).e' = M(H.e')$$
وأن $M^*(G.e) = M^*(G) - e \cong M(H) - e' = M(H - e')$

لقد برهنّا أن للبيانات السوية ثنويات مجردة. ومن نظرية كوارتسكي، نعلم أن أي بيان غير سوي يحوي تقسيمًا لـ K_5 أو $K_{3,3}$. لذا، فإن K_5 أو $K_{3,3}$ يكون فرعًا لهذا البيان. وبما أن حذف الأضلاع وتقليصها يحافظ على الثنائيات المجردة، فإنَّ إثبات عدم وجود ثنويات مجردة لـ K_5 أو $K_{3,3}$ يبرهن عدم وجود ثنيات مجردة للبيانات غير السّويّة.

إذا كان H ثنويًّا مجردًا لـ G، فإن G كذلك يكون ثنويًّا مجردًا لـ H؛ لأن $M^*(G) \cong M(H)$ إذا وفقط إذا كان $M(G) \cong M^*(H)$. وإذا كان خصر G يساوي g، فإن حجم روابط H يكون مساويًا لـ g على الأقل. لذا، فإن $\delta(H) \geq g$. وكذلك، فإن $e(H) = e(G)$. ومن صيغة جمع الدرجات نجد أن $n(H) \leq \lfloor 2e(H)/\delta(H) \rfloor \leq \lfloor 2e(G)/g \rfloor$.

افترض أن H ثنوي مجرد لـ K_5، وبما أن خصر K_5 يساوي 3، فإن $n(H) \leq \lfloor 20/3 \rfloor = 6$. وبما أنه يوجد 4 أو 6 أضلاع لروابط K_5، فإنه يوجد لحلقات H جميعها 4 أو 6 أضلاع. لذا، فإن H بيان ثنائي الفرع بسيط. وعلى أي حال، لايوجد بيان ثنائي الفرع بسيط له عشرة أضلاع إذا كان عدد رؤوسه يساوي 6 على الأكثر. الآن، افترض أن H ثنوي مجرد لـ $K_{3,3}$. بما أن خصر $K_{3,3}$ يساوي 4، فإن $n(H) = \lfloor 18/4 \rfloor = 4$ وبما أن عدد أضلاع أي رابطة من روابط $K_{3,3}$ يساوي 3 على الأقل، فإنه يوجد على الأقل ثلاثة أضلاع لكل حلقة من حلقات H. إذن، يكون H بيانًا بسيطًا. وعلى أيّ حال، لا يوجد بيان بسيط له تسعة أضلاع إذا كان عدد رؤوسه يساوي 4 على الأكثر ■

يوضِّح التعليل المتعلق أن ماترويدات الروابط لبيانات المستوى بيانية أنَّ كلَّ ثنويٍّ "هندسي" لبيان سوي يكون ثنويًّا جبريًّا. لقد رأينا أن الثنوي الهندسي ليس وحيدًا بالضرورة، وعلى الرغم من ذلك، فإن ماترويد الحلقات لكلِّ بيان ثنوي لـ G، يجب أن يكون $M^*(G)$. لذا، فإن للثنويات الهندسية لـ G جميعها ماترويد الحلقات نفسه. لقد حدد وتني (Whitney [1933b]) الحالات التي يكون فيها للبيانات ماترويد الحلقات نفسه (انظر التمرين 45، وانظر (Kelmans (1980, 1987,1988)).

يوجد العديد من التطبيقات لفروع البيانات؛ لأنها ستساعدنا مباشرة على برهنة نظرية تقاطع الماترويدات. فضلًا عن أنها تُستخدم في توصيف صفوف الماترويدات عن طريق البنى الممنوعة. فعلى سبيل المثال، يكون الماترويد ثنائيًّا إذا وفقط إذا خلا من $U_{2,4}$ بوصفه فرعًا. بالإضافة إلى أنها تستخدم الفروع لبناء استراتيجية ربح لتعميم لعبة التجسير على الماترويدات (النظرية 17.1.2).

45.2.8. تعريف*. افترض أن M ماترويد على E، وأن $e \in E$. تُلْعَبُ لعبة انتقال (تحويل) شانون (Shanon) (M,e) من قِبَل المولّد والقاطع. يحذف القاطع عنصرين من E-e، أما المولد فيصادر ما يحذفه القاطع؛ حيث يصادِر ضلعًا في كل حركة. يهدف المولد مصادرة مجموعة تولد e، في حين يهدف القاطع منع ذلك، حيث يقوم القاطع بالحركة الأولى.

إذا جعلنا المولد يبدأ الحركة، أمكن محاكاة ذلك عن طريق إضافة ضلع e' بحيث تكون $\{e,e'\}$ حلقة، ويجب أن يبدأ القاطع بحذف e' لتجنب الخسارة الفورية. نحصل على جسر عن طريق جعل M ماترويد حلقات للبيان في النظرية 17.1.2 حيث e هي "الضلع المساعد"، وe' هي الضلع المساعد الإضافي. إن استراتيجية الحصول على الشجرة المولدة لدى المولد تنتج عن الشرط الكافي التالي لاستراتيجية الربح، ويعدّ هذا الشرط أيضًا ضروريًّا، إلاّ أن إثبات ذلك يتطلب نظرية اتحاد الماترويدات (النظرية 55.2.8).

46.2.8. نظرية ([Lehman [1964). في لعبة انتقال (تحويل) شانون (M,e) يكون لدى المُولد استراتيجية ربح إذا وُجِدت مجموعتان جزيئيتان منفصلتان هما: X_1، X_2 من $E\text{-}e$ بحيث إن $e \in \sigma(X_1) = \sigma(X_2)$.

الإثبات: نستخدم X_1 و X_2 للحصول على استراتيجية ربح. اجعل $X= \sigma(X_1) = \sigma(X_2)$. بما أنه يمكن للمولّد أن يهمل الحذف خارج X، وأنّ يلعب في $M|(X+e)$، فبإمكاننا افتراض أن X_1 و X_2 أساسات منفصلة. إذا لعب القاطع g، ولعب المولّد f، فإن g لم تعد متوافرة ولا يمكن حذف f، إن أثر ذلك هو حذف وتقليص. وبجعل $M' = (M - g).f$ يكون لدينا $\sigma_{M'}(X)$ إذا وفقط إذا تحقق أن $g \notin X$ و $e \in \sigma_M(X + f)$ و يربح المولد إذا كان e عروة في M'، وهذا يكافئ أن $e \in \sigma_M(F)$، حيث F هي المجموعة التي صادرها المولّد.

إذا كان $|E| = 1$، فإن e تكون عروة ويربح المولد. لذا، نتابع بالاستقراء على $|E|$. يكفي أن نعطي جوابًا فوريًّا f لـg، بحيث يكون لـ $M' = (M\text{-}g).f$ أساسان منفصلان. إذا حذف القاطع g غير الموجودة في X_1 أو في X_2، فإن المولد يصادر f اختيارية، وتكون المجموعتان $X_1\text{-}g\text{-}f$ و $X_2\text{-}g\text{-}f$ منفصلتين ومولدتين في M'. لذا، يمكننا افتراض أن $g \in X_1$. تعطي خاصية تبديل الأساس أن $f \in X_2$، حيث $X' = X_1 - g - f \in \boldsymbol{B}$. الآن $X'\text{-}f$ و $X_2\text{-}f$ عبارة عن أساسان منفصلان يتفاديان e في اللعبة (M',e). ■

تقاطع الماترويدات (Matroid Intersection)

فقد قفزت نظرية الماترويدات قفزة كبيرة إلى الأمام بعد أن أثبت إدموندز مبرهنات تقاطع الماترويدات واتحادها، فقد أعطى ذلك سياقًا موحّدًا لعلاقات أصغر- أكبر المعروفة جميعها التي أصبحت سهلة النتائج. وقد برهنا بعضها في الوحدات السابقة. ونظرًا إلى إعطائها براهين موحدة بسيطة، فإن هذا يؤدي إلى افتراض نظرية تقاطع الماترويدات من بين أجمل مبرهنات الرياضيات التوافقية (التركيبية).

نظرية تقاطع الماترويدات هي علاقة أصغر – أكبر للمجموعات المستقلة المشتركة بين ماترويدين معرَّفين على المجموعة الأساسية نفسها، يمكن إفتراض تقاطع ماترويدين بوصفه نظامًا وراثيًّا وليس بوصفه ماترويدًا. إذا وُجدَ أكثر من ماترويد على مجموعة E، فسنستخدم دلائل سفلية للتمييز بين السمات المختلفة. فمثلاً، نستخدم B_i رمزًا لأساس M_i،...إلخ. وما نزال نستخدم $\overline{X}$ لترمز إلى متممة X في المجموعة الأساسية E.

47.2.8. تعريف: إذا كان M_1 و M_2 نظامين وراثيين على E، فإن تقاطعهما هو النظام الوراثي الذي مجموعاته المستقلة هي: $\{X \subseteq E : X \in \boldsymbol{I}_1 \cap \boldsymbol{I}_2\}$.

فعلى سبيل المثال، تمثل مواءمات G المجموعات المستقلة لتقاطع ماترويدَيٍّ التجزئة الطبيعيين على مجموعة أضلاع البيان الثنائي الفرع G. وعمومًا، فهذه ليست مجموعات مستقلة لماترويد (انظر التمرين 2-1). لذا، فإن الخوارزمية الجشعة لا تحلُّ مسألة المواءمة الموزونة العظمى.

تنويه: تذكَّرْ أنَّ العروةَ عنصرٌ يشكِّل مجموعةً غير خالية رتبتها 0.

48.2.8. نظرية (نظرية تقاطع الماترويدات، [Edmonds [1970) افترض أن M_1 و M_2 ماترويدان على E. إن حجم أكبر مجموعة مستقلة مشتركة بينهما يحقق:

$$\max\{|I| : I \in \boldsymbol{I}_1 \cap \boldsymbol{I}_2\} = \min_{X \subseteq E}\{r_1(X) + r_2(\overline{X})\}.$$

الإثبات: ((Seymour (1976) للثنوية الضعيفة، خذ في الحسبان صورة اختيارية

$I \in \boldsymbol{I}_1 \cap \boldsymbol{I}_2$ و $X \subseteq E$. إنَّ المجموعتين $I \cap X$ و $I \cap \overline{X}$ هما كذلك مجموعتان مستقلتان مشتركتان $|I| = |I \cap X| + |I \cap \overline{X}| \leq r_1(X) + r_2(\overline{X})$.

للوصول إلى المساواة؛ نستخدم الاستقراء على $|E|$. عندما $|E| = 0$، فإن كلا الطرفين يساوي 0. وإذا كان كلّ عنصر في E عروة في M_1 أو في M_2، فإن $\text{Max} |I| = 0 = r_1(X) + r_2(\overline{X})$، حيث X تتكون من العرى جميعها في M_1. لذا، بإمكاننا افتراض أن $|E| > 0$، وأنه يوجد $e \in E$، حيث إن e ليس عروة في كلا الماترويدين. اجعل $F = E\text{-}e$، وخذ في الحسبان الماترويدات الآتية: $M_1|F$، $M_2|F$، $M_1.F$، و $M_2.F$.

افترض أن $k = min_{X \subseteq E}\{r_1(X) + r_2(\overline{X})\}$؛ نبحث عن مجموعة مستقلة حجمها K مشتركة بين M_1 و M_2. وإنْ لم نجد مثل هذه المجموعة، فلا توجد لـ $M_1|F$ و $M_2|F$ مجموعة مستقلة حجمها K، وأنه لا توجد لـ $M_1.F$ و $M_2.F$ مجموعة مشتركة مستقلة حجمها $k\text{-}1$. من فرض الاستقراء ومن صيغ الرتبة (النظرية 43.2.8) نجد أن

$r_1(X) + r_2(F - X) \leq k\text{-}1$ لبعض $X \subseteq F$ وأن $r_1(y+e) -1 + r_2(F - y+e) -1 \leq k - 2$ لبعض $Y \subseteq F$.

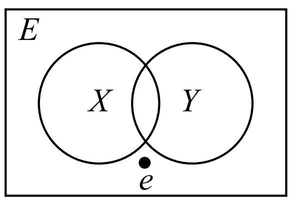
استخدم $(F - Y) + e = \overline{Y}$ و $F - X = \overline{X + e}$ وجمع المتباينتين للحصول على أن:

$$r_1(X) + r_2(\overline{X} + e) + r_1(Y + e) + r_2(\overline{Y}) \leq 2k + 1.$$

الآن، نطبق المقياسية الجزئية لـ r_1 على X و $Y+e$، والمقياسية الجزئية لـ r_2 على $\overline{Y}$ و $\overline{X + e}$، للتوضيح؛ اكتب $U = X + e$ و $V = Y + e$. وطبِّق ذلك على المتباينة السابقة لتجدَ أنَّ:

$$r_1(X \cup V) + r_1(X \cap V) + r_2(\overline{Y} \cup \overline{U}) + r_2(\overline{Y} \cup \overline{U}) \leq 2k - 1.$$

بما أن $\overline{Y} \cap \overline{U} = \overline{X \cup V}$ ، و $\overline{Y} \cup \overline{U} = \overline{X \cap V}$، فإن الجانب الأيسر يجمع شاهدَيْن (مثلَين) على $r_1(Z) + r_2(\overline{Z})$، وأنَّ الفرض $k \leq r_1(Z) + r_2(\overline{Z})$ لكلٍّ $Z \subseteq E$ يعطينا أن $2k \leq 2k - 1$ إذن، لا توجد مجموعة مستقلة حجمها k مشتركة بين M_1 و M_2. ■



تنويه: ربما يكون مفيدًا حصر مدى التصغير.

49.2.8. نتيجة: افترض أن M_1 و M_2 ماترويدان معرَّفان على E، إن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة بينهما هو أصغر قيمة لـ $r_1(X_1) + r_2(X_2)$ على المجموعتين X_1 و X_2، بحيث إن $X_1 \cup X_2 = E$، وأن كل X_i مغلقة في M_i. ■

الإثبات: تشير خاصية الاندماج إلى أن $r_i(\sigma_i(X)) = r_i(X)$.

لقد برهنّا حالات خاصة من نظرية تقاطع الماترويدات بطرق ومعانٍ أُخرى، وبرهنّا نظرية كونج وايجرفاري بطرق مختلفة، وقد برهنا التوصيف المميز لفورد وفولكرسون الخاصة بالـ $CSDR_S$ من نظرية منجر في النظرية 25.2.4. وعندما يكون لدينا ماترويدان على المجموعة نفسها، فإن نظرية تقاطع الماترويدات تخبرنا أنه يجب أنْ تكون هناك علاقة أصغر – أكبر لأكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة، وتخبرنا كذلك ماذا يجب أن تكون النتيجة، وتعطينا إثباتًا على ذلك أيضًا.

50.2.8. نتيجة : ((Konig (1931)) و ((Egerv'ary (1931)) في أي بيانٍ ثنائي الفرع، يكون حجمُ أكبر مواءمة مساويًا لحجم أصغر غطاء رؤوس.

الإثبات: عندما يكون كلّ من M_1 و M_2 هما ماترويدي التجزئة المستحدثَيْن من قِبَل مجموعتي التجزئة لرؤوس U_1 G و U_2، فإن المواءمات هي المجموعات المستقلة المشتركة بين M_1 و M_2.. إذا كانت $X_1, X_2 \subseteq E$، فإن الرتبة $r_i(X_i)$ تحسب رؤوس U_i التي تقع على أضلاع في X_i ومن هنا، إذا كانت $E = X_1 \cup X_2$، فإنه يوجد لـG غطاء رؤوس من الحجم $r_1(X_1) + r_2(X_2)$ باستخدام رؤوس U_i لتغطية X_i. وبالعكس، إذا كان $T_1 \cup T_2$ غطاء رؤوس بحيث إن $T_i \subseteq U_i$، فاجعل X_i تساوي مجموعة الأضلاع التي تقع على T_i، فيكون لدينا $X_1 \cup X_2 = E$، بحيث إن X_i مغلقة في M_i، وأن $r_1(X_1) + r_2(X_2) = |T_1| + |T_2|$. نستنتج أن:

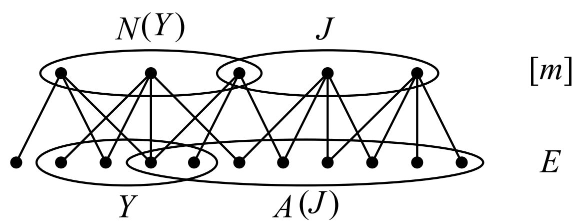
$$\alpha'(G) = max\ \{|I|: \mathbf{I} \in \boldsymbol{I}_1 \cap \mathbf{I}_2\} = min\{r\,(X)_1 + r_2\,(X_2)\} = \boldsymbol{\beta}\,(G) \qquad \blacksquare$$

تنويه: النتيجة الآتية تستخدم دالة الرتبة للماترويدات المستعرضة.

51.2.8. مثال: الماترويدات المستعرضة (انظر المثال 13.2.8). افترض أن $A_1\ U\ ....\ U\,A_m = E$، وافترض كذلك أن G هي بيان الوقوع المناظر الذي مجموعاته الجزئية E و $[m]$. خذ في الحسبان $X \subseteq E$ إذا كانت $|N(Y)\,| < |Y|$ لبعض $Y \subseteq X$ ، فإن Y تُجبر وجود $|Y| - |N(Y)|$ عنصر غير مُشبع في X وبتطبيق شرط هال (Halls Condition) على X فإن $r(X) = \min\ \{|X| - (|Y| - |N(Y)|: Y \subseteq X)\}$ (التمرين 51).

نحصل على تعبير آخر لـ$r(X)$ (انظر أور، Ore (1955)). افترض أنه بدلالة البيان $A(J) = U_{i\in_J} Ai$، لاحظ أن $A(J) = N(J)$ وبتطبيق شرط هال على $[M]$، نستطيع كتابة أكبر حجم لمواءمة على الصورة $r(M) = \min\{m - (|J| - |A(J)|\ : J \subseteq [m])\}$ لتحديد أكبر عدد من العناصر في $X \subseteq E$ التي يمكن مواءمتها، فإننا نهمل عناصر $E - X$، وبذلك نحصل على:

$$r(X) = \min_{J\subseteq [m]}\{|A(J) \cap X\,|- |J| + m\}$$



إن الصيغة الأولى لـ $r(X)$ تستخدم جوارات المجموعات الجزئية من E، أمّا الصيغة الثانية فتستخدم جوارات المجموعات الجزئية من $[m]$ يبرهن التمرين 53 مباشرة أن صيغة الرتبة الثانية هي دالة الرتبة لماترويد دون الاعتماد على نتائج من مواءمات ثنائي الفرع. تجد المزيد من المعلومات عن الماترويدات المستعرضة في (Mirsky (1971)) وفي ((Lova'sz- plummer (1986)). ■

52.2.8. نتيجة : ((Ford-Fulkerson (1958)) يوجد نظام مشترك من التمثيلات المختلفة ($CSDR$) للعائلات $\boldsymbol{A} = \{A_1, \ldots ,A_m\}$ و $\boldsymbol{B} = \{B_1, \ldots ,B_m\}$ إذا وفقط إذا تحقق لكل $I, J \subseteq [m]$ أن

$$|(U_{i\in I}\, Ai) \cap (\cup_{i\in J}\, B_j)| \geq |I| + |J| - m|$$

الإثبات: إن الـSDR الجزئي المشترك هو مجموعة مستقلة مشتركة في الماترويدين المستعرضين M_1 و M_2 المستحدثين على E من قبَل $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$، ولتحديد متى يوجد CSDR تامًّا، فنحتاج إلى إعادة صياغة الشرط $r_1(X) + r_2(\overline{X}) \geq m$ فقط لإيجاد الشرط المناسب على أنظمة المجموعة.

إن صيغ الرتبة من المثال 51.2.8. تعطينا أن:

$$r_1(X) + \mathrm{r}_2(\overline{\mathrm{X}}) = \min_{I \subseteq [m]} \{|A(I) \cap X| - |I| + m\} + \min_{J \subseteq [m]} \{|B(J) \cap \overline{X}| - |J| + m\}$$

لذا فإن $r_1(X) + r_2(\overline{X}) \geq m$ إذا وفقط إذا تحقق أن

$$|A(I) \cap X| + |B(J) \cap \overline{X}| \geq |I| + |J| - m$$ لكل $X \subseteq E$ و $I,J \subseteq [m]$.

إذا أعطيت I و J، فخذ في الحسبان مساهمة عنصر من E في الجانب الأيسر إن كلَّ عنصر من $A(I) \cap B(J)$ يُحسب مرة واحدة سواء أكان في X أم في $\overline{X}$، وعناصر $A(I) - B(J)$ تُحسب إذا وفقط إذا كانت تنتمي إلى $\overline{X}$ لذا، فإن الجانب الأيسر يُصَغَّر إلى الحدّ الأدنى لـ I و J عندما $A(I) - B(J) \subseteq \overline{X}$، و $B(J) - A(I) \subseteq X$، وفي هذه الحالة يكون الجانب الأيسر مساويًا $|A(I) \cap B(J)|$، وهذا يعطينا شروط فورد وفولكرسون. ■

طريق المسار الموسع إلى مواءمة كبرى لثنائي الفرع يُعَمَّمُ إلى تقاطع الماترويدات، حيث تعطي الخوارزمية مجموعة مستقلة مشتركة I حجمها أكبر ما يمكن، ومجموعة X بحيث إن $|I| = r_1(X) + r_2(\overline{X})$، انظر (Lawler [1976]). و(Edmonds [1979]) و (Faigle [1987]).

اتحاد الماترويدات (Matroid Union)

إن تقاطع ماترويدين نادرًا ما يكون ماترويد، إلا أن مفهومًا طبيعيًّا لاتحاد ماترويدين يعطينا ماترويد. إن مفهوم الاتحاد بالإضافة إلى علاقة أصغر أكبر المفيدة لدالة الرتبة، هو محتوى نظرية اتحاد الماترويدات. تعدُّ مبرهنات تقاطع الماترويدات واتحادها متكافئة، حيث اشتقت كلٌّ منهما من الأخرى. لقد أثبت ولش (Welsh (1976)) نظرية اتحاد الماترويدات أولاً، وهنا سنبرهن نظرية تقاطع الماترويدات أولاً.

53.2.8. تعريف: الاتحاد $M_1 \cup \ldots \cup M_k$ للأنظمة الوراثية $M_1, \ldots M_2$ على E هو النظام الوراثي M على E المعرَّف على الصورة الآتية: $\boldsymbol{I}_M = \{I_1 \cup \ldots \cup I_k : I_i \in \mathrm{I}_i\}$ وأن الجمع المباشر $M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ للأنظمة الوراثية $M_1, \ldots M_k$ على المجموعات المنفصلة $E_1, \ldots E_k$ هو النظام الوراثي على M على $E_1 \cup \ldots \cup E_k$ المعرف على الصورة الآتية: $\mathrm{I}_m = \{I_1 \cup \ldots \cup I_k : I_i \in \boldsymbol{I}_i\}$.

يمكن التعبير عن الجمع المباشر $M_1 \oplus \ldots \oplus M_k$ على $E_1, \ldots E_K$ بوصفه اتحادًا لـ $M'_1, \ldots, M'_K$ على $E' = E_1 \cup \quad \cup E_K$، وذلك بجعل M'_i نسخة من M_i مع العناصر الإضافية لـ $E' - E_i$ التي تضاف بصفتها عرى في الحالة التي يكون فيها كل من M'_i ماترويد موحَّدًا، فإن الجمع المباشر يكون ماترويد تجزئة مُعمّمًا. هنا $E_1, \ldots E_r$ تجزئ E، توجد أعداد صحيحة موجبة $r_1, \ldots, r_K$، و $X \in \mathbf{I}$ إذا تحقق أن $|X \cap E_i| \leq r_i$.

إن ماترويد التجزئة الذي تمّ تعريفه سابقًا يظهر عندما $r_i = 1$ لكل i.

54.2.8. قضية. إذا كانت $M_1, \ldots M_k$ ماترويدات معرَّفة على مجموعات منفصلة $E_1, \ldots E_k$، فإن الجمع

المباشر $M = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ يكون ماترويد.

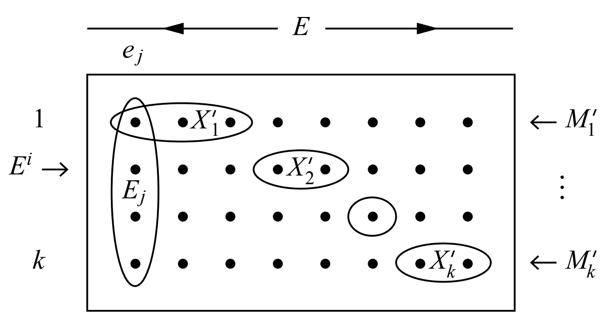
الإثبات: بما أن $E_1,\dots E_k$ منفصلة زوجًا زوجًا، فإن التقاطع لأي $I \in \mathbf{I}$ مع كل E_i يكون مجموعة مستقلة في M_i. إذا كانت كل من $I_1, I_2 \in \boldsymbol{I}$ و $|I_2| > |I_1|$، فإن $|I_2 \cap E_i| > |I_1 \cap E_i|$ لبعض i وبما أن كلًّا من المجموعتين مستقلة في M_i، فبإمكاننا توسيع $I_1 \cap E_i$ من $I_2 \cap E_i$ واستنادًا إلى ذلك، يمكن توسيع I_1 من I_2. لذا، فإن $M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ يحقق خاصية التوسيع. ■

تنويه: باستخدام الجمع المباشر، نستطيع برهنة أن اتحاد الماترويدات يكون ماترويد دائمًا، وكذلك نحسب دالة الرتبة.

55.2.8. نظرية. نظرية اتحاد الماترويدات لـ (Edmonds-Fulkerson (1965) و Nash-Willams(1966))
إذا كانت $M_1 , \dots , M_k$ ماترويدات على E لها دوال رتبة $r_1 , \dots , r_K$، فإن $M = M1 \cup , \dots , \cup M_k$ يكون ماترويد، دالة رتبته $r(X) = \min\limits_{Y \subseteq X} (| X - Y| + \sum r_i(Y))$.

الإثبات: (باتباع شرجفر Shrijver). بعد إثبات الصيغة لدالة الرتبة، سنحقق خاصية المقياسية الجزئية لإثبات أن M عبارة عن ماترويد. أولاً، نختزل حسب دالة الرتبة لحساب $r(E)$ في حصر النظام الوراثي M على المجموعة X، يكون لدينا $\mathbf{I}_{M|X} = \{Y \subseteq X : Y \in \mathbf{I}_M\}$ و $r_{M|X}(Y) = r_M(Y)$ لـ $Y \subseteq X$ لذا، فإن $M \mid X = U_i (M_i \mid X)$ وبتطبيق صيغة الرتبة للاتحاد كلّه على M/X نحصل على $r_M(X)$.

خذ في الحسبان شبكة حجمها k في $|E|$ من العناصر E' التي فيها العمود رقم j, E_j يتألف من k نسخة من العنصر $e_j \in E$. نعرِّف ماترويدين N_1 و N_2 على E' بحيث يساوي أكبر حجم لمجموعة مستقلة في N_1 و N_2 أكبر حجم لمجموعة مستقلة في M. ومن ثمَّ نحسب $r_M(E)$ بتطبيق نظرية تقاطع الماترويدات على N_1 و N_2 اجعل M'_i نسخة من M_i معرَّفة على العناصر E^i للصَّف i في E'. واجعل N_1 يساوي ماترويد الجمع المباشر $M'_1 \oplus \dots \oplus M'_k$، و N_2 يساوي ماترويد التجزئة المستحدث على E' من تجزئة الأعمدة $\{E_j\}$.



لكل مجموعة $X \subset \mathbf{I}_M$ تفكيك بصفته اتحادًا منفصلًا لمجموعات جزئية $X_i \in \mathbf{I}_i$، لأن $\boldsymbol{I}_i$ عائلة وراثية. إذا أُعطيتَ تفكيكًا لـ $\{X_i\}$ $X \in \mathbf{I}_M$، فاجعل X'_i نسخة من X_i في E^i. بما أن $\{X_i\}$ منفصلة، فإن $\cup X'_i$ يكون مستقلًّا في N_2، و $X_i \in \mathbf{I}_i$ تعطي أن $\cup X'_i$ يكون مستقلًّا كذلك في N_1. من $X \in \mathbf{I}_M$، نكون قد بنينا $\cup X'_i$ من الحجم $|X|$ في $\mathbf{I}_{N1} \cap \mathbf{I}_{N2}$ وبالعكس، فإن أي $X' \in \mathbf{I}_{N1} \cap \mathbf{I}_{N2}$ ترتبط بتفكيك لمجموعة في $\mathbf{I}_M$ من الحجم $|X'|$ عندما يُنتقل المجموعات $X' \cap E'$ رجوعًا إلى E؛ لأن N_2 تمنع حصول نسخ مضاعفة من العناصر. لذا، فإن

$r(E) = max \{|I| : I \in \mathbf{I}_{N1} \cap \boldsymbol{I}_{N2}\}$. ولحساب هذا، اجعل دالتي رتبة N_1 و N_2 هما q_1 و q_2، واجعل r'_i هي دالة الرتبة للنسخة M'_i من M_i على E^i. لدينا $q_1 (X') = \sum r'_i (X' \cap E^i)$، $q_2 (X')$ تساوي عدد عناصر E التي لها نُسخ في X'. إن نظرية تقاطع الماترويدات تعطينا أن: $r (E) = min_{X' \subseteq E'} \{q_1 (X') + q_2 (E' - X')\}$.

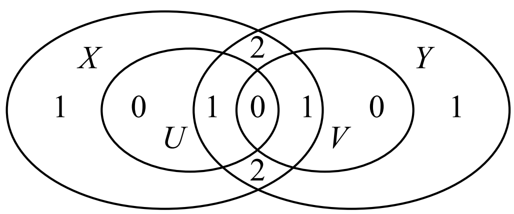
من النتيجة 49.2.8 نجد أن الأصغر (min) يتحقق من قبَل مجموعة X' حيث $E' - X'$ تكون مغلقة في N_2. إن المجموعات المغلقة في ماترويد التجزئة N_2 هي المجموعاتَ التي تحوي كلَّ شيء أو لا شيء من النسخ لكل عنصر – اتحادات الأعمدة الكلية لـE'. إذا أعطينا X' بحيث $E' - X'$; مغلقة في N_2. اجعل $Y \subseteq E$ هي مجموعة العناصر التي تشتمل نسخها X'. إذن، $q_2 (E' - X') = | E - Y|$ و X' تحوي نسخ العناصر Y جميعها. لذا، فإن $q_1 (X') = \sum r'_i (X' \cap E') = \sum r_i (Y)$ وبذلك، نستنتج أن $r (E) = \min_{Y \subseteq E} \{| E - Y | + \sum r_i (Y)\}$.

لبرهنة أن M ماترويد، سنحقّق المقياسية الجزئية لـr. افترض أنَّ $X, Y \subseteq E$ إنَّ صيغة r تعطينا أنه يوجد $U \subseteq X$ و $V \subseteq Y$ بحيث $r (X) = | X - U| + \sum r_i (U); r (Y) = | Y - V| + \sum r_i (V)$ وبما أن $U \cap V$ $\subseteq X \cap Y$، و $U \cup V \subseteq X \cup Y$ فإننا نحصل على:

$$r (X \cap Y) \leq |(X \cap Y) - U \cap V | + \sum r_i (U \cap V);$$
$$r(X \cup Y) \leq |(X \cup Y) - U \cup V| + \sum r_i (U \cup V);$$

وبعد تطبيق المقياسية الجزئية لكل r_i والشكل أدناه، فإن هذه المتباينات تقود إلى أن:

$r(X \cap Y) + r (X \cup Y) \leq (X) + r(Y)$. ■



$$\left|\left(X \cap Y\right) - \left(U \cap V\right)\right| + \left|\left(X \cup Y\right) - \left(U \cup V\right)\right| = \left|X - U\right| + \left|Y - V\right|$$

لتطبيق نظرية تقاطع الماترويدات؛ يجب أن يكون N_1 ماترويد، وهذا يتطلب أن تكون الـ$\{M_i\}$ ماترويدات. لذا، فإن صيغة الرتبة هذه لا تنطبق على اتحادات لأنظمة وراثية اختيارية.

إن نظرية اتحاد الماترويدات تعطينا براهين قصيرة لعلاقات أصغر- أكبر لمسائل التغطية والتحزيم. في كل صيغة أدناه، تكون المجموعات الجزئية الأمثل مغلقة؛ وذلك لأن الانتقال (التحويل) من X إلى $\sigma (X)$ يُحسِّن البسط دون تغيير المقام في الأصل، يوجد للنتائج على البيانات براهين صعبة متعلقة بهذا الموضوع خصوصًا.

56.2.8. نتيجة: نظرية تغطية الماترويدات (Edmonds [1965 b]) إذا كان M ماترويد خاليًا من العرى على E، فإن أقل عدد من المجموعات المستقلة التي اتحادها E هو $axX \subseteq E$ $\max_{X \subseteq E} \left\lceil \frac{|X|}{r(X)} \right\rceil$

الإثبات: افترض أن $M_1, \ldots M_k$ نسخ من M على E. إن المجموعة E هي اتحاد لـk من المجموعات المستقلة في M إذا وفقط إذا كانت E مستقلة في $M' = M_1 \cup \ldots \cup M_k$. ومن نظرية اتحاد الماترويدات، نجد أن $r' (E) \geq |E|$ تكافئ $|E| - |Y| + \sum r_i (Y) \geq |E|$ لكل $Y \subseteq E$، وبما أن $r_i (Y) = r(Y)$ لكل I، فإننا نستنتج

أن E اتحاد k مجموعة مستقلة إذا وفقط إذا كان $|Y| \geq k\,r\,(Y)$ لكل $Y \subseteq E$. ■

57.2.8. نتيجة: (Nash-Williams [1964]) إن أقل عدد من الغابات يلزم لتغطية أضلاع بيان G (يسمى تشجير G) يساوي $\mathrm{Max}_{H \subseteq G}\left\lceil \frac{e(H)}{n(H)^{-1}} \right\rceil$.

الإثبات: (Edmonds [1965b]) يتبع هذا فورًا من تطبيق النتيجة 56.2.8. على $M(G)$. إن أفضل حد أدنى يظهر من بيان جزئي مستحدث مترابط H (يرتبط بمجموعة مغلقة في $M(G)$). ■

58.2.8. نتيجة: نظرية تحزيم الماترويدات (Edmonds [1965c]) إذا كان لدينا ماترويد M على E، فإن أكبر عدد من الأساسات المنفصلة زوجًا زوجًا يساوي $\min_X : r(x) < r(e) \left\lfloor \frac{|E| - |X|}{r(E) - r(X)} \right\rfloor$

الإثبات: المجموعة E تحوي k من الأساسات المنفصلة إذا وفقط إذا كانت $r'(E) \geq k\,r\,(E)$ في الاتحاد M' للماترويدات $M_1, \ldots M_k$ التي هي نسخ من M على E من نظرية اتحاد الماترويدات، نجد أن هذا يتطلب تحقيق $|E| - |Y| + \sum r_i\,(Y) \geq k\,r\,(E)$ لكل $Y \subseteq E$، وبما أن $r_i\,(Y) = r\,(Y)$ لكل i، فإننا نستنتج وجود K أساسًا منفصلاً إذا وفقط إذا تحقق أن $|E| - |Y| \geq k\,(r(e) - r\,(Y))$ لكل $Y \subseteq E$. ■

59.2.8. نتيجة: (Tutte [1961a] [1961] Nash- Williams)

للبيان G، يوجد k شجرة مولدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا إذا وفقط إذا وُجِدَ لكل تجزئة P للرؤوس $k\,(|P| - 1)$ ضلعًا على الأقل، بحيث تكون نقاطها الطرفية موجودة في مجموعات مختلفة من مجموعات P.

الإثبات: (Edmonds [1965c]). لاحظ أنه يمكن افتراض أن G مترابط. وبتطبيق النتيجة 58.2.8 على $M(G)$، يجب أن نحدد متى تكون $|E| - |X| \geq k\,(r(E) - r\,(X))$ لكل مجموعة مغلقة X. إن المجموعات المغلقة مترابطة بتجزئات لـ$V(G)$ إلى مجموعات رؤوس تحدث بيانات جزئية مترابطة لكل تجزئة $V_1, \ldots\ V_p$. إن المجموعة المغلقة X المرتبطة هي $\cup\ E\ (G\ [V_i])$ التي رتبتها $n - p$. وبما أن $|E| - |X|$ تَحْسبُ الأضلاع بين مجموعات التجزئة، وأن $r(E) - r\ (X) \geq p - 1$، فإن للبيان K شجرة مولدة منفصلة إذا وفقط إذا تحقق الشرط. ■

تمارين (Exercises)

1.2.8.(−) أثبت أن المجموعات المستقرة لبيان لا تكون بالضرورة هي المجموعات المستقلة لماترويد، وذلك من خلال إيجاد بيانات موزونة الرؤوس؛ حيث إن النسبة بين أكبر وزن لمجموعة مستقرة الوزن الذي تم إيجاده بجشع إلى مجموعة مستقرة تكون كبيرة اختياريًّا.

2.2.8.(−) أعطِ توصيفًا مميّزًا للبيانات التي تشكّل مجموعاتها المستقرة عائلة من المجموعات المستقلة لماترويد على مجموعة الرؤوس.

3.2.8.(−) أثبت أنَّ كلَّ ماترويد تجزئة يكون ماترويد مستعرضًا.

4.2.8. عدِّل الخوارزمية الجشعة لتحصل (مع إثبات) على خوارزمية لإيجاد مجموعة مستقلة موزونة كبرى في ماترويد له أوزان حقيقية اختيارية (ليست بالضرورة غير سالبة) على العناصر.

5.2.8. أعطِ توصيفًا مميَّزًا للبيانات التي تشكّل مواءمتها عائلة من المجموعات المستقلة لماترويد على مجموعة الأضلاع.

6.2.8.(!) حدِّد الماترويدات الموحدة التي تكون متحققة بيانيًّا. وأعطِ توصيفًا مميَّزًا للبيانات التي ماترويدات حلقاتها تكون ماترويدات موحَّدة.

7.2.8.(!) حدِّد ماترويدات التجزئة التي تكون متحققة بيانيًّا. وأعطِ توصيفًا مميَّزًا لماترويدات الحلقات التي تكون ماترويدات تجزئة.

8.2.8. باستخدام الاعتماد الخطِّيِّ فقط، أثبت أن الماترويدات المتجهة تحقق خاصية الحلقات المُسْتحدثة: إن

إضافة عنصر واحد إلى مجموعة مستقلة من المتجهات يُوجد مجموعة غير مستقلة واحدة على الأكثر.

9.2.8. صف حلقات الماترويد المستعرض M بدلالة البيان الثنائي الفرع المناظر G، باستخدام خواص البيانات الثنائية الفرع فقط. وبرهن أن M تحقق خاصية الحذف الضعيف.

10.2.8. افترض أن $M(G)$ هي ماترويدات الحلقات لـG. وافترض كذلك أن $k(X)$ تساوي عدد مركبات البيان الجزئي المولِّد G_X الذي مجموعة أضلاعه هي X. وبذلك، فإن $r\left(X\right) = n - k\left(X\right)$. اجعل U و V مجموعتي المركبات في G_X و G_Y على الترتيب، واجعل H تساوي البيان الثنائي الذي مجموعتا رؤوسه هما: U و V، حيث $U \leftrightarrow v$ عندما تتقاطع المركبات المرتبطة في u و v:

a) احسب عدد رؤوس مركبات H بدلالة الأعداد $k(X), k(Y)$ و $k\left(X \cap Y\right)$. أثبت أن $k\left(X \cup Y\right) \geq e\left(H\right)$

b) استخدم فرع (a) لبرهنة خاصية المقياسية الجزئية لـ$M(G)$ دون استخدام أيّ خواص أخرى للماترويدات. (Aigner [1979]).

11.2.8. استخدم نظرية كونج وايجرفاري (König –Egerv'ary) لتبرهن - مباشرة - أن دالة الرتبة للماترويد المستعرض تكون مقياسية جزئية.

12.2.8. افترض أن D بيان موجه له منبع مميَّز s ومصبّ t. لتكن $E = V\left(D\right) - \left\{s,t\right\}$، لـ $X \subseteq E$، اجعل $r\left(X\right)$ تساوي عدد الأضلاع من $S \cup X$ إلى $\overline{X}\,Ut$. أثبت أن r مقياسية جزئية.

13.2.8. (-) إذا كان X ينتمي إلى نظام وراثي، أثبت أن الخواص الآتية تكون متكافئة وتعطي توصيفًا مميزًا للعرى:

a) $r\left(x\right) = 0$

b) $x \in \sigma\left(\phi\right)$

c) x حلقة

d) x لا ينتمي إلى أيِّ أساس.

e) كلٌّ مجموعة تحتوي على x تكون غير مستقلة.

f) x تنتمي إلى مولد كل $X \subseteq E$

14.2.8. أثبت تكافؤ التوصيفات المُميَّزة الآتية للعناصر المتوازية على افتراض أن $X \neq Y$، وأن أيًّا منها ليس عروة:

a) $r\left(x,y\right) = 1$ b) $\{x,y\} \in \mathcal{C}$ c) $r\left(X\right) = r\left(Y\right) = 1,\quad Y \in \sigma\left(X\right),\quad X \in \sigma\left(Y\right)$

15.2.8. (-) افترض أنَّ $r\left(X\right) = r\left(X \cap Y\right)$ لبعض $X, Y \subseteq E$ في ماترويد على E. أثبت أن $r\left(X \cup Y\right) = r\left(Y\right)$ هل يتحقق العكس؟

16.2.8. افترض أنَّ M نظام وراثيّ بأوزان غير سالبة على E، أثبت - مباشرة - أنه إذا كان M يحقق خاصية تبديل الأساس (B)، فإن الخوارزمية الجشعة تولِّد دائمًا أساسًا موزونًا أعظم.

17.2.8. بديهيات ماترويد بديلة. افترض أنَّ M نظام وراثيّ، أثبت تضمينات M الآتية مباشرةً:

a) تتضمّن (-) المقياسية الجزئية (R) الامتصاص الضعيف (A).

b) يتضمّن الامتصاص القوي (A') المقياسية الجزئية(R) (دون استخدام الانتظام (الاتساق)). (مساعدة: استخدام الاستقراء على $\left|X \Delta Y\right|$).

c) يتضمّن تبديل الأساس (B) وحدانية الحلقات المستحدثة (J).

d) تتضمّن (-) وحدانية الحلقات المستحدثة (J) الحذف الضعيف (C).

e) تتضمّن وحدانية الحلقات المستحدثة (J) التوسيع (I). (مساعدة: استخدم J والاستقراء على $\left|I_1 - I_2\right|$ لتحصل على التوسيع).

18.2.8. أثبت أنَّ النظام الوراثي يكون ماترويد إذا وفقط إذا حقَّق خاصية التوسيع فوق الضعيف (الشديد الضعف): إذا كانت $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ بحيث إن $\left|I_2\right| > \left|I_1\right|$ و $\left|I_1 - I_2\right| = 1$، فإن $I_1 + e \in \mathbf{I}$ لبعض $e \in I_2 - I_1$. (Chappell [1994a]).

19.2.8. (-) افترض أنَّ M ماترويد على E، وثبِّت $A \subseteq E$. واحصل على $\mathbf{I}'$ من $\mathbf{I}$ بحذف المجموعة التي تقطع A. أثبت أن $\mathbf{I}'$ هي عائلة المجموعات المستقلة لماترويد على E.

20.2.8. افترض أنَّ M ماترويد على E، وأنَّ $e \notin B \in \mathbf{B}$. اجعل $C\left(e,B\right)$ تمثِّل الحلقة الوحيدة في $B + e$

a) إذا كانت $e \notin B$، أثبت أنَّ $B - f + e$ تكون أساسًا إذا وفقط إذا كان f ينتمي إلى $C\left(e,B\right)$.

b) لـ $e \in C \in \mathcal{C}$، أثبت أنَّ $C = C\left(e,B\right)$ لأساس B.

21.2.8. (-) افترض أنَّ B_1 و B_2 أساسان لماترويد بحيث إنَّ: $\left|B_1 \Delta B_2\right| = 2$. أثبت على وجود حلقة وحيدة C، بحيث إن $B_1 \Delta B_2 \subseteq C \subseteq B_1 \cup B_2$.

22.2.8. (-) افترض أنَّ B_1, B_2 أساسان لماترويد M. إذا كانت $X_1 \subseteq B_1$، فبرهن على وجود $X_2 \subseteq B_2$، بحيث إن $\left(B_1 - X_1\right) \cup X_2$ و $\left(B_2 - X_2\right) \cup X_1$ يكونان أساسين لـ M ([Greene [1973])

23.2.8. (!) افترض أن B_1 و B_2 أساسان مختلفان لماترويد M:

a) افترض أن G بيان ثنائي بحيث إن B_1 و B_2 هما مجموعتا رؤوسه، وأن $e \in B_1$ يجاور $f \in B_2$ وذلك عندما يتحقق أن $B_2 + e - f \in \boldsymbol{B}$. أثبت على وجود مواءمة كاملة لـ G.

b) استنتج من الفرع (a) وجود اقتران تناظر $\pi : B_1 \rightarrow B_2$ بحيث إن المجموعة $B_2 - \pi\left(e\right) + e$ تشكل أساسًا لـ M لكل $e \in B_1$.

24.2.8. (!) افترض أنَّ B_1 و B_2 أساسان مختلفان لماترويد M:

a) أثبت أنه لكل $e \in B_1$ يوجد $f \in B_2$، بحيث إن $B_1 - e + f$ و $B_2 - f + e$ تكون أساسات (مساعدة: استخدم خاصية الشراكة (الاندماج) لاحظ أن هذا يعمّم التمرين 34.1.2).

b) استخدم ماترويد الحلقات $M(K_4)$ لتبرهن أنه ربما لا توجد أيّ دالة تناظر $\pi : B_1 \rightarrow B_2$ بحيث إن $\boldsymbol{e}$ و $f = \pi\left(e\right)$ يحققان فرع (a) لكل $e \in B_1$.

25.2.8. (-) إن جمعًا مؤلفًا من $\left|E\right| - r\left(E\right)$ هو حلقة لماترويد على E يشكل مجموعة أساسية من الحلقات إذا أمكن ترتيب العناصر $e_1, \ldots, e_n$ بطريقة ما، بحيث إن C_i تحوي $e_{r(E)+i}$ ولكنها لا تحوي عنصرًا دليله أعلى من ذلك. أثبت على وجود مجموعة أساسية من الحلقات لكل ما ترويد. (Whitney [1935]).

26.2.8. (-) إذا أعطيت k من الحلقات المختلفة $\left\{C_i\right\}$ بحيث لا يكون أيّ منها محتوًى في اتحاد البقية، وإذا أعطيت كذلك مجموعة X بحيث إن $\left|X\right| < K$، فبرهن أن $\bigcup_{i=1}^{K} Ci - x$ يحوي حلقة، (Welsh [1976]).

27.2.8. (+) لأيِّ نظام وراثيّ، أثبت أن خاصية الحذف الضعيف تتضمّن خاصية الحذف القوي مستخدمًا الاستقراء على $\left|C_1 \cup C_2\right|$، (Lehman [1964]).

28.2.8. (!) علاقة أصغر – أكبر لمجموعة مستقلة موزونة. افترض أن M ماترويد على E، وأن $e \in E$، بحيث إن وزن ($w(e)$) غير سالب. اجعل A تساوي مجموعة في السلاسل $\ldots\ldots \subseteq X_2 \subseteq X_1$، بحيث تظهر كل $e \in E$ على الأقل في $w(e)$ مجموعة في السلسلة (ربما تُكَرَّرُ المجموعات في السلسلة). استخدم الخوارزمية الجشعة لتبرهن أن: $\max_{i \in \mathrm{I}} \sum_{e \in l} w(e) = \min_{(\mathrm{x_i} \in \mathrm{A})} \sum_i r(X_i)$.

29.2.8. (-) افترض أن $\boldsymbol{r}$ و σ هما دالتا الرتبة والتوليد لماترويد ما. أثبت أن:

$$r(X) = min\{|Y|: Y \subseteq X, \sigma(Y) = \sigma(X)\}$$

30.2.8. أثبت أنه يوجد على الأقل 2^r مجموعة مغلقة للماترويد الذي رتبته r ([Lazarson [1957]).

31.2.8. أثبت أن الماترويد يكون بسيطًا إذا وفقط إذا تحقق ما يأتي: 1) لا يوجد أي عنصر يظهر في كل مستوى زائدي. 2) من كل زوج من العناصر المختلفة، يوجد مستوى زائدي يحوي واحدًا منها بالضبط. أثبت أن هذين الشرطين يكفيان لأن تكون عائلة من المجموعات جمعًا من المستويات الزائدية لماترويد بسيط.

32.2.8. في ماترويد ما، أثبت أن مجموعة تكون تحت أساس إذا وفقط إذا كانت مستوى زائديًّا.

33.2.8. استخدم خاصية الحذف الضعيف في إعطاء توصيف مُميّز عندما تكون عائلة من المجموعات عائلة مستويات زائدة لماترويد ما.

34.2.8. أثبت أن المجموعات المغلقة لماترويد ما هي المتممات لاتحادات مرافقات الحلقات.

35.2.8. افترض أن X مجموعة مغلقة في ماترويد M:

a) لتكن Y مجموعة مغلقة محتواة في X، بحيث إن $r\left(Y\right) = r\left(X\right) - 1$. أثبت أنه يوجد لـ M مستوى زائدي H بحيث $Y = X \cap H$. (مساعدة: إذا كان معطى لدينا مجموعة جزئية مستقلة كبرى Z من Y، فوسِّعها بواسطة $e \in X$، ثمَّ وسِّعها لأساس B، واجعل $H = \sigma\left(B - e\right)$.

b) أثبت أن X هو تقاطع $r\left(M\right) - r\left(X\right)$ من المستويات الزائدية المختلفة.

36.2.8. أثبت الخواص الآتية للمجموعات المغلقة لماترويد:

a) تقاطع أيّ مجموعتين مغلقتين يساوي مجموعة مغلقة.

b) يساوي مولِّدُ أيِّ مجموعة تقاطعَ المجموعات المغلقة جميعها التي تحوي هذه المجموعة. (تعليق: لذا، فإن σX هي المجموعة الوحيدة المغلقة الصغرى التي تحوي X).

37.2.8. أثبت أن $M.X$ لا تحوي عُرًى إذا وفقط إذا كانت $\overline{X}$ مغلقة.

38.2.8. (!) الأساسات ومرافقات الحلقات في الماترويدات:

a) أثبت أنه عندما ينتمي e إلى أساس B في ماترويد M، فإنه يوجد بالضبط مرافق حلقة واحدة في M منفصل عن $B - e$، ويحوي e.

b) استخدم فرع (a) لتبرهن أنه إذا كانت C حلقة في ماترويد M، وكان كلٌّ من x و y عنصرين مختلفين من عناصر C، فإنه يوجد مرافق حلقة $C^* \in \mathbf{C}^*$ بحيث إن $C^* \cap C = \{x, y\}$، (Minty [1966]).

c) فسّر لماذا يكون فرع (b) بديهيًّا وتافهًا لماترويدات الحلقات.

39.2.8. (-) أثبت أن ثنوي الماترويد البسيط (لا يحوي عرى ولا عناصر متوازية) يمكن أن يكون غير بسيط. وبيّن إمكانية أن تكون مجموعة معينة حلقة أو مرافق حلقة في ماترويد ما.

40.2.8. (!) استخدم ثنوية الماترويدات لتبرهن صيغة أويلر لبيانات المستوى المترابطة.

41.2.8. أثبت أن أيَّ فرع لماترويد يمكن الحصول عليه عن طريق الحصر والتقليص، يمكن الحصول عليه كذلك عن طريق التقليص والحصر. وخصوصًا، إذا كان M ماترويد على E، وكانت $Y \subseteq X \subseteq E$، فبرهن أن $(M.X)|Y = (M.\overline{X-Y}).Y$ ، وأن $(M/X).Y = (M/\overline{X-Y}).Y$ ، $(M.X)/Y$.

42.2.8. استخدم مبدأ الثنوية (الازدواجية) وحصر الماترويد لتبرهن أن $r_{M.F}(X) = r_M(X \cup F) - r_M(F)$، وكذلك اشتقت الصيغة مباشرة عن طريق إثبات أن X مستقلة في $M.F$ إذا وفقط إذا كانت إضافة X إلى $\overline{F}$ تزيد الرتبة بمقدار $|X|$.

43.2.8. إثبات أن ماترويد الحلقات $M(G)$ هو ماترويد الأعمدة على $\mathbb{Z}_2$ لمصفوفة وقوع رأس – ضلع للبيان G، (لذا، فإن كلَّ ماترويد متحقق بيانيًّا يكون ثنائيًّا).

44.2.8. لقد أثبت توت (Tutte [1958]) إن الماترويد يكون ثنائيًّا إذا وفقط إذا خلا من $U_{2,4}$ بوصفه فرعًا:

a) أثبت أن المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ تمثل $U_{2,4}$ على $\mathbb{Z}_3$.

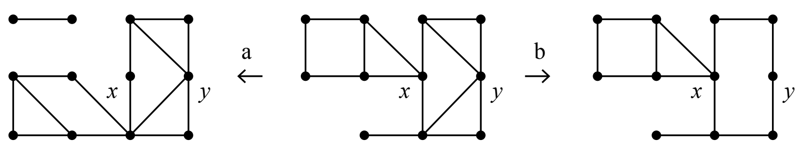
b) أثبت أنه لا يوجد تمثيل لـ $U_{2,4}$ على $\mathbb{Z}_2$.

45.2.8. أثبت أن العمليات الثلاث أدناه تحافظ على ماترويد الحلقات للبيان G:

a) فكّ G لقوالب $B_1, \ldots, B_K$، ثم أعد جمعها لتشكل بيانًا آخر G' قوالبه $B_1, \ldots, B_K$.

b) في قالب B من G الذي له مجموعة قطع من رأسين $\{x, y\}$، بدِّل جيران x و y في أحد مركبات $B - \{x, y\}$

c) أضف الرؤوس المعزولة أو احذفها.



(تعليق: نظرية تشاكل 2– لوتني (Whitney's 2- isomorphismTheorem [1933b]) تنص على أن لـ G و H ماترويد الحلقات نفسه إذا وفقط إذا أمكن تحويل G إلى H من خلال إجراء متتالية من هذه العمليات. لذا، فإن لكل بيان سوي مترابط من الدرجة 3 بيانًا ثنويًّا واحدًا فقط؛ وهذا يعني وجود طمر سوي واحد فقط. انظر (Kelmans [1980])).

46.2.8. جد بيانًا دون رؤوس معزولة، وجد بيانًا ثنويًّا مجردًا له بحيث لا يكون ثنويًّا هندسيًّا. (مساعدة: خذ في الحسبان العمليات الموجودة في التمرين 45.2.8)، (Woodall، في Welsh [1976], P91-92).

47.2.8. إن بيان أساسات الماترويد هو البيان الذي له رأس لكل أساس للماترويد، حيث تكون الأساسات متجاورة إذا كان حجم الغرف التماثلي لهذه الأساسات يساوي 2. أثبت على وجود حلقة مولدة لكل بيان أساسات

ماترويد، ووضح النتيجة لكل من الماترويدات البيانية والموحدة (مساعدة: استخدم التقليص والحصر استقرائيًّا لإيجاد حلقة مولدة من خلال أي ضلع)، (Holzmann-Harary [1972], Kung [1986,p72]).

48.2.8. استخدم الثنوية الضعيفة للبرمجية الخطية لتبرهن الخاصية الثنوية الضعيفة لتقاطع الماترويدات: $|I| \le r_1(X) + r_2(\bar{X})$ لكل $I \subseteq \boldsymbol{I}_1 \cap \boldsymbol{I}_2$ ولكل $X \subseteq E$. (مساعدة: خذ في الحسبان نقاش الأزواج الثنوية للبرامج الخطية في الملاحظة 7.1.8).

49.2.8. افترض أن M_1 و M_2 ماترويدان على E:

a) أثبت أن أصغر حجم لمجموعة في E هو $\max_{X \subseteq E}\left(r_1(E) - r_1(X) + r_2(E) - r_2(\bar{X})\right)$ بحيث إن هذه المجموعة تولد M_1 و M_2. طبق فرع (a) لتبرهن أنه في البيان الثنائي الفرع الذي ليس له رؤوس معزولة يكون أصغر عدد من الأضلاع يلزم لتغطية الرؤوس جميعها مساويًا لأكبر عدد من الرؤوس التي لا يوجد بينها أضلاع (نظرية Koing "الأخرى").

b) من فرع (a) أثبت أن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة إضافة إلى أصغر حجم لمجموعة مُولدة مشتركة يساوي $r_1(E) + r_2(E)$. استنتج نظرية جالاي (Gallai) للبيانات الثنائية الفرع: في أي بيان ثنائي الفرع الذي ليس له رؤوس معزولة، يكون أكبر حجم لمواءمة إضافة إلى أصغر عدد من الأضلاع يلزم لتغطية الرؤوس مساويًا لعدد الرؤوس.

50.2.8. استخدم نظرية تقاطع الماترويدات لتبرهن أنه في كل توجيه لا حلقي لـG يمكن تغطية الرؤوس على الأكثر بـ $\alpha(G)$ من المسارات المنفصلة زوجًا زوجًا.([Chappell [1994])،(تعليق: هذه حالة خاصة من النظرية 33.4.8. للبيانات الموجهة اللاحلقية).

51.2.8. (-) افترض أن M ما ترويد مستعرض على $E = A_i$ مُسْتحدث من قبَل المجموعات $A_1, \ldots\ldots, A_m$ استخدم نظرية هال (Hall) للمواءمة في البيانات الثنائية الفرع لتشتق دالة الرَتبَة على الصورة:

$$r(X) = \min_{Y \subseteq X}\left\{|X| - \left(|Y| - |\mathrm{N}\,Y|\right)\right\}$$

52.2.8. افترض أن G بيان ثنائي، مجموعتا رؤوسه هما E و $[m]$، وليس له رؤوس معزولة. لـ $X \subseteq E$، افترض أ، $r(X) = \min\left\{|N(J) \cap X| - |J| + m : J \subseteq [m]\right\}$. أثبت أن العبارات الآتية متكافئة لـX:

a) يتحقق شرط هال $|N(S)| \ge |S|$ لكل $S \subseteq X$.

b) $r(X) \ge |X|$

c) تكون X مشبعة من قبَل مواءمة في G.

(مساعدة: إن إثبات $C \Leftarrow B$ يستخدم مسارات من رؤوس غير مشبعة تتناوب بين أضلاع خارجَ مواءمة محددة سلفًا وداخلَها.

53.2.8.(!) افترض أن G بيان ثنائي، مجموعتا رؤوسه هما E و $[m]$، ليس له رؤوس معزولة، لـ $X \subseteq E$ و $J \subseteq [m]$. اجعل $g(X,J) = |N(J) \cap X| - |J|$، واجعل $r(X) = \min\{g(X,J) + m : J \subseteq [m]\}$. نقول:$J$ مثالي بالنسبة إلى X إذا كانت $r(X) = g(X,J) + m$:

a) أثبت أن $r(\phi) = 0$، وأن $r(X) \le r(X+e) \le r(X) + 1$.

b) أثبت أن $\mathbf{r}$ يحقق خاصية الامتصاص الضعيف.

54.2.8. أثبت أن حصر الماترويدات المستعرضة واتحادها يكون ماترويدات مستعرضة، لكن التقليص، والماترويدات الثنوية للماترويدات المستعرضة ليست بالضرورة ماترويدات مستعرضة.

55.2.8. قامويدات. افترض أن D بيان موجه، وإن F و E مجموعتان جزئيتان من $V(D)$، إن القامويد على E الذي تحدثه D و F هو النظام الوراثي المعطى على الشكل: $\mathbf{I}=\{X \subseteq E$: بحيث يوجد $|X|$ من المسارات من F إلى X المنفصلة زوجًا زوجًا}، مكافئًا لذلك فإن $r(X)$ هي أكبر عدد من المسارات من F إلى X المنفصلة زوجًا زوجًا:

a) أثبت أن كل ماترويد مستعرض يكون قامويد.

b) (+) أثبت أن كلّ قامويد هو ماترويد. (مساعدة: استخدم نظرية منجر لتبرهن تحقق خاصية المقياسية الجزئية، بالإضافة إلى أن إثبات تحقق خاصية التوسيع ممكن أيضًا، إلا أنه أطول بعض الشيء)، ([Mason [1972]).

56.2.8. القامويدات التامة. افترض أن D بيان موجه، وافترض كذلك أن F و E مجموعتان جزئيتان من

رؤوس D، واجعل M هو القامويد على E المستحدث من D و E (التمرين 55.2.8). عندما تكون E هي رؤوس D جميعها، فإن القامويد يكون قامويد تامًّا. أثبت أن الماترويد يكون قامويد تامًّا إذا وفقط إذا كان ثنويًّا لماترويد مستعرض. (مساعدة: استخدم الارتباط الطبيعي بين البيانات الموجهة على n من الرؤوس، واستخدم البيانات ثنائية الفرع على $2n$ من الرؤوس)، ([Ingleton –Piff [1973]).

57.2.8. (-) بما أن اتحاد الماترويدات هو ماترويد، فيجب وجود عملية ثنوية تعطي الماترويد الثنوي لهذا الاتحاد. إذا أُعطيتَ ماترويدين M_1 و M_2 بحيث $\mathbf{S}_1$ و $\mathbf{S}_2$ هما المجموعتان المولدتان، افترض أن $M_1 \cap M_2$ هو النظام الوراثي الذي مجموعاته المولدة هي $\left\{X_1 \cap X_2 : X_1 \in \boldsymbol{S}_1, X_2 \in \boldsymbol{S}_2\right\}$. فبرهن أن $M_1 \cap M_2$ هو الماترويد $(M_1^* \cup M_2^*)^*$.

58.2.8. الماترويدات المستعرضة العامة:

a) افترض أن M ماترويد على E، واجعل $\boldsymbol{A} = \left\{A_1, \ldots, A_m\right\}$ نظام مجموعة على E، لتكن M' هي النظام الوراثي على $[m]$ الذي مجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية من $\boldsymbol{A}$ التي لها مستعرضات تنتمي إلى $\mathbf{I}_M$، أثبت أن M' يكون ماترويد، ودالة رتبته هي: $r'(X) = \min_{Y \subseteq X} \left\{|X - Y| + r\left(A(Y)\right)\right\}$

b) افترض أن E و F مجموعتان منتهيتان، وافترض أيضًا أن f دالة من E إلى F. إذا كانت $X \subseteq E$ افترض أن $f(X)$ تمثل مجموعة صور عناصر X، وافترض أيضًا أن M ماترويد على E، اجعل M' تمثل النظام الوراثي على F المعرّف على الشكل $\boldsymbol{I}_{M'} = \left\{f(X) : X \in \boldsymbol{I}_M\right\}$.

c) أثبت أن M' ماترويد. وبرهن كذلك أن $r'(X) = \min_{Y \subseteq X} \left\{|X - Y| + r\left(f^{-1}(Y)\right)\right\}$ عندما تكون f شاملة (Subjective).

59.2.8. طبق مجموع الماترويدات وتمرين 58.2.8 لتبرهن نظرية اتحاد الماترويدات.

60.2.8. (!) أثبت أن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة بين الماترويدين M_1 و M_2 على E هو: $r_{M_1 \cup M_2^*}(E) - r_{M_2^*}(E)$ استخدم هذا لتبرهن نظرية تقاطع الماترويدات من خلال تطبيق نظرية اتحاد الماترويدات على $M_1 \cup M_2^*$. (تعليق: إذن، هاتان المبرهنتان متكافئتان).

61.2.8. افترض أن G بيان موزون على n من الرؤوس، وافترض أيضًا أن $E_1 \ldots E_{n-1}$, تجزئة لـ $E(G)$ لـ n-1 مجموعة. هل توجد خوارزمية على صورة كثيرة حدود بالنسبة الى الزمن، لحساب عدد الأشجار المولدة التي لها وزن أصغر من بين الأشجار التي لها ضلع واحد بالضبط في كل مجموعة جزئية E_i؟

62.2.8. (!) استخدم التوصيف المميز للبيانات التي لها k من الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا (النتيجة 59.2.8) لتبرهن على وجود k شجرة مولدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا لكل بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k$، ولكل k جد بيانًا مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة $2k$ بحيث لا يوجد له k+1 من الأشجار المولدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا.([Nash-Williams[1961]).

63.2.8. إذا أُعطيتَ الماترويدات $M_1 \ldots M_k$, على E، إن مسألة تجزئة الماترويدات هي مسألة تحديد ما إذا كانت المجموعة X قابلة للتجزئة إلى المجموعات $\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_k$ حيث إن، $I_i \in \boldsymbol{I}_i$:

a) استخدم نظرية اتحاد الماترويدات لتبرهن أن X قابلة للتجزئة إذا وفقط إذا تحقق أن $|X - Y| + \sum r_i(Y) \geqslant |X|$ لكل $Y \subseteq X$، وأن المجموعات الأعظمية القابلة للتجزئة تكون مجموعات كبرى قابلة للتجزئة.

b) افترض أن M' هي اتحاد k نسخة من الماترويد M على E، وافترض أن X هي مجموعة عظمى قابلة للتجزئة. أثبت على وجود مجموعات منفصلة $F_1, \ldots, F_k \subseteq X$ بحيث إن $\{F_i\} \subseteq \mathbf{I}$ وأن $\overline{X} \subseteq \sigma(F_1) = \cdots = \sigma(F_k)$.

3.8 نظريــة رامـــزي (Ramsey Theory)

تعود «نظرية رامزي» إلى دراسة تجزئات تراكيب بنائية كبيرة. وتنصّ النتائج النموذجية على أنّ بعض البناءات الجزئية الخاصة يجب أنّ تحدث في بعض صفوف التجزئة. وقد وصف موتزكن (Motzkin) هذا من خلال قوله "الفوضى الكاملة مستحيلة". إنّ الأشياء التي نستخدمها هي مجموعات وأعداد، والأساليب المستخدمة أكثر قليلًا من الاستقراء.

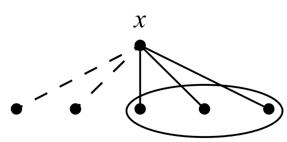
إنّ نظرية رامزي تعمّم مبدأ طواقي (أعشاش) الحمام، والتي نفسها تتعامل مع تجزئات المجموعات. وسندرس تطبيقات مبدأ أعشاش الحمام، إضافة إلى أننا سنبرهن نظرية رامزي، وبعد ذلك، سنركز على أسئلة رامزي الخاصة بالبيانات. وأخيرًا، سنناقش تمهيدية سبيرنر (Sperner) حول وضع علامات دالة على التثليثات؛ وهي مثل نظرية رامزي في أنها تضمن بنية جزئية خاصة.

عودة إلى مبدأ صناديق الحمام (The Pigeonhole Principle Revisited)

ينصّ مبدأ صناديق الحمام (التمهيدية 57.A) على أنه إذا أردنا تجزئة m من الأشياء إلى n من الصفوف، فإنّ أحد هذه الصّفوف يحوي $\lceil m/n \rceil$ شيئًا على الأقل (وأنّ أحد هذه الصّفوف يحوي $\lfloor m/n \rfloor$ شيئًا على الأكثر). إنّ هذه نسخة متقطعة (منفصلة) من العبارة التي تنصّ على أنّ كلّ مجموعة تحوي عددًا أقل من متوسط هذه الأعداد أو يساويه (وعددًا أكبر أو يساوي). إنّ المفهوم بسيط، ولكن التطبيقات يمكن أنْ تكون دقيقة جدًا؛ حيث تكمن الصعوبة في كيفية تعريف تجزئة تناسب التطبيق المنشود. وسنوضّح هذا من خلال أربعة أمثلة.

1.3.8. قضية: من بين ستة أشخاص، يمكن إيجاد ثلاثة منهم؛ كلّ واحد منهم يعرف الاثنين الآخرين، أو ثلاثة منهم بحيث إنّ كلًّا منهم لا يعرف الآخرين.

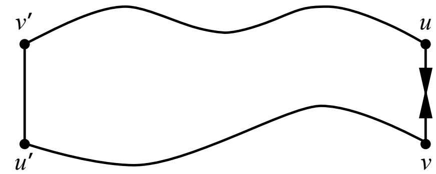
الإثبات: (التمرين 29.1.1). بلغة نظرية البيانات، يصبح المطلوب برهنة أنّه يوجد مثلث في G أو مثلث في $\overline{G}$ لكلّ بيان G على ستة رؤوس لاحظ أنّ مجموع درجات الرأس x في G و $\overline{G}$ يساوي 5. لذا، فإنّ مبدأ طواقي الحمام يضمن أنّ درجة x تساوي 3 على الأقل، إما في G أو في $\overline{G}$. ومن التماثل، نستطيع افتراض أنّ $d_G(x) \geq 3$. إذا وُجِدَ جاران لـ x متجاوران، فإنّ هذا يعطينا المثلث المنشود في G. وبخلاف ذلك، فإنّ ثلاثة من جيران x تشكّل مثلثًا في $\overline{G}$. ■



2.3.8. نظرية: (Graham − Entringer − Sze′kely [1994]) إذا كانت T شجرة مولدة للمكعب الزائدي Q_k، فإنه يوجد ضلع له خارج T، بحيث إنّ إضافته إلى T يعطي حلقة طولها $2k$ على الأقل.

الإثبات: لكل رأس v من رؤوس Q_k المكتوب على صورة عديد k- ثنائي، يوجد رأس متمم v' يختلف عن v في كلّ موقع، ويوجد مسار وحيد من v إلى v' في T، وجِّه ضلعه الأول نحو v'. بما أنّ $n(Q_k) = e(T) + 1$، وبتطبيق هذا على كلّ رأس، فإنّ مبدأ طواقي الحمام يضمن وجود ضلع قد تمّ توجيهه مرتين.

بما أنّ هذا الضلع uv يستقبل توجيهًا من u، وتوجيهًا آخر من v، فسنحصل على أنّ v موجود على مسار من u إلى u'، و u موجود على مسار من v إلى v' في T. لذا، فإنّ المسارين من u إلى v'، ومن v إلى u' الموجودين في T يكونان منفصلين. إنّ طول كلّ منهما يساوي k -1 على الأقل؛ لأنّ المسافة في Q_k، بين أيّ رأس ومتممته تساوي k. أخيرًا، $u \longleftrightarrow v$ في Q_k تعطي أيضًا أنّ $v' \longleftrightarrow u'$، وهذا يكمل حلقةً طولها $2k$ على الأقل. ■



تشير النظرية .2.3.8 إلى أنّ قُطر كلّ شجرة مولدة لـ Q_k يساوي $2k-1$ على الأقل ((Graham – Harrary [1992]).

3.3.8. نظرية : ((Erdös – szekeres [1935]) يوجد لكل قائمة تحوي أكثر من n^2 عددًا قائمةٌ جزئية رتيبة طولها أكثر من n.

الإثبات: افترض أنّ $a = a_1, a_2, ..., a_{n^2+1}$ هي القائمة. حدّد العلامة (x_k, y_k) للموقع رقم k حيث تمثّل x_k طول أطول قائمة جزئية متزايدة تنتهي عند a_k. أمّا y_k فتمثّل طول أطول قائمة جزئية متناقصة تنتهي عند a_k. إذا لم يوجد لـ a قائمة جزئية رتيبة طولها $n+1$ ، فإنّ x_k و y_k لا يمكن أنْ يزيدا (يتجاوزا) على n، وبذلك يوجد n^2 علامة ممكَنة فقط.

بما أنّ طول القائمة يساوي $n^2 + 1$، فإنّ مبدأ طواقي الحمام يضمن الآن أنّ هناك علامتين هما العلامة نفسها. ويُعدُّ هذا مستحيلاً عندما تكون عناصر a مختلفة. عندما $i < j$، و $a_i < a_j$، فبإمكاننا إلحاق a_j بأطوال متتالية متناقصة تنتهي عند a_i. (للتعميم؛ انظر التمرين 43.1.5). ■

a:	7	4	1	8	5	2	9	6	3	0
x, y:	1,1	1,2	1,3	2,1	2,2	2,3	3,1	3,2	3,3	4,1

4.3.8. نظرية : ((Graham – Kleitman [1973]) في كلّ وسم (وضع علامات دالّة) لـ $E(K_n)$ باستخدام أعداد صحيحة، يوجد مسرب طوله يساوي $n - 1$ على الأقل. بحيث تكون علاماته الدالة متزايدة تمامًا.

الإثبات: نحدّد لكلّ رأس وزنًا مساويًا لطول أطول مسرب متزايد ينتهي عند هذا الرأس، إذا استطعنا إثبات أنّ مجموع هذه الأوزان يساوي $n(n\text{-}1)$ على الأقل، فإنّ مبدأ أعشاش الحمام يضمن وجود رأس له وزن كبير كفاية. ولكن المشكلة تكمن في كيفية حساب الأوزان ومجموعها.

نبني بيانًا من البيان التافه بإضافة الأضلاع بالترتيب، ونحدّث الأوزان ومجموعها في كلّ خطوة. تبدأ أوزان الرؤوس عند. فإذا كان الضلع التالي يربط بين رأسين يساوي وزنهما i، عندها يصبح وزنهما $i+1$. أمّا إذا ربطت بين رأسين وزنيهما i و j، وحيث $i < j$، عندها يصبح وزنيهما $j+1$ و j.

في الحالات جميعها، نضيف ضلعًا في كلّ مرّة، ليزداد مجموع الأوزان بمقدار 2 على الأقل. لذا، فإنّ البناء قد تمَّ، وأنّ مجموع أوزان الرؤوس يساوي $n(n\text{-}1)$ على الأقل. ■

أخيرًا، نلاحظ أنّ البداية في الصّفوف يمكن أنّ تختلف.

5.3.8. نظرية : إذا جزَّأنا $\sum p_i - k + 1$ شيئًا إلى k صفًّا بحصص $\{p_i\}$، فلا بُدّ من وجود صفّ يوافق حصّته.

الإثبات: إذا لم يوجد مثل هذا الصّفّ، فإنه يمكن توفيق $\sum p_i - 1$ شيئًا على الأكثر. ■

نظرية رامزي (Ramsey Theorem)

يضمن مبدأ أعشاش الحمام وجود صفّ فيه العديد من الأشياء عند تجزئتها إلى صفوف. تعطي نظرية رامزي الشهيرة [1930م] نصًّا مشابهًا حول تجزئة المجموعات الجزئية التي تحوي r من العناصر إلى صفوف.

بصياغة تقريبية، فإن نظرية رامزي تنصّ على أنه عندما نجزّئ المجموعات التي تحوي r من العناصر في مجموعة كبيرة كفاية S إلى k صفًّا، فإنّ هناك مجموعة جزئية من S تحوي p من العناصر، بحيث تقع مجموعاتها جميعها التي تحوي r عنصرًا في الصّفّ نفسه.

التجزئة هي فصل المجموعة إلى مجموعات جزئية، وتتألف المجموعة التي نرغب في تجزئتها من مجموعات جزئية لمجموعة أخرى. لذا، سنستخدم لغة التلوين بدلاً من لغة التجزئة للتوضيح. تذكّر أنّ التلوين بـ k لونًا لمجموعة يقسم المجموعة إلى k صفًّا. إنّ الصّفّ أو علامته الدالة لونٌ نستخدم بصورة نموذجية $[k]$ للتدليل على مجموعة الألوان، وفي الأحوال جميعها، فإن تلوين X بـ k من الألوان يمكن النظر إليه بوصفه دالة $f: X \to [k]$

6.3.8. تعريف. اجعل $\binom{S}{r}$ ترمز إلى عدد المجموعات الجزئية التي تحوي r من العناصر؛ وذلك من المجموعة S. ونقول: إنّ المجموعة $T \subseteq S$ **متجانسة** تحت تلوين لـ $\binom{S}{r}$ إذا كان للمجموعات جميعها التي تحوي r عنصرًا في T اللونُ نفسه. ونقول: إنها متجانسة من نوع i إذا كان هذا اللون هو i.

افترض أنّ r و $p_1, \ldots, p_k$ أعداد صحيحة موجبة، إذا وُجِدَ عدد صحيح N بحيث يعطي كلّ تلوين بـ k من الألوان لـ $\binom{[N]}{r}$ مجموعة متجانسة من نوع i حجمها p_i لبعض i، فإنّ أصغر عدد صحيح يحقّق هذه الخاصية هو **عدد رامزي** $R(P_1, \ldots, P_k; r)$.

تنصّ نظرية رامزي على أنّ مثل هذا العدد الصحيح موجود لكلّ خيار لـ r و $P_1, \ldots, P_k$ (إن $p_1, \ldots, p_k$ تّسمى عتبات (**بدايات**) أو **حصص**). عندما تكون كلّ حصة تساوي p، فإن النظرية تنصّ على أنه لكلّ تلوين بـ k من الألوان للمجموعات $-r$ (التي تحوي r من العناصر) لمجموعة كبيرة كفاية توجد مجموعة $-p$ (تحوي p عنصرًا) بحيث إنّ لمجموعاتها $-r$ اللون نفسه. وهناك دراسة معمقة لنظرية رامزي وبعض مبرهنات التجزئة الأخرى في (Graham – Rothschild- Spencer [1980, 1990]).

قبل أنْ نبرهن النظرية، سنأخذ في الحسبان الحالة $r = k = 2$ والتي من السهل وصفها بدلالة تلوين أضلاع البيانات، حيث إنّ لإثبات هذه الحالة تركيبة إثبات الحالة العامة نفسها.

عندما $r = 2$، فإنّ تجزئة $\binom{S}{r}$ لمجموعات تحوي k عنصرًا ليست سوى تلوين أضلاع البيان التام الذي رؤوسه S بـ k من الألوان (ليس تلوين أضلاع فعليًّا). عندما $k = 2$، فإن التقليد الذي تم احترامه بمرور الوقت في نظرية رامزي هو أنّ اللون 1 هو «أحمر» أمّا اللون 2 فهو "أزرق".

من القضية 1.3.8 ، نجد أنّ $R(3,3;2) \le 6$ ، سنعمّم (نمدد) التعليل لنبرهن أن:

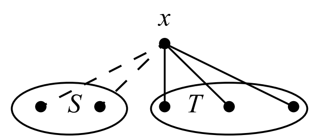
$$R(p_1, p_2; 2) \le R(p_1 - 1, p_2; 2) + R(p_1, p_2 - 1;2)$$

على افتراض أنّ $R(p_1 - 1, p_2; 2)$، و $R(p_1, p_2 - 1; 2)$ موجودة، افترض أنّ N تساوي حاصل جمعهما، إنّ إثبات الحدّ لـ $R(p_1, p_2; 2)$ يعني أنْ نبرهن أنّ كلّ تلوين أحمر/ أزرق لأضلاع بيان تام له N من الرؤوس يعطينا مجموعة تحوي p_1 عنصرًا (من الآن فصاعدًا، سنكتب مجموعة $-r$ للتدليل على المجموعة التي عدد عناصرها يساوي r) من الرؤوس التي أضلاعها جميعها حمراء، ومجموعة p_2 من الرؤوس التي أضلاعها جميعها زرقاء.

خذ في الحسبان تلوينًا أحمر/ أزرق لـ K_N، واختر رأسًا x. افترض أنّ $s = R(p_1 - 1, p_2; 2)$، و $t = R(p_1, p_2 -1; 2)$ يوجد $s + t - 1$ رأسًا مختلفًا عن x. إنّ النظرية 5.3.8 تتضمن أنه يوجد على الأقل s ضلعًا أحمر تقع على x، أو على الأقل t ضلعًا أزرق تقع على x.

من التماثل، يمكننا افتراض أنه يوجد على الأقل x ضلعًا أحمر تقع على N. من تعريف s، يوجد للبيان الجزئيّ التام المستحدث من قبل جيران x عبر هذه الأضلاع عصبة $-p_2$ زرقاء أو عصبة $-(p_1 - 1)$ حمراء.

ويمكن ضمّ الأخيرة إلى x للحصول على عصبة $-p_1$ حمراء. وفي كلتا الحالتين نحصل على مجموعة متجانسة $-i$ حجمها p_i لبعض i. سنؤجّل النقاش حول الحدّ الناتج على $R(p_1, p_2; 2)$.



$$|S| \geq R(p_1, p_2 - 1;\ 2) \qquad \text{or} \qquad |T| \geq R(p_1 - 1, p_2;\ 2)$$

7.3.8. نظرية: ([Ramsey [1930]) . إذا أُعطينا أعدادًا صحيحة موجبة r و $p_1, \ldots, p_k$، فإنه يوجد عدد صحيح N، بحيث يعطي كلّ تلوين بـ k من الألوان لـ $\binom{[N]}{r}$ مجموعة متجانسة $-i$ حجمها p_i وذلك لبعض i.

الإثبات: الإثبات هو استقراء "مضاعف"، وسنستخدم الاستقراء على r، إلا أنّ إثبات خطوة الاستقراء نفسها يستخدم الاستقراء على $\sum p_i$.

الخطوة الأساس: $r = 1$ ، من النظرية 5.3.8. $R(p_1, \ldots, p_k;\ 1)$ موجودة.

خطوة الاستقراء: $r > 1$. نفترض أنّ الادعاء في نصّ النظرية يتحقق للتلوين بـ k من الألوان للمجموعات الجزئية $-(r - 1)$ لمجموعة معينة، بصرف النظر عن البدايات (العتبات). سنبرهن العبارة للتلوين بـ k من الألوان للمجموعات الجزئية $-r$ لمجموعة بالاستقراء على مجموع الحصص، $\sum p_i$.

الخطوة الأساس: تكون حصّة p_i أقلّ من r. في هذه الحالة، المجموعة - p_i لا تحوي مجموعات $-r$. لذا، - تلقائيًّا - نجد أنّ مجموعاتها $-r$ لها اللون i نفسه. إذن، $R(p_1, \ldots, p_k;\ r) = \min\{p_1, \ldots, p_k\}$ ، وذلك عندما يكون $\min\{p_1, \ldots, p_k\} < r$.

وللتوضيح؛ فإننا نضع نصّ خطوة الاستقراء فقط للحالة $k = 2$، إنّ التعليل لعموم k مشابه (التمرين 17). اكتب (p, q) بدلاً من (p_1, p_2) واجعل:

$$p' = R(p - 1, q;\ r) \text{ ، } q' = R(p, q - 1;\ r) \text{، و } N = 1 + R(p', q';\ r - 1).$$

من فرضية الاستقراء للاستقراء الداخلي، فإنّ p' و q' موجودتان. ومن فرضية الاستقراء على الاستقراء الخارجي نعلم أنّ N كذلك موجودة. لاحظ أنّه من المحتمل أنْ تكون كلّ من p' و q' كبيرة جدًّا، ولهذا السبب نحتاج إلى استقرائين (استقراء مضاعف).

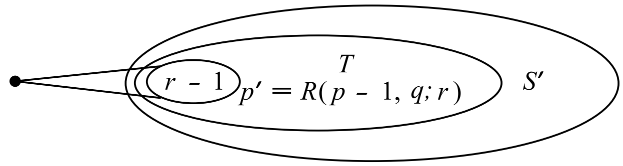
لتكن S مجموعة بها N من العناصر، اختر x في S، خذ في الحسبان تلوينًا ثنائيًّا f لـ $\binom{S}{r}$ ، حيث إنّ اللونين (أحمر، وأزرق)، يلزمنا فقط برهنة أنه يوجد لـ f مجموعة $-p$ متجانسة حمراء، أو مجموعة $-q$ متجانسة زرقاء.

نستخدم f لنُحْدِثَ تلوينًا ثنائيًّا f' للمجموعات $-(r - 1)$ لـ $S' = S - x$. وهذا هو سبب خيارنا لـ $|S'|$ بوصفها عددًا رامزيًّا للمجموعات $-(r - 1)$. عرِّف f' من خلال تحديد اللون i لمجموعة $-(r - 1)$ في S' إذا كان لاتحادها مع x اللون i تحت f وبما أنّ $|S'| = R(p', q';\ r - 1)$، فإنّ فرضية الاستقراء تتضمن إنّ لونًا يوافق حصته ('p أو 'q) تحت f' (عندما $r = 2$، فإنّ هذه الخطوة تمثّل تنفيذًا لمبدأ أعشاش الحمام).

نستطيع من التماثل الافتراض بأنه تمّ الحصول على الحصّة الحمراء. افترض أنّ T مجموعة جزئية من S' تحوي p' من العناصر التي مجموعاتها $-(r - 1)$ تكون حمراء تحت f'.

نعود إلى التلوين الأصليّ f على المجموعات $-r$ في T. بما أنّ $|T| = p' = R(p-1, q;\ r)$، فإنه يوجد تحت f إمّا مجموعة $-(p-1)$ متجانسة حمراء، أو مجموعة $-q$ متجانسة زرقاء في T. إذا وُجِدَتْ مجموعة $-q$ متجانسة زرقاء، فقد حصلنا على المطلوب. وإذا وُجدت مجموعة P $-(p-1)$ متجانسة حمراء، فخذ في الحسبان

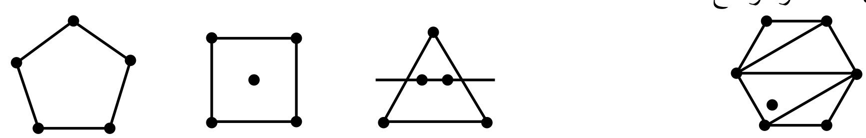
$P \cup \{x\}$ من تعريف T، تكون المجموعات $(r-1)$ – لـ p جميعها حمراء تحت f'، والذي يعني أنّ اتحادها مع x يكون أحمر تحت f. لذا، فإنَّ $P \cup \{x\}$ يكون مجموعة p – متجانسة حمراء تحت f. ■



تشبه نظرية رامزي مبدأ أعشاش الحمام من حيث وجود العديد من التطبيقات الرائعة والدقيقة لها. تعطي نظرية رامزي براهين نموذجية أنيقة، إلّا أنّها تعطي حدودًا كبيرة رهيبة وفظيعة.

8.3.8. نظرية: (Erdős – Szekers [1935]). إذا أُعطينا عددًا صحيحًا m، فإنّه يوجد (أقل) عدد صحيح $N(m)$ بحيث إنّ كلّ مجموعة مؤلفة على الأقل من $N(m)$ نقطة في المستوى بحيث لا يكون أي ثلاث نقاط منها على استقامة تحوي مجموعة جزئية m- تشكّل مضلّعًا محدّبًا عدد أضلاعه m.

الإثبات: نحتاج إلى حقيقتين، هما: (1) من بين أيّ خمس نقاط في المستوى، نعلم أنّ أربعًا منها تشكّل شكلاً رباعيًّا محدّبًا (على افتراض أنّه لا يوجد أيّ ثلاث منها على استقامة واحدة). ابن الغلاف المحدّب للنقاط الخمس. إذا كان هذا الغلاف شكلاً رباعيًّا أو خماسيًّا، فإنّ النتيجة تتبع فورًا. أمّا إذا كان الغلاف مثلّثًا، فإنّ النقطتين الأخريين تقعان في الداخل. ومن مبدأ طواقي الحمام (!)، فإن رأسين من رؤوس المثلث يقعان على أحد جانبي الخطّ الذي يمرّ بالنقطتين الداخليتين. تشكل هاتان النقطتان شكلاً رباعيًّا محدّبًا مع النقطتين الداخليتين، كما هو موضّح أدناه.



تشكّل أربع زوايا في المضلّع m – (المضلّع الذي عدد أضلاعه m) شكلاً رباعيًّا محدّبًا. نحتاج إلى العكس: (2) إذا كان لدينا m على نقطة في المستوى، بحيث إنّ أيّ أربع منها تشكّل شكلاً رباعيًّا محدّبًا، فإنّ هذه النقاط تشكّل مضلّعًا m- محدّبًا. إذا فشل الادعاء، فإنّ الغلاف المحدّب لهذه الـ m نقطة يتألف من t نقطة لبعض $t < m$. إنّ النقاط المتبقية تقع داخل المضلّع t –. وعندما نثبّتُ المضلّع t – كما هو موضّح عن اليمين أعلاه، فإنّ نقطة داخلية تقع في أحد المثلثات، حيث تشكّل هذه النقطة مع رؤوس هذا المثلث مجموعة رباعية لا تشكّل شكلاً رباعيًّا محدّبًا.

لبرهنة النظرية؛ اجعل $N = R\ (m,\ 5;\ 4)$ إذا كان لدينا N نقطة في مستوى بحيث لا يوجد أيّ ثلاث منها على استقامة، فلوّن كل مجموعة رباعيّة بحسب تحدّبها: أحمر، إذا كانت تحدد شكلاً رباعيًّا محدبًا. وأزرق بخلاف ذلك. من الحقيقة (1)، لا يوجد خمس نقاط بحيث تكون مجموعاتها الرباعية جميعها زرقاء. ومن نظرية رامزي، فإنّ هذا يعني أنّه يوجد m نقطة تكون مجموعاتها الرباعية جميعها حمراء، ومن الحقيقة (2) فإنها تشكّل مضلّعًا m – محدّبًا. لذا، فإنّ $N(m)$ موجودة وتساوي $R(m,\ 5;4)$ على الأكثر. ■

الحدّ $R(m,\ 5;\ 4)$ مطاط جدًّا، ويكون حدًّا بالضبط عندما $m = 4$؛ حيث تتضمّن الحقيقة (1) $N(4) = 5 = R(4,\ 5;4)$. وبالمقارنة، فإنّ $N(5) = 9$ (التمرين 10). ولكن $R(5,\ 5;4)$ يكون ضخمًا.

لقد خمّن إيردوز وسزكرز أنّ $N(m) = 2^{m-2} + 1$ وبرهنا أنّ $2^{m-2} \le N(m) \le \binom{2m-4}{m-2} + 1$.

هناك تطبيق آخر يهتم باستراتيجيات البحث عن الأعداد المخزّنة بجداول. من مجموعة U، نخزّن مجموعة جزئيّة حجمها n في جدول حجمه n بحسب قاعدة لتخزين مجموعات - n. لقد استخدم ياو (Yao [1981م]) نظرية رامزي لإثبات أنّه عندما تكون U كبيرة، فإنّ استراتيجية تصغير أسوأ حالة لعدد المجسات اللازمة لاختبار ما إذا كان أحد عناصر U موجودًا في الجدول، هي تخزين المجموعة التي اختيرت بترتيب معين، ثمّ اختبار العضوية من خلال البحث الثنائي. (إذا كانت U صغيرة، فإنّ هذه الاستراتيجية ليست الأفضل).
إنّ القيمة التي تعطيها نظرية رامزي إلى "القيم الكبيرة" ربّما تكون أكبر كثيرًا مما نحتاج إليه.

أعداد رامزي (Ramsey Numbers)

تعرّف نظرية رامزي أعداد رامزي $R(p_1, \ldots, p_k;r)$. لا توجد هناك صيغة دقيقة معروفة لحساب هذه الأعداد التي حُسبَ عدد قليل منها. لبرهنة أنّ $R(p_1, \ldots, p_k;\ r) = N$، يجب علينا أنّ نعطي تلوينًا بـ k من الألوان للمجموعات $-r$ من بين N -1 من النقاط التي لا تتوافق مع أي حصة. (أو نبرهن أنّ واحدة موجودة دون إبقائها)، ويجب أنْ نبرهن أنّ كلّ تلوين على N من النقاط يتوافق مَعَ أحد الحصص.

من حيث المبدأ، بإمكاننا استخدام الحاسوب لاختبار التلوينات بـ k جميعها من الألوان لـ $\binom{[N]}{r}$ لقيم n المتتابعة حتى نجدَ أول N، بحيث يتوافق كلّ تلوين من هذه الألوان مع حصّة p_i لبعض i. حتى في حالة التلوين الثنائي، فإنّ أعداد رامزي $2^{\binom{n}{2}}$ تصبح كبيرة بسرعة أكثر ممّا نتوقع.

ذكر إيردوز مقولة طريفة حيث قال: لو أنّ مخلوقًا فضائيًّا غريبًا هدّد بتدميرنا إنْ لم نخبره عن قيمة $R(5, 5)$، فيجب علينا أن نشغل أجهزة الحاسوب الموجودة في العالم جميعها من أجل حلّ هذه المسألة. أمّا إذا كان السؤال عن قيمة $R(6,6)$، فيجب علينا في هذه الحالة محاولة تدمير هذا المخلوق الغريب.

عندما $r = 2$، نختصر الرمز $R(p_1,\ldots,p_k;\ r)$ إلى $R(p_1,\ldots p_k)$. وعندما $p = p_1 = \ldots = p_k$، فإننا نختصر الرمز إلى $p_k(p;r)$. لـ $r > 2$. حيث نعرف القليل ما عدا أنّ $R(4, 4; 3) = 13$ (Mckay- Radziszowski [1991]). حتى عندما $r = 2$، فإن عددًا واحدًا فقط من أعداد رامزي معروف عندما $k > 2$ وهو $R(3, 3, 3) = 17$. في الجدول أدناه، نجد قيم $R(p,q)$ المعروفة، وكذلك نجد أفضل الحدود العليا المعروفة لغاية شهر 7 عام **1999م**. لقد حُسنت بعض هذه الحدود العليا بعد ظهور الطبعة الأولى من هذا الكتاب، والحدود الحالية موجودة في (Radziszowski [1995])، وهي تُحدَّث بصورة دورية.

	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23	28	36
4		18	25	35/41	49/61	55/84	69/115
5			49/34	58/87	80/143	95/216	121/316
6				102/165	109/298	122/495	153/780

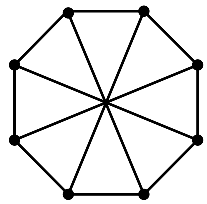
تعدّ حسابات (Mackay – Zhang [1992]) $R(3, 8)$ ، R(3, 9) (Grinstead- Roberts [1982]) ، (Mackay – Radiziszowski [1995] ، R(4, 5)) حديثة، أمّا الحسابات الأخرى، فهي أقدم كثيرًا (تعود بصورة أساسية لكلّ من (Greenwood – Gleason [1955] و Kalbfleisch [1967] و Graver YackeL [1968]).

سنبرهن أول نتيجتين فقط من هذه النتائج (انظر التمرين 16 لـ R(3,5)). عندما $r = k = 2$، فإننا نُبسّط المصطلحات من خلال استخدام لونين هما: «داخل» و«خارج». وفي هذه الحالة تصبح نظرية رامزي على

الشكل التالي: يوجد أصغر عدد صحيح $R(p,q)$ بحيث توجد لكل بيان على $R(p,q)$ من الرؤوس عصبة من الحجم p، أو مجموعة مستقلة من الحجم q.

9.3.8. مثال: $R(3,\ 3) = 6$. لقد أثبتنا سابقًا أنّ $R(3,\ 3) \leq 6$، وبما أنّ الحلقة الخماسيّة تخلو من المثلثات، وليس لها مجموعة مستقلة من الحجم 3، فإنّ $R(3,\ 3) \geq 6$.

10.3.8. مثال: $R(3,\ 4) = 9$. يخلو البيان أدناه من k_3 وكذلك من $\overline{k}_4$؛ لأنّ أيّ أربعة رؤوس مستقلة على حلقة ثمانية تشتمل على أزواج متضادة على الحلقة. لذا، فإنّ $R(3,\ 4) \geq 9$.



إذا كان لدينا رأس x في بيان G، فبإمكاننا أنْ نضيف x إلى رأسين متجاورين لتشكيل مثلث، أو نضيف x إلى مجموعة ثلاثية مستقلة لنشكّل مجموعة رباعية مستقلة. وبما أنّ $R(2\ ,4) = 4$ و $R(3,\ 3) = 6$، فإنا نستنتج أنه إذا وُجد لـ x أربعة جيران، أو وُجد له ستة لايعدّون جيرانًا، فإنه يوجد في G مثلث أو مجموعة رباعية مستقلة. وبتجنب الحالتين، نجد أنّ هذا يحدّد x كالآتي: إما أنْ يوجد له ثلاثة جيران على الأكثر، أو أنه يوجد له خمسة على الأكثر لايعدّون جيرانًا، وهذا يعطينا أنّ $n(G) \leq 9$. إذا حدث هذا لبيان على تسعة رؤوس، فإنّه يوجد لكل رأس ثلاثة جيران. وبما أنّ صيغة جمع الدرجات تمنع وجود بيان منتظم من الدرجة 3 على تسعة رؤوس، فسنحصل على أنّ $R(3,\ 4) = 9$. ■

إنّ إثبات نظرية رامزي يعطي حدًّا (كبيرًا جدًّا) أعلى (عن طريق تكرار الخطوات) عن $R(p,\ q;\ r)$. لقد قام كلّ من Graham وRothschild، و Spencer, [1980, 1990] بتفسير مقدار كبر هذا الحدّ.

11.3.8. نظرية: $R(p,\ q) \leq R(p\ -\ 1,\ q)\ +\ R(p,\ q\ -\ 1)$. إذا كان حدّا المجموعة عن اليمين زوجية عندها تكون المتباينة دقيقة ومضبوطة.

الإثبات: إذا وُجد لرأس في بيان اختياري $R(p\ -\ 1,\ q)$ من الجيران، أو كان له $R(p,\ q\ -\ 1)$ من اللاجيران، فتوجد للبيان عصبة $p-$ أو مجموعة $q-$ مستقلة. بوجود $R(p\ -\ 1,q)\ +\ R(p,q\ -\ 1)$ نقطة في البيان، فإنّ مبدأ أعشاش الحمام يضمن حدوث إحدى هذه الحالات الممكنة. إنّ المساواة في الحدّ تتطلب وجود بيان منتظم له $R(p\ -1,\ q\ )\ +\ R(p,\ q\ -\ 1)$ رأسًا. وإذا كان كلّ حدّ من حدّي المجموع زوجيًّا، فإنّ هذا يتطلب بيانًا منتظمًا فردي الدرجة على عدد فرديّ من الرؤوس. وهذا مستحيل. ■

بما أنّ $R(p,2)\ =\ R(2,p)\ =\ p$، فإن النظرية 11.3.8 تنتج أن $R(p,\ q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$ (التمرين 15). كما إنّ قلة الأجوبة الدقيقة قادت إلى دراسة المحاذيات (المقاربات). إذا كانت q ثابتة و p كبيرة، فإنّ $R\,(p,q) \leq Cp^{q-1} \log\log p / \log p$ (Graver – yackel [1968] و (Chung – Grinstead [1983]).

لـ $q = 3$، فإنّ الجواب معروف ضمن معامل ثابت:

$$C'p^2 / \log p \leq R\,(p,3) \leq cp^2 / \log p\ .$$

يعود الحدّ الأعلى إلى (Ajitai – Komlo's - Szemere'di [1980])؛ أمّا الحدّ الأدنى فيعود إلى

(Kim [1995]). تستخدم هذه الحدود جميعها طرقًا احتمالية (الجزء 5.8).

تُسمى أعداد رامزي للكوتات المتساوية أعدادَ رامزي القطرية تقاربيًّا. إنّ الحدّ الأعلى $\binom{2p-2}{p-1}$ لـ $R(p, p)$ هو $c\,4^p/\sqrt{p}$. يقدم التمرين 14 حدًّا أدنى بنائيًّا، وهو كثيرة حدود في p. إنّ أفضل حدّ بنائيّ معروف ينمو بصورة أسرع من أيّ كثيرة حدود في p، وأبطأ من أيّ دالّة أسّيّة في p (FrankL – Wilson [1981]، التمرين 29).

ويمكن إثبات الحدّ الأدنى الأسيّ بطرق عدّ (حساب)، حيث تعطي:

$$\sqrt{2} \le \lim\ \inf R(p,p)^{1/p} \le \lim\ \sup R(p,p)^{1/p} \le 4 \cdot$$

تحديد قيمة هذه النهاية (إنْ وُجدت) هي أول مسألة غير محلولة متعلقة بأعداد رامزي.

12.3.8. نظرية: (Erdős [1997]) . $R(p,p) > (e\sqrt{2})^{-1} p\ e^{p/2}(1+o(1))$.

الإثبات: خذ في الحسبان البيان الذي مجموعة رؤوسه $[n]$. إنّ كلّ عصبة $p-$ ممكنة تحدث في $2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}$ من هذه الـ $2^{\binom{n}{2}}$ بيانًا. وبالمثل، فإنّ كلّ مجموعة p تحدث بوصفها مجموعة مستقلة في $2^{\binom{n}{2}-\binom{p}{2}}$ من هذه البيانات. وأنّ إهمال هذه الكمّية لكلّ عصبة $p-$ ممكنة ولكلّ مجموعة $p-$ مستقلة ممكنة يترك حدًّا أدنى على عدد البيانات التي ليس لها عصبة p- أو مجموعة $p-$ مستقلة.

بما أنّه يوجد $\binom{n}{p}$ طريقة لاختيار p من الرؤوس، فإنّ المتباينة $2\binom{n}{p}2^{-\binom{p}{2}} < 1$ ، تتضمن أنّ $R(p, p) > n$. إنّ التقريبات غير الدقيقة تعطي أنّ $\binom{n}{p}2^{1-\binom{p}{2}} < 1$ عندما $n < 2^{p/2}$. تقود التقريبات بحرص أكثر (باستخدام صيغة ستيرلنج (Sterling) لتقريب المضروبات) إلى النتيجة التي ادعيناها. ■

نظرية رامزي للبيانات (Graph Ramsey Theory)

إن نظرية رامزي في حالة $r = 2$ تقول: إنّ تلوينًا بـ k من الألوان لأضلاع بيان تام كبير كفاية يُجبر وجود بيان جزئيّ تام أحاديّ اللون. إنّ أيّ عصبة $p-$ (عصبة لها p من الرؤوس) أحاديّة اللون تحوي نسخة أحادية اللون لكلّ بيان له p من الرؤوس. ربما يمكن ضمان وجود نسخ أحاديّة اللون عدد أضلاعها أقلّ من خلال تلوين بيان أصغر من البيان اللازم لضمان وجود K_p. فعلى سبيل المثال، إنّ التلوين الثنائي لـ K_3 دائمًا يعطي أحاديّ اللون p_3. على الرّغم من الحاجة إلى ست نقاط لضمان وجود مثلث أحادي اللون، وهذا يوحي بالعديد من الأسئلة حول أعداد رامزي، بعضها تكون الإجابة عنه أسهل من الإجابة عن الأسئلة المتعلقة بالعُصب.

13.3.8. تعريف. على افترض أنّ $G_1, \ldots, G_k$ بيانات بسيطة، فإنّ **عدد رامزي (للبيان)** $R(G_1, \ldots, G_k)$ هو أصغر عدد صحيح n، بحيث يحوي كلّ تلوين بـ k من الألوان لـ $E(K_n)$ نسخةً من G_i لها اللون i لبعض i. وفي الحالة التي يكون فيها $G_i = G$ لكلّ i، فإننا نكتب $R_k(G)$ بدلاً من $R(G_1, \ldots, G_k)$.

لقد قام بَر (Burr [1983]) بإيجاد $R(G, G)$، الذي يُسمّى «عدد رامزي لـ G» وذلك لجميع 113 بيانًا التي لها ستة أضلاع على الأكثر، وليس لها رؤوس معزولة. هناك صيغ جميلة معروفة لـ $R(G_1, G_2)$ في بعض الحالات. مرة أخرى، اللونان هما الأحمر والأزرق.

14.3.8. نظرية: (Chava'tal [1977]) إذا كانت T شجرة على m من الرّؤوس فإنّ:

$$R(T, K_n) = (m - 1)(n - 1) + 1$$

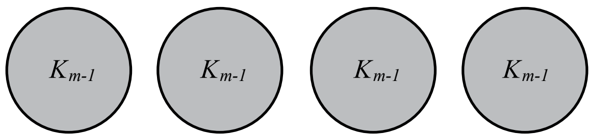
الإثبات: للحدّ الأدنى، لوّن $K_{(m-1)(n-1)}$ من خلال جعل البيان الأحمر هو $(n - 1)K_{m-1}$. آخذين في الحسبان أنّ رتبة المركبات الحمراء تساوي $m - 1$، فلا توجد شجرة حمراء على m من الرؤوس. تشكل الأضلاع الزرقاء

بيانًا متعدد الفروع من الدرجة $n - 1$. لذا، لا يمكن أنْ يحوي K_n.

إنّ إثبات الحدّ الأعلى يستخدم الاستقراء على كلّ وسيط من خلال التركيز على جيران رأس واحد. إنّ يستخدم عرضنا (تقديمنا) الاستقراء على n، مستخدمين إحدى خواص الأشجار التي سبق أن برهناها في الفصل الثانية من خلال الاستقراء على m الخطوة الأساس هي $n = 1$، حيث لا توجد حاجة إلى أضلاع من أجل الحصول على K_1.

إذا أعطيت تلوينًا ثنائيًّا لـ $E(K_{(m-1)(n-1)+1})$، فخذ في الحسبان رأسًا x. إذا وُجد لـ x أكثر من $(m - 1)(n - 2)$ من الجيران عبر الأضلاع الزّرقاء، فإنّ فرض الاستقراء يعطينا شجرةً حمراء T، أو أنّه يعطي K_{n-1} أزرق من بين هذه الجيران. وهذا بدوره يعطي T حمراء أو K_n أزرق (مع x) في التلوين الكامل.

بخلاف ذلك، فإنّ كلّ رأس يقع على $(m - 1)(n - 2)$ ضلعًا أزرق على الأكثر، وبذلك فإنه يقع على $(m - 1)$ ضلعًا أحمر على الأقل. وهذا يعطينا T حمراء؛ لأنّ كلّ بيان درجته الصغرى تساوي $m - 1$ على الأقل يحوي T (القضيه 8.1.2) . ■



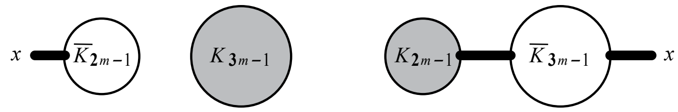
14.3.8. في الحالة التي يكون لمركبة G الكبرى m رأسًا، وتكون $\chi(H) = n$، فإنّ البناء الموجود في النظرية 14.3.8 يعطينا $R(G, H) \geq (m - 1)(n - 1)+1$ (Chva'tal – Harary [1972]) .

خمّن بر وايردوز (Burr - Erdo''s [1983]) أنّ المساواة تتحقّق عندما يكون H بيانًا تامًّا وتكون m كبيرة جدًّا بدلالة $n(H)$ و $\max_{F\subseteq G} \frac{e(F)}{n(F)}$. على الرّغم من تحقق هذا (Burr [1981]) عندما يكون لـ G العديد من الرؤوس ذات الدرجة **2**، وفي بعض الحالات الأخرى، أثبت براندت (Brandit [2000]) أنّه يوجد لكلّ بيانٍ غير ثنائي الفرع H (مثل K_n) ولكلّ $h \in \mathbb{R}$ بداية (عتبة) d_0، بحيث إنّ $R(G, H) \geq hn(G)$ تقريبًا لكلّ بيانٍ منتظم من الدرجة D حيث $d > d_0$.

في الحدّ الأعلى للنظرية 14.3.8. من الضروري جدًّا أنْ تكون الصّفوف اللونيّة لـ H تحوي رأسًا واحدًا فقط. عندما يفشل هذا، فإنّ الحدّ الأدنى يمكن أنْ يكون ضعيفًا جدًّا. فعلى سبيل المثال، عندما $G = H= mK_3$، فإن نتيجه كفتال وهراري تعطي $R(G, H) \geq (3 - 1)(3 - 1) + 1 = 5$ ؛ إلا أنّ القيمة الصحيحة هي $5m$. هنا نجد أنّ تماثل تلوين الحدّ الأدنى مدهش ومفاجئ، آخذين في الحسبان تماثل المدخلات.

15.3.8. نظرية: (Burr - Erdo''s – Spencer [1975]) $R(mK_3, mK_3) = 5m$ لكل $m \geq 3$.

الإثبات: افترض أنّ البيان الأحمر هو $K_{3m-1} + K_{1, 2m-1}$ ، كما يظهر في الشكل أدناه. في هذا البيان،لاحظ أنّ كلّ مثلث يستخدم ثلاثة رؤوس من العصبة $(3m - 1)$ – ، إلاّ أنّ العصبة لا تحوي رؤوسًا تكفي لعمل m مثلثًا منفصلًا. البيان الأزرق المتمّم هو $(K_{2m-1} + K_1) \vee \overline{K}_{3m-1}$ ولكلّ مثلث أزرق رأسان على الأقل في نسخة K_{2m-1}. لذا، لا يمكن أنْ يوجد m من المثلثات الزرقاء المنفصلة.



نستخدم للحدّ الأعلى الاستقراء على m. الخطوة الأساس: $m = 2$. وهذا يتطلب تحليل حالة قصيرة تقريبيًا إذا حُلّت بحرص وحذر. (التمرين 26).

خطوة الاستقراء: $m \geq 3$. بما أنّ $5m > R(3,3) = 6$، فإنا نعلم أنّ كلّ تلوين ثنائي يحوي مثلثًا أحادي اللون. وبإهمال رؤوس المثلثات كلّما وجدناها، نستطيع الاستمرار لنجد المثلثات الأحاديّة اللون، في حين تبقى ستة رؤوس على الأقل. بما أنّ $5m - 3m \geq 6$. لكلّ $m \geq 3$، نجد m من المثلثات الأحاديّة اللون المنفصلة إذا كان لجميعها اللون نفسه، وعندها لا نستطيع عمل شيء.

بخلاف ذلك، يوجد لدينا على الأقل مثلث واحد بكلّ لون. افترض أنّ abc مثلث أحمر، وأنّ def مثلث أزرق منفصل عن المثلث abc، فيمكن الافتراض من الأضلاع التسعة التي تربط بينهما أنَّ خمسة منها حمراء على الأقل، وذلك استنادًا إلى التماثل، ويجب أنّ يوجد لزوج من هذه الأضلاع نقاط طرفية مشتركة في def.

الآن، يوجد لدينا مثلث أحمر ومثلث آخر أزرق لهما رأس مشترك، لذا يوجد لهما معًا خمسة رؤوس، وبما أنّ $m > 2$، فإن فرضية الاستقراء للتلوين على الـ $5m - 5$ رأسًا المتبقية تعطينا $(m - 1)K_3$ بلون واحد. الآن، نضيف المثلث ذا اللون المناسب من الرؤوس الخمسة الخاصة. ■

إنّ القارئ الذي يقلق بشأن الخطوة الأساس في النظرية 15.3.8، يمكن أنْ يأخذ في الحسبان تلوين K_{11}. إنَّ تفادي $2K_3$ يجبر حدوث فراشي الشكل (مثلثات أحادية اللون برأس مشترك) كما في الأعلى، إلا أنّنا نجد مثلثًا أحادي اللون آخر من بين النقاط الستة المتبقية، وهذا ينهي إثبات أنّ $R(mK_3, mK_3) \leq 5m + 1$. تظهر بعض النتائج المرتبطة بهذا في التمرينين 27 - 28.

إحدى النتائج الجديرة بالملاحظة أنّ عدد رامزي لبيان اختياري ربما يكون أُسّيًّا في عدد الرؤوس كما في حالة K_n. لقد قام كلّ من كفتال (Chva'tal) ورودل (RÖdl) وسزميردي (Szemere'di) وتروتر (Trotter) في العام [1983م] بإثبات أنّ عدد رامزي ينمو على الأكثر خطّيًّا بالنسبة إلى عدد الرؤوس، وذلك لصفّ البيانات التي درجتها العظمى تساوي d. وبكلمات أخرى، برهنوا أنّ $R(G,G) \leq cn(G)$، حيث c ثابت يعتمد على d فقط. بالطبع فإنّ الثابت دالة تنمو بسرعة في d، إلا أنها لا تعتمد على $n(G)$. حيث يستخدم الإثبات تمهيدية سزميردي للانتظام [1978]، وهي نتيجة صعبة ولها العديد من التطبيقات.

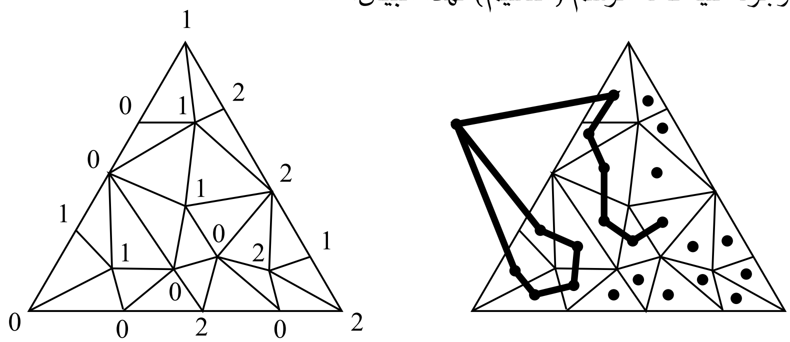
تمهيدية سبيرنر وعرض (اتساع) النطاق (Sperner's Lemma and Bandwidth)

على الرّغم من أنّ تمهيدية سبيرنر عمومًا لا تعدّ جزءًا من نظرية رامزي، إلا أننا نوردها في هذا الجزء لأنّ لها طبيعة نظرية رامزي: كلّ وسم (وضع علامات دالة) لتثليث يحقق شروطًا حدّيّة يحتوي على قطعة لها وسم خاص (عنصر واحد من كلّ صفّ). لاحظ أنّ تمهيدية سبيرنر مثل نظرية رامزي من حيث استخدامها أفكارًا بسيطة، إلا أنّ تطبيقاتها دقيقة، حيث تعتمد نظرية رامزي على مبدأ طواقي الحمام والاستقراء، أما تمهيدية سبيرنر فتستخدم تعليلات معتمدة على النوعية فقط (والاستقراء من أجل التعميم للأبعاد العليا).

16.3.8. تعريف. التقسيم المُبسطي لمثلث كبير T هو تجزئة لـ T إلى خلايا مثلثية بحيث إنّ تقاطع أيّ خليتين هو ضلع مشترك أو زاوية. تسمّى زوايا الخلية بالعُقد. إنّ الوسم (التعليم) الفعلي لتقسيم مُبسطي لـ T يحدّد علامات من $\{0, 1, 2\}$ للعقد متفاديًا وضع علامة i على الضلع رقم i من أضلاع T لكلّ $i \in \{0,1,2\}$. تسمّى الخليّةُ الموسومة بكلّ المجموعة $\{0,1,2\}$ خليةً تامة الوسم (التعليم).

في التعليم الفعليّ، فإنّ كلّ علامة دالة تظهر على أحد زوايا T، إضافة إلى أنّ العلامة i تتفادى ضلع T الذي

يربط بين الزوايا غير المعلَّمة بالعلامة i. والشكل أدناه يوضّح تقسيمًا مُبسطيًّا وكذلك البيان الذي نحصل عليه منها لنبرهن وجود خلية تامة الوسم (التعليم) لهذا البيان.



17.3.8 نظرية: (تمهيدية سبيرنر [1928]). توجد لكلّ وسم (تعليم) فعليّ لتقسيم مُبسطيّ خليةٌ تامة الوسم.

الإثبات: سنبرهن النتيجة الأقوى، وهي وجود عدد فردي من الخلايا تامّة الوسم. نبحث عن هذه الخلية بدءًا من خارج T، وندخل الخليّة من خلال عبور ضلع علاماته الدالتان هما 0 و 1. إذا وصلنا إلى خليّة علامتها الدالة الثالثة 2، فهذا يعني إنهاء الإثبات. ولكن الأمر ليس كذلك، حيث إنَّ العلامة الدالة الثالثة تكون إما 0 أو 1، وبذلك يوجد للخليّة ضلع آخر علاماته الدالتان 0 أو 1. ومن خلال عبورنا إلى هذه الخليّة، فإننا ندخل إلى خليّة جديدة، ونستمر في البحث عن خليّة لها العلامة الثالثة، و هذا يقترح تعريف بيان G بتشفير الخطوات الممكنة جميعها، ونشمل رأسًا لكلّ خليّة بالإضافة إلى رأس واحد للمنطقة الخارجية. يتجاور رأسان في G إذا تشاركت هذه المناطق بضلع حدودي بحيث إنّ العلامتين الدالتين على نقطتيه الطّرفيتين هما 0 و 1، والبيان عن اليمين أعلاه ينتج عن الوسم الفعليّ عن اليسار.

تصبح الخليّة تامة الوسم رأسًا درجته 1 في G. أمّا الخليّة التي ليس لها 0، أو ليس لها 1 فإنها تصبح رأسًا درجته 0. يوجد للخلايا المتبقية زوايا علاماتها الدالة هي: 1 ,0 ,0 أو 1 ,1 ,0 وتصبح رؤوسًا درجتها 2. لذا، فإنّ الخلايا المنشودة تصبح رؤوسًا درجتها 1 في G، وهذه هي الخلايا الوحيدة التي تصبح رؤوسًا درجتها فردية. لقد نقلنا المسألة الأصلية إلى مسألة إثبات أنّ لـ G مثل هذا الرأس الذي درجته تساوي 1.

للرأس v للمنطقة الخارجية درجة فردية أيضًا، وكلّما سرنا من الزاوية التي علامتها (وسمها) 0 إلى الزاوية التي وسمها 1 عبر ضلع T الذي يتفادى الوسم 2، فإننا نقطع ضلعًا لـ G يشمل v في كلّ انتقال من 0 إلى 1، أو الانتقال من 1 إلى 0. وبما أننا نبدأ عند 0 وننتهي عند 1، فنكون قد انتقلنا عددًا فرديًّا من المرات. لذا، فإنّ درجةَ v فرديةٌ. وبما أنّ عددَ الرؤوس التي درجتها فردية زوجيٌّ لكل بيان، فإنّ عدد الرؤوس التي درجتها فردية وغير v يجب أنّ يكون فرديًّا. لذا، يوجد عدد فردي من الخلايا تامة الوسم. ■

18.3.8 تطبيق. نظرية النقطة الثابتة لبراور (**Brouwer**). يمكن صياغة نظرية براور (لبعدين) على الصورة الآتية: توجد نقطة ثابتة لأيّ دالّة متصلة من منطقة مثلثية T إلى نفسها. افترض أنّ زوايا T هي نقاط (متجهات) v_0, v_1, v_2، وبما أننا نستطيع كتابة أيّ نقطة على قطعة مستقيمة معدلًا (متوسّطًا) موزونًا لنقاطها الطرفية، فإنه يمكننا كتابة كلّ $v \in T$ بوصفه متوسطًا موزونًا لزوايا T على الصورة: $v = a_0v_0 + a_1v_1 + a_2v_2$ حيث $\sum a_i = 1$ وكلّ $a_i \geq 0$ (التمرين 37). لذا، يمكننا تحديد v من خلال متجه معاملاته: $a = (a_0, a_1, a_2)$.

عرِّف مجموعات s_0, s_1, s_2 من الدالة f بوضع $a \in S_i$ إذا كان $a_i' < a_i$ حيث $f(a) = a'$. بما أنّ مجموع

معاملات كلّ نقطة يساوي 1، فإنّ كلّ نقطة في T تنتمي إلى S_i واحدة. وأنّ نقطة تنتمي إلى المجموعات الثلاثة إذا وفقط إذا كانت نقطة ثابتة لـ f. لذا، نريد أن نبرهن وجود نقطة مشتركة بين المجموعات الثلاث.

إذا أُعطيت تقسيمًا مبسطيًّا لـ T، فلكل عقدة a اختر وسمًا i بحيث إن $a \in S_i$. حيث إنّ النقط الموجودة على ضلع T المقابل لـ v_i تحقق أنّ إحداثيها رقم i يساوي $\mathbf{0}$. وأنّ الإحداثيّ i لا يتناقص تحت f. لذا، بإمكاننا أنْ نختار وسمًا مختلفًا عن i لكلّ نقطة على ذاك الضّلع. إنّ الوسم الناتج فعليّ، وتمهيدية سبيرنر تضمن وجود خليّة تامّة الوسم. وتكرار العملية السابقة باستخدام تثليثات ذات خلايا أصغر متتابعة يعطينا متتالية متتابعة من المثلثات الأصغر التّامّة الوسم. افترض أنّ x_j, y_j, z_j زوايا المثلث رقم j، وعلاماتها الدّالّة هي: $0,1,2,$ على الترتيب. في كلّ S_i نحصل على متتالية غير منتهية من النقاط.

التفاصيل المتبقية هي تفاصيل توبولوجية؛ لذا نقترح الخطوات فقط، وبما أنّ f متصلة، وكلّ S_i مغلقة ومحدودة، فإنّ لكلّ متتالية غير منتهية في مجموعة مغلقة ومحدودة متتالية جزئية تقاربية. لذا، توجد متتالية جزئية تقاربية لـ $\{x_1, x_2, \dots\}$. افترض أنّ x_{ik} هي المدخلة رقم k. بما أنّ المسافة من x_{ik} إلى y_{ik}، و z_{ik} تقترب من 0، فإنّ هذه المتتاليات الجزئيّة تقترب من النقطة نفسها، وبمّا أنّ: S_0, S_1, S_2 مجموعات مغلقة ومحدودة، فإنّ نقطة النهاية تنتمي إلى المجموعات الثلاثة، وبذلك تكون نقطة ثابتة لـ f. ■

سنطبق تمهيدية سبيرنر أيضًا لحلّ مسألة على «الشّبكة المثلثيّة».

19.3.8. تعريف. عندما نُرقّم رؤوس G بأعداد صحيحة مختلفة، فإنّ الاتساع هو أكبر فرق بين الأعداد الصحيحة المحددة للرؤوس المتجاورة. وعرض النطاق $B(G)$ لبيان G هو أصغر اتساع ترقيم لـ G.

لاحظ أنّ الاتساع يكون مصغرًا دائمًا في الحالة التي لا توجد فيها فجوات في التّرقيم. ولكن، يكون من المناسب أحيانًا السماح بوجود فجوات (التمرين 42). يأتي الاسم "عرض النّطاق" من نظرية المصفوفات؛ حيث يصف التّرقيم الأمثل تبديلة لأعمدة مصفوفة التجاور وصفوفها، بحيث تظهر الواحدات على نطاقات قطرية قريبة من القطر الرئيس. إنّ ترتيب المصفوفة بهذه الصورة يُسَرِّعُ عملية حساب النظير. وهناك دافع آخر، وهو تقليل (تصغير) التأخير بين الرؤوس المتجاورة في الحالة التي يجب أنْ تتقدم فيها الرؤوس بترتيب خطّيّ، وحساب عرض النطاق صعب NP – حتى للأشجار التي درجتها الكبرى تساوي 3 (Garey – Graham- Johnson – Knuth [1978]).

سنقدّم حدّين أدنيين على عرض النّطاق.

20.3.8. تمهيدية : $B(G) \ge \max_{H \subseteq G} \frac{n(H)-1}{\operatorname{diam}(H)}$

الإثبات: يحوي كلّ ترقيم لـ G ترقيمًا لكلّ بيان جزئيّ من G، وفي كلّ بيان جزئي H يوجد رأسان بحيث يساوي الفرق بين رقميهما $n(H) - 1$ على الأقل. ومن مبدأ أعشاش الحمام، يوجد ضلع على مسار بين هذين الرأسين، بحيث يساوي اتساعه $n(H) - 1$ مقسومًا على المسافة بينهما على الأقل. ■

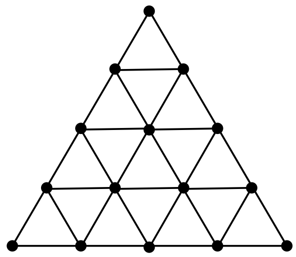
21.3.8. تمهيدية : (Harper [1966]) $B(G) \ge \max_K \min\{\partial S : |S| = K\}$ ترمز ∂S إلى المجموعة الجزئية من الرّؤوس في مجموعة $S \subseteq V(G)$ التي لها جار خارج S على الأقل.

الإثبات: لكلّ قيمة لـ k، توجد مجموعة S مؤلفة من k رأسًا، بحيث تكون أول k من الرؤوس في ترقيم أمثل لـ G. يجب أنْ يكون عرض نطاق G مساويًا لـ $|\partial S|$ على الأقل؛ لأن الرأس الذي رقمه (علامته الدالة) أقلّ ما يمكن من بين ∂S له ضلع اتساعه يساوي $|\partial S|$ على الأقل لجواره فوق S. ■

في العام [1988م] سمّى شنق (Chung) الحدّ الأول بحدّ **الكثافة الموضعي** (المحليّ). إنّ حساب حدّ هاربر يكون صعبًا عادة، وهذا الحدّ للمكعّب Qk يساوي $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{\lfloor i/2 \rfloor}$. أمّا للشبكة $P_m \square P_n$، فإنّ قيمة حدّ

هاربر الأدنى هي $\min\{m,n\}$، والتي يمكن تحقيقها (التمرين 43).

22.3.8. مثال: الشّبكة المثلثيّة. تتكوّن الشّبكة المثلثيّة T_l من رؤوس (i, j, k) بحيث إنّ i, j, k أعداد صحيحة غير سالبة مجموعها يساوي l، وبحيث يتجاور الرأسان إذا كان الفرق المطلق الكلّيّ للإحداثيات المتناظرة يساوي 2. الشكل أدناه يوضّح T_4. ينتجُ ترقيم الرؤوس بحسب الصّفوف حدًّا أعلى لـ $B(T_l)$ قيمته تساوي $l + 1$. ويعدّ هذا الحدّ حدًّا أمثل، إلا أنّ حدّ الكثافة المحلية يكون حول $l/2$ فقط، بالإضافة إلى أنّ حدّ هاربر يكون نحو $l/\sqrt{2}$. يمكن استخدام تمهيدية سبيرنر لبرهنة أنّ $l+1$ حدٌّ أمثل. ■



افترض أنّ G البيانُ المشكّلُ من خلال تقسيم مُبسطي لمثلث، إنّ حدود G الخارجية حلقة، فضلًا عن أنّ المناطق المحدودة هي مثلثات، إضافة إلى أنّ الحلقة مجزأة إلى مسارات من خلال زوايا المثلث الكبير. ونقول: إنّ الرّابط عبارة عن رؤوس تولّد بيانًا جزئيًّا مترابطًا يحوي رأسًا من كلّ مسار حدوديّ.

23.3.8. تمهيدية: (Hochberg – McDiarmid- Saks [1995]) افترض أنّ T تقسيمًا مبسطيًّا بحيث حُدِّدَ لونٌ أحمر أو أزرق لكلّ رأس. وافترض أيضًا أنّ R و B هما البيانان الجزئيان اللذان يحدثهما كلّ من الرؤوس الحمراء والزرقاء على التّرتيب. ولكلّ تلوين من هذا القبيل، فإنّ تلوينًا واحدًا بالضبط من R و B يحوي رابطًا.

الإثبات: لكل رأس v، خذْ في الحسبان الرؤوس التي يمكن الوصول إليها من v ولها لون v نفسه. إذا كان من غير الممكن الوصول إلى الجوانب الثلاثة، فعلّم v بأصغر دليل لجانب لا نستطيع الوصول إليه من v. وللرؤوس الموجودة على الجانب i، فإنّ الوسم (العلامة) i لا يظهر. وإنْ لم يوجد هناك رابط، فإنّ لكلّ عقدة وسمًا (علامة)، وهذا يعطي وسمًا فعليًّا لـ T.

من تمهيدية سبيرن، توجد خليّة تامّة الوسم. وبما أنه يوجد للخليّة ثلاث زوايا، وقد استخدمنا لونين هما R و B فقط، فإن زاويتين لهذه الخليّة لهما اللون نفسه. وبما أنهما متجاوران، فبإمكانهما الوصول إلى مجموعة الرؤوس نفسها الملونة بلونهما. لذا، فإنّ أقلّ جانب لا يمكن الوصول إليه منهما لا يمكن أنْ يكون مختلفًا. وهذا التناقض يعني أننا لم نبنِ الوسم (العلامات الدالة) المحدد (هـ). لذا، يوجد رأس نستطيع من خلاله الوصول إلى أيّ جانب.

إذا وُجد رابط لأحد الألوان، فإنه يقسّم الرؤوس المتبقية إلى مجموعات، بحيث يتحقق وجود جانب واحد على الأقل لا يمكن الوصول إليه لكلّ مجموعة. لذا، لا يمكن أنْ يوجد روابط في كلا اللونين. ■

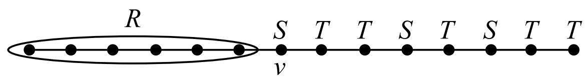
24.3.8. نظرية: (Hochberg – McDiarmid – Saks [1995]). افترض أنّ G بيان يُثَلّثُ منطقة محاطة (محدودة) بحلقة C مجزأة إلى ثلاثة مسارات. إذا كانت k هي الأصغر لمجموع المسافات من v إلى كلّ من المسارات الثلاثة وذلك لكل $v \in V(G)$، فإن $B(G) \ge k+1$.

الإثبات: افترض أنّ f ترقيمٌ لـ G، وافترض كذلك أنّ t أكبر دليل بحيث لا يوجد للبيان الجزئي المحدث من

الرؤوس المرقّمة من 1 إلى t مركبةٌ تلتقي (تتقاطع) مع المسارات الثلاثة. اجعل R تمثّل مجموعة الرّؤوس هذه، وS تساوي مجموعة الرّؤوس خارج R التي لها جيران في R، واجعل T تمثّل بقيّة الرّؤوس.

من البناء، ينتمي الرّأس v حيث $f(v) = t+1$ إلى S. بما أنّ $R \cup \{v\}$ تحوي رابطًا، فإن $R \cup S$ تحوي رابطًا ولكن T لا تحوي ذلك. وبما أنه لا يوجد ضلع بين R وT، وبما أنّ R لا تحوي رابطًا، فإن $R \cup S$ لا تحوي رابطًا. الآن، تضمن التمهيدية 8 .3 .23. أنّ S تحوي رابطًا. إنَّ المجموعة S تساوي $\partial\,(R \cup S)$ للقطعة الأخيرة (النهائية) $S \cup T$ في التّرقيم. لذا يوجد للترقيم فرق يساوي $|S|$ على الأقل على أحد الأضلاع من S إلى R.

إنّ الرابط يحوي ممرات من كلّ رأس من رؤوسه إلى كلّ من المسارات الحدودية الثلاثة. ونعلم من الفرض أنّ مجموع أطوال هذه الممرات من أيّ رأس ثابت يساوي k على الأقل. يوجد رأس في S، بحيث تكون هذه الممرات في S بالنسبة إلى هذا الرأس مسارات منفصلة. لذا، فإنّ $|S| \geq k + 1$. ■



25.3.8. نتيجة : عرض نطاق الشبكة المثلثية T_l يساوي $l+1$.

الإثبات: لكل رأس (i, j, k) في T_l، تكون المسافة إلى الجوانب الثلاثة هي: i، j، وk على الترتيب. لذا، فإنّ مجموع المسافات يساوي l. ومن النظرية 24.3.8 نجد أنّ عرض النّطاق يساوي $l + 1$ على الأقل. وكما لاحظنا، فإنّ هذا الحدّ قابل للتحقيق. ■

تمـــارين (Exercises)

1.3.8. (-) افترض أنّ لديك قرصين متّحدين في المركز، وأنّ لكلّ منهما 20 قطاعًا دائريًّا من الحجم نفسه. تمّ طلاء عشرة قطاعات ولكلّ قرص باللون الأحمر، وعشرة قطاعات أخرى باللون الأزرق ضمن ترتيب معين. أثبت أنّه يمكن محاذاة القرصين أو صفّهما بطريقة معيّنة بحيث إنّ لعشرة من قطاعات القرص الداخلي على الأقل اللونَ نفسه لقطاعات القرص الخارجيّ المرتبطة بها.

2.3.8. لكلّ $n \in \mathbb{N}$ ، اجعل S هي المجموعة المؤلفة من $n + 1$ عنصرًا في $\{1, ..., 2n\}$. أثبت أنه يوجد في S عنصران بحيث يقسم أحدهما الآخر، ويوجد كذلك عنصران آخران، القاسم المشترك الأعظم لهما يساوي 1. أثبت أنّ هاتين النتيجتين هما أفضل ما يمكن من خلال إيجاد مجموعة جزئية حجمها n لا تتحقق عليها هذه النتائج.

3.3.8. استخدم مبدأ طواقي الحمام والمجاميع الجزئيّة لتبرهن كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) تحوي كلّ مجموعة مؤلفة من n من الأعداد الصحيحة مجموعةً جزئية غير خالية مجموعها يقبل القسمة على n (أعط مثالاً على مجموعة مؤلفة من $n - 1$ من الأعداد الصحيحة لا تتحقق فيها هذه الخاصيّة).

b) لتكن $x \in \mathbb{R}$ ، أثبت أنّ عنصرًا واحدًا على الأقل من المجموعة $\{x, 2x, ..., (n\text{-}1)x\}$ يختلف عن عدد صحيح بمقدار $1/n$ على الأكثر.

4.3.8. (!) يوجد في ناد خاص 90 غرفة و100 عضو. زُوِّد الأعضاء بمفاتيح لهذه الغرف بحيث يكون لـ 90 منهم مقدرة لدخول الغرفِ، بمعنى أنه تم تزويد كلّ شخص من هؤلاء الـ 90 بمفتاح لغرفة مختلفة. (افترض عدم اشتراكهم بالمفاتيح). أثبت أنه يلزمنا 990 مفتاحًا، وأنّ العددَ 990 كافٍ.

5.3.8. افترض أنّ T شجرة. استخدم التقنية الموجودة في النظرية 2.3.8 لتبرهن أنّ مركز T يتألف من رأس واحد، أو من رأسين متجاورين (هذا يبرهن النظرية 13.1.2 مرّة أخرى)، (-Jordan [1869], Graham- Entringer- Sze'key [1994]).

6.3.8. أثبت أنّ كلّ مجموعة مؤلّفة من 2^m+1 من نقاط شبكيّة صحيحة (شبكيّة أعداد صحيحة) في $\mathbb{R}^m$ تحوي زوجًا من النقاط بحيث يكون مركزه المتوسط (متجه الوسط) أيضًا نقطة شبكيّة صحيحة.

7.3.8. أثبت أنه يوجد لكلّ تلوين ثنائيّ لنقاط شبكيّة صحيحة في $\mathbb{R}^m$ جمعٌ فيه n من النقاط التي لها اللون نفسه بحيث يكون مركزها المتوسط (متجه الوسط) نقطة صحيحة لها أيضًا اللون نفسه (مساعدة: لا حاجة إلى نظرية رامزي بسبب وجود إثبات قصير باستخدام مبدأ طواقي الحمام فقط)، ([Bo'na [1990]).

8.3.8. افترض أنّ S جمع مؤلف من $n+1$ عددًا صحيحًا مجموعه يساوي k. لـ $K \le 2n+1$، أثبت أنه يوجد لـ S مجموعة جزئية، حاصل جمع عناصرها يساوي i لكلّ $i \in [K]$. لكلّ n، أعطِ مثالاً لجمع بحيث تفشل هذه النتيجة عندما $k = 2n+2$.

9.3.8. لكل عدد زوجي n، جدْ ترتيبًا لـ $E(K_n)$، بحيث يساوي أكبر طول لمسرب متزايد $n-1$. (تعليق: هذا يبرهن أنّ النظرية 4.3.8 هي أفضل ما يمكن عندما يكون n عددًا زوجيًّا، إضافة إلى أنها أفضل ما يمكن عندما يكون n عددًا فرديًّا يساوي 9 على الأقل. إلا أنّ البناء يكون أصعب كثيرًا)، ([Graham – Kleitman [1973]).

10.3.8. افترض أنّ S مجموعةٌ من تسع نقاط في المستوى (لا يوجد منها ثلاث نقاط على استقامة واحدة). أثبت أنّ S تحوي رؤوس مضلّع خماسيّ محدّب. أعطِ مثالاً على ثماني نقاط لا تتحقق فيها هذه النتيجة.

11.3.8. (!) افترض أنّ S مجموعة مؤلفة من $R(m,m;3)$ من نقاط المستوى بحيث لا يوجد منها ثلاث نقاط على استقامة واحدة، أثبت أنّ S تحوي m نقطة بحيث تشكّل هذه النقاط مضلّعًا (Tarsi) عدد أضلاعه m.

12.3.8. تذكر أنّ البيان الموجه يكون بسيطًا إذا لم يشترك أيّ ضلعين من أضلاعه بالزوج المرتب نفسه من النقاط الطّرفيّة. يعرّف الدوري الرتيب على أنه دوري يكون فيه توجيه الأضلاع متوافقًا دائمًا مع رتبة الدلائل على الرؤوس، أو أنّه يكون غير متوافق دائمًا مع هذه الرّتبة. ويكون للبيان الموجه خالي العرى التام نسخةٌ واحدة من كلّ زوج مرتّب من الرؤوس المختلفة بوصفها ضلعًا. إذا أعطيت m، فبرهن أنه إذا كانت N كبيرة جدًا، فإن لكل بيان موجه بسيط خالي العرى رؤوسه $[N]$ مجموعة مستقلة من الرتبة m، أو له دوري رتيب رتبته m، أو له بيان موجه خالي العرى تام رتبته m.

13.3.8. (!) نظرية شور ([Schur [1916]):

a) إذا كان $k > 0$، فبرهن أنه يوجد أقل عدد صحيح S_k، بحيث إنّ كلّ تلوين بـ k من الألوان للأعداد الصحيحة $1, \ldots, s_k$ يعطينا أحادي لون x, y, z (ليس بالضرورة أنْ تكون مختلفة) بحيث إنّ $x+y=z$. (مساعدة: طبق نظرية رامزي على $r=2$).

b) أثبت بنائيًّا أنّ $s_k \ge 3s_{k-1}$، وبناءً على ذلك، فإن $S_k \ge (3^k+1)/2$.

14.3.8. (!) نعرّف التركيب، أو الضرب المعجمي لبيانين بسيطين G و H على أنه البيان البسيط $G[H]$ الذي مجموعة رؤوسه هي: $V(G) \times V(H)$ حيث أضلاعه معطاة على الشكل $(u,v) \leftrightarrow (u',v')$ إذا وفقط إذا تحقق أنّ: (1) uu' ضلع في G، أو (2) $u=u'$، وكان ضلعًا في H:

a) أثبت أنّ $\alpha(G[H]) = \alpha(G)\alpha(H)$.

b) أثبت أنّ متممة $G[H]$ هي $\overline{G}[\overline{H}]$.

c) استخدم الفرعين (a) و (b) لتبرهن بنائيًّا أنّ:

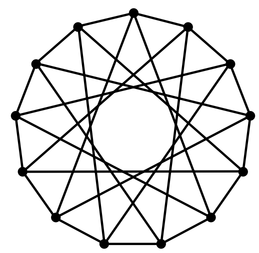
$$R(pq+1, pq+1) - 1 \ge [R(p+1, p+1) - 1] \times [R(q+1, q+1) - 1].$$

d) استنتج أنّ $R(2^n+1, 2^n+1) \ge 5^n+1$ عندما $n \ge 0$، وقارن هذا الحدّ الأدنى بالحدّ الأدنى

البنائيّ لـ [1972] Abbott ($R(k,k)$).

15.3.8. (-) حقق أنّ $R(p,2)= R(2, p) =p$. استخدم هذا والنظرية 11.3.8 لتبرهن أنّ $R(p,q) \le \binom{p+q-2}{p-1}$.

16.3.8. (-) استخدم البيان أدناه لتبرهن أنّ $R(3,5) = 14$.



17.3.8. أعداد رامزي عندما $r = 2$ والألوان المضاعفة:

a) افترض أنّ $p =(p_1, \ldots, p_k)$، وافترض أيضًا أننا نحصل على q_i بطرح 1 من p مع ترك باقي الإحداثيات دون تغيير. أثبت أنّ $R(p) \le \sum_{i=1}^{k} R(q_i) - k + 2$

b) أثبت أنّ: $R(p_1+1, \ldots, p_k+1) \le \dfrac{(p_1+\ldots+p_k)!}{(P_1!\ldots p_k!)}$

18.3.8. افترض أنّ $r_k = R_k(3;2)$ (إنّ هذه هي قيمة n، بحيث يُحدث التلوين بـ k من الألوان لـ $E(K_n)$ مثلثًا أحاديّ اللون):

a) أثبت أنّ $r_k \le k(r_k - 1 - 1) + 2$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أنّ $r_k \le \lfloor k!e \rfloor + 1$. بحيث أن $r_3 \le 17$ (تعليق: $r_3 = 17$ إلا أنَّ الحد الأدنى يتطلب تلوينًا ثلاثيًّا بطريقة ذكية لـ K_{16} الناتج من الحقل المنتهي ($GF2^4$).

19.3.8. أثبت أنّ $R_k(p; r + 1) \le r + k^M$ حيث $M = \binom{R_K(p;r)}{r}$.

20.3.8. (+) أعداد رامزي اللاقُطريّة:

a) أثبت أنّ $R(k,l) > n$ إذا كان $\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l}(1-p)^{\binom{L}{2}} < 1$ لبعض $p \in (0,1)$. وبرهن أنّ لكلّ $p_n \in \mathbb{N}$ و $p \in (0,1)$. $R_{(k,l)} > n - \binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{1}(1-p)^{\binom{1}{2}}$

b) استخدم فرع a لتبرهن أنّ $R(3,k) > k^{3/2+0(1)}$. ما الحدّ الأدنى على $R(3,k)$ الذي يمكن الحصول عليه من الجزء الأول من فرع (a)؟ ([1977] Spencer).

d) استخدم الفرع a لتحصل على حدّ أدنى لـ $R_k(q)$.

21.3.8. (!) جدّ قيمة عدد رامزي $R(K_{1,m}, K_{1,n})$. (مساعدة: يعتمد الجواب على ما إذا كانت m و n زوجية أو فردية).

22.3.8. (!) افترض أنّ T شجرة على m من الرؤوس، إذا علمت أنّ $m - 1$ يقسم $n - 1$، فجد عدد رامزي $R(T, k_{1,n})$. ([1974] Burr).

23.3.8. إذا كان $p > (m - 1)(n - 1)$، أثبت أنّ كلّ تلوين ثنائيّ لـ $E(K_p)$ يكون فيه البيان الأحمر (الملون بالأحمر) متعدي التوجيه، يحوي عصبة -m حمراء، أو عصبة -n زرقاء، وبرهن أيضًا أنّ هذا هو أفضل ما يمكن. (*Brozinsky – Nishiura*) (مساعدة: استخدم البيانات الكاملة).

24.3.8. أثبت أنّ: $R(T, K_{n1}, \ldots, K_{nk}) = (m - 1)(R(n_1, \ldots, n_k) - 1) + 1$ عندما تكون T شجرة على

m من الرؤوس (Burr).

25.3.8. أثبت أنّ $R(c_4, c_4) = 6$. (تعليق: يوجد العديد من البراهين).

26.3.8. أثبت أنّ $R(2K_3, 2K_3) = 10$. (مساعدة: اختزل المسألة لحالة الشكل الفراشيّ الذي فيه مثلثات من اللونين بالإضافة إلى حلقة خماسيّة أُحاديّة اللون، ثمّ استخدم التّماثل).

27.3.8. (!) أثبت أنّ $R(mK_2, mK_2) = 3m - 1$.

28.3.8. (!) لـ $1 \le i \le k$، افترض أنّ G_i بيان على p_i من الرؤوس، وثَبِّتْ له تضاعفًا (عدد مرات تكرار) m_i. أثبت أن: $R\left(m_1G_1,\dots,m_kG_k\right) \le \sum\left(m_i - 1\right)p_i + R\left(G_1,\dots,G_k\right)$.

29.3.8. لقد قام فرانكل وويلسون (Frankl and Wilson) في العام [1981] ببناء بيان على n من الرؤوس ليس له عصبة أو مجموعة مستقلة حجمها يزيد على $2^{c\sqrt{\log n \,\log\log n}}$، حيث c ثابت معين، أثبت أنّ هذا يعطي حدًّا أدنى لـ $R(p,p)$ بحيث ينمو هذا الحدّ أسرع من أيّ كثيرة حدود في p، وأبطأ من أيّ دالّة أُسّيّة في p.

30.3.8. (!) لكلّ بيان بسيط G، حدّد $R(P_3, G)$ فقط بوصفها دالّة لعدد رؤوس G ولأكبر مواءمة في G.

31.3.8. (!) افترض أنّ r و s عددان طبيعيان بحيث $r + s \not\equiv 0 \mod 4$. أثبت أنّه يوجد لكلّ تلوين ثنائي لـ $E(k_{r,s})$ بيانٌ مترابط أحادي اللون عدد رؤوسه يساوي $\lceil r/2 \rceil + \lceil s/2 \rceil$ على الأقل. ثم استنتج أنّ كلّ تلوين ثلاثيّ لـ $E(K_{r+s})$ يحوي بيانًا جزئيًّا مترابطًا أحاديّ اللون عدد رؤوسه يزيد على $(r+s)/2$. بيّن أنّ هذا يفشل عندما 4 تقسم $r + s$.

32.3.8. إجبارية وجود حلقات رباعية:

a) أثبت أنّه إذا كان $\sum_{v\in V(G)}\binom{d(v)}{2} > \binom{n(G)}{2}$، فإنّ G يحتوي حلقة رباعيّة.

b) أثبت أنّه إذا كان $e(G) > \frac{n(G)}{4}\left(1+\sqrt{4n(G)-3}\right)$، فإنّ G يحوي حلقة رباعيّة.

c) أثبت أنّ $R_k(C_4) \le k^2 + k + 2$ (Chung – Graham [1975]).

33.3.8. (!) لقد أثبت بوندي (Bondy [1971 a]) أنه إذا كانت $X \nleftrightarrow y$ تتضمن أنّ $d(x) + d(y) \ge n(G)$، فإنّ $G = K_{t,t}$، أو أنّه توجد لـ G حلقة من كلّ طول من 3 إلى n. استخدم هذا لتبرهن أنّ $R(C_m, K_{1,n})=\max\{m, 2n+1\}$، ربما إلا إذا كان m زوجيًّا وعلى الأكثر 2n. (Lawerence [1073]).

34.3.8. (!) أثبت أنّه توجد لكلّ تلوين ثنائي لـ $E(K_n)$ حلقة هاملتونية (Hamiltonian cycle) أُحاديّة اللون أو مكونة من مسارين أُحاديّي اللون. (مساعدة: استخدم الاستقراء على n.) (Lova`sz [1979], p 85)، وفي p482 نسبة إلى (H. Raynound).

35.3.8. (+) افترض أنّ f تلوين ثنائيّ لـ $E(K_n)$، وافترض كذلك أنّ $k \ge 3$، أثبت ما يلي:

a) إذا وُجد لـ f أحاديّ اللون C_{2k+1}، فإنّه يوجد لـ f أُحاديّ اللون C_{2k} أيضًا.

b) إذا وُجد لـ f أحاديّ اللون C_{2k}، فإنّه يوجد لـ f أحاديّ اللون C_{2k-1} أو $2K_k$ أيضًا.

c) إذا كانت $m \ge 5$، فإنّ $R(c_m, c_m) \le 2m - 1$ (انظر التمرين **8. 3. 25** للحالة $m = 4$).

(مساعدة: استخدم فرعي (a) و(b)، ونتيجة إيردوز وجالاي [1959] (النظرية **5. 4. 35**) التي تقول إنه إذا كانت $e(G) > (m - 1)(n(G) - 1)/2$، فإنّ ذلك يضمن وجود حلقة طولها يساوي m على الأقل في G. وهنا تبقى حالة واحدة صعبة).

36.3.8. **يعرَّف تضاعف رامزي للبيان** G على أنّه أصغر عدد من النّسخ أحاديّة اللون من G في تلوين ثنائي لأضلاع عصبة على $R(G,G)$ من الرؤوس. أثبت أنّ تضاعف رامزي لـ K_3 يساوي 2.

37.3.8. أثبت أنّه يوجد لكلّ نقطة في منطقة مثلثيّة تعبير وحيد بوصفه تركيبًا محدّبًا لرؤوس المثلث (نقصد

بالتركيبِ المحدّب التركيبَ الخطيَّ الذي تكون فيها المعاملات غير سالبة ومجموعها يساوي 1).

38.3.8. تمهيدية سبيرنر في الأبعاد العليا. يتألف المُبسط ذو البعد k من تركيب محدّب لـ $k+1$ من نقاط $\mathbb{R}^K$ التي لا تقع في مستوى زائدي. إنّ التقسيم المبسطيّ يعبّر عن المبسط ذي البعد k بصفته اتحادًا لمبسطيّات (خلايا) من البعد k بحيث تتقاطع أيّ خليتين في المبسط الذي تحدده زواياهما المشتركة. وأنّ الخليّة **تامّة الوسم** هي الخليّة التي زواياها $\{0,...,k\}$.

أعطِ تعريفًا للتعليم (وضع علامات دالة أو وسم) الفعليّ، بحيث يحوي كلّ وسم فعليّ لتقسيم مبسطي لمبسط من الدرجة k خليةً تامة الوسم. أثبت هذه النظرية. (مساعدة: تعدّ تمهيدية سبيرنر في البعد 2 (نظرية 17.3.8) شاهدًا حيًّا على خطوة الاستقراء لإثبات بالاستقراء على k).

39.3.8. (−) احسب عرض نطاق كلّ من: P_n, K_n, C_n.

40.3.8. احسب عرض نطاق $K_{n_1}, \ldots, n_k$. (Eitner [1979])

41.3.8. (!) أثبت أنّ كلّ شجرة لها k من الأوراق هي اتحاد لـ $\lceil k/2 \rceil$ من المسارات المتقاطعة زوجًا زوجًا (التمرين 37.1.2). استخدم هذا لتبرهن أنّ عرض نطاق الشجرة التي لها n من الأوراق يساوي $\lceil k/2 \rceil$ على الأكثر، (Ando- Kaneko – Gervacio [1996]).

42.3.8. (+) افترض أنّ G جرارة (التعريف 17.2.2) وافترض كذلك أنّ m عدد صحيح بحيث $\left\lceil \frac{n(H)-1}{\text{diam } H} \right\rceil \leq m$ لكلّ $H \subseteq G$. أثبت أنّ $B(G) \leq m$. (مساعدة: أثبت أنّه يوجد لـ G ترقيم f بحيث تكون $f(v)$ مضاعفًا من m عندما يكون v على العمود الرئيس (الفقري)، وتكون $|f(u) - f(v)| \leq m$ لكل $u \leftrightarrow v$)، (Systo- Zak [1982], Miller [1981]).

43.3.8. عرض نطاق الشّبكات:

a) احسب الحدّ الأدنى للكثافة الموضعية (المحلية) لعرض النطاق لـ $P_m \square P_n$.

b) افترض أنّ S مجموعةٌ تحوي k رأسًا لـ $P_m \square P_n$ بحيث يوجد p_i رأسًا في الصّفّ i و b_j رأسًا في العمود j. أثبت أنّ $|\partial S| < |\partial T|$ إذا كانت T هي المجموعة المؤلفة من أول a_i رأسًا في الصّفّ i لكل i.

c) أثبت أنّ $|\partial S|$ تُصغّر على المجموعات-k في $V(P_n \square P_n)$ من قبل بعض S، بحيث $a_1 \geq \ldots \geq a_n$ و $b_1 \geq \ldots \geq b_n$. استنتج أنّ حدّ هاربر الأدنى لـ $B(P_n \square P_n)$ هو n.

d) استنتج أنّ $B(P_m \square P_n) = \min\{m, n\}$، (Chav`talova` [1975]).

44.3.8. (+) افترض أنّ G بيان بسيط من الرتبة n، وعرض نطاقه يساوي b:

a) إذا كان $e \in \overline{G}$، فبرهن أنّ $B(G+e) \leq 2b$.

b) أثبت أنّه إذا كانت $n \geq 6b$، فإنّ $B(G+e)$ تكون كبيرة بمقدار كبر $2b$.

(تعليق: أكبر قيمة لـ $B(G+e)$ هي $b+1$ إذا كانت $n \leq 3b+4$، وهي $\lceil (n-1)/3 \rceil$ إذا كانت $(3b+5 \leq n \leq 6b-2)$، (Wang –West-Yao [1995]).

4.8 المزيد من مسائل التطرفية (More Extermal Problems)

توصف نظريّة البيان التّطرّفيّة بأنها واسعة جدًّا، وقد وصفنا في الجزء 3.1 الاختلاف بين مسائل كلٍّ من الأمثليّة (جد بناءً تطرّفيًّا في البيان المدخل) والقيم القصوى (جد حالة تطرّفيّة على صفّ من البيانات)، وقد تناولنا هذين النوعين من المسائل في هذا الكتاب. وفي هذا الجزء سندرس النّوع الثّاني. تعدُّ مسألة

توران(Turán) مثالًا على الطراز البدائيّ: جد العدد الأكبر للأضلاع في بيان لا يحوي H بوصفها بيانًا جزئيًّا. وسنذكر مثالاً واحدًا إضافيًّا من كلّ وحدة في الجدول الآتي:

الموضوع	صفّ البيانات	الجواب	المرجع
$\max\ e(G)$	n رأس وk مركبة	$\binom{n-k+1}{2}$	التمرين 40.3.1
أكبر خصر	قطر k وليس شجرة	$2k+1$	التمرين 61.1.2
$\max\ \beta(G)$	$\alpha'(G) \le k$	$2k$	التمرين 10.3.3
$\min\ \alpha(G)$	$\kappa(G)=k$ وقطر d	$\lceil (d+1)/2 \rceil$	التمرين 22.2.4
$\min\ \chi(G)$	يخلو من نسختين من $2k2$ و $\omega(G)=k$	$\binom{k+1}{2}$	التمرين 11.2.5
$\min\ \chi(G)$	سويّ خارجيّ	3	التمرين 12.3.6
$\max\ e(G)$	$n(G)=n$ وليس هاملتونيّا	$\binom{n-1}{2}+1$	التمرين 26.2.7
$\max\ n(G)$	$\omega(G)<p$ و $\alpha(G)<q$	$R(p,q)-1$	الجزء 3.8

نأمل مع مثل هذه المجموعة الهائلة المتنوّعة من مسائل القيم القصوى إظهار عينة بسيطة من نتائج ذات جاذبيّة في هذا الجزء.

تشفير البيانات (Encodings of Graphs)

أوّلا، سوف نأخذ في الحسبان متغيّرات تتعلّق بثلاثة أنواع من التّشفير البيانيّ، حيث يتضمّن كلّ نموذج منها تعيين متّجهات للرّؤوس، والمتغيّرات هي الطول الأصغر للمتّجهات التي تكفي. وسندرس القيمة الكبرى لكلّ متغيّر على بيانات لها n من الرّؤوس. وتشمل هذه المتغيرات عدد التقاطع، وبُعد كلّ من الجداء والمكعّب المسحوق.

1.4.8. تعريف: إنّ **التّمثيل التّقاطعيّ** (intersection representation) **بطول t** يعين لكلّ رأس متّجه 0، 1 بطول t بحيث يكون $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كانت متّجهاته تملك 1 في موقع مشترك. وبالتّوازي مع ذلك، فإنّه يعيّن لكلّ $x \in V(G)$ مجموعة $S_x \le [t]$ بحيث يكون $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. **وعدد التّقاطع** (intersection number) $\theta'(G)$ هو الطّول الأصغر لتمثيل تقاطعيّ لـ G.

إنّ العناصر لـ $[t]$ في تمثيل ما تقابل بيانات جزئيّة تامّة تغطي $E(G)$. وهذا يحفّز استخدامنا لـ θ' لعدد التّقاطع: لاحظ أنّ $\theta(G)$ هو عدد العصب الأصغر التي نحتاج إليها لتغطية $V(G)$.

2.4.8. قضيّة. (Erdös – Goodman – Pósa [1966]) إنّ عدد التّقاطع يساوي عدد البيانات الجزئيّة التّامة الأصغر التي نحتاج إليها لتغطية $E(G)$.

الإثبات: نعرّف مقابلة طبيعيّة بين تمثيلات بطول t وغطاءات لـ $E(G)$ بواسطة t من البيانات الجزئيّة التّامة. كلّ $i \in [t]$ تولّد عصبة $\{v \in V(G) : i \in S_v\}$. والبيانات الجزئيّة التّامة الناتجة تغطّي $E(G)$؛ لأنّ $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا تحقق أنّ $S_u \cap S_v \neq \emptyset$.

وبالعكس، إذا كانت البيانات الجزئيّة التّامة $Q_1, \ldots, Q_t$ تغطّي $E(G)$، فإنّ تحديد $\{i : v \in V(Q_i)\}$ لكلّ رأس v يعطي تمثيلًا تقاطعيًّا. لذا، فإنّ $\theta'(G) = e(G)$ وذلك إذا كان G يخلو من المثلّثات، وكانت $\theta'\left(K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}\right) = \lfloor n^2/4 \rfloor$. في الحقيقة، هذا هو البيان الوحيد على n رأسًا يكبر $\theta'(G)$. يقترح التمرين 1 إثباتًا مباشرًا لهذا الحدّ؛ وهنا نقدم نتيجة أقوى. ■

لتكن $\mathbf{F}$ عائلةً من البيانات. للبيان المدخل G، فإنّ المسألة لتفكيك $\mathbf{F}$ (F-decomposition) هي بتفكيك G إلى العدد الأصغر من البيانات في $\mathbf{F}$. وعندما تكون $\mathbf{F}$ غير مغلقة تحت التّفكيك، فإنّ التّفكيك لـ $\mathbf{F}$ ربما يتطلّب بيانات جزئيّة أكثر من غطاء لـ F (F – Fcovering). فعلى سبيل المثال، نستطيع تغطية الطّائرة الورقيّة ببيانين جزئيّين تامّين، ولكنها تحتاج إلى ثلاثة بيانات جزئيّة تامّات لتفكيكها.

يعني إثبات أنّ $\theta'(G) \le \lfloor n^2/4 \rfloor$ لبيانات على n من الرّؤوس برهنة أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يمكن أنْ يغطى بـ $\lfloor n^2/4 \rfloor$ من البيانات الجزئيّة التّامة؛ وسوف نبرهن نتيجة أقوى؛ وهي أنّه يوجد دائمًا تفكيك مستخدم على الأكثر مثل هذا العدد من البيانات الجزئيّة التّامة. وفي الحقيقة، نستطيع إيجاد مثل هذا التّفكيك بشراهة.

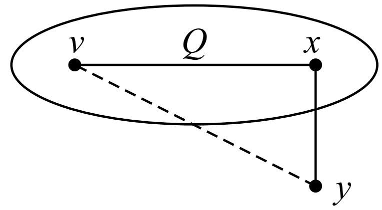
3.4.8. نظرية: (McGuinness [1994]) كلّ تفكيك عُصَبيّ شره لبيان على n من الرّؤوس يستخدم على الأكثر $\lfloor n^2/4 \rfloor$ عصبة.

الإثبات: سوف نستخدم الاستقراء على n. الادعاء واضح لـ $n \le 2$؛ لنفترض أنّ $n > 2$. ليكن $\boldsymbol{Q} = Q_1, \ldots, Q_m$ تفكيكًا شرهًا لـ G، يعني أنّ كلّ Q_i بيانٌ جزئيٌّ أعظميّ تامّ في $G - \bigcup_{j<i} E(Q_j)$. لاحظ أنّ حذف Q_j من قائمة Q يخلف تفكيكًا شرهًا لـ $G - E(Q_j)$.

إذا كان Q_i كلّه يملك ثلاثة أضلاع على الأقلّ، فإنّ $m < n^2/6$. لذا، نستطيع افتراض أنّ بعض Q_j هو ضلع xy. لتكن R تتكون من عناصر $\boldsymbol{Q} - \{Q_j\}$ التي تقع على x، ولتكن S تتكون من عناصر $\boldsymbol{Q} - \{Q_j\}$ التي تقع على y. لاحظ أنَّ المجموعةَ $\boldsymbol{Q'} = \boldsymbol{Q}\,(R \cup S \cup \{Q_j\})$ تفكيكٌ شرةٌ لبيان جزئيٍّ من $G - x - y$. ونجد من فرضية الاستقراء أنَّ $|\mathbf{Q'}| \le (n-2)^2/4$. لذلك، يكفي برهنة أنَّ $|R| + |S| \le n-2$.

نبرهن هذا باختيار رؤوس مختلفة في $V(G) - \{x, y\}$ من مجموعات الرّؤوس لعناصر $R \cup S$. بما أنّ كلّ ضلع حُذف بالضبط مرةً واحدة، فإنّ كلّ $v \notin \{x, y\}$ يظهر مرّة واحدة في R إذا كان $v \in N(x)$، ومرّة واحدة في S إذا كان $v \in N(y)$. افترض أنّ $Q \in R$. إذا كان Q يستخدم رأسًا $v \notin N(y)$، فنختار مثل هذا الرّأس v لـ Q. وإذا كانت $V(Q) \subseteq N(y)$، فنختار لـ Q رأسا $v \in Q$ بحيث ينتمي vy إلى العنصر الأسبق من Q الذي يحتوي على كلّ من y ورأس ما في Q. يدعى هذا العنصر Q'؛ ولاحظ أنّه العنصرُ الوحيد في S الذي يحوي v، وبما أنَّ Q وxy هما الأعظمان عند اختيارهما، فإنَّ Q' تسبق كليهما في $\boldsymbol{Q}$. ولعناصر S، اختر رؤوسًا بأدوار عكسيّة لـ x و y.

بيّنا أنّه إذا كان v ينتمي إلى بعض $Q \in R$ وبعض $Q' \in S$، وv هو الذي اختير لأحدهما، فإنَّ البيان الذي اختير يظهر بعد البيان الآخر في قائمة $\boldsymbol{Q}$. لذا، فلا يوجد رأس يتمّ اختياره مرّتين. ومن هنا، نستنتج أنَّ $|R| + |S| \le n-2$ و $m \le n^2/4$. ■



لقد قام كلّ من (Chung [1981]) و ([1979] (Györi – Kostochka) بتقوية حدّ التّفكك، بإثبات أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يملك تفكيكًا لبيانات جزئيّة تامّة حيث يساوي مجموع رتبها $\lfloor n(G)^2/2 \rfloor$ على الأكثر. الآن، سوف نأخذ في الحسبان نموذج التّشفير الثاني.

4.4.8. تعريف: تمثيل الجداء (product representation) بطول t يعين متجهات مختلفة طولها t للرّؤوس، بحيث يكون $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كانت متجهاتها تختلف في كلّ موقع. **والبعد الجدائيّ** (product dimension) للبيان G ‏(pdim G) هو الطول الأصغر لمثل هذا التّمثيل لـ G.

وبتخصيص إحداثيّ واحد لكلّ $e \in E(\overline{G})$، بحيث تملك رؤوس e القيمة 0، في حين تملك الرّؤوس الأخرى قيمًا موجبة مختلفة بعضها عن بعض، فسنحصل على أنَّ $\mathrm{pdim}\,G \le e(\overline{G})$ (إذا كان G ليس بيانًا تامًّا).

5.4.8. مثال: كلّ بيان تامّ يملك بعدًا جدائيًّا 1. لـ $\overline{K_n}$، فإنَّ كلّ زوج من الرّؤوس يجب أنْ يتوافق في إحداثيّ ما. ولكن لا نستطيع تعيين رأسين للمتّجه نفسه. لذلك، نحتاج إلى إحداثيّين، ويكفي تعيين $(0, j)$ لـ v_j لكلّ j.

لـ $K_1 + K_{n-1}$، يجب أنْ تختلف المتجهات للعصبة في كلّ إحداثيّ، أمّا المتّجه للرّأس المعزول، فيجب أنْ يتوافق مع كلّ رأس من الرّؤوس الأخرى في مكان ما، ولكنه لا يمكن أنْ يتوافق مع رأس في أكثر من إحداثيّ واحد. لذا،

نحتاج إلى $n - 1$ من الإحداثيّات على الأقلّ. وهذا يكفي، وذلك باستخدام $(1, 2, \ldots, n-1)$ للرّأس المعزول و$(i, i, \ldots, i)$ للرّأس الذي رقمه i للعصبة. ■

نستطيع مرة أخرى وصفَ المتغيّر باستعمال البيانات التّامّة.

6.4.8. تعريف: يعرَّف التّكافؤ (equivalence) على G على أنّه بيان جزئيّ مولّد لـ G بحيث تكون مركّباتُه بيانات تامةً.

7.4.8. قضيّة. البعد الجدائيّ لـ G هو العدد الأصغر للتّكافؤات $E_1, \ldots, E_t$ حيث $\bigcup E_i = \overline{G}$ و $\bigcap E_i = \phi$.

الإثبات: مرة أخرى يوجد تناظر طبيعيّ. إذا أعطيتَ تمثيلًا جدائيًّا، فإنّ الإحداثيّ i يولّد E_i، مع مركّبة لكلّ قيمة استعملت في الإحداثيّ i. وكلّ زوج غير متجاور يتوافق في إحداثيّ ما. لذا، فكلّ ضلع في $\overline{G}$ يكون مغطّى. وبالعكس، إذا أعطيتَ $E_1, \ldots, E_t$، فإنّ كلّ مركّبة لـ E_i تصبح قيمة ثابتة في الإحداثيّ i لتمثيل، إضافة إلى أنّ المتطلّب $\bigcap E_i = \phi$ هو المتطلّب لاستعمال متجهات مختلفة في التّمثيل الجدائيّ. ■

8.4.8. تمهيدية: إذا كان $\chi'\left(\overline{G}\right) > 1$، فإنَّ $\text{Pdim G} \leq \chi'\left(\overline{G}\right)$، مع المساواة إذا كان $\overline{G}$ لا يملك بيانًا جزئيًّا مُحدثًا متشاكلاً مع مثلث.

الإثبات: كلّ مواءمة هي اتحاد بيانات تامّة منفصلة. وتصبح تكافؤًا بإضافة رؤوس معزولة؛ لذا، فإنَّ تكافؤات $\chi'\left(\overline{G}\right)$ تغطّي $\overline{G}$. إذا كان $\chi'\left(\overline{G}\right) > 1$، فإنَّ هذه التكافؤات لا تملك ضلعًا مشتركًا.

إذا كان $\overline{G}$ لا يملك بيانًا جزئيًّا مُحدثًا متشاكلاً مع مثلث، فإنّ كلّ تكافؤ استخدم في غطاء لـ $\overline{G}$ هو مواءمة وأضلاع معزولة. وهكذا فإنَّ $\text{pdim } G \leq \chi'\left(\overline{G}\right)$. ■

9.4.8. نتيجة: لـ $n \geq 3$، فإنَّ البُعد الجدائيّ الأكبر لبيان على n من الرّؤوس هو $n - 1$.

الإثبات: ليكن G بيانًا على n من الرّؤوس. بواسطة التمهيدية 8.4.8 والنظرية فايزنج (النظرية 10.1.7)، فإنَّ $\text{pdim G} \leq \chi'(\overline{\text{G}}) \leq D(\overline{\text{G}}) + 1 \leq n$. فضلًا على ذلك، فإنَّ الحدّ يحسّن إلى $n - 1$ إلا إذا كان $\Delta\left(\overline{G}\right) = n - 1$. لتكن S مجموعةَ الرّؤوس التي درجتها $n - 1$ في $\overline{G}$؛ نستطيع افتراض أنَّ $|S| = k \geq 1$.

من التمهيدية 8.4.8 ونظرية فايزنج، فإنَّ $\text{pdim } (G - S) \leq n - k$. وبمضاعفة الإحداثيّات إذا احتجنا إلى ذلك، فإنّنا نحصل على تمثيل جدائيّ لـ $G - S$ بطول $n - k$. ليكن x^i هو المتجه المعين لـ v_i في هذا التّمثيل.

إنَّ كلّ رأس في S يكون معزولاً في G. نعيّن الآن، لكلّ $v \in S$ المتّجه الذي يكون إحداثيّه i، لكلّ $1 \leq i \leq n - k$، هو الإحداثيّ i لـ x^i. إذا كان $k = 1$، فإنّ هذا يكمل تمثيلًا لـ G مع طول $n - 1$. إذا كان $k > 1$، فإنّنا نعيّن المتّجه نفسه للرّؤوس جميعها في S؛ ونضيف إحداثيًّا واحدًا باستخدام قيم مختلفة لإكمال تمثيل بطول $n - k + 1$، ويكون أقلّ من $n - 1$.

بما أنَّ $pdim\ (K_1 + K_{n-1}) = n - 1$ (المثال 5.4.8)، فإنَّ الحدَّ حادٌّ. ■

أعطى كلٌّ من لوفاسز، ونستريل، وبلتر [1980] (Lovász – Ne→etřil – Pultr) وصفًا مميزًا للبيانات على n من الرّؤوس مع بعد جدائيّ $n - 1$ (التمرين 4). وأثبتوا كذلك حدًّا سفليًّا عامًّا باستخدام تعليل يخصّ البعد في الجبر الخطّيّ.

10.4.8. نظرية : [1980] (Lovász – Ne→etřil – Pultr) لتكن $u_1, \ldots, u_r$ و $v_1, \ldots, v_r$ قائمتين من الرّؤوس (الاختلاف بينهما ليس ضروريًّا) في بيان G. إذا كان $u_i \leftrightarrow v_j$ لكلّ $i = j$ و $u_i \nleftrightarrow v_j$ لكلّ $i < j$، فإنّ $\text{pdim}\ G \ \geq \ \lceil \lg r \rceil$.

الإثبات: افترض أنّ G يملك تمثيلاً بطول d. لتكن $x^1, \ldots, x^r$ و $y^1, \ldots, y^r$ هي المتّجهات لـ $u_1, \ldots, u_r$ و $v_1, \ldots, v_r$، على التّرتيب. إنَّ المتّجهين x^i و y^i يختلفان في كلّ إحداثيّ، ولكن x^i و y^j يتوافقان في إحداثيّ ما إذا كان $i \neq j$. لذا، لا يساوي $\prod_{k=1}^{d}\left(x_k^i - y_k^j\right)$ صفرًا إذا وفقط إذا كان $i = j$.

نستخدم خاصيّة الجداء هذه إنشاء r من المتّجهات المستقلّة خطّيًّا في $\mathbb{R}^{2d}$؛ هذا يبرهن أنّ $r \ \leq \ 2^d$ ولذلك، فإنّ $\text{pdim G} \ \geq \lceil 1gr \rceil$. إنّ توسيع $\prod_{k=1}^{d}\left(w_k - z_k\right)$ لـ $w, z \in \mathbb{R}^d$ يعطي المجموع $\sum_{S \subseteq [d]} \prod_{i \in S} w_i \prod_{j \in \bar{S}}\left(-z_j\right)$ ولربط r مع 2^d، فإنّنا نمحص هذه كجداء نقطيّ في $\mathbb{R}^{2d}$ مع إحداثيّات دلّلت بواسطة المجموعات الجزئيّة لـ $[d]$. لكلّ $w \in \mathbb{R}^d$، عرّف متجهين في $\mathbb{R}^{2d}$ بوضع $w_S = \prod_{i \in S} w_i$ و $\hat{w}_s = \prod_{i \notin S}(-w_i)$ للإحداثيّ $S \subseteq [d]$. مع هذا التّعريف، فإنّ الجداء النقطيّ $\bar{w} \cdot \hat{z}$ يساوي $\prod_{k=1}^{d}\left(w_k - z_k\right)$. لاحظ أنّ الشّروط على $x's$ و $y's$ تعطي أنّ $\bar{x}^i \cdot \hat{y}^j$ لا يكون صفرًا إذا وفقط إذا كان $i = j$.

ندّعي أنّ $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^r$ مستقلّةٌ. افترض إعتمادًا خطيًّا $\sum_{i=1}^{r} c_i \bar{x}^i = \mathbf{0}$. إنّ أخذ الجداء (الضّرب) النّقطيّ لـ $\hat{y}$ لطرفي المعادلة يقتل الحدّود تحت $i = r$ جميعها، ويؤدي إلى أنّ $c_r \bar{x}^r \cdot \hat{y}^r = 0$. وبما أنّ $\bar{x}^r \cdot \hat{y}^r \neq 0$، فإنّ $c_r = 0$. الآن، نستطيع تطبيق النّقاش نفسه باستخدام $\hat{y}^{r-1}$. إنَّ معرفة $c_r = 0$ يعطي أنّ $c_{r-1}\bar{x}^{r-1} \cdot \hat{y}^{r-1} = 0$. بالإضافة إلى أنّ إنقاص الدليل بالتتابع يؤدي إلى أنّ $c_j = 0$ لكلّ j. إذن، نستنتج أنّ $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^r$ مستقلّةٌ، وتتطلّب أنّ $2^d \geq r$. ■

11.4.8. مثال: مواءمات: $\text{pdim}\ (n/2)\ K_2 = \lceil \lg n \rceil$. إذا أعطينا k إحداثيًّا، فإنّ البيان المشفّر باستخدام المرتّبات الثنائية من الدّرجة k جميعها، والتي عددها 2^k بوصفها رموزًا هو 2^{k-1} نسخة من K_2، لأنّ أيّ متّجه لا يتوافق فقط مع متمّمته في كلّ موقع. إذا لم يكن n أسا لـ 2، فنستطيع التّخلّص من الأزواج المتمّمة للحصول على بناء أو تركيب. والحدّ السّفليّ يتبع من النظرية 10.4.8، باستخدام كلّ رأس في القائمة (على سبيل المثال، ضع $u_i = v_{n+1-i}$). ■

في نموذج التّشفير الثّالث (المسافة بين الرّؤوس) سنعرض المعلومات بصورة دقيقة. تُعَدُّ مسألة العنونة في شبكات الاتّصال خير مثال على ذلك؛ حيث يجب أنْ تنتقل كلّ رسالة بأقصر مسار إلى منطقتها المقصودة. دون مراقبة مركزية، فإنّ كلّ رأس تصله رسالة يجب أنْ يحدّد المكان الذي سترسل إليه الرسالة باستخدام اسم المنطقة المقصودة فقط. فإذا كانت المتّجهات لرأسين تعطي المسافة بينهما في G، فإنّ رأسًا ما يستطيع أنْ يقارن بين المنطقة المقصودة للمتّجه والمتجهات لجيرانه، ثمّ يرسل الرّسالة إلى أقرب جار للمنطقة المقصودة.

لبيان مترابط G، نريد تعيين متّجهات للرّؤوس بحيث تكون المسافةُ بينها عددَ المواقع التي تختلف فيها المتّجهات. يكون هذا طمرًا متقايسًا (**isometric**) أو "**يحافظ على المسافة**" (**distance – preserv-ing**) من G إلى $H = K_{n_1} \square \ldots \square K_{n_i}$، وتعني دالّة $f\colon V(G) \to V(H)$ بحيث يكون $d_G(u, v) = d_H(f(u), f(v))$. على أيّ حال، إنّ العديد من البيانات المترابطة لا تملك طمرًا متقايسًا في جداء كارتيزيّ للعصب؛ ومثال هذا C_{2k+1} لكلّ $k \geq 2$ (التمرين 11).

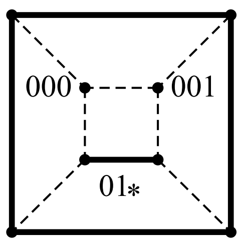
لهذا السّبب، نقدّم الرّمز * "لا تأخذ هذا في الحسبان". لتكن $S = \{0, 1, *\}$، ونعرف دالة التماثل d على الشكلّ الآتي: $d(0, 1) = 1$ و $d(0, *) = 0 = d(1, *)$. ولترمز S^N إلى مجموعة المرتّبات من الدّرجة N (متّجهات) مع مدخلات في S، ولـ $a, b \in S^N$ ضع $d_S(a, b) = \sum d(a_i, b_i)$. لكلّ بيان G. لبعض قيم N نحصل على تشفير $f\colon V(G) \to S^N$ بحيث يكون $d_G(u, v) = d_S(f(u), f(v))$ لكلّ $u, v \in V(G)$.

كلّ $a \in S^N$ تقابل مكعّبا جزئيًّا لـ Q_N، وهو المكعّب ذو البعد N. ويشير البعد للمكعّب الجزئيّ إلى عدد ظهور * في a. لـ $a, b \in S^N$، فإنّ المسافة الصّغرى بين رؤوس المكعّبات الجزئيّة المتقابلة هي $d_S(a,b)$. والمتّجهات المعيّنة لرؤوس مختلفة تقابل مكعّبات جزئيّة منفصلة. وبخلاف ذلك، فإنّ مسافتها سوف تكون **0**. إذا قلّصنا الأضلاع لكلّ مكعّب جزئيّ معيّن، فإنّنا نحصل على "مكعّب مسحوق" H، علاوة على أنّ دالّة المحافظة على المسافة $f\colon V(G) \to S^N$ هي طمر متقايس لـ G في H.

12.4.8. تعريف: طمر المكعّب المسحوق (squashed – cube embedding) بطول N هو دالّة $f\colon V(G) \to S^N$ بحيث يكون $d_G(u, v) = d_S(f(u), f(v))$. أمّا بعد **المكعّب المسحوق** (squashed – cube dimension) qdim G فهو الطول الأصغر لمثل هذا الطّمر لـ G.

13.4.8. مثال: المتّجهات 000، 001، 01* و 1** تشكّل طمرًا مكعّبًا مسحوقًا لـ K_4 مع طول 3. لاحظ أنّ رأسين متجاورين لمكعّب من الدّرجة 3 لا يتغيّران، في حين ينهار الضّلع المجاور لكليهما، إضافة إلى انهيار الوجه المقابل بأكمله، ويكون البيانُ الناتج K_4. وتظهر صورة المكعّبات الجزئيّة في الشّكل أدناه بخطّ سميك، وهذا البناء يعمّم لطمر K_n في مكعّب مسحوق بعده $n - 1$

يطمر المسار P_n بصورة متقايسة في Q_{n-1} دون سحوقات باستخدام 00...00، 10...00، 11...00، 11...10، 11...11. لا يوجد طمر أقصر؛ لأنّ المسافة بين النقاط الطّرفيّة لـ P_n هي $n - 1$، وكلّ إحداثيّ يسهم على الأكثر بـ 1 للمسافة بين المتّجهات. ■



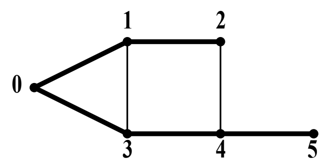
14.4.8. قضيّة. إذا كان G بيانًا، فإنّ $\operatorname{qdim}(G) \le \sum_{i<j} d_G(v_i, v_j)$.

الإثبات: لكلّ زوج i, j مع $i < j$، نخصّص قالبًا له $d_G(v_i, v_j)$ إحداثيّ. ضع هذه الإحداثيّات **0** لـ v_i، و**1** لـ v_j و* لبقية الرّؤوس. إذا أعطينا رأسين، فإنّ الإحداثيات التي لا تحتوي على * هي الإحداثيات المخصصة للزّوج فقط. لذا، فإنّ $d_G(v_i, v_j) = d_S(f(v_i), f(v_j))$. ■

باستخدام أسلوب القيمة الذاتيّة (التمرين 14.6.8)، أثبت جراهام وبولاك (Graham – Pollak) [1973, 1971م] الحدّ السّفليّ العام على $qdim\ (G)$ الذي يعطي $qdim\ K_n = n - 1$. لذا، فكلّ من K_n و P_n يملك

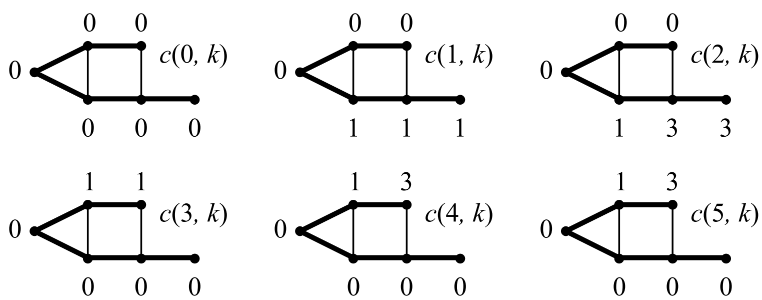
مكعّبًا مسحوقًا بُعده $n-1$؛ وقد خمّن جراهام وبولاك أنّ $qdim\ G \le n-1$ لكلّ بيان مترابط على n من الرّؤوس. وعرض جراهام $ 100 لإثبات هذا التّخمين، وقد وجد وينكلر خطّة تشفير إثبات هذه المخمّنة "مخمّنة المكعّب المسحوق". يولّد إثبات وينكلر بالضبط مكعّبًا مسحوقًا مشفّرًا بعده $n-1$ لكلّ بيان مترابط G على n من الرّؤوس. سنبدأ بوضع دليل على الرّؤوس؛ اختر v_0 عشوائيًّا. وبعد ذلك، جد شجرة مولّدة T بحيث يكون $d_T(v, v_0) = d_G(v, v_0)$ لكلّ $v \in V(G)$ (من الممكن توليد G بواسطة البحث الأفقي أولاً من v_0). الآن، رَقِّم الرّؤوس بالبحث العموديّ أولاً في T، أي، إذا تمّ اختيار التّدليل لـ $v_0, \ldots, v_i$، ليكن v_{i+1} هو الطفل الذي لم نصل إليه من v_i في T، وذلك إذا وجد واحد. وبخلاف ذلك، تحرّك بطريق خلفيّ في إتجاه الجذر حتى تجد رأسًا له مثل هذا الطفل. ولاحظ أنّ الأدلّة الناتجة تزداد من خلال كلّ مسار من v_0 في T.

15.4.8. مثال: التّرقيم العموديّ أوّلاً للشّجرة المولّدة الأفقيّة أوّلاً. في الرّسم أدناه، تنتمي الأضلاع ذات الخطّ السّميك إلى T، أمّا الأضلاع ذات الخطّ الرّفيع، فتنتمي إلى $G-T$. وسوف نستخدم هذا المثال لتوضيح عدّة خطوات في الإثبات.



من الآن فصاعدًا، ثبّت T وهذا التّرتيب للرّؤوس، وارجع إلى الرّؤوس بحسب دليلها في هذا التّرتيب. لتكن P_i مجموعة الرّؤوس للمسار من i إلى 0 في T، وليكن i' هو الوالد لـ i في T (الرّأس التّالي على المسار من i إلى $\mathbf{0}$)، وليكن $i \wedge j = \max(P_i \wedge P_j)$ هو الرّأس الذي يتقابل فيه المسار من i إلى 0 والمسار من j إلى 0. إذا أعطيت التّرقيم العموديّ أوّلاً للشّجرة الأفقيّة أوّلاً T في G، فاجعل $c(i, j) = d_T(i, j) - d_G(i, j)$ هي التّعارض (discrepancy) للرّأسين i, j.

16.4.8. مثال: في البيان المُعَلّم $c(i, k)$ أدناه، نسجّل عند كلّ رأس k التّعارض $c(i, k)$ للشّجرة T في المثال 15.4.8



17.4.8. تمهيدية: ([Winkler [1983]). يملك التّعارض الخصائص الآتية:

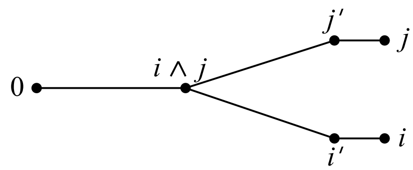
(a $c(i, j) = c(j, i) \ge 0$.

(b إذا كان $i \in P_j$ فإنّ $c(i, j) = 0$.

(c إذا لم يكن $i \in P_j$ ولا $j \in P_i$، فإنّ $c(i, j') \le c(i, j) \le c(i, j') + 2$.

الإثبات: (a) المسافة في البيانات متماثلة، والمسار الأقصر من i إلى j في G ليس أطول من المسار بينهما في T.

b) المحافظة على المسافات لـ v_0 تعطي أنّ المسار من i إلى j في T هو أقصر مسار من i إلى j في (G) بما أنّ j' ينتمي إلى المسار من i إلى j في T، فإنّه يصبح لدينا $d_T(i, j) - d_T(i, j') = 1$. وبما أنّ $jj' \in E(G)$، يصبح لدينا أنّ $\left|d_G(i,j) - d_G(i,j')\right| \leq 1$. إذن، $c(i, j) - c(i, j')$ هو 1،0 أو 2. ■



مع هذا المفهوم للتّعارض، نستطيع إعطاء فكرة واضحة عن كيفية عمل تشفير وينكلر، سنستخدم شجرة بحث، لأنّها تعطينا $(n - 1)$ من الإحداثيّات الطّبيعيّة. إنّ المسافة في الشّجرة هي "تقريب" للمسافة في البيان؛ وتحتاج إلى أنْ تكون معدلّة بواسطة التّعارض، وتشفير وينكلر يضع 1 في الإحداثيّ k لأحد الرّؤوس i، j لـ $d_T(i, j)$ بالضبط من قيم k، ونريد للشّفرة الأخرى أنْ تملك 0 بالضّبط في $d_G(i, j)$ من هذه الإحداثيّات؛ لذلك، ننجز التّعديل بامتلاك * بالضّبط في $c(i, j)$ من الإحداثيّات؛ حيث شفرة واحدة تملك 1، والمسألة هي أنْ نصمّم التّشفير لننجز هذا لأزواج الرّؤوس جميعها في الوقت نفسه.

18.4.8. نظرية: ([1983] Winkler) كلّ بيان مترابط على n من الرّؤوس G يملك مكعّبًا مسحوقًا بعده $n - 1$ على الأكثر.

الإثبات: اختر شجرة T، وترقيم $0, \ldots, n-1$ كما هو موصوف أعلاه. نعرّف تشفيرًا $f(i) = (f_1(i), \ldots, f_{n-1}(i))$ وتحقّق من أنّ $d_G(i, j) = d_S(a_i, a_j)$. والتّشفير هو:

$$f_k(i) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } k \in P_i \\ * & \text{إذا كان } c(i,k) - c(i,k') = \hat{1} \\ * & \text{إذا كان } c(i,k) - c(i,k') = 1 \text{ و } i < k \text{ و } c(i,k) \text{ زوجيّ.} \\ * & \text{إذا كان } c(i,k) - c(i,k') = 2 \text{ و } i > k \text{ و } c(i,k) \text{ فرديّ.} \\ 0 & \text{غير ذلك.} \end{cases}$$

(المتّجهات في التّشفير لمثال 16.4.8 هي $f(0) = 00000$، $f(1) = 10000$، $f(2) = 110*0$، $f(3) = *0100$، $f(4) = **110$، $f(5) = **111$.)

لإثبات أنّ $d_S(f(i), f(j)) = d_G(i, j)$، نعدّ الإحداثيّات حيث يكون واحد من $f(i)$ و $f(j)$ يملك 1، والآخر يملك 0. مثل هذه الـ k من الإحداثيّات تنتمي إلى $P_i \cup P_j$، حيث وضعت الواحدات جميعها. من التّماثل، نستطيع افتراض أنّ $i < j$. لذلك، $j \notin P_i$، وسوف نعُدُّ الحالتين $i \in P_j$ و $i \notin P_j$،

إذا كان $i \in P_j$، فإنّ $d_G(i,j) = d_T(i,j) = \left|P_j - P_i\right|$، وتكون $f_k(i) = f_k(j) = 1$ إذا وفقط إذا كان $k \in P_i$. تقع الإحداثيات جميعها في $P_j - P_i$ حيث يكون بالضبط واحد من $f(i)$ و $f(j)$ يملك 1. لاحظ أن لكلّ $k \in P_j - P_i$، يكون لدينا $f_k(i) = 0$. وعليه، فإنّ $d_G(i,j) = d_S(f(i), f(j))$.

إذا كان $i \notin P_j$، فإنّ واحدًا بالضبط من $\{f_i(k), f_j(k)\}$ يساوي 1 تمامًا عندما يكون $k \in (P_j - P_i) \cup (P_i - P_j)$. ونحتاج إلى برهنة أنّ المتّجه الآخر يملك * بالضبط في $c(i, j)$ من هذه الإحداثيّات. وهذا يعطي:

$$d_S(f(i), f(j)) = |P_j - P_i| + |P_i - P_j| - c(i, j) = d_T(i, j) - c(i, j) = d_G(i, j).$$

في المثال 16.4.8، $(P_5 - P_2) \cup (P_2 - P_5)$ هي الإحداثيات الخمسة جميعها ؛ وبما أنّ $f(2)$ و$f(5)$ معًا يملكان * في ثلاثة من هذه الإحداثيّات، فإنّ $d_s(f(2), f(5)) = d_G(2, 5) = 2$، كما أردنا.

لتعيين النّجوم * في هذه المواقع؛ خذ في الحسبان التّغيير في التّعارضات الذي نحصل عليه بسبب جلب أيّ من i أو j إلى نقطة تقاطع P_i مع P_j. خذ في الحسبان قائمتين:

$$0 = c(i, i \wedge j) \le \ldots \le c(i, j') \le c(i, j)$$

$$0 = c(i \wedge j, i) \le \ldots \le c(i', j) \le c(i, j)$$

سوف نحصل على * واحدة في $f(i)$ لكلّ m زوجيّ حيث $0 < m \le c(i, j)$ ونحصل على * واحدة في $f(i)$ لكلّ m فرديّ حيث $0 < m \le c(i, j)$.

لكلّ m زوجيّ حيث $0 < m \le c(i, j)$، ليكن j_m هو الرّأسَ الوحيد حيث $c(i, j_m) \ge m$ و$c(i, j'_m) < m$. حتى عندما تكون القيمة m ليست القائمة الأولى، فإنّ j_m يكون حسن التعريف؛ ولأنّ c تتغير على الأكثر **2** مع كلّ خطوة، فإنّ قيم j_m تكون مختلفة. فضلًا عن ذلك، يضمن الترتيب العموديّ الأوّل أنّ $i < k$ لكلّ $k \in P_j - P_i$. لذلك، فإنّ $f_k(i) = *$ لكلّ $k \in P_j - P_i$ إذا وفقط إذا كان $k = j_m$ لبعض قيم m الزّوجيّة. في المثال 16.4.8، لاحظ أنّ لـ $(i, j) = (2,5)$ يكون لدينا $j_2 = 4$ و$f_4(2) = *$.

بطريقة مشابهة، لكلّ m فرديّ حيث $0 < m \le c(i, j)$، ليكن i_m الرّأسَ الوحيد بحيث $c(i_m, j) \ge m$ و $c(i'_m, j) < m$. كما في السابق، تكون قيم i_m مختلفة وحسنة التّعريف. والتّرتيب العموديّ أوّلاً يضمن أنّ $j > k$ لكلّ $k \in P_i - P_j$. لذلك، فإنّ $a_j(k) = *$ لكلّ $k \in P_i - P_j$ إذا وفقط إذا كان $k = i_m$ لبعض قيم m الفرديّة. في المثال 16.4.8، لاحظ أنّ لـ $(i, j) = (2,5)$ يكون لدينا $i_1 = 1$، $i_3 = 2$، و $f_1(j) = f_3(j) = *$.

لذلك، نكون قد عددنا النّجوم * في $P_i - P_j \cup P_j - P_i$. وعددها هو عدد الأعداد الزّوجية الصّحيحة بين 1 و $c(i, j)$ ، إضافة إلى عدد الأعداد الفرديّة الصّحيحة بين 1 و$c(i, j)$، ويساويان معًا $c(i, j)$.

التفريع ونشر الإشاعات (Branchings and Gossip)

لقد درسنا مسألة إيجاد العدد الأكبر للأشجار المولّدة المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في بيان ما؛ وهذا يساوي أكبر k بحيث يتحقّق لكلّ تجزئة رؤوس P، وهناك $k(|P| - 1)$ ضلعًا على الأقلّ تعبر بين مجموعات P (النتيجة 59.2.8). هنا، سوف نأخذ في الحسبان مسألة مماثلة للبيانات الموجّهة تتعلّق بنظرية منجر (التمرين 14). وهذه النظرية هي نظرية أصغر – أكبر تركّز على الأزواج من الرّؤوس. نفحص "خاصّيّة التّرابط من رأس واحد لبقيّة الرّؤوس للبيان الموجّه.

19.4.8. تعريف: التّفريع من الدّرجة r (r – branching) في بيان موجّه يعدُّ شجرةً مجذّرةً "تفريعٌ خارجيّ" من r. إنّ الرّأس r يملك درجة دخول **0**، أمّا الرّؤوس الأخرى جميعها فتملك درجة دخول 1، والرّؤوس الأخرى جميعها قابلة للوصول من r. ليكن $\kappa'(r; G)$ يرمز إلى أصغر عدد من الأضلاع والتي يؤدّي حذفها إلى الحصول على رأس ما لا تستطيع الوصول إليه من r.

إنّ حذف الأضلاع الدّاخلة إلى المجموعة $X \subseteq V(G) - \{r\}$ يجعل كلّ رأس لـ X غير قابل الوصول إليه من r. من جهة أخرى، فإنّ أيّ مجموعة أصغريّة والتي بحذفها لا نستطيع الوصول إلى بعض الرّؤوس يجب أنّ تشتمل على الأضلاع جميعها التي تغادر مجموعة الرّؤوس التي تمّ الوصول إليها. لذلك، فإنّ $\kappa'(r; G)$ تساوي الأصغر على المجموعة غير الخالية $X \subseteq V(G) - \{r\}$، لـ عدد الأضلاع الداخلة في X.

وفي مجموعة التّفريعات من الدّرجة r المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا، فإنّ كلّ تفريع يجب أنْ يستخدم ضلعًا واحدًا داخل X على الأقلّ. لذلك، يوجد على الأكثر $\kappa'(r; G)$ تفريعات من الدّرجة r منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في G. وقد أثبت إدموند أنّ هذا الحدّ قابل للتّحقّق. ومناقشتنا تسمح بوجود الأضلاع المتكرّرة.

20.4.8. نظرية: (نظرية التّفريع لإدموند [1973]) لرأس r في بيان موجّه G، العددُ الأكبر للتّفريعات من الدّرجة r المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في G هو $\kappa'(r; G)$.

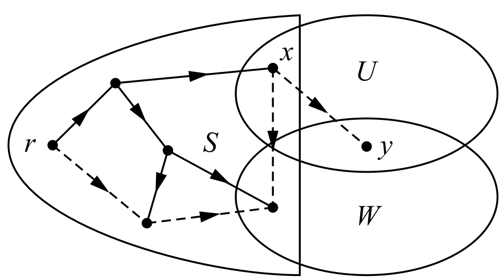
الإثبات: (Lovász [1976]) لتكن V مجموعةَ الرّؤوس في G. لاحظ أنّ الحدّ العلويّ يتحقّق لأنّ كلّ مجموعة جزئيّة من $V-r$ تكون قد دخلت على الأقلّ من خلال ضلع واحد في كلّ تفريع من الدّرجة r. وسوف نبرهن الوجود لـ $\kappa'(r; G)$ تفريعًا من الدّرجة r منفصلة ضلعيًّا بواسطة الاستقراء على $k = \kappa'(r; G)$. لـ $k = 1$. يكفي البحث الأفقيّ أوّلاً لتنمية تفريع من الدّرجة r؛ لأنّ كلّ رأس قابل للوصول إليه. ولـ $k > 1$، نبحث عن تفريع T من الدّرجة r بحيث يكون $\kappa'(r; G-E(T)) = k-1$. لذا، فإنّ فرضية الاستقراء تزوّدنا بـ $k-1$ تفريعًا إضافيًّا من الدّرجة r.

التّفريع الجزئيّ من الدّرجة r هو تفريع من الدّرجة r لبيان جزئيّ مُحدث في G. ليكن T تفريعًا جزئيًّا من الدّرجة r، وله رتبة كبرى بحيث $\kappa'(r; G-E(T))\ k-1$. إنَّ الرّأس r نفسه يكون مثل هذا التّفريع، مع $E(T) = \emptyset$. ضع $S = V(T)$. إذا كان $S = V$، فنكون قد انتهينا. لذلك، من الممكن افتراض أنّ $S \neq V$.

لـ $X \subseteq V-r$، ليكن e_X يرمز إلى عدد الأضلاع في $G-E(T)$ التي تدخل إلى X. إذا كان $e_X \geq k$ لكلّ $X \subseteq V-r$ التي تقطع $V-S$، فنستطيع توسيع T بإضافة أيّ ضلع من S إلى $V-S$. لذا، نستطيع اختيار أصغر مجموعة $U \subseteq V-r$ تقطع $V-S$ وتكون داخلة من خلال $(k-1)$ ضلعًا بالضبط. (للتّوضيح؛ تتكوّن T من الأضلاع المتّصلة الرّفيعة).

بسبب أنّ $\kappa'(r; G) = k$، وبسبب عدم حذفنا لأيّ ضلع داخل إلى $U-S$، فسيبقى لدينا $e_{U-S} \geq k$. على أيّ حال، $e_U = k-1$. لذلك، يجب أنْ يوجد ضلع xy من $S \cap U$ إلى $U-S$. وندّعي أنّ xy يمكن أنْ يضاف لتوسيع T، وهذا يناقض الأعظميّة لـ T. لذا، نحتاج فقط إلى تحقيق بقاء $k-1$ ضلعًا على الأقلّ يدخل إلى كلّ $W \subseteq V-r$ عندما نحذف xy من $G-E(T)$. وهذا يتحقّق تلقائيًّا إلا إذا كان $x \in V-W$ و $y \in W$. ويكفي برهنة أنّ $e_W \geq k$ لمثل W.

لاحظ أنّ الكمية $e_W + e_U$ تعدّ الأضلاع الداخلة إلى كلّ من W و U. ما عدا الأضلاع التي بين $W-U$ و $U-W$، فإنّ الأضلاع الداخلة إلى $W \cup U$، وتلك الداخلة إلى $W \cap U$ تعدّ مرتين. لذلك، فإن $e_W + e_U \geq e_{W \cup U} + e_{W \cap U}$. أصبح لدينا $e_{W \cup U} \geq k-1$ من خلال خاصّيّة التّعريف لـ T، و $e_U = k-1$ بواسطة البناء، و $e_{W \cap U} \geq k$ بسبب أنّ $x \in U-W$ والأصغريّة لـ U. إذن، $e_W \geq k-1-(k-1)+k = k$، كما نرغب. ■



يمكن تحويل إثبات لوفاسز إلى خوارزميّة لإيجاد العدد الأكبر للتّفريعات من الدّرجة r والمنفصلة زوجًا زوجًا؛ وقد أعطى تارجان [1974/75] خوارزميّة أخرى. ربما ندعو $\kappa'(r;\ G)$ **التّرابط الضّلعيّ المحليّ الشّامل** (Local – global edge – connectivity). لاحظ أنَّ للنظرية 20.4.8 عدة صورٍ متكافئة.

21.4.8. نتيجة: إذا كان G بيانًا موجّهًا، وr رأسًا في G، و$k \geq 0$، فإنّ العبارات التّالية تكون متكافئة:

(a) G يملك k تفريعًا من الدّرجة r منفصلا ضلعيًّا زوجًا زوجًا.

(b) $\kappa'(r;\ G) \geq k$؛ مكافئة لـ $\left\| [\overline{X},\ X] \right\| \geq k$ لكلّ $X \subseteq V(G) - \{r\}$.

(c) لكلّ $s \neq r$، يوجد k مسارًا من r إلى s منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا.

(d) يوجد k شجرة مولّدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في البيان الأصليّ المتضمّن (غير الموجّه). والتي لكلّ $s \neq r$ تحوي بينها k ضلعًا بالضبط من البيان الموجّه G تدخل s.

الإثبات: $A \Leftrightarrow B$ هي نظرية إدموند، أمّا $B \Leftrightarrow C$ فهي نظرية منجر، $A \Rightarrow D$ مباشرة. لـ $D \Rightarrow B$، نفترض أنّ الأشجار موجودة، ونعدُّ $U \subseteq V - r$. تملك كلّ شجرة مولّدة $|U| - 1$ ضلعًا ضمن U على الأكثر. لذا، فإنّ الأشجار تملك معًا $k(|U| - 1)$ ضلعًا على الأكثر ضمن U. ومن الافتراض، فإنّ الأضلاع للبيان الموجّه G تقابل هذه الأشجار التي تحتوي بالضبط على $k|U|$ ضلعًا مع مقدّمات في U. لذلك، فإنّ k ضلعًا على الأقلّ يدخل U. ■

لاحظ شرجفر (Schrijver) أنَّ نظرية التّفريع لإدموند يمكن أنْ تبرهن أيضًا باستخدام اتحاد الماترويدات وتقاطعها. أهمل الأضلاع التي تدخل الجذر r. ليكن M_1 هو الاتحاد لـ k نسخة من الماترويد الحلقيّ على البيان الأصليّ غير الموجّه. وليكن M_2 هو الماترويد الذي تكون فيه مجموعة من الأضلاع مستقلة إذا وفقط إذا لم يكن أيّ $k + 1$ منها تملك المقدّمة نفسها (هذا هو الجمع المباشر للماترويدات المنتظمة التي رتبتها k).يوجد k تفريعًا منفصلاً من الدّرجة r إذا وفقط إذا كان هذان الماترويدان يملكان مجموعة مستقلّة مشتركة حجمها $k(n(G) - 1)$.

إنَّ التّفريعات من الدّرجة r المنفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا تزوّدنا بقواعد (بروتوكولات) ثابتة تتسامح مع خطأ الرّسائل المرسلة من r، في حين تكون الشّجرات البديلة متاحة. بعدها نأخذ في الحسبان قواعد ثابتة للإرسالات من كلّ رأس إلى الرّؤوس الأخرى جميعها، حيث يتمّ الإرسال في اتجاهين، إلاّ أنّ التّنفيذ يتمّ بترتيب معيّن.

السؤال النّاتج هو **مسألة انتشار الإشاعة** (gossip problem). خذ في الحسبان n من الإشاعات يتضمّن كلّ منها معلومة سارة؛ وبسبب أنها إشاعات، فإنّ كلّ شخص يريد معرفة المعلومات كلّها، وعندما يحدث اتصال بين شخصين، فإنّ كلّ شخص يخبر الآخر بكلّ ما يعرف. السّؤال: ما عدد المكالمات الهاتفيّة التي نحتاج إليها لنقل المعلومات جميعها ؟ لقد نُشر العديد من الحلول في بداية السّبعينيّات من القرن العشرين.

إنّ تحقيق ذلك بـ $2n - 3$ من المكالمات يكون سهلاً؛ حيث يهاتف كلّ شخص x ثمّ يعود x بمهاتفة كلّ واحد. وهنا، نوفّر مكالمة واحدة عن طريق دمج المكالمة الأخيرة دخولاً والمكالمة الأولى خروجًا. عندما تكون $n \geq 4$، فإنَّ $2n - 4$ مكالمة تكفي: أولاً، يجري الآخرون مكالمة هاتفية مع مجموعة S تتكون من أربعة أشخاص، بعدها تتشارك S المعلومات مع زوجين متتاليين، ثمَّ يتلقى الآخرون المكالمات من S باستخدام ما مجموعه $(n - 4) + 4 + (n - 4) = 2n - 4$ مكالمة. وباستخدام نموذج بيان، سنبين أنّ هذا هو أفضل ما يمكن.

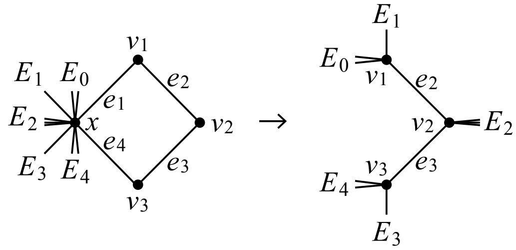
22.4.8. تعريف: البيان المرتّب (ordered graph): بيان مع ترتيب للأضلاع (الأضلاع المتكرّرة مسموح بها). **والمسار المتزايد** (increasing path): هو مسار بواسطة أضلاع متتالية لاحقة. أمّا مخطّط الإشاعة (gossip scheme)، فهو بيان مرتّب يملك مسارًا متزايدًا من كلّ رأس إلى كلّ رأس من الرّؤوس الأخرى.

يحقق **مخطّط الإشاعة هذا** $NOHO$ ("لا يسمع أحد معلوماته الخاصة") إذا كان لا يملك مسارًا متزايدًا من x إلى y بالإضافة إلى ضلع لاحق بين x وy.

23.4.8. نظرية : إذا كان $n \geq 4$، فإنّ العدد الأصغر للأضلاع في مخطّط إشاعة على n من الرّؤوس هو $2n - 4$.

الإثبات: ([Baker – Shostak [1972]) سوف نستخدم كلمة "مكالمات" بحرّيّة بدلاً من كلمة "أضلاع" لتأكيد التّرتيب، وإمكانيّة وجود أضلاع مكرّرة. إنّ الخطة الموصوفة أعلاه تستخدم $2n - 4$ مكالمة، ويبين تحليل الحالة أنّها الأمثل لـ $n = 4$. وهذا يزوّدنا بأساس لإثبات بالاستقراء على n. وإذا كان $n > 4$، فيمكن افتراض أنّ كلّ مخطّط إشاعة على $n - 1$ من الرّؤوس يستخدم على الأقل $2n - 6$ مكالمة. إذا كان $2n - 4$ ليس مثاليًّا لـ n من الرّؤوس، فإنّنا نستطيع إضافة مكالمات للمخطّط المثاليّ (إذا كان هذا ضروريًّا) للحصول على مخطّط إشاعة G على n من الرّؤوس له $2n - 5$ مكالمة بالضبط.

الادّعاء الأوّل: G يحقق NOHO. وبخلاف ذلك، فإنّ G سيملك مسارًا متزايدًا من x إلى v_k عبر الأضلاع $e_1, \ldots, e_k$ متبوعًا بمكالمة $e_{k+1} = v_k x$. احذف e_1 و e_{k+1}. وجَزّأ المكالمات الأخرى التي تشمل x إلى $k + 2$ مجموعة؛ تتكوّن E_0 من المكالمات (الأضلاع) الموجودة قبل e_1 وE_i؛ $1 \leq i \leq k$؛ تتكوّن من المكالمات الموجودة بين e_i وe_{i+1}، في حين تتكوّن E_{k+1} من المكالمات الموجودة بعد e_{k+1}. في كلّ ضلع $e \in E_k$، ضع v_1 أو v_i أو v_k مكان x في الحالات $1 \leq i \leq k$، $i = 0$، أو $i = k + 1$، على التّرتيب (انظر التّوضيح). الآن، $E(G) - \{e_1, e_{k+1}\}$ هي مخطّط إشاعة على $V(G) - \{x\}$؛ لأنّ كلّ مسار متزايد خلال x قد استبدل به مسار متزايد يتكوّن من الأضلاع نفسها، بل ربما من أضلاع إضافيّة من $\{e_i\}$. إنّ هذا المخطّط يملك $2(n - 1) - 5$ ضلعًا، وهذا يناقض فرضيّة الاستقراء.



الادّعاء الثاني: لاحظ أنّ $d(x) - 3$ مكالمة تعدّ عديمة الفائدة لـ x. لذا، فإنّ $\delta(G) \geq 3$. لتكن $O(x)$ مجموعةَ المكالمات التي تمّ من خلالها الوصول إلى رأس للمرّة الأولى من خلال مسار متزايد "خارج" من x؛ إنّ هذه المكالمات تشكّل شجرة. والشّجرة $I(x)$ من الأضلاع المفيدة "دخولاً" لـ x هي $O(x)$ للتّرتيب العكسيّ على $E(G)$. سوف نثبت أنّ $O(x) \cap I(x)$ هي مجموعة الأضلاع الواقعة على x. إذا وُجد مسار متزايد من x إلى y بحيث يصل هذا المسار إلى $y \in N(x)$ قبل أنْ يصلها الضّلع xy، فإنّ x تخالف أو تنتهك NOHO. لذا، فإنّ $xy \in O(x)$. وبطريقة مشابهة، فإنّ $xy \in I(x)$. وبالعكس، إذا كان $O(x) \cap I(x)$ يحتوي ضلعًا e ليس واقعًا على x، فإنّ مسارًا متزايدًا من x يحتوي e، ومسارًا متزايدًا لـ x يحتوي e يندمجان لانتهاك NOHO لـ x. إذن، $|O(x) \cap I(x)| = d(x)$. أمّا الأضلاع "عديمة الفائدة لـ x"، فهي الأضلاع التي ليست في $\overline{O(x) \cup I(x)}$، ويكون لدينا:

$$\left|\overline{O(x) \cup I(x)}\right| = 2n - 5 - (n - 1) - (n - 1) + d(x) = d(x) - 3$$

وبما أنّ هذه تحسب مجموعة من الأضلاع، فإنّ $\delta(G) \geq 3$.

الادّعاء الثّالث: البيان الجزئيّ الذي نحصل عليه بحذف المكالمتين الأولى والأخيرة اللتين أجريتا من قبَل كلّ رأس يملك خمسَ مركّبات على الأقل ولا يملك رأسًا معزولاً. لتكن xy المكالمةَ الأولى التي تشمل x. إذا كانَتَ المكالمة الأولى التي تشمل y هي yz حيث $z \neq x$ ، فمن التعريف نجد أنّها تحدث قبل xy، وهاتان المكالمتان لا تتواصلان من x إلى z. بعد xy وyz، فإنّ مسارًا متزايدًا من x إلى z ينتهك NOHO عند z. لذلك، فإنّ مجموعة المكالمات الأولى F هي مواءمة، ويوجد $n/2$ منها. وبالمثل، مجموعة المكالمات الأخيرة L هي مواءمة حجمها $n/2$. لذا، البيان $G - F - L$ يملك $n - 5$ ضلعًا. وعليه، يملك خمس مركّبات على الأقلّ. ومن القضيّة 11.2.1. نجد أنّ هذا البيان لا يملك رأسًا معزولاً لأنّ $\delta(G) \geq 3$.

التّناقض: بما أنّ $e(G) = 2n - 5 < 2n$، فإنّ رأسًا ما x تكون درجته 3 على الأكثر. لتكن C_1، C_2، C_3 مركّبات $G - F - L$ التي تحتوي على x و كذلك على جاريها الأول و الأخير على الترتيب (يكون جارها الأوسط في C_1). لاحظ أنّ أضلاع $G - F - L$ يمكن أنْ تنتمي إلى $O(x)$ فقط من خلال مسارات تبدأ بالضّلع الأول أو الأوسط الذي يشمل x ويتجنب $F \cup L$. لذلك، فإنّها تنتمي إلى C_1 أو C_2. وبالمثل، فإنّ أضلاع $G - F - L$ التي تنتمي إلى $I(x)$ تظهر في C_1 أو C_3 فقط. أمّا أضلاع بقية المركّبات التي يوجد منها اثنان على الأقل، فتكون عديمة الفائدة لـ x ($G - F - L$ لا تملك رأسًا معزولاً). ولكن الادعاء الثالث يسمح فقط بـ $d(x) - 3 = 0$ ضلعًا عديم الفائدة لـ x. ■

في التّطبيقات العملية، قد نرغب في تصغير الطّول الكلّيّ للرسائل أو الزّمن الكلّيّ (بافتراض أنّ كلّ رأس يتشارك بمكالمة على الأكثر لكلّ وحدة زمن). إضافة إلى أنّنا نستطيع حصر الأزواج المسموح لها بمكالمة بعضها بعضًا. وقد يكتمل نشر الإشاعة في $2n - 4$ إذا وفقط إذا كان بيان المكالمات المسموحة مترابط، ويملك حلقة من الدّرجة 4 (Kleitman – Shearer [1980], Bumby [1981]). تأخذ الاختلافات الأخرى في الحسبان البيانات الموجّهة (التمرينان $15 - 16$)، وتحمل الخطأ، ومكالمات مؤتمر، ... إلخ.

التلوين القائميّ وقابليّة الاختيار (list Coloring and Choosability)

يُعَدُّ التّلوين القائميّ نسخة أكثر عمومًا من مسألة التّلوين الرّأسيّ. ما زلنا نختار لونًا واحدًا لكلّ رأس، ولكن مجموعة الألوان المتوافرة عند كلّ رأس قد تكون مقيّدة، وقد قدم هذا النموذج فايزنج [1976] (Vizing) وإيردوز، وروبن، وتايلور [1976] (Erdös – Rubin – Taylor) بصورة مستقلة.

24.4.8. تعريف: لكلّ رأس v في بيان G، لتكن $L(v)$ تدلّ على قائمة ألوان متوافرة عند v. إنّ **التّلوين القائميّ** (list coloring) أو **دالّة الاختيار** (choice function) هو تلوين فعليّ f بحيث يتحقق أنّ $f(v) \in L(v)$ لكلّ v. يكون البيان G **قابلاً للاختيار من الدّرجة** k (k – choosable) أو **قابلاً للتّلوين القائميّ من الدّرجة** k (list k – colorable) إذا كان كلّ تخصيص لقوائم مكونة من k عنصرًا للرّؤوس يسمح بتلوين قائميّ فعليّ. ونعرّف **العدد اللّونيّ القائميّ** (list chromatic number)، أو **عدد الاختيار** (choice number)، أو **قابليّة الاختيار** $\chi_l(G)$ (choosability) على أنّه (أنّها) أصغر k بحيث يكون G قابلاً للاختيار من الدّرجة k.

بما أنّ القوائم قد تكون متطابقة، فإنّ $\chi_l(G) \geq \chi(G)$. وإذا كان حجم القوائم على الأقل $1 + \Delta(G)$، فإنّ تلوين الرّؤوس بصورة متتابعة يترك لونًا متاحًا عند كلّ رأس. لاحظ أنّ هذا النقاش مشابه لخوارزميّة التّلوين الشّره، ويبرهن أنّ $\chi_l(G) \leq 1 + \Delta(G)$ (انظر التمرين 22 لتشابهات أخرى مع $\chi(G)$). على أيّ حال، فإنّه من غير الممكن وضع حدّ علويّ على $\chi_l(G)$ بدلالة $\chi(G)$؛ حيث توجد بيانات ثنائية الفرع مع عدد لونيّ قائميّ كبير جدًّا.

25.4.8. قضيّة. (Erdös – Rubin – Taylor [1979]) إذا كان $m = \binom{2k-1}{k}$، فإنّ $K_{m,m}$ غير قابل للاختيار من الدّرجة k.

الإثبات: لتكن Y, X التّجزئة الثّنائيّة لـ $G = K_{m,m}$. عيّن المجموعات الجزئيّة المختلفة التي تملك k من العناصر لـ $[2k-1]$ بوصفها قوائم للرّؤوس في X، والشيء نفسه لـ Y أيضًا. خذ في الحسبان دالّة اختيار f. إذا كانت f تستخدم أقل من k اختيارًا مختلفًا في X، فإنّه يوجد مجموعة $S \subseteq [2k-1]$ تملك k من العناصر غير المستخدمة، وهذا يعني عدم وجود لون قد اختير للرّأس في X الذي يملك S بصفتها قائمة له. إذا استعملت f على الأقل k لونًا على رؤوس في X، فإنّ هناك مجموعة $S \subseteq [2k\text{-}1]$ تحوي k عنصرًا من الألوان استعملت في X، ولا يوجد لون يمكن اختياره فعليًّا لرأس Y الذي قائمته S. ■

يعدُّ حساب العدد اللّونيّ القائميّ أكثر صعوبة من حساب العدد اللّونيّ؛ لأنّ العبارتين الحدّ العلويّ، والحدّ السّفلي تشملان محدّدات قياسية شاملة. كان تحديد البيانات ثنائيّة الفرع التّامة القابلة للاختيار من الدّرجة 3 صعبًا، فمثلاً لـ $3 \leq m \leq n$، فإنّ $K_{m,n}$ يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة **3** إذا وفقط إذا كان

$m = 3$ و$n \leq 26$ (Erdös – Rubin – Taylor [1979])، أو

$m = 4$ و$n \leq 20$ (Mahadev – Roberts – Santhanakrishnan [1991])، أو

$m = 5$ و$n \leq 12$ (Shende - Tesman [1994])، أو

$m = 6$ و$n \leq 10$ (O′ Donnel [1995]).

استخدم كلّ من ألون [Alon] وتارسي [1992م] (Tarsi) كثيرة حدود مرافقة لبيان لكي يحصلا على حدود علوية على $\chi_l(G)$ (انظر أيضًا Alon [1993]). أمّا فليشنر (Fleischner) وستيبتز (Stiebitz)، فقد استخدما هذه الطّريقة لإثبات أنّ إضافة n من المثلثات المنفصلة إلى حلقة من الدّرجة $3n$ يعطي بيانًا قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3؛ وقد برهنا النّتيجة الأقوى، وهي أنّ هذا البيان قابل للاختيار من الدّرجة 3.

وهناك نوع آخر من التّلوين الضلعيّ أيضًا، حيث نعيّن فيه قوائم الأضلاع. ويجب اختيار تلوين ضلعيّ فعليّ.

26.4.8. تعريف: لترمز $L(e)$ إلى قائمة الألوان المتوافرة للضّلع e. **إنّ التّلوين الضّلعيّ القائميّ** (list – edge – coloring) هو تلوين ضلعيّ فعليّ f، حيث يتم اختيار $f(e)$ من $L(e)$ لكلّ e. **وقابلية الاختيار الضّلعيّ** (edge – choosability) $\chi_l'(G)$ هي أصغر k بحيث إنّ كلّ تعيين لقوائم من الحجم k يعطي تلوينًا ضلعيًّا قائميًّا فعليًّا. وبصورة مكافئة $\chi_l'(G) = \chi_l(L(G))$، حيث $L(G)$ هو البيان الخطّيّ لـ G.

تعليل العبارة لـ $\chi_l'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ يعطي أيضًا أنّ $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ (التمرين 22). وعليه، $\chi'(G) < 2\chi'(G)$. كما في التّلوين العاديّ، فإنّ استخدام البيانات الخطّيّة يعبّر عن نسخة الضّلع بوصفها حالة خاصة من نسخة الرّأس، ويسلك بصورة أفضل كذلك. وعلى الرّغم من هذا، فإنّ حدّ التّخمين لقابليّة الاختيار الضّلعيّ يكون مفاجئًا. لقد اقترح هذا بصورة مستقلة من قبَل العديد من الباحثين بمن فيهم: فايزنج، جوبتا، البرتسون، كولنز، وتوكر، وويبدو. ولكنّه نشر أولاً في بلوباز – هاريس [1985] (Bollobas – Harris) (انظر أيضًا [1986] (Bollobas)).

27.4.8. مخمنة: (مخمّنة التّلوين القائميّ) $\chi_l'(G) = \chi'(G)$ لكلّ G. ■

للبيانات البسيطة، تؤدّي هذه المخمّنة ونظرية فايزنج (النظرية 10.1.7) إلى أنّ $\chi_l'(G) \leq \Delta(G) + 1$. وقد أثبت كلّ من بلوباز وهاريس [1985] أنّ $\chi_l'(G) < c\Delta(G)$ عندما $c > 11/6$ عندما تكون $\Delta(G)$ كبيرة

بما فيه الكفاية. إنّ هذا وتحسينات لاحقة أيضًا استخدمت طرقا احتماليّة. وقد أثبت كاهن (Kahn) [1996م] المخمّنة بصورة متقاربة؛ حيث أثبت أنّ $\chi_l'(G) \le (1 + o(1))\Delta(G)$. في حين هذّب كلّ من هاجكفست (Haggkvist) وجانسن (Janssen) [1997] حدّ الخطأ ليصبح: $\chi_l'(G) \le d + o\left(d^{2/3}\sqrt{\log d}\right)$ عندما $d = \Delta(G)$. أمّا مولوي (Molloy) وريد (Reed) [2001] فقد هذّبا الحدّ بصورة أدق (وعمّماه).

طُرحت الحالة الخاصّة لمخمّنة التّلوين القائميّ لـ $G = K_{n,n}$ من قبَل دينتز (Dinitz) في العام 1979. (برهنها جانسن [1993م] لـ $K_{n,n-1}$). وأصبحت مخمّنة دينتز شائعة عندما صيغَت على صورة مصفوفة: إذا كان كلّ موقع لشبكة n في n يحتوي على مجموعة حجمها n، فإنّه من الممكن اختيار عنصر واحد من كلّ مجموعة بحيث تكون العناصرُ المختارة في كلّ صفّ وعمود مختلفةً.

لقد أثبت جالفن [1995م] (Galvin) مخمّنة التّلوين القائميّ للبيانات الثنائيّة الفرع التي تتضمّن مخمّنة دينتز (انظر أيضًا [Slivnik [1996). وسنبرهن هنا مخمّنة دينتز فقط باستخدام مسألة المواءمة المستقرّة (الجزء 2.3).

28.4.8. تعريف: نعرّف النّواة (Kernel) لبيان موجّه على أنّها مجموعة مستقلة S تملك تابعًا لكلّ رأس خارج S. يكون البيان الموجّه كامل النّواة (Kernel – perfect) إذا كان كلّ بيان جزئيّ موجّه محدث يملك وواة. إذا أعطينا دالّة $f: V(G) \to \mathbb{N}$، فإنّ البيان G يكون قابلًا للاختيار من خلال الدالّة f (f–choos-able) إذا أمكن اختيار التّلوين الفعليّ من القوائم التي عند الرّؤوس عندما يكون $|L(x)| = f(x)$ لكلّ x.

استخدمنا مفهوم "النّواة" في التطبيق 14.4.1 (البيانات الموجّهة التي ليس لها حلقات فرديّة. كأنْ تملك أنوية مثلًا). إنّ أيّ بيان قابل للاختيار من خلال الدالّة f يكون قابلاً للاختيار من الدّرجة k حيث $k = \max f(x)$؛لأنّ إضافة ألوان إلى قائمة لا يجعل الاختيار أكثر صعوبة.

29.4.8. تمهيدية: (Bondy – Boppana – Siegel) إذا كان D توجيهًا كامل النّواة لـ G و $f(x) = 1 + d_D^+(x)$ لكلّ $x \in V(G)$، فإنّ G يكون قابلًا للاختيار من خلال f.

الإثبات: سنستخدم الاستقراء على $n(G)$؛ تكون العبارة واضحة لـ $n(G) = 1$. لـ $n(G) > 1$، خذ في الحسبان تعيينًا لقوائم بحيث يكون حجم القائمة $L(x)$ هو $f(x)$. اختر لونًا c يظهر في قائمة ما. اجعل $U = \{v: c \in L(v)\}$. ولتكن S هي النّواة للبيان الجزئيّ الموجّه المحدث $D[U]$. عيّن لون c لكلّ S، وهذا مسموح؛ لأنّ S مستقلة.

احذف c من $L(v)$ لكلّ $v \in U - S$. احذف ألوانًا إضافية بصورة عشوائية من قوائم أخرى لتخفيض $L(x)$ لكلّ $x \in V(D) - S$ لكي يصبح حجمها $f'(x)$. حيث $f'(x) = 1 + d_{D-S}^+(x)$. بما أنّ كلّ رأس ليس في S يملك تابعًا في S، فإنّ $f'(x) < f(x)$ لكلّ $x \in V(D) - S$ الذي يدعم حذف c من القوائم. من فرضية الاستقراء، فإنّ D' يكون قابلًا للاختيار من خلال $f'(x)$. لذا، نستطيع إكمال تلوين قائميّ لـ G بإضافة تلوين قائمي إلى D' من خلال استخدام c على S. ■

30.4.8. نظرية: (Galvin [1955]) $\chi_l'(K_{n,n}) = n$.

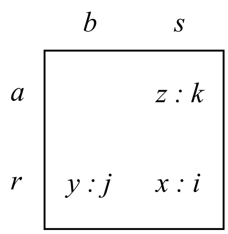
الإثبات: بما أنّ $\chi_l'(G) = \chi_l(L(G))$، فيكفي من التمهيديّة 29.4.8 برهنة أنّ $L(K_{n,n})$ يملك توجيهًا كامل النّواة مع كلّ رأس يملك درجتي دخول و خروج $n - 1$. لاحظ أنّ البيان $L(K_{n,n})$ هو الجداء الكارتيزيّ $K_n \square K_n$ (التمرين 8.1.7)؛ موضوعًا في شبكة n في n، بحيث تكون الرّؤوس متجاورة إذا وفقط إذا كانت في الصّفّ نفسه أو في العمود نفسه.

عين أوسمة $1,2, \ldots, n$ بحيث يكون الرّأس (r, s) يملك وسم $r + s - 1 \ mod \ n$. وعرّف توجيهًا D لـ $K_n \square K_n$ بتوجيه الأضلاع من الرّأس (r, s) الذي له الوسم i إلى الرّؤوس في العمود s مع أوسمة أدنى، والرّؤوس في الصّفّ r مع أوسمة أعلى. بما أنّ i أعلى من $i - 1$ من الأوسمة الأخرى، فإنّ الرّأس (r, s) يملك $i - 1$ تابعًا في عموده، و$n - i$ تابعًا في صفّه. لذلك، $d^+(r, s) = d^-(r, s) = n - 1$.

سنبرهن أنّ D كامل النّواة. إذا أعطينا $U \subseteq V(D)$، فسنحصل على نواة للبيان الموجّه الجزئيّ $D[U]$ بحلّ مسألة المواءمة المستقرّة. عندما $(r, b) \in U$ و $(r, s) \to (r, b)$ في D، فإنّنا نريد من r تفضيل b على s. لذا، لصفّ r، فإنّ الأولويّات بين الأعمدة تبدأ مع $\{s: (r, s) \in U\}$ بترتيب متناقص لوسم الرّؤوس، باتّباع أيّ ترتيب بين $\{s: (r, s) \notin U\}$. وبصورة مشابهة، لعمود s، فإنّ الأولويّات بين الصّفوف تبدأ مع $\{r: (r, s) \in U\}$ بترتيب متزايد لأوسمة الرّؤوس، باتّباع أيّ ترتيب بين $\{r: (r, s) \notin U\}$.

خوارزميّة المقترحات لجيل وشابلي (الخوارزميّة 17.2.3) تعطي مواءمة مستقرّة M لهذه الأولويّات. وبالنظر إلى الأزواج المتوائمة في M بوصفها مواقع في الشّبكة، إجعل $S = M \cap U$. بسبب أنّ M مواءمة، فإنّ S لا تملك موقعين في الصّفّ أو العمود نفسه. لذلك، فإنّ S مجموعةٌ مستقلّة في D. وسنثبت أنّ كلّ $x \in U - S$ تملك تابعًا في S.

ليكن i وسمَ الموقع $x = (r, s) \in U - S$. بما أنّ $S = M \cap U$، فإن $x \notin M$. لذا، فإنّ M تملك موقع $y = (r, b)$ مع وسم ما j وموقع $z = (a, s)$ مع وسم ما k. ولأنّ M مستقرّة، فلا يمكن أنْ تكون r تفضل s على b ولا s تفضل r على a في الوقت نفسه. إذن، نستنتج من هذه العبارة –من خلال الخطوات في الأسفل– أنّ x تملك y أو z كتابع في S. ■



ليس [(r تفضل s على b) و (s تفضل r على a)]

ليس [($i > j$ أو $y \notin U$) و ($i < k$ أو $z \notin U$)]

($i < j$ و $y \in U$) أو ($i > k$ و $z \in U$)

($x \to y \in S$) أو ($x \to z \in S$)

31.4.8. ملاحظة. ترتبط مخمّنة التّلوين القائميّ بمخمّنة أخرى. إنّ **التّلوين الكلّيّ** (total coloring) لـ G هو تعيين لون لكلّ رأس ولكلّ ضلع، بحيث تملك الأشياء الملونة ألوانًا مختلفة عندما تكون متجاورة أو واقعًا بعضها على بعض. وتنصّ مخمّنة التّلوين الكلّيّ (Behzad [1965]) على أنّ كلّ بيان بسيط G يملك تلوينًا كلّيًّا $\Delta(G) + 2$ لونًا على الأكثر. لقد أعطى كلّ من روزنفيلد [1971] (Rosenfeld) وبهزاد (Behzad) نتائج حول صفوف خاصّة. ومخمّنة التّلوين القائمي تعطي حدًّا علويًّا يساوي $\Delta(G) + 3$؛ لأنّ كلّ بيان G يملك تلوينًا كلّيًّا مستحدثًا $\chi_l'(G) + 2$ لونًا على الأكثر (تمرين 25). ■

دُرِسَت مخمّنة التّلوين القائميّ للبيانات السّويّة. حيث أثبت كلّ من النجهام وجودين [1996م] أنّ كلّ بيان سويّ قابل للتّلوين الضّلعيّ من الدّرجة k ومنتظم من الدّرجة k، يكون قابلاً للاختيار الضّلعيّ من الدّرجة k (باستخدام نظرية الألوان الأربعة).

تعيدنا مناقشة البيانات السّويّة إلى التّلوين القائميّ للرّؤوس، وعلى الرّغم من أنّ البيانات السّويّة تملك عددًا لونيًّا يساوي 4 على الأكثر، فقد خمّن كلّ من فايزنج [1976م] وإيردوز، وروبن وتايلور [1979م] أنّ أكبر عدد اختيار على هذا الصّفّ هو 5. وقد قام فويجت [1993] (Voigt) ببناء بيان سويّ غير قابل للاختيار من الدّرجة 4 على 238 رأسًا، في حين قلّل مرزخاني [1996] (Mirzakani) (التمرين 26) هذا العدد إلى 63

رأسًا (يعمّم المثالان إلى عائلات غير منتهية). في الحقيقة، هناك بيانات سويّة قابلة للتّلوين من الدّرجة 3، وغير قابلة للاختيار من الدّرجة 4 ([1997] Viogt - Wirth، [1996] Gutner).

أثبت توماسين [1994bم] الحدّ العلويّ (وأثبت أيضًا [1995] أنّ البياناتِ السّويّة التي خصرها 5 قابلةٌ للاختيار من الدّرجة 3). غالبًا، تقوم الرّؤوس على الوجه غير المحدود ("الرّؤوس الخارجيّة") بدور خاص في براهين الاستقراء للبيانات السّويّة.

32.4.8. نظرية: ([1994b] Thomassen) تكون البيانات السّويّة قابلة للاختيار من الدّرجة 5.

الإثبات: إنّ إضافة أضلاع لا يمكن أنْ يخفض العدد اللّونيّ القائميّ. لذا، قد نحصر اهتمامنا بالبيانات السّويّة التي يكون فيها الوجهُ الخارجي حلقةً، ويكون كلّ وجه محدود مثلثًا. من الاستقراء على $n(G)$، سنثبت النتيجة الأقوى التي تنصّ على أنّ تلوينًا ما يمكن اختياره حتى لو كان لرأسين خارجين متجاورين قوائم مختلفة حجمها 1، في حين يكون للرّؤوس الخارجيّة الأخرى قوائم حجمها 3. وللخطوة الأساس ($n = 3$)، يبقى لون ما متوافرًا للرّأس الثّالث.

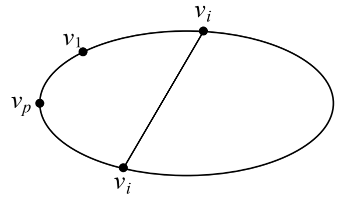
الآن، افترض أنّ $n > 3$. ليكن v_p و v_1 الرّأسين اللذين لهما ألوان ثابتة على الحلقة الخارجية C. ولتكن $v_1, \ldots, v_p$ هي $V(C)$ بترتيب مع اتجاه عقارب السّاعة.

الحالة 1: تملك C وترًا $v_i v_j$ حيث $1 \leq i \leq j - 2 \leq p - 2$. سنطبّق فرضيّة الاستقراء للبيان المكوّن من الحلقة $v_1, \ldots, v_i, v_j, \ldots, v_p$ مع داخلها. إنّ هذا يختار تلوينًا فعليًّا فيه v_i، v_j تستلمان ألوانا مثبّتة ما. وسنطبّق بعد ذلك فرضيّة الاستقراء للبيان المكوّن من الحلقة $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j$ مع داخلها لإكمال التّلوين القائميّ لـ G.

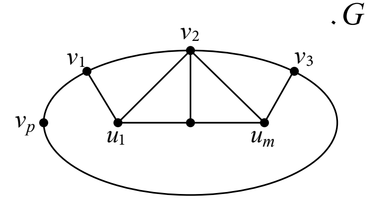
الحالة 2: لا تملك C وترًا. لتكن الرّؤوس $v_1, u_1, \ldots, u_m, v_3$ جيرانَ v_2 على التّرتيب (من الممكن $p = 3$). ولأنّ الوجوه المحدودة مثلثات، فإنّ G يحتوي المسار P الذي رؤوسه

$v_1, u_1, \ldots, u_m, v_3$. بما أنّ C خالية من الأوتار، وأنّ $u_1, \ldots, u_m$ رؤوس داخلية، وأنّ الوجه الخارجيّ لـ $G' = G - v_2$ محدود بحلقة C' يكون فيها P بدلاً v_1, v_2, v_3.

ليكن c اللّونَ المعيَّن لـ v_1. بما أنّ $|L(v_2)| \geq 3$، فمن الممكن اختيار ألوان مختلفة $x, y \in L(v_2) - \{c\}$. سوف نحتفظ بـ x, y للاستعمال المحتمل على v_2 بمنع x, y من $u_1, \ldots, u_m$. بما أنّ $|L(u_i)| \geq 5$، فإنّه يصبح لدينا $|L(u_i) - \{x, y\}| \geq 3$. لذلك، نستطيع تطبيق فرضيّة الاستقراء على G'، حيث $u_1, \ldots, u_m$ تملك قوائم حجمها 3 على الأقل، أمّا الرّؤوس الأخرى فتملك القوائم نفسها كما في G. في التّلوين الناتج، لاحظ أنّ v_1 و $u_1, \ldots, u_m$ تملك ألوانًا خارج $\{x, y\}$. نوسّع هذا التّلوين لـ G باختيار لون في $\{x, y\}$ لـ v_2 بحيث لا يظهر على v_3 في التّلوين لـ G'. ■



الحالة 1



الحالة 2

تجزئات باستخدام المسارات والحلقات (Partitions Using Paths and Cycles)

أخذنا في الحسبان مسألة التّفكيك بواسطة F ($\mathbf{F}-\text{decomposition}$): وهذا يعني تجزئة $E(G)$ إلى أصغر عدد من البيانات الجزئيّة في عائلة $\boldsymbol{F}$. وتمّ دراسة هذا للعديد من العائلات $\mathbf{F}$، مثل العصب (النظرية 3.4.8)، والبيانات الثنائيّة الفرع (التمرين 3)، والبيانات الثنائيّة الفرع التّامّة (النظرية 20.6.8)، والنّجوم (عدد الغطاء الرّأسيّ – الجزء 1.3). والغابات (التّشجير – النتيجة 57.2.8). وقبل الأخذ في الحسبان مسائل التّطرّف لتفكيك البيانات إلى مسارات وحلقات، فسنناقش مسألة أسهل، وهي تغطية الرّؤوس لبيان موجه باستخدام أقل عدد من المسارات.

إنّ بيانات المقارنة هي البيانات التي تملك توجيهات متعديّة؛ ويكون البيان الموجّه متعديًا (transitive) إذا كان $x \to y$ و $y \to z$ يؤدي إلى أنّ $x \to z$. لاحظ أنّ الرّؤوس لمسار في بيان موجّه متعد تحدث دوريًّا. إنّ بيانات المقارنة تكون كاملة (القضية 25.3.5)، وهذا يعني أنّ بيانًا موجّهًا متعدّيًا D يمتلك فيه الدوري الأكبر ω رأسًا يكون قابلاً للتّلوين الفعليّ بـ ω من الألوان. ومن نظرية البيان الكامل (النظرية 6.1.8) نعلم أيضًا أنّ $V(D)$ يمكن أنْ تغطّى باستعمال $\alpha(D)$ دوريًّا في D، حيث $\alpha(D)$ هو الحجم الأكبر لمجموعة مستقلّة.

بجعل المسارات "سلاسل" ووضع مجموعات مستقلة لتكون "سلاسل منفصلة" فإنّ هذا يصبح نظرية ديلوورث للبيانات الموجّهة التي تخلو من العرى المتعدّية: وهي الحجم الأكبر لسلسلة منفصلة يساوي العدد الأصغر للسّلاسل التي نحتاج إليها لتجزئة $V(D)$.

بالإضافة إلى الذي يتبع من نظرية البيان الكامل، فإنّ نظرية ديلوورث تكافئ نظرية كونج وإيجرفاري (التمرين 27)، فضلًا عن أنّ تعميمًا لها يتبع من نظرية التّقاطع الماترويديّ (التمرين 50.2.8). وسنقدّم هنا تعميمًا آخر يملك إثباتًا أقصر محتوًى في داخله.

33.4.8. نظرية: (Gallai – Milgram [1960]) يمكن تغطية الرّؤوس في بيان موجّه D باستعمال $a(D)$ مسارًا منفصلاً زوجًا زوجًا على الأكثر.

الإثبات: بما أنّه يمكن تغطية $V(D)$ باستخدام n مسارًا منفصلاً بطول $\mathbf{0}$؛ فيكفي أنْ نبرهن ادعاء أقوى وهو: إذا كانت $\mathbf{C}$ مجموعةَ المسارات المنفصلة زوجًا زوجًا، والتي تغطّي $V(D)$، وS هي مجموعة المصادر (الرّؤوس الابتدائيّة) لهذه المسارات، فيمكن تغطية $V(D)$ باستخدام $a(D)$ مسارًا منفصلاً زوجًا زوجًا على الأكثر مع مصادر في S. يكون الإثبات بالاستقراء على $n(D)$، مع خطوة الأساس الواضحة لـ $n(D) = 1$. والعبارة المضافة حول المصادر تساعد على جعل خطوة الاستقراء تعمل.

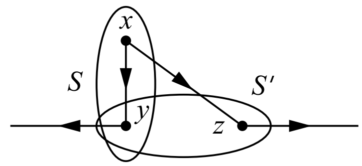
افترض أنّ $n > 1$، وأنّ $\mathbf{C}$ غطاءٌ لـ $V(D)$ بواسطة k مسارًا مع مجموعة مصدر S. يتحقق الادّعاء إلا إذا كان $|\mathbf{C}| = k > \alpha(D)$، في هذه الحالة، ننشئ غطاءً باستخدام عدد مسارات أقل، ومصادرها جميعها في S. بما أنّ $k > \alpha$، فإنه يوجد ضلع xy حيث $x, y \in S$. ليكن A وB المسارين في $\mathbf{C}$ اللذين يبدآن مع x و y على التّرتيب. نستطيع افتراض أنّ A يملك ضلعًا xz. وبخلاف ذلك، نستطيع أنْ نضيف x إلى بداية B وبذلك نوفّر مسارًا واحدًا.

بحذف x من البداية لـ A، نحصل على غطاء $\mathbf{C}'$ لـ $V(D-x)$ من خلال k من المسارات التي تملك مصادر في $S' = S - x + z$. بما أنّ $\alpha(D-x) \leq \alpha\ (D)$، فإنّ فرضيّة الاستقراء تعطي غطاءً $\mathbf{C}''$ لـ $V(D-x)$ يستخدم مسارات أقلّ من k، وتكون مصادرها جميعها في S'. تنتمي عناصر S' كلّها إلى S باستثناء z.

إذا كان z مصدرَ مسار في $\mathbf{C}''$، فنضيف x عند بداية هذا المسار. أمّاإذا كان z ليس مصدرًا بل y، فنضيف x عند بداية المسار الذي يبدأ بـ y. ولكن إذا كان y و z غير مصدرين، فنكون قد استخدمنا $|S'|\text{-}\ 2 = k-2$ مسارًا على الأكثر، ونستطيع إضافة x بوصفها مسارًا قائمًا بذاته للحصول على الغطاء

المنشود لـ $V(D)$ باستخدام $k-1$ مسارًا. وفي الحالات جميعها، فإنّ المسارات الناتجة تكون منفصلة زوجًا زوجًا وتملك مصادر في S.

بإعادة هذه المناقشة، طالما $k > \alpha$، فإنّنا نستطيع تقليل عدد المسارات لـ α. ■



وبالعودة إلى مسألة التّفكيك، فإنّ مخمّنة جالاي تنصّ على أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يمكن تفكيكه باستخدام $\lceil n/2 \rceil$ مسارًا. وتتحقق المساواة للعصب (التمرين 28). هناك بيانات أخرى تملك أضلاعًا أقلّ، إلا أنّ عدم وجود التّرابط ربما يتطلّب مسارات أكثر. وبصورة مماثلة، تنصّ مخمّنة هاجوس على أنّه يمكن تفكيك كلّ بيان زوجيّ على n من الرّؤوس إلى $\lfloor n/2 \rfloor$ حلقة. وما زالت المخمنتان دون حلّ، إلاّ أنّ لوفاز أثبت الحدّ الأمثل عندما يسمح بوجود كلّ من المسارات والحلقات. ونعرّف الحجم (size) لتفكيك ما على أنّه عدد البيانات الجزئيّة المستعملة في هذا التّفكيك.

34.4.8 نظرية: (Lovász [1968b]) كلّ بيان على n من الرّؤوس يمكن تفكيكه إلى $\lfloor n/2 \rfloor$ مسارًا وحلقة.

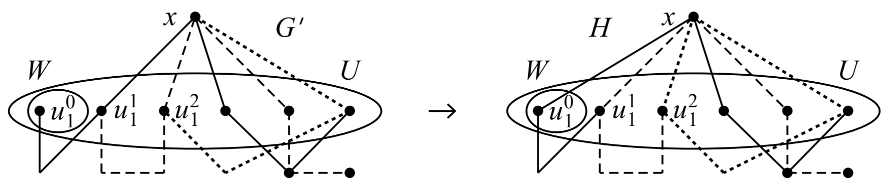
الإثبات: افترض أنّ $\boldsymbol{F}$ عائلة المسارات والحلقات جميعها، و $n'(G)$ عدد الرؤوس غير المعزولة في بيان G. بالاستقراء على $\lambda(G) = 2e(G) - n'(G)$، سنبرهن أنّ G يملك تفكيكًا بواسطة $\boldsymbol{F}$ حجمه $\lfloor n'(G)/2 \rfloor$ على الأكثر. لاحظ أنّ كلّ مركبة لـ G تملك أكثر من ضلع واحد تسهم بصورة إيجابية في $\lambda(G)$. لذا، فإنّ $\lambda(G) \geq 0$، حيث تتحقق المساواة فقط عندما تكون كلّ مركبة غير تافهة ضلعًا. ويتحقق الادعاء مع المساواة في حالة $\lambda(G) = 0$.

في خطوة الاستقراء، $\lambda(G) > 0$ سنأخذ في الحسبان حالتين؛ **الحالة** 1: إذا كان G يملك رأسًا y ذا درجة زوجيّة موجبة، اختر $x \in N(y)$، ويكون $W = \{z \in N(x): d(z)$ زوجيًّا$\}$. في هذه الحالة، ضع $G' = G - \{xz: z \in W\}$. وللحصول على G'، نخسر ضلعًا واحدًا (xy) على الأقلّ، ونعزل رأسًا واحدًا (x) على الأكثر. لذلك، فإنّ $\lambda(G)' < \lambda(G)$. الحالة 2: إذا كان G لا يملك رأسًا درجته زوجيّة موجبة، فإنّ $\lambda(G) > 0$ تجبر أنْ يتحقّق $\Delta(G) > 1$. افترض أنّ $\mathbf{x}$ رأس درجته 3 على الأقلّ، وشكّل G^{+} بتقديم رأس جديد y لتقسّم الضّلع xx' جزئيًّا. وافترض أيضًا أنّ $W = \{y\}$، و $G' = G^{+} - xy$. الآن $e(G') = e(G)$، ولكن $n'(G') > n'(G)$. لذلك فإنّ $\lambda(G') < \lambda(G)$.

وفي كلّ حالة، فإنّ فرضية الاستقراء تعطي تفكيكًا $\boldsymbol{D}$ بواسطة $\boldsymbol{F}$ لـ G' مع $|\mathbf{D}| \leq \lfloor n'(G')/2 \rfloor$. نحوّل $\boldsymbol{D}$ إلى تفكيك بواسطة $\boldsymbol{F}$ حجمه $|\mathbf{D}|$ للبيان H الذي حصلنا عليه من G' بإضافة أضلاع من x إلى W. في الحالة 1، نجد أنّ $H = G$ و $n'(G') \leq n'(G)$، و هذا هو التّفكيك المرغوب. أمّا في الحالة 2، فإن $H = G^{+}$ و $n'(G') = n'(G^{+})$. وبما أنّ $n'(G)$ زوجيّ، فإنّ $\lfloor n'(G^{+})/2 \rfloor = \lfloor n'(G)/2 \rfloor$. في تفكيك بواسطة $\boldsymbol{F}$ إلى G^{+}، فإنّ $n'(G)$ رأسًا ذات الدّرجات الفرديّة يجب أنْ تكون جميعها نقاطًا طرفيّة لمسارات. إذن، فالرّأس المضاف y الذي درجته 2 لا يمكن أنْ يكون نهاية لمسار، وهذا يعني أنّ xy و xy' ينتميان إلى البيان الجزئيّ نفسه، ويمكن استبدالهما بـ xx' لنحصل على التّفكيك المطلوب لـ G.

والآن، تندمج الحالتان. ونحتاج فقط إلى الحصول على التّفكيك لـ H من $\boldsymbol{D}$. ضع $U = N_H(x)$. يملك

كلّ رأس في U درجة فرديّة في G'. لذلك، يوجد مسار $P(u)$ في D مع نقطة نهاية u لكلّ $u \in U$. ولـ $u \in W$، نرغب في توسيع $P(u)$ لامتصاص ux. ولكن لايتمّ هذا إذا كان $P(u)$ يصل ولا ينتهي عند x. وعندها، فإنّ البيان الجزئيّ $P(x) \cup ux$ ليس في F. إنّ الفكرة هي في قطع الضّلع $u'x$ الذي عليه $P(u)$ تصل x، ونستخدم المسار $P(x) \cup ux - u'x$، ونستخدم $u'x$ لتوسيع $P(u')$ بدلاً منه. وهذا يولّد متتالية تغييرات من كلّ $u \in W$. وعلينا بيان أنّ هذه المتتاليات تنتهي ولا تتعارض معًا.

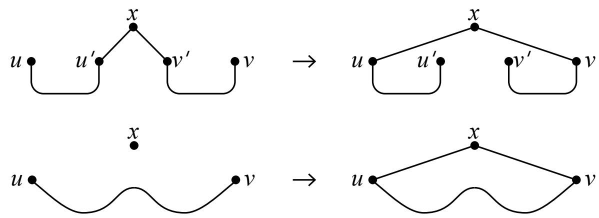


ضع $W = w_1, \ldots, w_t$. لكلّ $w_i \in W$، نشكّل قائمة $\ldots\ u_i^0, u_i^2,$ حيث $u_i^0 = w_i$ وكلّ $u_i^j \in U$. إذا اخترنا رأسًا u_i^j في القائمة i، فإنّنا نفحص ما إذا كان x رأسًا داخليًّا لـ $P\left(u_i^j\right)$، فإنْ كان غير كذلك، فسنتوقف ولا نعرف u_i^{j+1}. ولكن إذا كان كذلك، فنضع u_i^{j+1} ليكون الرّأس علَى $P\left(u_i^j\right)$ قبل x مباشرة؛ وهذا هو الـ "u'" المقترح في الأعلى. المسار $P\left(u_i^j\right)$ لكلّ $j \geq 1$ لا يمكن أنْ يبدأ خلال الضّلع $u_1^j \cdot x$؛ لأنّ هذا الضّلعَ ضلعٌ داخليّ لـ $P\left(u_i^{j-1}\right)$. (الصورة لـ G' تبيّن ثلاثة مسارات متتالية، هي: $P\left(u_1^0\right)$ الخطّ الرّفيع المتّصل و $P\left(u_1^1\right)$ الخَطّ المتقطّع، و $P\left(u_1^2\right)$ الخَطّ المنقّط).

سنبرهن الآن عدم وجود رأس لـِ U يظهر مرّتين في القوائم. بما أنّ $xu_i^j \in E\left(G'\right)$ عندما تكون $j \geq 1$، فإنّ الرّؤوس لـ W تظهر بوصفها رؤوس بداية فقط. افترض u_i^j, u_k^l رأسًا متكرّرًا بحيث يكون $\{j, l\}$ min أصغريًّا؛ لقد بينّا أنّ $j, l > 0$. من خلال الأصغريّة، فإنّ $u_i^{j-1} \neq u_k^{l-1}$، وهكذا فإنّ المسارين $P\left(u_i^{j-1}\right)$ و $P\left(u_k^{l-1}\right)$ يبدآن عند رأسين مختلفين. إذا كان $u_i^j = u_k^l$، فالمساران يتشاركان بالضّلع $u_i^j \cdot x$، ويجب أنْ يكونا المسار نفسه. ويحدث هذا من رؤوس مختلفة فقط إذا كان u_i^{j-1} و u_k^{l-1} نهايتين متخالفتين للمسار، ولكنهما لا تستطيعان المرور بـ u_i^j قبل x. ولهذا السّبب لا يحدث تكرار.

افترض $W' = \left\{u_i^j\right\}$ إذا كان $u = u_i^j$ و u ليست النهاية لقائمتها، ضع $u' = u_i^{j+1}$. نعرّف تفكيكًا بوساطة $\boldsymbol{F}$ لـ H مكونًا من مسار واحد أو حلقة Q' مقابلة لكلّ $Q \in \mathbf{D}$. إذا كان $Q \neq P(u)$ لبعض $u \in W'$، ضع $Q' = Q$. إذا كان $Q = P(u)$، ضع $Q' = Q + ux$ أو $Q' = Q + ux - u'x$ بالاعتماد على ما إذا كان u هو الرّأس الأخير في قائمته أم لا. وتعدّ Q' مسارًا دائمًا، باستثناء أنّها تعدّ حلقة عندما تنتهي Q عند x (عندما يكون u' غير معرّف). إنّ الاتحاد للمسارات الجديدة المقابلة لِـ $\left\{P\left(u_i^j\right)\right\}$ هو نفسه كـ $\cup P\left(u_i^j\right)$، باستثناء أنّ الأضلاع $\{xw_i\}$ قد امتصت، وبما أنّ $u \in W'$ تظهر مرة واحدة فقط في القوائم، فإنّ الضّلع ux ينتهي في أحد المسارات الجديدة فقط. و$\{Q': Q \in \mathbf{D}\}$ هو تفكيك لـ H. ■

لاحظ في هذا الإثبات أنّ Q يمكن أنْ يكون المسارَ المختار من نقاطه الطّرفيّة $u, v \in W'$. ولا يعدّ هذا مشكلة؛ بسبب عدم تعارض التّعديلات التي أجريت على Q من النهايتين. بالإضافة إلى أنه قد يمرّ المسار في x أو لا يمرّ (لذا يعرف u' وv') كما هو مرسوم في الشكل الآتي.



المحيط (Circuference)

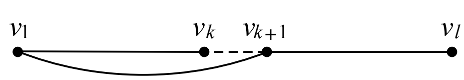
عندما يفشل شرط كفاية للحلقات الهاملتونيّة قليلا، يمكن عندها توقّع أنّ البيان ما زال يملك حلقة طويلة. نعرِّف **المحيط** $c(G)$ للبيان G على أنّه طول أطول حلقة في G. في البداية سنأخذ في الحسبان عدد الأضلاع التي نحتاج إليها لنجبر حلقة أنْ يكون طولها c على الأقلّ في بيان على n من الرّؤوس. في هذا الجزء، لترمز $P(v,w)$ إلى الجزء من v إلى w في مسار P الذي يحتوي v و w. في حين ترمز P,Q إلى السّلسلة المكوّنة للمسارين P و Q عندما يكون الرّأس الأخير لـ P هو الرّأس الأوّل لـ Q.

35.4.8. نظرية: (Erdös – Gallai [1959]) لكلّ $m \geq 2$، كلّ بيان بسيط على n من الرّؤوس، وله أكثر من $m(n-1)/2$ ضلعًا يملك حلقة طولها أكبر من m.

الإثبات: (Woodall [1972]) سنستخدم الاستقراء على n بحيث تكون m ثابتة. عندما يكون $n = m+1$، فإنّ أقلّ من $(n-1)/2$ ضلعًا تكون مفقودة. لذا، فإنّ $\delta(G) \geq n/2$ ويكون G هاملتونيّا. افترض أنّ $n > m+1$ و $c(G) \leq m$. إذا كان $d(x) \leq m/2$، فإنّ $e(G-x) \geq m(n-2)/2$. إنّ تطبيق فرضية الإستقراء على $G-x$ يؤدي إلى أنّ $c(G-x) > m$. ومن هنا، نستطيع افتراض أنّ $\delta(G) > m/2$. وبالمثل، نستطيع افتراض أنّ G مترابط.

من خلال المسارات الأكثر طولاً في G، اختر $P = v_1, \ldots, v_l$ لتعظيم الدّرجة d لـ v_1؛ بما أنّ G مترابط، فإنّ $v_1 \not\leftrightarrow v_l$ (وبخلاف ذلك، فإنّ ضلعًا من $V(G)$ لـ $V(G) - V(P)$ سيعطي مسارًا أطول). لتكن $W = \{v_i : v_1 \leftrightarrow v_{i+1}\}$. يقع جيران v_1 جميعهم على P. لذاَ، فإنّ $|W| = d$. لكلّ $v_k \in W$، لاحظ أنّ طول المسار $P(v_k+1, v_l)$ و v_1, v_{k+1} و $P(v_k, v_1)$ أيضًا هو $l-1$؛ لذلك فإنّ $N(v_k) \subseteq V(P)$، والاختيار لـ P يؤدي إلى أنّ $d(v_k) \leq d$. وإضافة إلى ذلك،، لا يوجد $v_k \in W$ يملك جارًا v_j بحيث يكون $j > m$، لأنّنا في هذه الحالة نستطيع إكمال الحلقة الطويلة بإضافة $vjvk$ إلى $P(v_{k+1}, v_j)$ و $v_1 v_{k+1}$, $P(v_k, v_1)$.

وبتقييد الأضلاع التي تقع على W، نجبر العديد من الأضلاع على الوقوع في $G-W$. ليكن $Z = \{v_1, \ldots, v_r\}$، حيث $r = min\{l, m\}$. لقد بينّا لكلّ $v_k \in W$ أنّ $N(v_k) \subseteq Z$. لذلك، يوجد $\|[W, Z-W]\| + e(G[W])$ ضلعًا واقعًا على W. ولمجموع درجات ثابت في W، فإنّ هذا يأخذ قيمة عظمى عندما يكون $[W, Z-W]$ بيانا ثنائيّ الفرع تامًّا. ونكبّر إلى أكثر من ذلك بجعل كلّ رأس في W يملك درجة d. إنّ العدّ الناتج هو $\frac{1}{2}|W|(d+|Z-W|) = dr/2 \leq dm/2$. وبناءً على ذلك، فإنّ $G-W$ يملك $n-d$ رأسًا وأكثر من $m(n-d-1)/2$ ضلعًا. ومن فرضية الاستقراء، فإنّ $c(G-W) > m$. إذا كان عدد الأضلاع المجبرة لتكون داخل $G-W$ كبيرًا جدًّا، فإنّ هذه الحالة لا يمكن أنْ تحدث، في حين تنطبق حالة سابقة). ■

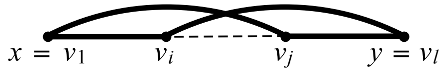


تملك معظم شروط الكفاية للحلقات الهاملتونيّة نسخًا معدلة من "حلقة طويلة". نسخة الحلقة الطويلة المعدلة لنظرية ديراك تشير إلى أنّ بيان G المترابط من الدّرجة **2** يملك حلقة طولها $\min\ \{n(G),\ 2\delta\ (G)\}$ على الأقل (Dirac [1952b]). إنّ شرط وجود خاصّيّة التّرابط من الدّرجة 2 يستثني المثال $K_1 \vee 2K_\delta$ الذي محيطه $\delta + 1$.

لاحظ أنّ نسخة الحلقة الطويلة المعدلة لنظرية أور [Ore, 1960] جاءت بعد هذا بكثير. وهذه النسخة متضمّنة في [Bondy, 1971b] وعملت بصورة صريحة في [Bermond, 1976] وفي [Linial, 1976]. وتظهر المناقشة الأساسية التي استخدمت في العديد من نتائج الحلقة الطويلة في [Bondy, 1971b]، حيث تقوي مناقشة التحويل لأور/ ديراك (النظرية 8.2.7) بأخذ "الفجوات" في الحسبان.

36.4.8. تمهيدية : [Bondy, 1971b] إذا كان $P = v_1, \ldots, v_l$ مسارًا أطول في بيان G مترابطًا من الدّرجة 2، فإنّ $c(G) \geq \min\ \{n(G),\ d(v_1) + d(v_l)\}$.

الإثبات: (انظر أيضًا [Linial, 1976]). ليكن $m = d(v_1) + d(v_l)$، وافترض أنّ $c(G) < \min\ \{n(G), m\}$. بما أنّ G مترابط، فإنّ حلقة من الدّرجة l يمكن أنّ تعطي مسارًا أطول. لذا، فإنّ $v_i \not\leftrightarrow v_l$. إذا كان $v_1 \leftrightarrow v_j$ و$v_i \leftrightarrow v_l$ لبعض قيم $i < j$، فإنّ i, j عبور زائد مع فجوة $j - i$. وإذا أضفنا $v_1\ v_j$ و $v_l\ v_i$ إلى $P(j,\ l)$ و $P(i,\ 1)$، فسنحصل على حلقة طولها $l - (j - i - 1)$. إذن، $l - (j - i - 1) < m$ عندما يكون i, j عبورًا زائدًا.



ليكن $x = v_1$ و $y = v_l$. إذا كان P يملك عبورًا زائدًا، فاجعل i, j هو العبور الزائد ذا الفجوة الأصغر. لذا، فإنّ x و y لا يملكان جيرانًا بين v_i و v_j على P، إضافة إلى أنّ $N(y)$ لا يحتوي على رأس سابق على P لجار لـ x؛ لأنّ حلقة من الدّرجة l تعطي مسارًا أطول. لذلك، فإنّ $N(y)$ تقع في $V(P) - \{y\}$ ولكنها تتجنب $\{v_{i+1}, \ldots, v_{j-2}\}$ و $\{v_r - 1 : v_r \leftrightarrow x\}$. واستنادًا إلى ذلك، فإنّ $d(y) \leq (l\text{-}\ 1) - (j - 2 - i) - d(x)$. وبما أنّ $l\text{-}\ (j - i - 1) < m$، فإنّ $d(x) + d(y) < m$، وهذا يناقض الفرض. إذن، لا يوجد عبور زائد.

بجعل $t_0 = \max\ \{i : x \leftrightarrow v_i\}$ و $u = \min\ \{i\text{:}\ y \leftrightarrow v_i\}$، نكون قد برهنّا أنّ $t_0 \leq u$. سوف ننشئ حلقة تحوي x و y وجيرانهما جميعهم. بما أنّ عدم وجود عبورات زائدة يؤدي إلى $\left|N\left(x\right)\ \cap N\left(y\right)\right| \ \leq\ 1$، فمثل هذه الحلقة تملك طولاً يساوي على الأقل $\mathrm{m} < d(x) + d(y)\ +1$.

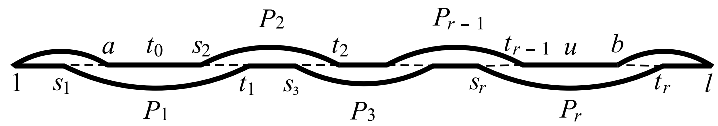
تكراريًّا، نعرّف مسارات $P_1, P_2, \ldots$. إذا أعطينا t_{i-1}، فإنّنا نختار أعدادًا صحيحة $s_i < t_{i\text{-}1} < t_i$ لتكبير t_i بحيث يملك G مسارًا P من v_{s_i} إلى v_{t_i} منفصلاً داخليًّا ا عن P. فمسار كهذا يكون موجودًا لأنّ $G - u_{t_{i-1}}$ مترابط. بالإضافة إلى أنّ هذه المسارات منفصلة؛ إذا كان P_i يتشارك برأس مع مسار لاحق P_j، فإنّنا نستطيع اختيار P_i بوصفها مسارًا من S_j إلى t_j، وهذا يناقض الأعظميّة لـ t_i. وبالمثل، فإنّ $s_{i+1} \geq t_{i-1}$، لأنّه بخلاف ذلك، سيتم اختيار المسار P_{i+1} بدلاً من P_i.

ليكن r أصغر دليل بحيث $t_r > u$. ضع

$$a\ =\ \min\left\{j\ : x\ \ \leftrightarrow\ v_{j}\ \ , j\ \ >\ s_1\right\}\ ,\ \ b = \max\left\{j\ : \mathrm{y}\ \leftrightarrow\ v_{j}\ \ , j\ \ < t_r\right\}$$

بما أنّ $s_1 < t_0$ و $t_r > u$، فإنّ تعريف الدليلين b,a يكون حسنًا. نستخدم المسارات P_i التي دليلها زوجيّ لبناء مسار واحد من x إلى y، أمّا المسارات التي دليلها فرديّ، فنستخدمها لبناء مسار آخر من x إلى y. عندما يكون r فرديًّا، فإنّ المسارين يشكّلان بالسّلاسل الآلية:

$$xv_a,\ P\left(a,s_2\right),\ P_2,\ P\left(t_2,\ s_4\right),\ P_4,\ \ldots,\ P\left(t_{r-1},\ b\right),\ v_b y$$
$$P\left(1,\ s_1\right),\ P_1,\ P\left(t_1,\ s_3\right),\ P_3,\ P\left(t_3,\ s_5\right),\ \ldots,\ P_r,\ P\left(t_r,\ l\right)$$



ولكن إذا كان r زوجيًّا، فإنّ المسار الذي يبدأ مع الضّلع xv_a يصل t_r وينتهي مع $P(t_r, l)$. في حين يصل المسار الآخر v_b وينتهي مع v_by.

لاحظنا أنّ $s_{i+1} \geq t_{i-1}$. إذن:

$$s_1 < a \leq t_0 \leq s_2 < t_1 \leq s_3 < t_2 \leq \ldots < t_{r-1} \leq u \leq b < t_r$$

وهذا يؤدّي إلى أنّ هاتين السلسلتين الموصوفتين هما مساران، ويكون اتحادهما حلقة. من التعريف لـ a، يكون لدينا $N(x) \subseteq P(1, s_1) \cup P(a, t_0)$. وبالمثل، فإنّ $N(y) \subseteq P(u,b) \cup P(t_r, l)$. ومع x وy، فإنّ الحلقة تملك طولاً يساوي على الأقل $m < 2 + d(x) + d(y) - 1$. ■

لقد أثبت أور أنّ G يكون هاملتونيًّا إذا كان $d(u) + d(v) \geq n(G)$ عندما يكون $u \nleftrightarrow v$. إنّ تمهيديّة بوندي تعطي نُسخة الحلقة الطويلة المعدّلة لهذا، التي تقوي نسخة الحلقة الطويلة لنظرية ديراك.

37.4.8. نظرية: ([linial, 1976], [Bermond, 1976], [Bondy, 1971b]) إذا كان G مترابطًا من الدّرجة $d(u) + d(\cup) \geq s$ لكلّ زوج غير متجاور $u, v \in V(G)$، فإنّ $c(G) \geq \min\{n(G), s\}$.

الإثبات: تضمن نظرية أور وجود حلقة هاملتونيّة إذا كان $s \geq n$. لذا، يمكن افتراض أنّ $s < n$. افترض أنّ P مسار أطول في G، مع نقاط طرفيّة x وy. بما أنّ G مترابط، فإنّ الأعظميّة لـ P تعطي أنّ $x \nleftrightarrow y$. الآن، يسمح الشّرط $d(x) + d(y) \geq s$ لنا باستدعاء التمهيدية 36.4.8. ■

وسّع بيرموند هذا كتركيب "حلقة طويلة" لشرطي كفتال و لاس فيرجناس. استخدمت تقنية تبديل الأضلاع التي تشتمل على النقاط الطرفية لمسار أطول في النظرية 35.4.8. وعبارتنا أضعف قليلًا من عبارة بيرموند، ولكن إثباتنا أبسط.

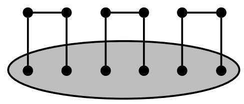
38.4.8. نظرية: ([1976] Bermond) ليكن G مترابطًا من الدّرجة 2 مع متتالية درجات $d_1 \leq \ldots \leq d_n$. إذا كان G لا يملك زوجًا x, y غير متجاور مع درجات j, i بحيث إنّ $d_i \leq i < c/2$ ، $d_{j+1} \leq j$ ، و $i + j < c$، فإنّ $c(G) \geq \min\{n(G), c\}$.

الإثبات: من بين المسارات الأطول في G، ليكن $P = v_1, \ldots, v_l$ مع نقاط طرفيّة $x = v_1$ و $y = v_l$ مختارًا لتكبير $d(v_1) + d(v_l)$. إذا كان $d(x) + d(y) \geq c$، فسنطبّق تمهيديّة بوندي. إذا كان $d(x) + d(y) < c$، فإنّنا ندّعي أنّ x, y يناقض الفرض. وكالعادة، فإنّ حلقة من الدّرجة 1 سوف تعطي مسارًا أطول (بسبب أنّ G مترابط). لذا، فإنّ $x \nleftrightarrow y$. نستطيع افتراض أنّ $d(x) \leq d(y)$، ووضع $i = d(x)$ و $j = d(y)$.

يقع جيران x و y جميعهم في P. إذا كان $x \leftrightarrow v_k$، فإنّ xv_k , $P(v_{k-1}, x)$. $P(v_k, y)$ هو مسار أطول آخر ينتهي عند y. لذا، فإنّ $d(v_{k-1}) \leq d(x) = i$، من خلال الاختيار لـ P. وبما أنّ هذا يتحقق لكلّ جار من الـ i جارًا لـ x، فإنّ $d_i \leq i$. وبالمثل، فإنّ درجة كلّ جار من الـ j جارًا لـ y تساوي j على الأكثر. وكذلك $d(x) \leq j$. لذلك، فإنّ $d_{j+1} \leq j$. ومن الفرض، فإنّ $i + j = d(x) + d(y) < c$، وهذا يكمل التناقض. ■

لقد قام فان [1984م] (G. –H. Fan) بتقوية النظرية 37.4.8 من خلال شرط الدّرجة والإبقاء عليه للأزواج غير المتجاورة التي لها جار مشترك فقط. وقد استخدم تيان [1988م] (T. Feng) تمهيدية بوندي لتقصير الإثبات (ملاحظة: في العام 2003م قصّرها بصورة أكبر). وتتضمن النتيجة شرط كفاية للحلقات الهاملتونيّة التي لا تتطلب الإغلاق لتصبح تامة.

39.4.8. مثال: بيان هاملتونيّ. لـ n زوجيّ، ليكن $G_1 = K_{n/2}$ و $G_2 = (n/4)\, K_2$، وشكل G بإضافة مواءمة بين النسخ المنفصلة من G_1 و G_2. إنّ الإغلاق الهاملتونيّ لـ G هو G نفسه. لذا، لا تنطبق شروطنا الكافية السابقة. وعلى الرّغم من أنّ G يملك $n/2$ رأسًا درجتها 2، فإنّ نظرية فان (G. –H. Fan) تؤدي إلى أنّ يكون G هاملتونيًّا.

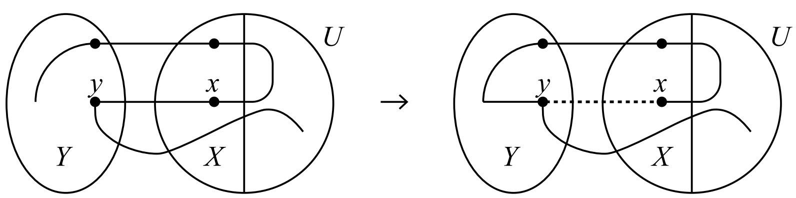


40.4.8. نظرية: (Fan [1984م]) إذا كان G مترابطًا من الدّرجة 2، و $d_G(u,v) = 2$ يعطي $max\ \{d(u), d(v)\} \geq c/2$، فإنّ $c(G) \geq min\ \{n(G), c\}$.

الإثبات: (Tian [1988م]) لتكن $U = \{v \in V(G) : d(v) \geq c/2\}$. من تمهيدية بوندي، يكفي إيجاد مسار أطول نقطتاه الطّرفيّتان في U. ومن بين المسارات التي طولها أكبر ما يمكن، ليكن $P = v_1, \ldots, v_m$ أحدَ المسارات التي تملك أكبر عدد من النقاط الطّرفيّة في U. إذا فشل P في أنْ تكون نقطتاه الطرفيتان في U، فسنجد مسارًا أطول أو مسارًا بالطول نفسه مع نقاط طرفيّة أكثر في U. نستطيع افتراض أنّ $v_1 \notin U$.

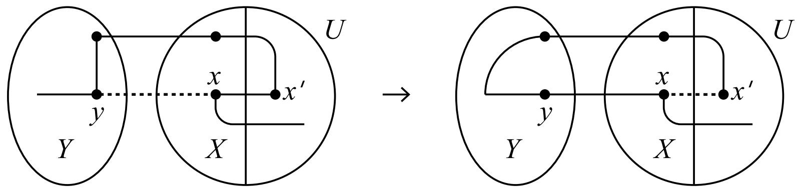
بما أنّ $d(v) < c/2$ لكلّ $v \notin U$، فإنّ الفرضيّة على أزواج المسافة فيما بينهما 2 تؤدي إلى أنّ $G - U$ اتّحادٌ منفصل لبيانات تامّة. لتكن Y المجموعةَ التي تحوي v_1. ولتكن X مجموعةَ الرّؤوس في U التي تملك جيرانًا في Y. بواسطة الفرضيّات، فإنّ رؤوس X تملك جيرانًا في $Y \cup U$ فقط. وأيضًا $|X| \geq 2$؛ لأنّ G مترابط من الدّرجة 2.

ليكن $r = |Y|$. سنبرهن أولاً أنّ P يبدأ بالمرور على رؤوس Y جميعها. إذا أهمل P رأسًا ما في Y، فإنّنا نستطيع امتصاصه قبل أول خروج من Y. وإذا كان P يغادر ويرجع إلى Y، فإنّه يرجع من خلال ضلع xy. ولأنّ $G[Y]$ تام، فإنا نستطيع استبدال xy في P مع $v_1 y$، وبذلك نحصل على مسار من x إلى v_m يملك طول P نفسه، ولكن مع نقاط طرفية أكثر في U. لذا، نستطيع أنْ نفترض أنّ $Y = \{v_1, \ldots, v_r\}$.



افترض أنّ $x \in X - v_{r+1}$. افترض أولاً أنّ x يملك جارًا $y \in Y$ يختلف عن رأس الخروج v_r لـ P. إذا كان $x \notin V(P)$، فيمكن البدء بامتصاص بقية Y إلى أنْ نصل إلى v_r، وبذلك نكمل مسارًا من x إلى v_l أطول من P.

وإذا كان $x \in V(P)$، فإنّنا نضع x' ليكون الرّأس الذي يسبق x مباشرة على P. وبما أنّ $x \neq v_{r+1}$، فإنّ $x' \in U$. نستبدل $x'x$ في P بـ yx للحصول على مسار من x' إلى v_l طوله مثل طول P ولكن مع نقاط طرفيّة أكثر في U.



لذلك، نستطيع أنْ نفترض أنّه لكلّ $x \in X - v_{r+1}$ فإنّ x لا يملك أيّ جار في Y إلاّ v_r. إذا كان $|Y| \geq 2$ فإنّ هذا يجعل v_r رأس قطع إلا إذا كان v_{r+1} يملك جارًا آخر $y \in Y - v_r$. وسنعيد الآن ترتيب P ليبدأ مع v_{r+1} ،y، . . . ، v_r بدلاً من $v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}$. وهذه هي الحالة التي نوقشت للتّو. الحالة المتبقية هي $|Y| = 1$ و $N(v_1) = X$. مع $x \in X - v_{r+1}$ كما في السابق، فإنّنا نلحق x إلى بداية P أو تحل $x'x$ محل xv_1. ■

أخيرًا، سنقدم نتيجة واحدة حول البيانات الموجّهة التي تقوّي شرط الكفاية جويلا وهوري (Ghouila – Houri) (النظرية 22.2.7) للحلقات الهاملتونيّة. وسنأخذ في الحسبان فقط البيانات الموجّهة التي تخلو من العرى، والتي تملك نسخة واحدة على الأكثر من كلّ زوج مرتّب بوصفه ضلعًا. تسمّى هذه بيانات موجّهة **قطعيّة أو صارمة** (strict). للبيانات الموجّهة، نستخدم "u وv غير متجاورين" لتعني أنّ $uv, vu \notin E(G)$. وأيضًا، نعرِّف $d(v) = d^+(v) + d^-(v)$.

فعليًا، أثبت جويلا وهوري [1960] أنّ أيّ بيان موجّه G يكون هاملتونيًّا إذا كان $d(v) \geq n(G)$ لكلّ v؛ وهذا أقوى من نصّ النظرية 22.2.7. وقد أثبت وودال [Woodull, 1972م] أنّه يكفي أنْ يكون لدينا $d^+(u) + d^-(v) \geq n(G)$ عندما يكون u ,v غير متجاورين. وهذا يعمّم نظرية أور للبيانات غير الموجّهة (التمرين 33) . في حين أثبت مينيال [Meyniel, 1973] أنّ أيّ بيان موجّه قويّ قطعيّ G يكون هاملتونيًّا إذا كان $d(u) + d(v) \geq 2n(G) - 1$ للأزواج غير المتجاورة u , v جميعها. لاحظ أنّ نظرية مينيل تعطي نظرية جويلا وهوري وكذلك نظرية وودال (التمرين 33) .

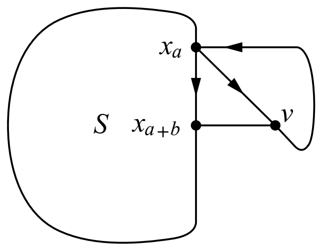
41.4.8. مثال: تُعدّ نظرية مينيل (Meyniel) أفضل ما يمكن. ليكن G يتكون من عصبتين موجّهتين مزدوجتين تتشاركان برأس. يكون البيان الموجّه مترابطًا بقوة، والأزواج الوحيدة من الرّؤوس غير المتجاورة تتكون من رأس واحد من كلّ عصبة. إذا كانت العصبتان تملكان رتبة k ورتبة $n + 1 - k$، فإنّ الدّرجات الكليّة لأيّ زوج غير متجاور هي $2k - 2$ و$2n - 2k$، ومجموعها $2n - 2$.

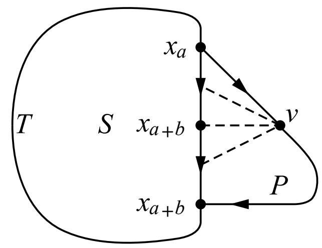
42.4.8. نظرية: ([Meyniel,1973]) إذا كان G بيانًا موجّهًا صارمًا مترابطًا بقوة بحيث $d(u)+ d(v) \geq 2n - 1$ عندما يكون u ,v رأسين غير متجاورين مختلفين، فإنّ G يكون هاملتونيًّا.

الإثبات: ([Bondy – Thomassen [1977) سنبرهن تمهيدية تقنية: إذا كان $T = v_1, \ldots, v_k$ مسارًا لا يستطيع امتصاص الرّأس v داخليًّا (بين اثنين من رؤوسه) ، فإنّ عدد الأضلاع من v إلى T إضافة إلى عدد الأضلاع من T إلى v يكون $k + 1$ على الأكثر. وهذا يتبع بالعدّ. لكلّ $1 \leq i \leq k - 1$، نلاحظ أنّه بضلع واحد فقط من الضّلعين $v_i\,v$ و $v\,v_{i+1}$. فضلًا عن أنّه يسمح بالأضلاع $v\,v_1$ و $v_k\,v$؛ ولا يوجد قيد على الامتصاص عند النهاية.

سنستخدم هذا لنبرهن العبارة الآتية: إذا كان G بيانًا موجّهًا غير هاملتونيّ قويًّا وصارمًا، و كانت S مجموعة رؤوس جزئيّة أعظميّة تملك حلقة مولّدة $(x_1, \ldots, x_m)$ في G، فإنّه يوجد $v \in \overline{S}$ وعددان صحيحان $a، b$ مع $1 \le a \le m$ و $1 \le b < m$ بحيث إنّ (1) $x_{av} \in E(G)$، و(2) v غير مجاور لأيّ x_{a+i} على افتراض أن $1 \le i \le b$ ن(3) $d(v) + d(x_{a+b}) \le 2n-1-b$. بما أنّ $b \ge 1$، فإنّ نتيجة هذه العبارة مستحيلة تحت فرضيات هذه النظرية التي سوف تؤدي إلى أنّ مجموعة الرّؤوس الأعظميّة الوحيدة التي تملك حلقة مولدة هي $V(G)$.

افترض أوّلاً عدم وجود أيّ مسار يترك S ويعود إليها. بما أنّ G قويّ و $S \neq V(G)$، فإنّ حلقة ما C طولها 2 على الأقل تتشارك مع S بالضبط برأس واحد فقط. ليكن هذا الرّأس هو x_a، وليكن v الرّأسَ التّالي لـ x_a على C. من شرط المسار، لا يوجد مسار بين v و $S - \{x_a\}$ أيّ من كلا الاتجاهين. وبصورة خاصة، فإنّ كلّ رأس خارج $S \cup \{v\}$ يقع على الأكثر على ضلعين يقع أيضًا على v أو v_{a+1}. فضلًا عن ذلك، فإنّ v يقع على الأكثر على ضلعين ويقع أيضًا على S (يجب أنْ تكون النقطة الطّرفيّة الأخرى v_a). أخيرًا، كلّ رأس في $S - x_a + 1$ يقع على الأكثر على ضلعين، فإنّه يقع أيضًا على x_{a+1}. وبجمع المساهمات المسموح بها نحصل على: $d(v) + d(x_{a+1}) \le 2n - 2$. لذا، فإنّ الشّرط المطلوب يتحقق على افتراض أنّ $b = 1$.





الآن، افترض وجود مسار يترك S ويعود إليها. اختر مثل هذا المسار P بحيث تكون المسافة c على طول S من بداية P إلى نهاية P أصغر ما يمكن. ليكن x_a بداية P، وv هو التالي لـ x_a على P. لاحظ أنّ الأعظميّة لـ S تعطي أنّ $c > 1$. لتكن T جزءَ S من x_{a+c} إلى x_a؛ إنّ هذا الجزء يملك $m - c + 1$ رأسًا. إضافة إلى أنّ الأعظميّة لـ S تؤدي إلى أنّه لا يمكن امتصاص v داخليًا بواسطة T. لذا، فإنّ تمهيديّتنا التّقنيّة تؤدي إلى أنّ v ينتمي على الأكثر إلى $m - c + 2$ ضلعًا واقعًا على T. والأصغريّة لـ c تجعل v غير مجاور للرّؤوس ,. ..., x_{a+1}, x_{a+c-1}

ليكن b أكبر عدد صحيح في $[c]$ بحيث يكون لـ G مسار من x_{a+c} إلى x_a على مجموعة الرّؤوس $S - \{x_{a+b}, \ldots, x_{a+c-1}\}$. ليكن R مثل هذا المسار (المسار T مع $b = 1$ يضمن وجود R). بما أنّ $P \cup R$ حلقة، فإنّ الأعظميّة لـ S تعطي $b < c$. ومن أعظميّة b، فإنّ x_{a+b} لا يمتصّ داخليًّا من قبَل R. لذلك، وبواسطة تمهيديّتنا التّقنيّة، فإنّ x_{a+b} ينتمي على الأكثر إلى $m - c + b + 1$ ضلعًا واقعًا على R.

الآن، نحسب $d(v) + d(x_{a+b})$. كلّ رأس خارج $S \cup \{v\}$ يقع على الأكثر على ضلعين فإنّه يقع أيضًا على $\{v, x_{a+b}\}$؛ لأنّ الأصغريّة لـ c تمنع وجود مسار طوله **2** بين v و x_{a+b} (في كلا الاتجاهين) باستخدام رأس ليس في S. لقد لاحظنا أنّ v ينتمي على الأكثر إلى $m - c + 2$ ضلعًا واقعًا على S. ولاحظنا أيضًا أنّ x_{a+b} ينتمي على الأكثر إلى $m - c + b + 1$ ضلعًا واقعًا على R. أخيرًا، x_{a+b} ينتمي على الأكثر إلى $2(c - b - 1)$ ضلعًا واقعًا على $S - R$. إذن، $d(v)+d(x_{a+b})\ 2(n - m - 1) + (m - c + 2) + (m - c + b + 1) + 2(c - b - 1) = 2n - 1 - b$.

ومرّة أخرى حصلنا على الشّرط المطلوب. ■

تمـــارين (Exercises)

1.4.8. ليكن $m = \lfloor n^2/4 \rfloor$. أثبت أنّ كلّ بيان على n من الرّؤوس يملك تمثيل تقاطع باستخدام مجموعات جزئيّة لـ $[m]$، بحيث يظهر كلّ عنصر في $[m]$ في ثلاث مجموعات على الأكثر. وبصورة مكافئة، كلّ بيان على n من الرّؤوس يتفكك إلى m ضلعًا ومثلثًا على الأكثر.

2.4.8. أثبت أنّ الشّروط الآتية على بيان G لا يملك رؤوسًا معزولة هي شروط متكافئة: (Choudom – Parthasarathg – Ravindra [1975])

a) $\theta'(G) = \alpha(G)$

b) $\theta'(G \vee G) = \left(\theta'(G)\right)^2$

c) $\theta'(G) = \theta(G)$

d) كلّ عصبة في غطاء عصبي أصغر لـ $E(G)$ تستخدم رأسًا مُبسطيًّا لـ G.

3.4.8. (+) ليكن $b(G)$ العددَ الأصغر للبيانات الثنائيّة الفرع التي نحتاج إليها لتجزئة $E(G)$ (يدعى **عددًا ثنائيّ الفرع** biparticity). ليرمز $a(G)$ إلى العدد الأصغر من الصّفوف التي نحتاج إليها لتجزئة $E(G)$ بحيث تكون كلّ حلقة في G تحتوي على عدد زوجيّ غير صفريّ من الأضلاع في صفّ ما. أثبت أنّ كلًّا من هذين المتغيرين يساوي $\lceil \lg \chi(G) \rceil$. (مساعدة: أثبت أنّ: $\lg \chi(G) \le b(G) \le a(G) \le \lceil \lg \chi(G) \rceil$ (Alon – Egawa [1985] Harary – Hsu – Miller [1977]).

4.4.8. حدّد البيانات على n من الرّؤوس جميعها التي يساوي بعدها الجدائيّ $n - 1$.
(Lovász –Ne→etřil Pultr [1980]).

5.4.8. أثبت أنّ $pdim\ G \le 2$ إذا وفقط إذا كان G المتممةَ لبيان خطّيّ لبيان ثنائيّ الفرع.
(Lovász –Ne→etřil Pultr [1980]).

6.4.8. إذا كانت r معطاة، فاحسب $pdim\ (K_r + mK_1)$ لكلّ $m \ge 1$. (Lovász –Ne→etřil Pultr [1980])

7.4.8. (–) احسب البعد الجدائيّ لمكعّب ثلاثيّ الأبعاد.

8.4.8. احصل على حدود عليا وأخرى وسفلى تختلف بـ 1 للبعد الجدائيّ لبيان بيترسون (الحدّ العلوي سوف يكون على الأرجح القيمةَ الصحيحة، ولكن برهنة أنّه لا يمكن تحسينه يكون صعبًا ومملًا).

9.4.8. لتكن $f(n)$ القيمةَ العظمى لـ $\text{pdim}\ \overline{G}$. $\text{pdim}\ G$ على البيانات جميعها التي تملك n رأسًا. أثبت أنّ $\lfloor n^2/4 \rfloor \le f(n) \le (n-1)^2$.

10.4.8. لكلّ $n \ge 4$، أثبت أنّ $\text{pdim}\ P_n = \lceil \lg(n-1) \rceil$. ولكلّ $n \ge 3$، أثبت أنّ $C_{2n} = 1 + \lceil \lg(c\text{-}1) \rceil$ و $1 + \lceil \lg n \rceil \le \text{p}\dim C_{2n+1} \le 2 + \lceil \lg n \rceil$.
Lovaśz –Ne→etřil Pulter [1980]. (تعليق: بيّن Evans – Fricke – Maneri – Mckee – Perkel [1994] أنّ $C_{2n+1} = 1 + [\lg n]$ ربما باستثناء حالة عندما يكون n على صورة قوة لـ 2).

11.4.8. أثبت أنّ C_{2k+1} غير قابل لغمس يحافظ على المسافات في أيّ جداء كارتيزيّ لعصبٍ إذا كان $k > 1$.

12.4.8. حدّد بُعْدَ المكعّب المسحوق لـ C_5.

13.4.8. (+) حدّد بُعْدَ المكعّب المسحوق لـ $K_{3,3}$. (مساعدة: استخدم التّماثل لاختزال تحليل الحالة).

14.4.8. (!) استخدم نظرية التّفريع لإدموند (نظرية 20.4.8) لتبرهن النسخة الضّلعيّة لنظرية منجر في البيانات الموجّهة: $\lambda'(x,y) = k'(x,y)$. (مساعدة: ابتكر تحويلًا لبيان مناسب لتحصل على إثبات قصير).

15.4.8. (!) تدعى مسألة انتشار الإشاعة "مسألةَ الهاتف" أيضًا، أمّا المسألة المقابلة للبيانات الموجّهة فتدعى "مسألةَ التلغراف". بوصفها دالّة في n، حدّد العدد الأصغر للتّناقلات في اتجاه واحد بين n من الأشخاص بحيث يملك كلّ شخص مسارًا ناقلاً للأشخاص الآخرين جميعهم. (Harary - Schwenk [1974]).

16.4.8. ليكن D بيانًا موجّهًا يحلّ مسألة التلغراف بحيث يصل كلّ رأس معلومات من الرّؤوس الأخرى مرة واحدة بالضبط. أثبت أنّه يوجد $n-1$ رأسًا في D على الأقل يسمعون معلوماتهم الخاصة. ولكلّ n، أنشئ مثل D بحيث يكون $n-1$ رأسًا فقط يسمعون معلوماتهم الخاصة، في حين يوجد مسار واحد متزايد تمامًا لكلّ $x \neq y$ من x إلى y (Seress [1987]).

17.4.8. الخاصية *NOHO*:

a) ليكن G بيانًا مترابطًا له $2n-4$ ضلعًا، ويملك ترتيبًا خطّيًّا يحلّ مسألة انتشار الإشاعة ويحقّق NOHO (لا توجد حلقة متزايدة). افترض أيضًا أنّ $n(G) > 8$. وأنّه يوجد على الأكثر رأسان درجتهما 2. أثبت أنّ البيان الذي تمّ الحصول عليه بحذف المكالمات الأولى والأخيرة للرّؤوس في G يملك 4 مركّبات؛ اثنتين منهما رؤوس معزولة والاثنتين الأخريين جرارين يملكان الحجم نفسه. (West [1982 a]).

b) لكلّ عدد زوجيّ $n \geq 4$، أنشئ بيانًا مرتّبًا مترابطًا له $2n-4$ ضلعًا يحقّق خاصّيّة NOHO. (مساعدة: استخدم الخواص البنائية التي برهنت في فرع (a) لترشدك في البحث).

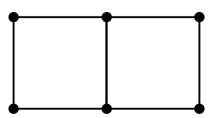
18.4.8. نهج (أسلوب NODUP (**NODUP scheme**) (لا يوجد ناقلان متطابقان) هو بيان مرتّب مترابط يملك مسارًا واحدًا متزايدًا بالضبط من كلّ رأس إلى أيّ رأس آخر:

a) (–) أثبت أنّ كلّ نهج NODUP يملك خاصية NOHO.

b) أثبت عدم وجود نهج NODUP عندما تكون $n \in \{6, 10, 14, 18\}$. (تعليق: أثبت سيرس [Seress, 1986] أنّ هذه هي فقط القيم الزوجيّة لـ n بحيث يكون نهج NODUP غير موجود، وبنى نهجًا NODUP للقيم الأخرى جميعها. لـ $n = 4k$، بنى ويست [1982b] نهجًا NODUP يحتوي على $(9n/4) - 6$ مكالمة، وبرهن سيرس [1986] أنّ هذا هو الأمثل).

19.4.8. افترض أنّ رأسًا في بيان بسيط G يرغب في نشر معلومات للرّؤوس الأخرى جميعها. وأنّه في كلّ وحدة زمنية، فإنّ كلّ رأس يعرف المعلومة يستطيع إجراء مكالمة مع جار لا يعرف هذه المعلومة. إنّ الزّمن المطلوب لنشر المعلومة من v هو العدد الأصغر من الوحدات الزمنية، بحيث تستطيع الرّؤوس جميعها معرفة المعلومة. ابن بيانًا G على n من الرّؤوس له أقل من $2n$ ضلعًا بحيث يستطيع كلّ رأس في G نشر المعلومة على الأكثر في زمن يساوي $(1+\lg n)$. (Grigni – Peleg [1991]).

20.4.8. (!) أثبت أنّ البيان أدناه غير قابل للاختيار من الدّرجة 2.



21.4.8. أثبت أنّ $K_{k,m}$ يكون قابلًا للاختيار من الدّرجة k إذا وفقط إذا كان $m < k^k$. (Erdös – Rubin – Taylor [1979]).

22.4.8. أثبت أنّ $\chi_l(G) \leq 1 + \max_{H \subseteq G} \delta(G)$ بحيث يكون $\chi_l(G) + \chi_l(\overline{G}) \leq n+1$. وبرهن أيضًا أنّ $\chi'_l(G) \leq 2\Delta(G) - 1$.

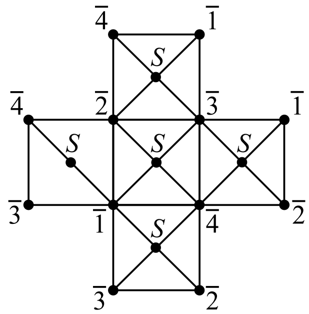
23.4.8. أثبت أنّ كلّ بيان وتري G يكون قابلًا للاختيار من الدّرجة $\chi(G)$.

24.4.8. أثبت أنّ كلّ بيان مترابط G يملك تلوينًا قائميًّا فعليًّا من قوائم، بحيث يكون $|L(v)| \geq d(v)$ لكلّ v إذا وجدت متباينة صارمة لرأس واحد على الأقلّ.

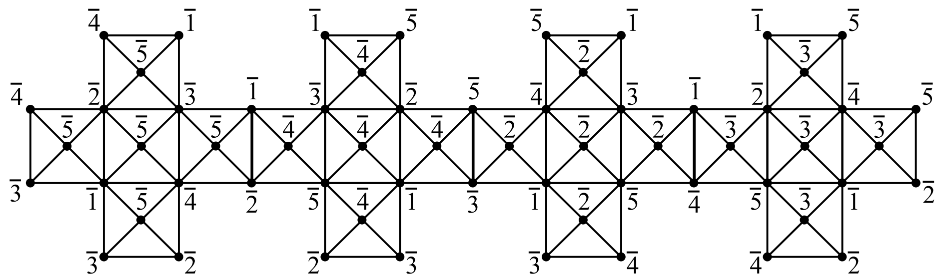
25.4.8. (!) أثبت أنّ G يملك تلوينًا كلّيًّا (الملاحظة 31.4.8) بـ $\chi'_l(G) + 2$ لونًا على الأكثر.

26.4.8. بيان سويّ غير قابل للاختيار من الدّرجة 4 ورتبته 63:

a) في قائمة التّعيينات للبيان أدناه، ترمز S إلى [4]، أمّا $\bar{i}$ فترمز إلى $S - \{i\}$. أثبت أنّ هذا البيان لا يملك تلوينًا فعليًّا مختارًا من هذه القوائم.



b) في قائمة التّعيينات للبيان G أدناه، ترمز $\bar{i}$ إلى $[5]-\{i\}$؛ وحجم كلّ قائمة يساوي 4. ليكن G' البيانَ الذي تمّ الحصول عليه من G بإضافة رأس واحد مع قائمة $\bar{1}$ مجاورة للرّؤوس جميعها على الوجه الخارجيّ لهذا الرّسم في G. أثبت أنّ G' لا يملك تلوينًا فعليًّا مختارًا من هذه القوائم. (Mirzakhani [1996]) .



27.4.8. (!) تكافؤ لنظرية ديلورث ونظرية كونج وإيجرفاري:

a) إذا أعطيت بيانًا ثنائيّ الفرع G، فطبّق نظرية ديلورث على توجيه متعدٍّ له لتحصل على نظرية كونج وإيجرفاري.

b) إذا أعطيت بيانًا موجّهًا متعدّ D، وليكن G هو الشطر لـ D كما عُرِّفَ في التعريف 20.4.1. فطبّق نظرية كونج وإيجرفاري على G لتحصل على نظرية ديلورث لـ D.

28.4.8. (!) أثبت أنّ K_n يتفكك إلى $\lceil n/2 \rceil$ مسارًا. وبرهن أنّ K_n يتفكك إلى $\lfloor n/2 \rfloor$ حلقة عندما يكون n فرديًّا.

29.4.8. (!) تفكيك K_n إلى بيانات جزئيّة مترابطة مولّدة.

a) أثبت أنّه إذا كان K_n يتفكك إلى k بيانًا جزئيًّا مترابطًا مولّدًا، فإنّ $n \geq 2k$.

b) أثبت أنّ K_{2k} يتفكك إلى k شجرة مولّدة قطرها 3. (مساعدة: لتكن الأضلاع المركزيّة لهذه الأشجار تشكّل مواءمة كاملة). (Palumbing [1973])

30.4.8. أثبت أنّ كلّ بيان سويّ بسيط منتظم من الدّرجة 3 مترابط ضلعيًّا من الدّرجة 2 يتفكك إلى مسارات طولها **3**. وبرهن العبارة نفسها للتّثليثات السّويّة. (Jünger – Reinelt-Pulleyblank [1985]) .

31.4.8. أثبت أنّ النظرية 35.4.8 أفضل ما يمكن عندما تكون $m-1$ تقسم $n-1$.

32.4.8. ليكن G بيانًا بحيث يكون $\overline{G}$ يخلو من المثلّثات، وليس غابة. أثبت أنّ G يملك حلقةً طولها $n(G)/2$ على الأقل. (مساعدة: استخدم النظرية 37.4.8.) (N. Graham)

33.4.8. استخدم نظرية وودال لتثبت نظرية أور، واستخدم نظرية مينيل لتثبت نظرية وودال.

34.4.8. استخدم نظرية مينيل لتبرهن أنّ بيانًا موجّهًا صارمًا على n من الرّؤوس يملك مسارًا مولّدًا إذا تحقّق أنّ: $d(u)+d(v) \geq 2n-3$ لكلّ زوج u، v من الرّؤوس المختلفة غير المتجاورة.

5 .8. البيانات العشوائية (Random graphs)

استعملت الطريقة الاحتماليّة في صورتها الأبسط لتبرهن وجود كائنات توافقية مرغوبة دون بنائها، وقد عُرِّف نموذج احتمالي مناسب على صفّ كبير من الأشياء. والحدث هو حدوث للبناء المرغوب. إذا كانت احتماليّة هذا الحدّث موجبة، فإن شيئًا مرغوبًا يكون قد حدث أو وُجد. إنّ تصميم النموذج، وتطبيق الاحتماليّة، وأساليب التقارب يمكن أنْ تتضمن مهارة كبيرة.

سنناقش هذه الطّرق في سياق البيانات العشوائيّة التي حُفِّزت دراستها بنمذجة الخصائص الفيزيائية وبتحليل الخوارزميّات في علم الحاسوب.

1.5.8. مثال: درجات الانصهار. يقترح سلوك البيانات العشوائيّة تفسيرًا رياضيًّا لدرجات الانصهار. فكّر في المجسّم المصمت بوصفه شبكة ثلاثية الأبعاد من الجزيئات، حيث تتصل الجزيئات المتجاورة بروابط. فعلى سبيل المثال، خذ في الحسبان البيان $P_l \square P_m \square P_n$ حيث الروابط هي الأضلاع. إنّ إضافة الطاقة تثير الجزيئات وتكسر الروابط. سوف نفترض أنّ الروابط تُكْسَرُ عشوائيًّا عندما نرفع درجة الحرارة (مستوى الطاقة). وكلّ حرارة تقابل جزءًا ما من الروابط المكسورة. في حين أنّ البيان يبقى مترابطًا بصورة كبيرة، أما المادة فتبدو مصمتة. وكسر أجزاء صغيرة لا يغير هذا. ولكن، عندما تكون المركبات جميعها صغيرة، فإنّ الطبيعة الكليّة للمادة تتغيّر. والمركبات الصغيرة للجزيئات تطفو بحرية، مثل السائل أو الغاز.

رياضيًا، يوجد مدخل لعدد الروابط التي يجب أنْ تُكْسَر (بدلالة الحجم للشّبكة) بحيث تترك كلّ طريقة لكسر عدد أقل من الروابط مركبةً ضخمة. وبصورة تقريبية، فإنَّ كلّ طريقة لكسر روابط أكثر إلى حدّ ما تترك المركبات جميعها صغيرة جدًّا. وتحت درجة حرارة معينة فقط، فإن المادة سوف تبقى مصمته تقريبًا. وفوقها فقط، تكون غير مصمتة تقريبًا. ■

2.5.8. مثال: تحليل الخوارزميّات. يكون التعقيد في أسوأ حالة عندما يكون زمن التشغيل للخوارزمية للمدخلات التي حجمها n جميعها أكبر ما يمكن. (انظر الملحق B). للمسائل الصعبة، يمكن أنْ نبحث عن خوارزمية تأخذ العديد من الخطوات على بعض البيانات الغريبة في حين تعمل بسرعة عند معظم البيانات. إننا بحاجة إلى طريقة لوصف فائدة مثل هذه الخوارزميّات.

الحلّ هو **التحليل الاحتماليّ**. سنفترض التوزيع الاحتماليّ على المدخلات ودراسة زمن التشغيل المتوقع بالنسبة إلى هذا التوزيع. إنّ اختيار توزيع واقعيّ يمكن أنْ يكون صعبًا. لذا، سنختار توزيعًا احتماليًّا يجعل التحليل ملائمًا. و لكننا لا نستطيع تعريف توزيع احتمالي على عدد لا نهائي من البيانات، لذلك سوف نعرف توزيعًا على البيانات لكلّ رتبة. وهذا منسجم مع افتراض زمن التشغيل المتوقع بوصفه دالّة على حجم المدخلة. ■

قدم إيردوز وريني [Erdös-Re′nyi, 1959] البيانات العشوائيّة، ثمَّ تطوّر الموضوع بصورة سريعة في الثمانينيّات، كما ورد في كتب [Palmer, 1985]، [Bollob′as, 1985]، و [Alon – Spencer, 1992] .

(حيث عالج الكتاب الأخير تطبيقات توافقية أوسع للطرق الاحتماليّة). في حين أكّد [Janson-Luczak-Rucin′ski, 2000] التّطورات اللاحقة.

أما الآن، فتُطبّق على البيانات العشوائيّة أساليب احتماليّة دقيقة أكثر ممّا نستطيع تقديمه هنا. وسوف نصف الأساليب الأساسية، ونقترح الصفة المميزة للموضوع، دون محاولة إعطاء معالجة كاملة للموضوع.

الوجود والتوقع (Existence and Expectation)

سنبدأ بتوضيح كيفيّة قيام الطّرق الاحتماليّة بإثبات عبارات تتعلّق بوجود الأشياء. افترض أنّنا نريد برهنة أنّ كائنًا ما ذا خاصيّة مطلوبة موجود. لهذا، سوف نعرّف فضاءً احتماليًّا يعدّ ظهور الخاصيّة المطلوبة حدثًا A. إذا كان احتمال A موجبًا، فإنّ الكائن المطلوب موجود.

3.5.8. تعريف: الفضاء الاحتماليّ (probability space) المتقطّع أو **النموذج الاحتماليّ** (probability model) هو مجموعة منتهية أو معدودة S مع أوزان غير سالبة على عناصرها ويكون مجموع الأوزان 1. **والحدث** (event) هو مجموعة جزئيّة من S. **والاحتمال** $P(A)$ (probability) للحدث A هو مجموع أوزان عناصر A. يكون الحدثان A و B **مستقلّين** (independent) إذا كان $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

لقد أعطى إيردوز شعبيّة كبيرة للطّريقة الاحتماليّة في العام 1947م من خلال استخدامها لإثبات الحدود السّفلى على أعداد رامزي (التعريف 6.3.8). وقد عبّرنا عن ذلك بصورة توافقية في النظرية 12.3.8؛ وهنا نقدّم الإثبات نفسه بلغة احتماليّة تستخدم الملاحظة $P(\cup_i A_i) \le \sum_i P(A_i)$. لاحظ أنّ البيانات في هذا الجزء جميعها بياناتٌ بسيطة.

4.5.8. نظرية: ([Erdös [1947]) إذا كان $\binom{n}{p} 2^{1-\binom{p}{2}} < 1$ ، فإنّ $R(p, p) > n$.

الإثبات: يكفي أنْ نبيّن أنّه عندما يكون $\binom{n}{p} 2^{1-\binom{p}{2}} < 1$ ، فإنّه يوجد بيان G على n من الرّؤوس مع $\omega(G) < p$ و $\alpha(G) < p$. سوف نعرف نموذجًا احتماليًّا على بيانات لها مجموعة رؤوس $[n]$ بجعل كلّ ضلع يظهر بصورة مستقلة باحتمال يساوي **0.5**. إذا كان الاحتمال للحدث Q الذي هو "لا عصب من الدّرجة p أو مجموعة مستقلّة من الدّرجة p" موجبًا، فإنّ البيان المطلوب موجود.

كلّ عصبة ممكنة من الدّرجة p تحدث باحتمال يساوي $2^{-\binom{p}{2}}$ ؛ لأنّ الحصول على بيان تامّ يتطلّب الحصول على أضلاعه جميعها، وهذا يحدث بصورة مستقلة. لذلك، فإنّ احتمال الحصول على عصبة واحدة على الأقل من الدّرجة p يكون محدودًا بـ $\binom{n}{p} 2^{-\binom{p}{2}}$. ويتحقّق الحدّ نفسه للمجموعات المستقلّة من الدّرجة p. لذا، فإنّ الاحتمال لـ "ليس Q" يكون محدودًا بـ $\binom{n}{p} 2^{1-\binom{p}{2}}$ ، والمتباينة المعطاة تضمن أنّ $P(Q) > 0$. ■

5.5.8. ملاحظة. تقود تعليلات الوجود إلى خوارزميّات البناء الاحتماليّ. فضلًا عن أنّ الاحتمال لبيان عشوائيّ على 64 رأسا لكي يملك عصبة من الدرجة 1024 أو مجموعة مستقلّة من الدّرجة 10 هو أقلّ من $2((2^6)^{10}/10!)2^{-44}$، حيث يكون 0.018 تقريبًا. إذا كان هنالك بيان مولّد بصورة عشوائية يملك مثل هذه المجموعة الرّديئة من الدّرجة 10،

فبالإمكان توليد بيان آخر. إنَّ احتمال تكرار بيانات رديئة هو حاصل ضرب أعداد صغيرة، وسريعًا تصبح صغيرة بصورة يصعب إدراكه. ■

إنَّ الحدّ السّفليّ في النظرية 4.5.8 بصورة غير دقيقة هو $\sqrt{2^k}$ ؛ أمّا الحدّ العلويّ الاستقرائيّ في النظرية 11.3.8 بصورة غير دقيقة فهو 4^k. لذا، فإنّ الفجوة كبيرة. وهنا نؤكّد أنّ طرقًا احتماليّة أكثر دقّة قد قدّمت تحسينات صغيرة في الحدّ السّفليّ. وعلى الرّغم من ذلك، فإنّ الحدّود التي بُنيت بناءً هي أكثر ضعفًا. لذا، يُعدُّ هذا فوزًا للطّريقة الاحتماليّة. إنَّ الإثبات بصورة جوهرية هو تعليل حسابيّ فقط. لاحظ أنّه يمكن إعادة صياغة العديد من التّعليلات الاحتماليّة ذات الفضاءات العينيّة المنتهية بوصفها تعليلات حسابيّة موزونة، إلاّ أنَّ البراهين في لغة الاحتمالات أبسط.

إنّ تقدّم المتغيّرات العشوائيّة يضيف قوّة كبيرة. وسوف نعيّن قيمًا للعناصر في فضائنا الاحتماليّ[1] . ولبرهنة المتباينات؛ فقد استخدمنا سابقًا المقارنة بين المعدّل والقيم الكبرى لمتغيّر عشوائيّ.

6.5.8. تعريف: المتغيّر العشوائيّ (random variable) هو دالّة تُعيّن عددًا حقيقيًّا لكلّ عنصر في فضاء احتماليّ. وسوف نستخدم $X = k$ ليرمز إلى الحدّث الذي يتكون من العناصر جميعها حيث تكون قيمة المتغيّر X k.

والتّوقّع (expectation) E (X) لمتغيّر عشوائيّ X هو المعدّل الموزون $\sum_k kP\left(X = k\right)$. **وخاصيّة أعشاش (طواقي) الحمام** (pigeonhole property) للتّوقّع هي العبارة التي تنصّ على وجود عنصر في الفضاء الاحتماليّ بحيث تكون قيمة X كبيرة (أو صغيرة) مثل $E(X)$.

إنّ تطبيق خاصية طواقي الحمام تتطلّب قيمة أو حدًّا لـ $E(X)$. وتطبّق الحسابات غالبًا **خطّيّة التّوقّعات** على تعبير لـ X بدلالة متغيّرات عشوائيّة أبسط. ولتحقيق أهدافنا عمومًا، سوف نحصر اهتمامنا بنماذج احتماليّة على مجموعات منتهية، ونجمع عددًا منتهيًا من المتغيّرات العشوائيّة فقط. وهناك نتائج مشابهة تتحقّق في فضاءات احتماليّة متّصلة .

7.5.8. تمهيدية : (الخاصيّة الخطّيّة) إذا كان X والمجموعة المنتهية $\{X_i\}$ متغيّرات عشوائيّة على الفضاء نفسه، وكان $X = \sum X_i$ ، فإنّ $E\left(X\right) = \sum E\left(X_i\right)$. وكذلك فإنّ $E(cX) = cE(X)$ لكل $c \in \mathbb{R}$.

الإثبات: في فضاء احتماليّ متقطّع، يسهم كلّ عنصر بالكمّية نفسها لكلّ طرف في المعادلات المطلوبة. ■

غالبًا ما نطبّق التمهيديّة 7.5.8 لمتغيّرات عشوائيّة والتي تحسب بناءات جزئيّة. إنّ مثل هذا المتغيّر العشوائيّ هو مجموع متغيّرات تشير إلى ما إذا كان أحد الأشياء المحتملة التي حُسِبَت تحدث فعلاً. وهذه **المتغيّرات المؤشّرة** (indicator variables) تأخذ قيمًا في $\{0,1\}$ (تدعى كذلك المتغيّرات 0، 1). إنّ التّوقع لمتغيّر مؤشّر هو احتماليّة أنْ يساوي 1. تسهّل هذه الخصائص ما كان متوقّعًا أنْ يكون الاستخدام الأول للطّريقة الاحتماليّة.

---

(1) سوف نأخذ في الحسبان الفضاءات الاحتماليّة المتقطّعة فقط. ولكن هناك مفاهيم مشابهة تتحقّق لفضاءات احتماليّة متّصلة (مستمرّة).

8.5.8. نظرية: ([Szele [1943]) يوجد دوريّ ألعاب على n من الرّؤوس يملك $n!/2^{n-1}$ مسارًا هاملتونيًّا على الأقل.

الإثبات: ولِّد دوريّ ألعاب على $[n]$ بوصفها عشوائية باختيار $i \rightarrow j$ أو $j \rightarrow i$ مع احتماليّة متساوية لكلّ زوج $\{i, j\}$. ليكن X عددَ المسارات الهاملتونيّة؛ أيْ أنّ X هو المجموع لـ $n!$ من المتغيّرات المؤشِّرة للمسارات الهاملتونيّة المحتملة. واحتماليّة حدوث أيّ مسار هاملتونيّ هي $1/2^{n-1}$، لذلك فإنّ $E(X) = n!/2^{n-1}$. وفي دوري ألعاب ما، يكون X كبيرًا مثل التّوقّع على الأقلّ. ■

يعطي هذا الحدّ البسيط الذي يستخدم التّوقّع الجوابَ الصحيح تقريبًا للعدد الأكبر للمسارات الهاملتونيّة في دوري ألعاب على n من الرّؤوس؛ وقد أثبت ألون [Alon, 1990] أنّ هذا العدد هو $(n!/(2-o(1))^n$ على الأكثر. عندما تكون قيم معظم الأمثلة (المشاهدات) قريبة من القيمة المتطرّفة، فإنّ التّعليلات الاحتماليّة تكون فاعلة بشكل خاصّ.

يمكن تفسير العديد من المتباينات بوصفها عبارات حول القيمة المتوقّعة لمتغيّر عشوائيّ. وهذا ما يعطي إثباتًا أقصر من إثبات الطّرق التّوافقيّة غالبًا. والتمرين 42.1.3 يطلب إثباتًا توافقيًّا للنتيجة الآتية.

9.5.8. نظرية: ([Wei, 1981], [Caro, 1979]) $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$ لكل بيان G.

الإثبات: ([Alon- Spencer [1992, p81])افترض أنّ لديك ترتيبًا لرؤوس في بيان G، إنّ مجموعة الرّؤوس التي تظهر قبل جيرانها جميعها تشكّل مجموعة مستقلة. عندما يتمّ اختيار التّرتيب بصورة منتظمة عشوائيًّا، فإنّ احتماليّة ظهور v قبل جيرانه جميعهم هي $1/(d(v)+1)$. لذلك، فإنّ طرف المتباينة الأيمن هو الحجم المتوقّع للمجموعة المستقلّة المشكّلة باختيار الرّؤوس التي تظهر قبل جيرانها في ترتيب رأسيّ عشوائيّ. ■

عندما يُولَد شيٌّ بصورة عشوائية ليكون قريبًا من امتلاكه خاصيّة مرغوبة، فإنه يمكن أنْ ينتج تغييرًا خفيفًا. يُدعى هذا الأسلوب **طريقة الحذف** (deletion method)، أو **طريقة التّبديل (التّغيير)** (alteration method) أو **طريقة الخطوتين** (two- step method). وتزودنا أعداد رامزي بتطبيق كلاسيكيّ على هذه الطّريقة (التمرين 16). وسوف نقدّم تطبيقين آخرين. تذكر أنّ $S \subseteq V(G)$ مجموعةٌ مسيطرة في G إذا كان كلّ رأس خارج S يملك جارًا في S (التعريف 26.1.3). وعندما يكون G منتظمًا من الدرجة k، فإنّ كلّ رأس سيسيطر على $k+1$ من الرّؤوس (بما فيه نفسه). لذا، فإنّ كلّ مجموعة مسيطرة تملك $n(G)/(k+1)$ رأسًا على الأقل. إنَّ طريقة التّغيير تعطي مجموعة مسيطرة قريبة من الحدّ في كلّ بيان ذي درجة صغرى k. لاحظ أنّ التعليل يستخدم المتباينة الأساسية $1-p < e^{-p}$ كالعديد من التعليلات التي تستخدم هذه الأساليب (التمرين 2).

10.5.8. نظرية: ([Alon [1990]) كلّ بيان على n من الرّؤوس ذي درجة صغرى $k>1$ يملك مجموعة مسيطرة حجمها $n \frac{1+\ln(k+1)}{k+1}$ على الأكثر.

الإثبات: في مثل هذا البيان G، اختر مجموعة عشوائيّة $S \subseteq V(G)$ تشتمل على كلّ رأس $P = \ln(k+1) / (k+1)$ بصورة مستقلة. إذا كانت S معطاة، فاجعل T مجموعةَ الرّؤوس خارج S التي لا تملك جارًا في S؛ ولاحظ أنّ إضافة T إلى S يعطي مجموعة مسيطرة سوف نبحث عن الحجم المتوقع لـ $S \cup T$.

بما أنّ كلّ رأس يظهر في S مع احتمال p، فإنّ الخاصّيّة الخطّيّة تعطي أنّ $(E(|S|)=np)$. إنّ المتغيّر العشوائيّ $|T|$ هو مجموع لـ n متغيّر مؤشّر يدلّ على ما إذا كانت الرّؤوس القائمة بنفسها تنتمي إلى T. لاحظ أنّ $v \in T$ إذا

وفقط إذا كان v وجيرانه لا ينتمون إلى S. واحتمال هذا محدود بـ $(1-p)^{k+1}$ ؛ لأنّ درجة v تساوي k على الأقل. بما أنّ $(1-p)^{k+1} < e^{-p(k+1)}$ فإنّ $E(|S| + |T|) \le np + ne^{-p(k+1)} = n\,\frac{1+\ln(k+1)}{k+1}$. إنّ خاصية طواقي الحمام للتّوقّع تكمل الإثبات. ■

هذا الحدّ السهل يعطي أصغر s_k تقريبًا، بحيث يملك كلّ بيان G ذي درجة صغرى k مجموعةً مسيطرة حجمها $s_k n(G)$ [Alon [1990 على الأكثر. والخوارزمية الجشعة تبرهن النتيجة نفسها بصورة بنائية (النظرية 30.1.3).

يوجد تطبيق شائع ولافت لطريقة الحذف، وهو إثبات وجود بيانات ذات خصر وعدد لونيّ كبيرين. وفيما بعد ظهرت بناءات صريحة أخرى [Kriz, 1989] ، [Ne′set′ril-Rödl, 1979] ، [Lovász, 1968a]. وسوف نعرض تبسيطًا للإثبات الأصليّ ([Alon – Spencer [1992, p35). يستخدم خاصية التوقع التي سنبرهنها في التمهيديّة 17.5.8.

11.5.8. نظرية: ([Erdös [1959) إذا أُعطينا $m \ge 3$ و $g \ge 3$، فإنّه يوجد بيان خصره g على الأقلّ، وعدده اللوني m على الأقلّ.

الإثبات: سوف نولّد بيانات بصورة مستقلة على مجموعة رؤوس $[n]$ وذلك بجعل كلّ زوج ضلعًا مع احتمال p. إنَّ البيان الذي لا يملك مجموعة مستقلّة كبيرة يكون ذا عدد لونيّ كبير؛ لأنّ $\chi(G) \ge n(G) / \alpha(G)$. لذلك، نختار P كبيرة بصورة كافية لعمل مجموعات مستقلّة كبيرة بصورة غير متشابهة. وكذلك نختار p صغيرة بصورة كافية لجعل العدد المتوقّع للحلقات القصيرة (طولها أقلّ من g) قليلًا. وإذا أعطينا بيانًا يحقق كلا الشرطين، فإننا نستطيع حذف رأس من كلّ حلقة قصيرة للحصول على البيان المنشود.

ولعمل هذا بصورة مختلفة، فإننا نولّد أكثر من $n/2$ حلقة قصيرة، ونضع $p = n^{t-1}$، حيث $t < 1/g$. كلّ من الحلقات المحتملة التي طولها j تحدث مع احتمال p_j. وبكتابة $n_{(j)}$ بدلاً من $n(n-1)\ldots(n-j+1)$، فإنّه يوجد $n_{(j)}/(2j)$ حلقة محتملة لكل j. لذا، فإنّ توقّع العدد الكلّيّ X للحلقات التي طولها أقلّ من g هو:

$$E(X) = \sum_{i=3}^{g-1} n_{(i)} P^i/(2i) \le \sum_{i=3}^{g-1} n^{t_i} / (2i)$$

بما أنّ $tg < 1$، فإنّ $E(X)/n \to 0$ عندما $n \to \infty$. وسوف نكمل في متباينة ماركوف التفاصيل لنستنتج أنّ $P(X \ge n/2) \to 0$ عندما $n \to \infty$. ولـ n كبيرة بما فيه الكفاية، فإنّ $P(X \ge n/2) < 1/2$.

بما أنّ $\alpha(G)$ لا يمكن أنْ يزداد عندما نحذف رؤوسًا، فإننا نحتاج إلى $(n-x) / \alpha(G)$ مجموعة مستقلّة على الأقلّ لتلوين الرّؤوس المتبقّية عندما نحذف رأسًا من كلّ حلقة. وإذا كان $X < n/2$ و $\alpha(G) \le n(2k)$، فإننا نحتاج إلى k لونًا للبيان المتبقّي على الأقلّ. وبأخذ $r = \lceil 3 \ln n / p \rceil$ ، فإنّ.

$$P(a(G) \ge r) \le \binom{n}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}} < \left[ne^{-p(r-1)/2}\right]^r$$

وهذا يقترب من 0 عندما تكبر n.

بما أنّ $r = [3n^{1-t} \ln n]$ و k مثبتة. فإنّنا نستطيع اختيار n كبيرة بصورة كافية لنحصل على $r < n/(2k)$. وإذا اخترنا n كبيرة بصورة كافية بحيث $P(X \ge n/2) < 1/2$ و $P(a(G) \ge r) < 1/2$ أيضًا، فإنّه يوجد بيان G على n من الرّؤوس بحيث $\alpha(G) \le n/(2k)$ وبحيث يملك G أقلّ من n/2 حلقة طول كلّ منها أقلّ من g. الآن، نحذف رأسًا من كلّ حلقة قصيرة، ونحتفظ ببيان خصره g على الأقلّ، وعدده اللوني k على الأقلّ ■

خصائص معظم البيانات (Properties of Almost All Graphs)

اقترحنا دراسة خصائص "تقريبًا دائمًا" أو غالبًا ما تتحقّق. وهذا التعبير له معنى في السّياق لنموذج الاحتمال.

12.5.8. تعريف: إذا أُعطيت متتالية من فضاءات الاحتمال، فاجعل q_n تمثّل الاحتمال لتحقّق الخاصّيّة Q في الفضاء n - (الفضاء ذو البعد n). نقول: إن الخاصّيّة Q **تتحقّق تقريبًا دائمًا** (almost always) إذا كانت $lim_{n \longrightarrow \infty} q_n=1$.

بالنسبة إلينا، فإنّ الفضاء - n هو توزيع احتمالي على بيانات على n من الرّؤوس. عندما تتحقّق الخاصّيّة Q تقريبًا دائمًا، فإننّا نقول: "يملك كلّ بيان الخاصّيّة Q تقريبًا ". إنّ جعل البيانات جميعها التي لها $[n]$ بصفتها مجموعة رؤوس متشابهة بصورة متساوية تكون مكافئة لجعل كلّ زوج من الرّؤوس يظهر بوصفها ضلعًا مع احتمال $1/2$. إنّ النماذج التي تظهر فيها أضلاع بصورة مستقلة مع الاحتمال نفسه هي الأكثر شيوعًا للبيانات العشوائيّة؛ لأنّها تؤدّي إلى أبسط الحسابات. ونسمح لهذا الاحتمال بالاعتماد على n.

13.5.8. تعريف نموذج A: معطى n و $p=p(\mathrm{n})$، نولّد بيانات على مجموعة رؤوس $[n]$ وذلك بوضع كلّ زوج بوصفها ضلعًا مع احتمال p بصورة مستقلة. إنّ احتمال كلّ بيان على m من الأضلاع يساوي $p^m \ (1-p)^{\binom{n}{2}-m}$ والمتغيّر العشوائيّ Gp يرمز إلى بيان نحصل عليه من هذا الفضاء الاحتمالي. يعني "البيان العشوائيّ" نموذج A مع $\mathrm{p}= 1/2$ الذي يجعل البيانات جميعها مع مجموعة الرّؤوس $[n]$ متساوية الحدوث.

الحسابات للبيانات التي تكون مجموعة الرّؤوس فيها مثبتة (البيانات "الموسومة") تكون أسهل كثيرًا من الحسابات لصفوف التّشاكل العشوائيّة، وبما أنّ المدخلات للخوارزميّات هي بيانات مع مجموعات رؤوس محدّدة، فإنّ هذا النموذج يكون متناسقًا مع التّطبيقات.

غالبًا ما نقيس زمن التّشغيل للخوارزميّات بدلالة عدد كلّ من الرّؤوس و الأضلاع؛ لذا فربما نريد السيطرة على عدد الأضلاع، وهذا يقترح نموذجًا تكون فيه البيانات الموسومة على n من الرّؤوس و m من الأضلاع متساوية الحدوث. (نستخدم m لحساب عدد الأضلاع في هذا الجزء؛ لأنّ العدد $e= 2.71828...$ يقوم بدور مهم في مناقشات المحاذاة).

14.5.8. تعريف: نموذج B: معطى n و$m = m(n)$. افترض أنّ كلّ بيان له مجموعة رؤوس $[n]$ وله ضلعًا يحدث مع احتمال $\binom{N}{M}^{-1}$ ، حيث $N=\binom{n}{2}$. يرمز المتغيّر العشوائيّ G^m إلى بيان مولّد بهذه الطريقة.

هذان النموذجان هما الأكثر شيوعًا من العديد من النماذج التي دُرِسَت. ويبدو نموذج B أكثر تناسبًا مع التّطبيقات. سوف نسأل أسئلة مثل "بوصفها دالّة في n: كم ضلعًا نحتاج إلى جعل بيان مترابطًا بصورة شبه مؤكدة ؟"، وسوف نسأل في نموذج A، "بوصفها دالّة n: ما احتمال الضلع الذي نحتاج إليه لجعل بيان مترابطًا بصورة شبه مؤكدة ؟" لسوء الحظ فإنَّ الحسابات التي نحتاج إليها للإجابة عن مثل هذه الأسئلة أكثر عشوائية في النموذج B مقارنة بالنموذج A.

ولحسن الحظ، فإنَّ نموذج B موصوف بصورة دقيقة من خلال نموذج A عندما تكون n كبيرة و $p=m/\binom{N}{2}$ ؛ لأنّ العدد الفعليّ للأضلاع المولّدة في نموذج A قريب جدًّا من التوقع الناتج m تقريبًا دائمًا. إنّ هذا الارتباط يكون صالحًا لمعظم الخصائص التي تهمّنا، و تتطلب برهنة هذا استخدامًا مفصلاً لتوزيع ذات الحدّين لعدد الأضلاع. تكون الخاصّيّة البيانيّة Q محدّبة (convex) إذا كان G يحقق Q عندما $F \subseteq G \subseteq H$ و F, H يحققان Q.

15.5.8. نظرية : (Bollobás [1985, p34-35]) إذا كانت Q محدّبة، و $p(1-p)\binom{n}{2} \to \infty$ فإنّ كل G^p يحقّق تقريبًا Q إذا وفقط إذا كان لكلّ x مثبتة، فإنّ كل G^m تقريبًا يحقق Q ، حيث $m = \left\lfloor p\binom{n}{2} + x\left[p(1-p)\binom{n}{2}\right]^{1/2} \right\rfloor$.

تبرّر النظرية 15.5.8 حصر اهتمامنا بالنموذج A، فضلًا عن أنها تحفّز جعل p بوصفها دالّة بدلالة n. ولدراسة البيانات على عدد خطّيّ من الأضلاع؛ يجب أنْ نجعل p تختفي بمعدّل مثل c/n حيث يكون c ثابتًا؛ وثبات p يعطي بيانات كثيفة.

إنّ إثبات $P(Q) \to 1$ يكون أسهل كثيرًا من حساب $P(Q)$ عادة. ويعدُّ هذا التّمييز مهمًّا. لاحظ أنّ حسابًا مضبوطًا للاحتمالات يكون صعبًا وغير ضروري، ومُتَجَنَّبًا حيثما أمكن. ويُسْتَخْدَمُ بدلاً من ذلك التّحليلُ التّقاربيُّ (المحاذي) الذي يستند إلى النّهايات. ونكتب $a_n \to L$ للدلالة على أنّ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ولمقارنة معدّل النّمو للمتتاليات؛ نستخدم الرّمزين "O كبيرة" و "o صغيرة" (انظر الملحق B للتعريفات)، حيث نكتب $a_n = b_n(1+o(1))$ عندما يكون $\langle a\rangle$ و $\langle b\rangle$ مختلفين بمتتالية تنمو بصورة أكثر بطئًا من $\langle b\rangle$؛ بشكل مكافئ، $a_n / b_n \to 1$. عندما يكون $a_n / b_n \to 1$، فإننا نقول إنّ a_n **مقاربة** (asymptotic) لـ b_n، ونكتب $a_n \sim b_n$.

نستخدم عبارات التّقارب لإهمال حدود التّرتيب السّفليّ التي لا تؤثّر فيما إذا كان $\lim_{n\to\infty} P(Q) = 1$ إنّ حساب $P(Q)$ أوّلاً، ثمّ إثبات أنّ الصيغة تؤول إلى 1 هو أكثر صعوبة وغير ضروري، ونحتاج فقط إلى تبيان أنّ $P(\text{-}Q)$ محدود بشيء ما يقترب من 0. لاحظ أنّ العديد من المناقشات التّقاربيّة هي مناقشات "غير دقيقة"؛ لأنّنا لا نهتم بسعة الحدّ ما دام يقترب من 0، وسوف يتطوّر حدسنا حول ما نستطيع إهماله بصورة آمنة من خلال الخبرة.

16.5.8. نظرية : (Gillbert [1959]) عندما يكون p ثابتًا، فإن G_p كلّه يكون مترابطًا تقريبًا.

الإثبات : نستطيع جعل G غير مترابط باختيار تجزئة للرؤوس مكوّنة من مجموعتين، ومنع وجود أضلاع بين هاتين المجموعتين؛ لأنَّ وجود الأضلاع داخل هاتين المجموعتين غير ذات صلة. ونحدّد الاحتمال q_n الذي يجعل G_p غير مترابط من خلال جمع $P([S,\overline{S}]=\phi)$ على التجزئات الثنائية S، $\overline{S}$ جميعها؛ حيث إن البيانات التي لها العديد من المركبات تعدّ الكثير من المرات. وعندما يكون $|S| = k$ ، فإنّه يوجد $k(n-k)$ ضلعًا محتملاً في $[S,\overline{S}]$ واحتمال عدم ظهور أيّ منها بصورة مستقلة هو $1 - p$. لذا، فإنّ $P([S,\overline{S}]=\emptyset) = (1-p)^{k(n-k)}$.
وعلى اعتبار أنّ S كلها تولّد كلّ تجزئة من كلّ جانب، فإنّ $q_n \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(1-p)^{k(n-k)}$.

هذه الصيغة متماثلة في k و $n\text{-}k$؛ إذن، q_n محدودة بـ $\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n}{k}(1-p)^{k(n-k)}$. وقد خفّفنا الحدّ لتبسيطه. وباستخدام $\binom{2}{k} < 2k$ و $(1-p)^{n-k} \le (1-p)^{n/2}$ (لـ $k \le n/2$) فإنّ $q_n < \sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(n(1-p)^{n/2})^k$. ولـ n كبيرة بما فيه الكفاية، فإنّ $n(1\text{-}P)^{n/2} < 1$. إنّ هذا يجعل حَدَّنا هو الجزءَ الابتدائيّ من متسلسلة هندسيّة تقاربيّة. ونحصل على أنّ $qn < x/(1-x)$ حيث $x = n(1-p)^{n/2}$. بما أنّ $n(1-p)^{n/2} \to 0$ عندما يكون p ثابتًا، فإنّ حدّنا على q_n يقترب من 0 عندما $n \to \infty$. ■

سوف نتجنب بذل الجهد والمعاناة مع صيغ الاحتمالات من خلال تقديم متغيّرات عشوائيّة ذات قيَم صحيحة وأساليب تتضمّن التّوقّع. إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا غير سالب بحيث $X = 0$ عندما يملك G_p الخاصية Q، فإنّ $E(X) \to 0$ تؤدي إلى أنّ G^p كلها تقريبًا تحقّق Q. وهذه حالة خاصّة للتمهيديّة الآتية التي سنثبتها فقط للمتغيّرات الصحيحة، ولكنّها أيضًا تتحقّق للمتغيّرات المتّصلة (المستمرّة).

17.5.8. تمهيدية: (متباينة ماركوف) إذا كان X يأخذ القيم غير السالبة فقط، فإنّ $P(X \geq t) \leq E(X)/t$. بوجه خاصّ، إذا كان X ذا قيم صحيحة، فإنّ $E(X) \to 0$ تعطي $P(X = 0) \to 1$.

الإثبات: $E(X) = \sum_{k \geq 0} kp_k \geq \sum_{k \geq t} kp_k \geq t\sum_{k \geq t} p_k = tP(X \geq t)$. ■

لخاصيّة التّرابط، نستطيع معرفة أنّ X (G^p) بواسطة $X = 1$ إذا كان G غير مترابط و $X = 0$ خلاف ذلك. والتّوقّع لمتغيّر مؤشّر هو احتمال أنْ يساوي 1. لقد برهنّا أنّ $P(X = 1) \to 0$ عندما يكون P ثابتًا) لنبرهن أنّ G^p كله تقريبًا يكون مترابطًا. ومع متغيّر عشوائيّ مختلف فإنّنا نستطيع تبسيط الإثبات وتقوية النتيجة. ما زلنا نريد من G أنْ يحقّق Q إذا كان $X = 0$ (لكي نطبق متباينة ماركوف)، ولكننا لا نحتاج إلى $((X = 0) \Leftrightarrow G$ يحقّق $Q)$. نستخدم المجموع X للعديد من المتغيّرات المؤشّرة بحيث G يحقق Q إذا كان $X = 0$. إنّ خطّيّة التّوقع وملاءمة $E(X_i) = P(X_i = 1)$ للمتغيّرات المؤشّرة تبسّطان المهمة لإثبات أنّ $E(X) \to 0$.

18.5.8. نظرية: إذا كان p ثابتًا، فإنّ قطر (G^p) كله يساوي 2 تقريبًا (وعليه، فإنّ G يكون مترابطًا).

الإثبات: ليكن $X(G^p)$ عددَ أزواج الرّؤوس غير المرتبة التي ليس لها جار مشترك. وإنْ لم يوجد مثل هذه الأزواج، فإنّ G_p مترابط وقطره 2. ومن متباينة ماركوف، نحتاج فقط إلى تبيان أنّ $E(X) \to 0$. سوف نعبّر عن X بوصفه مجموعًا لـ $\binom{n}{2}$ من المتغيّرات المؤشّرة $X_{i,j}$، واحد لكل زوج من الرّؤوس $\{v_i, v_j\}$، حيث $X_{i,j} = 1$ إذا و فقط إذا كان v_i, v_j لا يملكان جارًا مشتركًا.

عندما يكون $X_{i,j} = 1$، فإنّ الرّؤوس الأخرى وعددها $n - 2$ تفشل بامتلاك أضلاع تصل إلى هذين الرّأسين. لذا، فإنّ $P(X_{i,j} = 1) = (1 - p^2)^{n-2}$ و $E(X) = \binom{n}{2}(1 - p^2)^{n-2}$. وعندما يكون p مثبتًا، فإنّ $E(X) \to 0$. وعليه، فإنّ قطر G_p كلّه هو 2. ■

إنّ الحدس وراء هذا التعليل الذي جُعل مضبوطًا باستخدام متباينة ماركوف، هو أنه إذا توقعنا عدم وجود أزواج سيئة، فإنّ كلّ بيان تقريبًا لا يملك أزواجًا سيئة. حيث يختفي المجموع، وأخيرا، نحتاج فقط إلى معرفة أنّ $(1 - p^2)^{n-2}$ تؤول إلى 0 أسرع من أيّ دالّة كثيرة حدود بدلالة n.

دوال العتبة (Threshold Functions)

بصورة غير دقيقة، نقول إنّ البيانات العشوائيّة التي لها احتمال ضلعيّ ثابت تكون مترابطة؛ لأنّها تملك العديد من الأضلاع أكثر مما نحتاج إليه لتكون مترابطة. ولتحسين النظرية 18.5.8؛ فإنّنا نريد أنْ نجعل $p(n)$ صغيرة بصورة كافية ليكون G_p كلّه مترابطًا تقريبًا، نحتاج إلى فكرة دالّة احتمال العتبة. من العلاقة بين النموذجين A

و B، فإنّ احتمال ضلع العتبة يعطي أيضًا عدد عتبة للأضلاع.

19.5.8. تعريف: نعرّف الخاصّيّة الرّتيبة (monotone property) على أنّها خاصّيّة بيانيّة يُحافظ عليها من خلال إضافة أضلاع، في حين نعرّف **دالّة احتمال العتبة** (threshold probability function) لخاصية رتيبة Q على أنّها دالّة $t(n)$ بحيث تؤدي $p(n)/t(n) \to 0$ إلى أنّه لا يوجد تقريبًا G_p تحقّق Q، أما $p(n)/t(n)\to \infty$ فتؤدي إلى أنّ G_p كلّه تقريبًا يحقّق Q. وتعرّف **دالّة ضلع عتبة** (threshold edge function) بطريقة مشابهة لنموذج B.

هذه فكرة واسعة عن دالّة العتبة التي تسمح لخاصية ما أنْ يكون لها العديد من دوالّ العتبة، وتكون دالّة العتبة $t(n)$ أكثر حدّة إذا حدث سلوك بشكل مؤكّد تقريبًا عندما تقترب $P(n)/ t(n)$ من ثوابت غير صفريّة. وتبقى دالّة العتبة $t(n)$ أكثر حدّة حيث يحدث هذا السّلوك عندما يختلف $p(n)$ عن $t(n)$ بالطرح أو الإضافة لحدٍّ ذي رتبة أقلّ.

لاحظ أنّ متباينة ماركوف تقوم بنصف العمل لاشتقاق دالّة عتبة. إذا كان $X = 0$ يعطي خاصية Q، وبرهنا أنّه إذا كان $E(X) \to 0$، فإنّ $P(Q) \to 1$. نحصل على مرشّحات لدوال عتبة بتحديد أيّ الدّوالّ $p(n)$ يعطي $E(X) \to 0$. غالبًا ما نحصل على $p(n)$ بحيث $E(X)\to 0$ أو $E(X)\to \infty$، استنادًا إلى قيمة المتغير c. وتقترح الخاصّيّة $E(X)\to\infty$ أنّ $P(X=0)\to 0$، ولكن هذا لا يتبع دائمًا. فعلى سبيل المثال، $E(X)\to \infty$ عندما

$P(X = 0) = .5$ و $P(X = n) = .5$. ولنحصل على $P(X = 0) \to 0$ ؛ يجب أنْ نمنع الاحتمال من الامتداد هكذا.

20.5.8. تعريف: إنَّ العزم من الدرجة r (rth moment) لـ X هو التّوقّع لـ X^r. **والتّباين** (variance) لـ X، يكتب $var(X)$، وهو الكمية $E[(X - E(X))^2]$. أمّا **الانحراف المعياريّ** (Standard deviation) لـ X فهو الجذر التّربيعيّ لـ $var(X)$.

21.5.8. تمهيدية: (طريقة العزم الثّاني) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا، فإنّ $P(X=0) \le \frac{E(X^2)-E(X)^2}{E(X)^2}$، بوجه خاص، $P(X = 0) \to 0$ عندما $\frac{E(X^2)}{E(X)^2} \to 1$.

الإثبات: إنَّ تطبيق متباينة ماركوف على المتغيّر $(X- E(X))^2$ وعلى القيمة t^2، تؤدي إلى أنّ

$P[(X - E(X)^2 \ge t^2] \le E[(X - E(X)))^2]/ t^2$ ونعيد كتابة هذا على الصورة الآتية:

$P[|X-E(X)| \ge t] \le var(X)/ t^2$ متباينة شبيشيف (Chebyshev's Inequality). وبما أنّ

$E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2XE(X) + (E(X))^2] = E(X^2) - (E(X))^2$،

فإنّ متباينة جبيجيف تصبح $P[|X-E(X)| \ge t] \le (E(X^2) - (E(X)^2)/ t^2$. وبما أنّ $X = 0$ فقط عندما $|X - E(X)| \ge E(X)$، فإنّ وضع $t = E(X)$ يكمل الإثبات. ■

حدسيًّا، إذا كبر الوسط الحسابيّ، وكبر الانحراف المعياريّ بصورة أكثر بطئًا، فإنّ الاحتمال كله يسحب بعيدًا عن 0، وينتج أنّ $P(X = 0)\to 0$. نوضّح الطّريقة آخذين في الحسبان اختفاء الرّؤوس المعزولة. بما أنّ البيان المترابط لا يملك رؤوسًا معزولة، فإنّ العتبة لخاصّيّة التّرابط يجب أنْ تكون كبيرة، على الأقلّ مثل العتبة لعدم الظّهور للرّؤوس المعزولة. إنّ الحسابات للثاني تكون أبسط؛ لأنّنا نستطيع التّعبير عن هذا الشّرط باستخدام

23.5.8. نظرية: إذا كان H بيانًا متوازنًا على k من الرّؤوس و l من الأضلاع، فإنّ $p=n^{-k/l}$ دالّة عتبة في

مجموع متغيّرات مؤشّرة موزّعة بصورة متطابقة مع توقّعات محسوبة بصورة سهلة. في الحقيقة، كلّ من الخاصّيّتين تملكان العتبة نفسها؛ وذلك لأنه عند العتبة يكون كل بيان تقريبًا مكونًا من مركبة واحدة ضخمة إضافة إلى رؤوس معزولة.

22.5.8. نظرية: في نموذج A، $\ln n/n$ (اللوغاريتم الطّبيعيّ) هو دالّة احتمال عتبة لعدم ظهور الرّؤوس المعزولة (بمعنى أنّ $\delta(G) \geq 1$). (العتبة المقابلة في النموذج B هي $\frac{1}{2}n \ln n$).

الإثبات: ليكن X عددَ الرّؤوس المعزولة؛ حيث يشير X_i إلى ما إذا كان الرّأس i معزولاً.

لذلك، فإنّ $E(X) = \sum E(X_i) = n(1-p)^{n-1}$ سوف ندرس سلوك التّقارب لـ $E(X)$ بدلالة $p(n)$ بما أنّ $(1-p)^n = e^{n\ln(1-p)} = e^{-np} e^{-np2[1/2+p/3+\ldots]}$،

يُبسّط تعبيرنا عن $E(X)$ بصورة تقاربية إذا كان $np^2 \to 0$. إنّ هذا مكافئ لـ $p \in o(1/\sqrt{n})$ ويؤدّي إلى أنّ e^{-np} في $(1-p)^n$ و1 في $(1-p)^{-1}$، وهذا يؤدّي إلى أنّ ne^{-np} في $E(X)$. وللتّبسيط أكثر؛ ضع $p = c\ln n/n$ للحصول على $ne^{-np} = n^{1-c}$ بسبب إمكانيّة اعتماد c على n. ويعطي الثابت c أنّ $p \in o(1/\sqrt{n})$ ، كما احتجنا إليها سابقًا. وعندما يكون $c > 1$، فإنّ $n^{1-c} \to 0$ في $E(X)$ وهذا يبرهن جانبًا واحدًا للعتبة.

عندما $c<1$، فإنّ $E(X)\to\infty$ ونستخدم طريقة العزم الثانية. حيث نحتاج فقط إلى توضيح أنّ $E(X)^2$ في $E(X^2)$. وهنا تُسْتَخْدَمُ خاصّيّة مساعدة أخرى للمتغيّرات المؤشّرة: $X_i^2 = X_i$. لذا، فإنّ:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + \sum_{i \neq j} E(X_i X_j) = E(X) + n(n-1)E(X_i X_j).$$

تكون قيمة المتغيّر المؤشّر X_iX_j 1 فقط عندما يكون كلّ من v_i و v_j معزولاً، وهذا يمنع وجود $2(n-2)+1$ ضلعًا. لذا، فإنّ $E(X_iX_j) = (1-p)^{2n-3}$. مرة أخرى $e^{-np} \sim (1-p)^n$، ولذلك، فإنّ، e^{-2np} في $E(X_iX_j)$، و $E(X)$ في $E(X)^2 + $ في $E(X) + n(n-1)e^{-np}$ في $E(X^2)$.

بما أنّ $E(X)\to\infty$، فإنّ هذا يعطي $E(X)^2$ في $E(X^2)$.

النظرية 22.5.8 أقوى من المطلوب من خلال التعريف لدالّة العتبة. لاحظ أن دالة العتبة أكثر حدّة: حيث نضمن أو نمنع وجود رؤوس معزولة عندما تكون نسبة $p(n)$ إلى $\ln n/n$ تقترب من ثابت غير صفري، أي أن الثابت لا يساوي 0 ولا يكون ∞.

في الحقيقة، ما زالت هناك معلومات أكثر حدّة معروفة حول العتبة للرّؤوس المعزولة. عندما يكون $p = \lg n/n + x/n$، وتحسب X الرّؤوسَ المعزولةَ، فإنّ: $P(X=k)$ في $e^{-M}\mu^k/k!$، حيث $m = e^{-x}$. (من الممكن أنْ يتعرّف القرّاء هذا التوزيع المُحدّد **كتوزيع بويسون** (Poisson distribution). لـ $k=0$، فإنّ e^{-M} في $P(X=0)$.

لذا، فإنّ هذا الحدّ الجمعيّ في p يصف التّحرك خلال العتبة من رؤوس معزولة تقريبًا دائمًا إلى رؤوس غير معزولة تقريبًا. وهناك العديد من العتبات الحادّة المماثلة المعروفة، ولكن هدفنا هو أساليب اشتقاق توزيع بويسون التّقاربيّ.

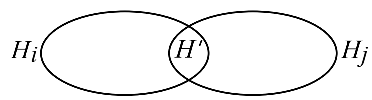
سنشتق فيما يأتي دالّة عتبة لظهور البيانات الجزئيّة المثبتة. يكون البيان متوازنًا (*balanced*) إذا كان معدّل درجة الرّأس في كلّ بيان جزئيّ مستحدث ليس أكبر من معدّل درجة البيان الكلّيّ، لاحظ أنّ البياناتِ المنتظمةَ جميعَها والغاباتِ كلَّها كذلك هي بياناتٌ متوازنةٌ.

النموذج A لظهور H بوصفها بيانًا جزئيًّا من G^p كلّه تقريبًا.

الإثبات: ليكن X عددَ نسخ H في G^p؛ أيّ أنّ X مجموعةُ المتغيّرات المؤشّرة للنسخ المحتملة من H في K_n. يوجد $n\ (n-1)\ldots(n-k+1)$ من الطّرق لإرسال $V(H)$ إلى $[n]$. وكلّ نسخة من H تظهر A من المرّات، حيث A عددُ التّشاكلات الذّاتيّة لـ H. ولذلك، نحصل على $\frac{1}{A}\prod_{j=0}^{K-1}(n-j)$ من المتغيّرات X_i. بما أنّ نسخة من H تحدث عندما تحدث أضلاعها، فإنّ $P(X_i=1)=p^l$. ولأنّ k مثبتة، فإنّ $E(X)\sim n^k p^l/A$.

إنّ وضع $p(n) = c_n n^{-k/l}$ يعطي $E(X) \sim c_n^l / A$. لذلك، فإنَّ $c_n\to 0$ تعطي $E(X)\to 0$، و $c_n\to\infty$ تعطي $E(X)\to\infty$. بقي فقط أنْ نحصل على $E(X)^2 \sim E(X^2)$ عندما $c_n\to\infty$. مرة أخرى $E(X^2) = E(X) + \sum_{i\neq j} E(X_i X_i)$. إنّ هذه المجاميع غير متساوية؛ لأنَّ $E(X_i X_j)$ تعتمد على أنّ $H' = H_i \cap H_j$. نجمع الحدود باختيار $H' \subseteq H$. وعندما يكون H' له r رأسًا و s ضلعًا، فإنّ عدد الأضلاع الذي نحتاج إليه لتكوين H_i و H_j هو $2l-s$. لذا، فإنّ

$.E(X_i X_j)=P^{2l-s}$



لتعيين أزواج j, i بحيث إنّ $H' = H_i \cap H_j$، نختار r من الرّؤوس لـ H'، و $k-r$ من الرّؤوس لكلّ من $H_i - H'$ و $H_j - H'$، وتوسعة لـ H' لكلّ واحدة من تلك المجموعات. إنّ عدد الطرق لاختيار مجموعات الرّؤوس هو $\frac{n!}{r!(k-r)!(k-r)!(n-2k+r)!}$، الذي يقارب $n^{2k-r}/[r!(k-r)!^2]$. بالإضافة إلى أنّ عدد الطرق M لتوسعة H' لكي نحصل على نسخ من H في كلا المجموعتين المعيّنتين من الدرجة k يعتمد على H و H' فقط. وهذا العدد مستقلّ عن n و p. ليكن $\alpha H'$ الثابتَ $M/[r!(k-r)!^2]$. المساهمة لـ $\sum E(X_iX_j)$ من الأزواج j,i حيث تكون $H_i \cap H_j = H'$ تقاربيّة لـ $\alpha_H' n^{2k-r} p^{2l-s}$؛ ويُدعى هذا $E_{H'}$.

عندما يكون $r = s = 0$ فإن $M=(k!/A)^2$. لذلك فإن $\alpha_H' \sim n^{2k} p^{2l}/A^2 \sim E(X)^2$ عندما يكون H' "بيانًا خاليًا". وهذه هي المساهمة الكلية لـ $\sum E(X_i\ X_j)$ لجميع i,j حيث يكون H_i, H_j منفصلين، ويكون هذا مقاربًا لـ $E(X)^2$. ويكتمل الإثبات بإثبات أنّ المساهمة الكلية من الاختيارات الأخرى لـ H' كلّه يملك رتبة أقل. لدينا $E_{H'} \sim \alpha_{H'}\ A^2 E(X)^2\ n^{-r}\ p^{-s}$ بما أنّ $2s/r$ معدّلُ الدرجة لـ H'، والفرض أنّ H متوازن فهذا يعطي أنّ $2r/s \ge 2k/1$ أو $pn^{r/s} \ge pn^{k/l} \to \infty$ عندما $c_n\to\infty$. وبما أنّ $pn^{r/s}\to\infty$ يكافئ $n^{-r}p^{-s}\to 0$، فإنّنا نحصل على أنّ $E_H \in o(E(X)^2)$ لـ $H' \neq \phi$. وبما أنّ عدد البيانات الجزئيّة المحتملة H' محدود (بتعبير يتضمن الثوابت k و l)، فهذا يعطي أنّ $E(X)^2$ في $E(X) + E_{\emptyset}$ في $E(X^2)$. ■

وتعمّم هذه النتيجة لـ H كلّه. إنّ النسبة $d(H) = e(H)/n(H)$ هي **الكثافة** (density) لـ H. أمّا $\rho(H) = \max_{F\subseteq H} d(F)$ فهي **الكثافة الكبرى** (maximum density)، حيث تكونان متساويتين بالضبط عندما يكون H متوازنًا. لذا، فإنّ $p = n^{-1/p(H)}$ هو العتبة لظهور H. لاحظ أنّ كلّ بيان H يملك بيانًا جزئيًّا متوازنًا F بحيث يكون $p(H) = d(F)$. وعندما $pn^{p(H)} \to 0$، فإنّ G^p كلّه تقريبًا لا يملك نسخة من F؛ إذن، فهو أيضًا لا يملك نسخة من H. وفي الحقيقة فإنّ $p = n^{-1/p(H)}$ يكون دائمًا دالّة عتبة لظهور H (التمرين 25).

التطوّر ومتغيرات البيان (Evolution and Graph Parameters)

نجد في العنوان الفرعي لكتاب بالمر [Palmer, 1985] أنّ البيانات العشوائيّة تتضمن دراسة "دوال العتبة التي تسهّل الدراسة الحذرة لتركيب البيان في أثناء نموّه، وخصوصًا في اكتشاف الظروف الغامضة التي تحيط بالظهور المفاجئ للمركبة الضخمة الوحيدة التي تمتصّ جيرانها بصورة نظامية، وتبتلع الأكبر منهم أولاً دون رحمة، وتستمر في الامتصاص حتى آخر رأس معزول. ثمّ تقع المركبة بشكل مفاجئ تحت السيطرة بواسطة حلقة مولّدة".

إنّ وجهة النظر المتطوّرة تولّد بيانات عشوائيّة على m من الأضلاع بطريقة تعطي فضاء الاحتمال نفسه كنموذج B، ولكنها تجعل التفكير البدهي أسهل. وبصورة تقريبية، فإنّ كلّ شيء اقترح حول البيانات العشوائيّة بصورة حدسيّة أو تجريبية يكون صحيحًا. فضلاً عن أنّ وجهة النظر المتطوّرة تحسّن هذا الحدس.

إنّ توليد m من الأضلاع في الوقت نفسه أو واحدًا تلو الآخر يعطي التوزيع الاحتمالي نفسه، جاعلاً البيانات على m من الأضلاع متساوية الحدوث. ومن خلال دراسة تأثير ضلع جديد على التركيب الحاليّ، نستطيع عمل فرضيات بدهية حول الخصائص للبيان عند أيّ مرحلة. إنّ مرحلة التّطوّر هي مدى من القيم لـ $m(n)$ (أو $p(n)$) يتحقّق فيه الوصف التركيبيّ لبيان نموذجيّ لا يتغيّر كثيرًا. لقد درسنا الأساليب الأساسيّة للتّحقّق من هذه الأوصاف، ولكن الحسابات قد تكون صعبة. لذا، سوف نصف المراحل باستخدام التّطوّر الحدسيّ فقط.

نلاحظ أولاً أنّ مضاعفًا بثابت تقريبًا للاشيء هو تقريبًا لا شيء. لذلك، عندما يحدث كلّ من $A_r, .. A_r$ دائمًا تقريبًا (r مثبتة)، فيتبع تقريبًا دائمًا أن جميعها تحدث.

في البداية، نبدأ بالعديد من الرّؤوس دون أضلاع، وكلّ ضلع جديد يكون شبه معزول. لاحظ أنّ البيان العشوائيّ هو مواءمة حتى يكون جزء لابأس به من الرّؤوس المتضمنة قد رُبطَ من خلال الأضلاع. إنّ العتبات لظهور شجرات جزئيّة مثبتة تعمّم هذا. ليكن $t_k(n) = n^{-k/(k-1)}$. إذا كان $p \sim cn^{-k/(k-1)}$ ولكن $p/t_k \to \infty$ و $p/t_{k+1} \to 0$، فإنّ كلّ شجرة جزئيّة مثبتة على k من الرّؤوس تظهر، ولكن لا يظهر أيّ منها على $k+1$ من الرّؤوس. (العبارات حول الأشجار المنفردة تصبح عبارات حول الأشجار جميعها التي لها الرتبة نفسها). فضلاً عن ذلك، فإن p هذه هي أيضًا تحت العتبة لظهور حلقات مثبتة (الكثافة $\mathbf{1}$، طول محدود بـ k). لذلك، فإنّ G^p غابةٌ من الأشجار التي رتبتها k على الأكثر. وتظهر كلّ شجرة على k من الرّؤوس بوصفها مركّبة.

حدسيًّا، لا يملك البيان العشوائيّ حلقات في هذه المرحلة من التّطوّر؛ لأنّه عندما لا توجد مركبة كبيرة، فإنّ إضافة ضلع بشكل عشوائيّ يكون أكثر ميلاً لربط مركبتين من الوقوع في مركبة واحدة. ولجعل الحدس دقيقًا، نضع X ليكون عدد الحلقات في G^p ونحسب:

$$E(X) = \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2}(k-1)!p^k < \sum_{k=3}^{n} (np)^k/2k$$

إذا كان $pn \to 0$ فإنّ $E(X) \to 0$.

المرحلة الرئيسة التالية للتّطوّر هي $p= c/n$ حيث $0 < c <1$. بافتراض أنّ X تحسب الحلقات، لا نستطيع الاستمرار بالقول إنّ $E(X) \sim \sum_{k=3}^{n} (np)^k / 2k$ ؛ لأنّه عندما يكون k جزءًا أساسيًّا لـ n، فإنّ النسبة $n^k/(n)_k$ لا تقترب من 1. لذا، يجب أنْ نقسم $E(X)$ إلى مجموعتين، وتصبح التعليلات أكثر صعوبة. عندما $pn \to c$ ، فإننا نجد أنّ $E(X)$ تقترب من ثابت c'، والعدد للحلقات في G^p هو توزيع بويسون تقريبيًا. ومع وجود حلقات في مركبات قليلة ومع أنّ المركبات جميعها صغيرة، فإننا لا نزال نتوقّع أنّ الضّلع التّالي سوف يربط مركّبتين أو ينشئ حلقة في مركّبة لا تملك حلقة. في هذا المدى، فإنّ حجم أكبر مركّبة هو $\log n$ تقريبيًا . وهناك العديد من المركّبات التي يملك كلّ منها حلقة واحدة على الأكثر، في حين تبقى معظم الرّؤوس منتمية إلى مركّبات لا حلقيّة.

عندما تصل c وتتعدى 1، فإنّ بنية G^p تتغيّر بصورة جذرية. ويُسمّى هذا **القفزة المزدوجة** (double jump) ؛ لأنّ بنية G^p ذات معنًى مختلف لـ $c<1$، $c\sim 1$، و$c>1$. عند $pn = 1$، فإنّ طريقة العزم الثانية تضمن أنّ G^p كلّه يملك حلقة تقريبيًا. وتقفز رتبة أكبر مركّبة من $\log n$ إلى $n^{2/3}$. لـ $Pn = c > 1$ ، لاحظ أنّ الرتبة "للمركّبة الضخمة" تصبح خطّيّة في n. كذلك فإنّ G^p يميل لامتلاك حلقة لها ثلاثة أوتار متقاطعة، ويكون غير سويّ.

تاليًا، ليكن p قريبًا من $c\ln n/n$. مع $c > 1$، لقد برهنّا أنّ G^p كلّه يملك رؤوسًا معزولة تقريبيًا. وعندما $c > 1$، فإنّ هذه الرّؤوس تختفي. عندما نضيف أضلاعًا لبيان غير مترابط، فإنّ هذه الأضلاع يمكن أنْ تذهب داخل مركّبة، أو أنّها تربط مركّبتين. وعندما تكون المركّبات جميعها صغيرة، فإنّ إضافة أضلاع سوف تربط بصورة مؤكدة بين مركّبات تقريبيًا. وفي نهاية الأمر، فإنّ هذا ينتج مركّبةً ضخمة. عند هذه النقطة، لاحظ أنّ الأضلاع المضافة تكون تقريبيًا داخل المركّبة الضخمة، أو تربطها بإحدى المركّبات الصّغيرة. ومن بين هذه المركّبات الصّغيرة، نجد أنّ فرصةَ المركّبات الكبيرة منها أكبرُ لاستقبال مثل تلك الأضلاع. وبتعبير آخر، عندما تتعدى c الـ 1، فإنّ المركّبات الصّغيرة المتبقّية التي تُبْتَلَعُ من قِبَل المركّبة الضخمة تكون رؤوسًا معزولة. وهذا يفسّر بصورة حدسيّة لماذا تكون العتبة لخاصية التّرابط هي نفسها العتبة لعدم الظهور للرّؤوس المعزولة . إذا كان $c > 1$، فسنجد فجأة أنّ G^p كلّه يملك أيضًا حلقة مولّدة تقريبيًا. ولاحظ أنّ درجة صغرى k (والظهور للحلقة الهاملتونيّة عندما $k = 2$) تملك عتبة تتضمّن حدًّا ذا رتبة أقل وهو: $\ln n/n + (k-1)\ln n/n$.

إنّ المراحل الأخيرة من التّطوّر تحدث عندما $pn/\ln n \to \infty$ ، لكن $p = o(1)$. وأخيرًا، فإنّ $p = c$؛ وهذا يعود بنا إلى حيث بدأنا دراستنا.

عندما يكون $p = c\log n/n$ مع $c \to \infty$، سنترك المجال للبيانات المتناثرة، حيث تصبح وجهة النظر التّطويريّة ذات قيمة أقل، وسندرس خصائص البيان العشوائيّ، وسنعطي اهتمامًا أقلّ لدوال احتمال العتبة، ونركّز على القيمة المشابهة لمتغيرات البيان، وخصوصًا عندما يكون p ثابتًا. افترض أنّ m متغيّر معطى. لاحظ أنّنا نريد بيان أنّ $\mu(G^p) \sim f(n)$ تقريبيًا لكل G^p. نستطيع عرض هذا كعتبة عندما يكون $\mu(G^p)$ هو تقريبيًا دائمًا بين $(1-\epsilon) f(n)$ و $(1+\epsilon) f(n)$ ، لكل $\epsilon > 0$. إذا كان $\mu(G^p)$ هو تقريبيًا دائمًا بين $f(n) - \epsilon\, g(n)$ و$f(n) + \epsilon\, g(n)$، حيث $g(n) = o(f(n))$، فسيصبح لدينا عبارة أقوى تُكْتَبُ على صورة $\mu(G^p) \in f(n)(1 + o(1))$.

إنّ بعض الخواص التي تكون صحيحة لمعظم البيانات لا تحدث في أمثلة معروفة! فللحدّ السّفليّ المعروف على أعداد رامزي، لا يوجد تركيب لصفّ لا نهائيّ من البيانات بحيث $\alpha(G) < \log_{\sqrt{2}}(n(G))$ و $\omega(G) < \log_{\sqrt{2}}(n(G))$ على الرّغم من أنّ معظم البيانات تملك هذه الخاصيّة.

إنّ خصائص البيان العشوائيّ يمكن أنْ تقود إلى خوارزميّة سريعة تساعد على حلّ مسألة صعبة لمعظم المدخلات. فعلى سبيل المثال، بعد ذكر نتيجتين حول درجات الرّؤوس في بيانات عشوائيّة، سنبّين كيفية استعمال خصائص متتالية الدرجة لتصميم خوارزميّة سريعة لفحص تشاكل "تقريبًا دائمًا". وفي الأدبيّات للبيانات العشوائيّة، نجد أنّ ω_n ترمز إلى دالّة غير محدودة لكنّها تنمو بصورة عشوائية وبطيئة.

24.5.8. نظرية : ([1966] Erdös- Re′nyi) إذا كان $p = \omega_n \log n/n$ و $\epsilon > 0$ مثبتة، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يحقّق أنّ:

$$(1-\in)pn < \delta(G^p) \le \Delta(G^p) \le (1+\in)pn \qquad \blacksquare$$

تكون درجات معظم الرّؤوس قريبة من المعدّل. ومع ذلك، فإنّ التّغيّر ما زال كبيرًا، وقد بيَّن بولوباس (Bolloba′s, 1982) أنّه لكلّ $2 \le 1/p$، فإنّ الرأس الذي درجته كبرى يكون وحيدًا تقريبًا في G^p كلّه إذا وفقط إذا كان $pn/\log n \to \infty$. وعندما نكمل التّطوّر من خلال العودة إلى حقل الاحتمال الضّلعيّ الثابت، فإنّ الكثير من النتائج المفصّلة تكون معروفة حول توزيع الدّرجة. وسوف يكون هنالك تقريبًا دائمًا بعض الرّؤوس مع درجات عالية معزولة قبل أنْ تبدأ الدّرجات في التّجمّع. وقد حدّد بولوباس عدد الدّرجات المختلفة التي قد تكون مضمونة.

25.5.8. نظرية : ([1981b] Bollob′as) في النموذج A مع p مثبتة و $t \in o\,(n/\log n)^{1/4}$، فإنّ G^p كلّه يملك درجات مختلفة لرؤوسه التي تملك درجة عليا والتي عددها t تقريبًا. إذا كان $t \notin o(n/\log n)^{1/4}$، فإنّ G^p كلّه يملك $d_i = d_{i+1}$ لبعض $i<t$ تقريبًا. ■

سنطبّق هذه النتيجة لفحص التّشاكل. لا توجد خوارزميّة زمن – كثيرة حدود معروفة لهذه المسألة، إلاّ أنّ باباي، وإيردوز، وسيلكو ([1980] ,Babai- Erdös- Selkow) استخدموا نتائج الدّرجة على بيان عشوائيّ لتطوير خوارزميّة سريعة تعمل تقريبًا دائمًا. ونعلم أنّ مجموعة **H** تحوي البيانات جميعها تقريبًا، وتبيّن أنّ التّشاكل مع بيان في **H** يمكن فحصه سريعًا من خلال خوارزميّة الوسم القانوني التي تتقبل وتوسم بيانًا بطريقة قانونية إذا كان منتميًا إلى **H**. وتتحقّق الخاصية المرغوبة عندما تُوسمُ الرّؤوس $v_1, \ldots, v_n$ في بيان، في حين تُوسمُ الرّؤوس $w_1, \ldots, w_n$ في بيان آخر، عندها نجد أنّ دالّة التناظر التي ترسل v_i إلى w_i فقط هي تشاكل محتمل، ويمكن بعد ذلك فحص التّشاكل من خلال مقارنة مصفوفات التّجاور تحت هذا الوسم.

26.5.8. نتيجة : ([1980] Babai- Erdös- Selkow) توجد خوارزميّة تربيعيّة تفحص التّشاكل لمعظم أزواج البيانات.

الإثبات: ليكن G بيانًا معطًى على n من الرّؤوس، وممثلاً بمصفوفة تجاوره. عندها، نحسب درجات الرّؤوس ونصنفها من خلال وسم الرّؤوس في ترتيب متناقض للدرجات. ثبّتق $r = \lceil 3\lg n \rceil$. إذا كان $d(v_i) = d(v_{i+1})$ لأيّ $i<r$، فارفض G. يعطي استخدام p=1/2 في النظرية 25.5.8 تقريبًا أنّ كلّ بيان سيجتاز هذا الاختبار بصورة ناجحة.

ضع $U=\{v_1, \ldots, v_r\}$. مع $r = \lfloor 3\ \lg n \rfloor$، فإنّه يوجد حوالي n_3 مجموعة جزئيّة مختلفة من الرّؤوس في U. وبما أنّه يبقي $n - r$ من الرّؤوس فقط خارج U، فهناك فرصة لتمييز هذه الرّؤوس من قِبَلِ جواراتها في U. سوف تكون المجموعة H هي البيانات جميعها التي تصل إلى هذه المرحلة التي يتحقق فيها هذا: تملك الرّؤوس لـ V-U جوارات مختلفة في U. ولفحص هذا في زمن $O(n^2)$ وإكمال الوسم، شفِّرْ $N(X)\cap U$ بوصفها مرتبة ثنائية من الدرجة r لكلّ $x \in V - U$. احسب هذه بوصفها أعدادًا ثنائية صحيحة، وصنّفها؛ تأخذ هذه الخطوات زمن $O(n \log n)$. أعد وسم الرّؤوس من v_{r+1} إلى v_n كـ $w_{r+1}, \ldots, w_n$ في ترتيب متناقض لهذه القيم. إذا كانت هنالك قيمتان متتاليتان متساويتان، ارفض G.

إذا اجتاز G هذا الحدّ، فإنّه لا يملك تشاكلات ذاتيّة غير تمهيدية. لاحظ أنّه يوجد لأيّ بيان يتشاكل مع G تشاكلٌ واحدٌ فقط لـ G، وهذ التّشاكل معطى بتطبيق خوارزميّة الوسم القانونية له. إذا اجتاز كلا البيانين الوسم القانونيّ، فإنّ المرحلة الأخيرة هي مقارنة مصفوفات التجاور بصفوف وأعمدة مُدلّل عليها بالوسم القانونيّ. وتكون البيانات متشاكلة إذا وفقط إذا كانت المصفوفات متطابقة. وتتمّ هذه المقارنة في زمن $O\ (n^2)$.

يجب أنْ نبين أنّه لكلّ G^p تقريبًا، فإنّ متجهات التّجاور داخل مجموعة محدّدة مكوّنة من r الرّؤوس تكون مختلفة للرؤوس المتبقّية. إذا كان $p \le 1/2$، فإنّ الاحتمال يكون محدودًا بشكل تقريبيّ بـ $(1\text{-}p)^r$ لأيّ زوج y,x يملك التجاورات نفسها في U. وقلنا بصورة تقريبية لأنّ U ليست مختارة بصورة عشوائية؛ ان اختيار U بوصفها مجموعة الرّؤوس التي درجتها هي الأعلى يضعف العشوائيّة، ويزيد احتمال وجود ضلع محدّد واقع على هذه الرّؤوس. وعلى الرّغم من هذا فإنّها لا تتغير كثيرًا. و يكون عددُ أزواج الرّؤوس المتوقّع خارج U مع التّجاورات المتطابقة في U محدودًا بـ $O\left[\binom{n-r}{2}(1\text{-p})^r\right]$. إذا أعطينا اختيارنا لـ r، فإننا نستطيع تحديد اللوغاريتم للأساس 2 لهذا بـ $2lgn - 3lgb\ lgn$، حيث $b= 1/(1 - p)$ (إذا كان $p \le 1/2$). وهذا يقترب من ∞-. لذا، فإنّ البيانات جميعها تقريبًا تملك متجهات تجاور في هذه المجموعة. ■

يكون احتمالُ الرّفض في خوارزميّة الوسم محدودًا بـ $n^{-1/7}$ لقيم n الكبيرة بصورة كافية. وظهرت تحسينات لاحقة لخوارزميّة تعمل في زمن $O(n^2)$ مع احتمال رفض c^{-n} ([Babai- Kučera, 1979]).

الترابط والعصب والتلوين (Connectivity, Cliques, and Coloring)

إنّ دراسة "السّلوك النموذجيّ" لتركيب عشوائيّ غالبًا ما يتضمن دراسة التوزيعات الاحتماليّة لمتغيراته. وسنأخذ في الحسبان هنا كلًّا من الترابط، والعصب، والتلوين للبيانات العشوائيّة.

وللبيانات العشوائيّة، فإنّ الخوارزميّات البسيطة يمكن انْ تصبح جيدة. فعلى سبيل المثال، فإنّ إيجاد عصبة كبرى هو صعب - PN (NP⁻ hard). إذا علمنا تقريبًا أنّ كلّ بيان يملك عددًا عصبيًّا قرابة $2\ \lg n$، فإننا نستطيع فحص المجموعات الجزئيّة جميعها للرؤوس حتى حجم $3\ \lg n$ لتكون عصبًا. إذا كان $\omega(G)< 3\ \mathrm{gl}\ n$، فإنّ هذا يحسب $\omega\ (G)$؛ لأنّ كلّ مجموعة حجمها $\omega(G)+1$ ليست عصبة. وإذا كان $\omega(G)< 3\ \mathrm{gl}\ n$، فإنّ الخوارزميّة تفشل في حساب $\omega\ (G)$، ولكنّ هذا نادر الحدوث. هناك الكثير من المجموعات الجزئيّة ذات حجم $2\ \lg n$، ولهذا لتكون خوارزميّة زمن – كثيرة حدود، ولكنها قريبة وتوضح طريقة واحدة يمكن من خلالها استخدام خواص البيانات العشوائيّة خورازميًّا. بعض مسائل صعب - NP تكون واضحة لبيانات عشوائيّة. وعلى الرّغم من أنّ $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$ لكلّ بيان بسيط G ([Vising, 1964])، فإنّ اتخاذ القرار بقيمة من بين

هذه القيم يكون صعبًا – NP ([Holyer, 1981]). لقد أثبت فايزنج أنّ $\chi'(G)=\Delta(G)+1$ عندما يملك G ثلاثة رؤوس فقط على الأقل درجتها كبرى. لذلك، لاحظ إيردوز وويلسون [1977] خاصية الإفرادية للرّأس الذي يملك درجة كبرى عندما $p=1/2$. كما لاحظ أنّ $\chi'(G)=\Delta(G)$ للبيان العشوائيّ. للبيانات المتناثرة والثّابت k، فإنّ عتبات ترابط k ودرجته الصغرى هما الشّيء نفسه. فهل يتحقق هذا أيضًا لاحتمال ضلعيّ ثابت؟ يمكن أنْ تعمّم النظرية 18.5.8 وتقوّى لتبيّن أنّه إذا كان (p و $k\in o$ ($n/logn$)) مُثبتا، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك k جارًا مشتركًا لكلّ زوج من الرّؤوس، وعليه يكون مترابطًا من الدرجة k (التمرين 33). إنّ تحسين هذا يتطلّب طرقًا أخرى؛ وقد بيّن بولوباس [1981b] للثابت p أنّ G^p كلّه تقريبًا يملك ترابطًا يساوي درجة صغرى.

ماذا عن عدد العصب (العصبة)؟ لـ k مثبتة، تعطي النظرية 23.5.8 عتبة احتمال لظهور عصبة من الدرجة k. ولكن لثابت p، فإنّ العدد العصبي ينمو مع n. إنّ تحديد العدد العصبي هو تام -NP. ولكننا لبيان عشوائيّ نستطيع أنْ نخمّن القيمة الصحيحة مع احتمال عالٍ دون النظر إلى البيان! بصورة مذهلة، لـ p مثبتة، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك إحدى القيمتين المحتملتين للعدد العصبي (بوصفها دالّة في n)، ولكل $k\in\mathbb{N}$، يوجد مدى لـ n حيث يكون العدد العصبي تقريبًا دائمًا يساوي k. إنّ الطريقة هي إيجاد حدود على $r(n)$ بحيث يكون G^p كلّه تقريبًا يملك عصبةً من الدرجة r، ولا توجد واحدة منها تقريبًا تملك عصبة من الدرجة $r+1$.

27.5.8. نظرية: ([Matula, 1972]) لـ $p=1/b$ مثبتة، و $\epsilon>0$ مثبت، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك عددًا عصبيًّا بين $\lfloor d-\epsilon\rfloor$ و $\lfloor d+\epsilon\rfloor$، حيث $d=2\log_b n-2\log_b\log_b n+1+2\log_b(e/2)$.

الإثبات: (مخطّط) إذا كان X_r عددَ العصب من الدّرجة r، فإنّ $E(X_r)=\binom{n}{r}p^{\binom{r}{2}}$. بما أنّ $(r/e)^r\sqrt{2\pi r}$ (تقريب ستيرلنج)، فإنّه أيضًا $E(X_r)\sim(2\pi r)^{-1/2}(enr^{-1}p^{(r-1)/2})^r$. وإذا كان $r\to\infty$ و $(enr^{-1}p^{(r-1)/2})\le 1$، فإنّنا نتوقّع أنّ $E(X_r)\to 0$. لتحديد $r(n)$ بحيث يتحقق هذا؛ خذ اللوغاريتم (للأساس b) في المتباينة، وجد الحلّ لـ r لإيجاد:

$$r\ge 2\log_b n-2\log_b r+1+2\log_b e.$$

وهذا مكافئ تقريبًا لـ $r\ge d(n)$ كما عُرِّف أعلاه، وبصورة أكثر دقة، إذا كان $r>d+\in$، فإن G^p كلّه تقريبًا لا يملك عصبة حجمها r.

يأتي الحدّ السّفليّ من تطبيق طريقة العزم الثّانية بحرص، كما في النظرية 23.5.8، ولكن اعتماد r على n يجعل التّحليل أكثر صعوبة. إنّ التّوقّع لـ X_r^2 يجمع احتمالات الحدوث المشترك للأزواج المرتّبة لعصب من الدّرجة r جميعها. ويعتمد هذا الاحتمال على عدد الرّؤوس المشتركة فقط. لذلك فإنّ:

$$E(X_r^2)=\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\binom{n-r}{r-k}p^{2\binom{r}{2}-\binom{k}{2}}.$$

نريد أنْ نبيّن أنّ الحدّ لـ $k=0$ (عصب منفصلة) مسيطر . ليكن $E(X_r^2)/E(X_r)^2=\alpha_n+\beta_n$، حيث $\alpha_n=\binom{n}{r}^{-1}\binom{n-r}{r}$ و $\binom{n}{r}^{-1}\sum_{k=1}^{r}\binom{r}{k}\binom{n-r}{r-k}b^{\binom{k}{2}}$. نبحث عن $\alpha_n\sim 1$ و $\beta_n\to 0$. عندما $r\sim 2\log_b n$، فإنّ صيغة التّقارب لـ $\binom{b}{k}/\binom{a}{k}$ تقود إلى $\alpha_n\sim e^{-r^2/(n-r)}\to 1$. إنّ المناقشة لـ β_n هي أكثر صعوبة؛ انظر بالمر [1985, p.75-80]. ■

لاحظ أنّ دراستنا لمتغيرات بيان يمكن أنْ تطبّق لقياس قوّة الشّروط للحلقات الهاملتونيّة

(Palmer, [1985, p. 81-85]). إنّ النظرية لا تبرهن شيئًا إذا لم تتحقّق فرضياتها؛ وتكون النظرية قوية إذا تحققت النتيجة فقط عندما يتحقق الفرض؛ وفي هذه الحالة لا يمكن تخفيف الفرضيات أو إضعافها. ونعرِّف قوة (Strength) النظرية على أنّها احتمال تحقّق فرضياتها مقسومًا على احتمال تحقّق استنتاجاتها.

خذ في الحسبان شروط كفاية للحلقات الهاملتونيّة. بما أنّ $p = \log n/n$ عتبةٌ لحلقة هاملتونيّة، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يكون هاملتونيًّا عندما يكون p مثبتًا. لقد بيّن ديراك [1952b] أنّ G يكون هاملتونيًّا عندما تكون درجة كلّ رأس $n/2$ على الأقل (النظرية 8.2.7). وعندما يكون $p > 1/2$، فإنّ هذا الشّرط يتحقق لـ G^p كلّه تقريبًا ؛ وعندما يكون $p < 1/2$، فإنه لا يتحقق تقريبًا. لذلك فإن قوة التقارب لنظرية ديراك تكون 0 عندما يكون p ثابتًا وتساوي على الأكثر 2/1. والمصير نفسه يحدث لشروط الدّرجات الأخرى في الجزء 2.7.

وفي هذه الأثناء، أثبت كلٌّ من كفتال وإيردوز [1972] أنّ G يكون هاملتونيًّا عندما تزيد درجة ترابطه على عدد استقلاله (النظرية 19.2.7). وتعطي عتبات هذه المتغيّرات أنّ هذه النتيجة تكون قوية لكلّ ثابت $p>0$. نعلم أنّ $\alpha(G^p) < 2(1+\in)\log_b n$ تقريبًا دائمًا، ونعلم أيضًا أنّ $k(G^p) \geq k$ تقريبًا دائمًا (عندما $k = o(n/\log n)$). لذلك، فإنّ $\alpha < k$ تقريبًا لـ G^p كلّه، والقوة التقاربية للنظرية تكون 1.

وأخيرًا، نأخذ في الحسبان عددا لونيًّا لثابت p. وبما أنّ $1\text{-}p$ ثابت أيضًا ، فإنّنا نستطيع تطبيق النتائج على عدد العصب: تقريبًا G^p كلّه لا يملك مجموعة مستقرّة فيها أكثر من $(1 + o(1))2\, log_b n$ رأسًا، حيث $b=1/(1\text{-}p)$. لذلك، فإنّ $\chi(G^p) \geq (1/2+o(1))n/\log_b n$ تتحقّق تقريبًا دائمًا. إنّ إنجاز هذا الحدّ يتطلب إيجاد مجموعات مستقرّة منفصلة عديدة لها أحجام قريبة من الأحجام الكبرى. ولعقد من الزمان، فقد كانت أفضل نتيجة هي ضمانًا خوارزميًّا لتلوين يستخدم ضعفي عدد الألوان التي في الحدّ السّفليّ على الأكثر.

لقد أثبت بولوباس [1988] أنّه يمكن تحقيق الحدّ السّفليّ باستخدام أسلوب احتمالي آخر يضمن إيجاد مجموعات مستقرّة كبيرة بما فيه الكفاية. وقد أثبت أيضًا أنّه في G^p كلّه تقريبًا، فإنّ كلّ مجموعة تملك $n/(\log_b n)^2$ من الرّؤوس على الأقل تحوي عصبة رتبتها $2\log_b n - 5\log_b \log_b n$ على الأقل. وهذا يسمح باستخلاص مجموعات مستقرّة بأحجام شبه كبرى حتى لا يبقى إلاّ القليل القليل من الرّؤوس التي يمكن أنْ تسبّب مشكلة؛ والمتبقية يمكن أنْ تعطى ألوانًا مختلفة.

قبل تطوير نهج بولوباس، سوف نقدّم نتيجة سابقة لأهميّتها الخوارزميّة: تستخدم الخوارزميّة الجشعة $(1+\epsilon)n/\log_b n$ لونًا على الأكثر تقريبًا على G^p كلّه. لذلك، فإنّها "تقريبًا دائمًا تعمل" بوصفها خوارزميّة تقريب بالحس نفسه الذي تعمل فيه تقريبًا دائمًا الخوارزميّة السابقة للتّشاكل. وقد بيّن كلٌّ من جيري وجوسون [1976] عدم وجود خوارزميّة سريعة تستخدم على الأكثر ضعفي العدد الأمثل من الألوان على كلّ بيان إلا إذا كان $P = NP$. إنّ إثبات بولوباس لا يعطي خوارزميّة سريعة لتلوين كلّ بيان تقريبًا بعددٍ يقترب من عدد الألوان الأمثل؛ لأنّه إثبات وجود فقط.

28.5.8. نظرية : (Grimmett- McDiarmid [1975]) ليكن احتمال ضلعيّ p معطًى، وليكن $b = 1/(1\text{-}p)$. لثابت p وثابت $\epsilon > 0$، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يحقق:

$$(1/2-\epsilon)n/\log_b n \leq \chi(G^p)\ (1+\epsilon)n/\log_b n$$

الإثبات: الحدّ السّفليّ يتبع باستخدام مجموعات مستقرّة، كما اقترح أعلاه. للحدّ العلويّ، سوف نبيّن أنّ التلوين الشّره لـ $v_1, \ldots, v_n$ على الترتيب يستخدم $f(n) = (1+\epsilon)\, 2/\log_b n$ على الأكثر من الألوان تقريبًا على G^p كلّه (للتبسيط؛ اختر ϵ بحيث يكون $f(n)$ عددًا صحيحًا). ضمن مجموعة البيانات على n من الرّؤوس التي تستخدم ألوانا أكثر، لتكن $\mathbf{B}_m$ هي المجموعة التي فيها v_m هو الرأس الأول الذي يستخدم اللون $f_n + 1$. سوف نبرهن أن $\sum_{m=1}^{n} P(\mathbf{B}_m) \to 0$ عندما $n \to \infty$.

إذا أُعطيت بيانًا G، فاجعل $G_m = G[\{v_1, \ldots, v_{m-1}\}]$. لاحظ أنّه قبل استخدام اللون $f_n + 1$، يجب أنْ يُستخدم اللون f_n. لذلك، نجد أنّ لكلّ $G \in \boldsymbol{B}_m$ فإنّ التّلوين الشّره يستخدم f_n لونًا. ليكن k_i عدد المرات التي يظهر فيها اللون i في هذا التّلوين. وبسبب حاجتنا إلى استخدام اللون $f_n + 1$، فإنّ v_{m+1} يجب أنْ يملك جارًا واحدًا على الأقلّ من كلّ لون f_n ,...,1. وإذا أعطينا الأعداد $\{k_i\}$، فإنّ احتمال هذا هو $\prod_{i=1}^{f(n)} \left[1-(1-p)^{k_i}\right]$.

لقد بسّط كلٌّ من بولوباس وإيردوز [1976] الحسابات التّالية التي تضمّنت هذا الحدّ بملاحظة أنّ الحدّ يكبر عندما تكون k_i جميعها متساوية (التمرين 37.3.8). لذا، فإنّ:

$$\prod_{i=1}^{f(n)}\left[1-(1-p)^{k_i}\right] \le \left[1-(1-p)^{m-1/f}\right]^{f} < \left[1-(1-p)^{n/f}\right]^{f}$$

وإذا أُعطينا G_m، فإنّ $b_n = \left[1-(1-p)^{n/f(n)}\right]^{f(n)}$ يكون كحدّ على الاحتمال حيث ينتمي البيان الكلّيّ G إلى $\boldsymbol{B}_m$. وبما أنّ هذا يتحقّق لـ G_m كلّه، فإنّنا نستنتج أنّ $P(\boldsymbol{B}_m) < b_n$. وهذا يتحقّق لـ m كلّه. لذلك، فإنّ $\sum_{m=1}^{n} P(\boldsymbol{B}_m) < nb_n$.

وباستخدام $(1-p)^{-x} < e^{-x}$، فإنّنا نحصل على $nb_n < ne^{-f(1-p)^{n/f}}$. وأنّ تعويض $f_n = cn/\log_b n$ يعطي $(1-p)^{n/f} = n^{-1/c}$. ويصبح اللوغاريتم للحدّ $\log n - cn^{1-1/c}/\log_b n$. وهذا يقترب من $-\infty$ لِـ $c > 1$. لذلك، فإنّ احتمال أنْ تستخدم الخوارزميّة الشّرهة أكثر من $f(n)$ من الألوان يكون محدودًا بدالّة تقترب من 0. ■

إنّ رتبة نموّ $\chi(G)$ تسلّط الضّوء على مسائل مشهورة أخرى في نظريّة البيان. لقد خمّن هاجوس (Hajo's) أنّ كلّ بيان عدده اللونيّ r يحوي تقسيمًا جزئيًّا لـ K_r (انظر الملاحظة 21.2.5). وقد تم نقض هذا من قِبَل كاتلين [Catlin, 1979] (تمرين 40.2.5). وقد لاحظ كلٌّ من إيردوز وفجتلوسيز [Erdös- Fajtlowicz, 1981] أنَّ العدد اللونيّ لـ G^p تقريبًا دائمًا ينمو مثل $\Theta(n/\log n)$. ومن الناحية الأخرى، فإنّ أكبر r بحيث يحوي G^p تقسيمًا جزئيًّا لـ K_r ينمو مثل $\Theta(\sqrt{n})$. لذلك، فإنّ العدد اللونيّ يكون تقريبًا دائمًا أكبر كثيرًا. وتكون مخمّنة هاجوس غير صحيحة تقريبًا دائمًا.

وعلى النقيض من ذلك، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يملك بيانًا جزئيًّا قابلاً للتّقليص إلى K_r عندما $r \in \Theta(n/\sqrt{\log n})$. لذلك، فإنّ كلّ بيان يحقّق المخمّنة الأضعف لهادوايجر تقريبًا (الملاحظة 21.2.5) التي تنصّ على أنّ كلّ بيان عدده اللونيّ r يملك بيانًا جزئيًّا قابلاً للتّقليص إلى K_r.

الشّكائم (Martingales)

إنّ الأساليب المتقدّمة في الاحتمال قادت إلى نتائج أنيقة على التّراكيب التّوافقيّة دون العناء المُتضمّن في حسابات العزمين الثّاني والأعلى. وتهدف النظرية إلى تطوير أنماط يمكن تطبيقها دون إعادة تفاصيل حسابية.

تستخدم بعض هذه الطّرق قوائم متغيرات عشوائيّة ذات علاقة. إنّ المعالجة التّصادفيّة الناتجة تظهر

تناسقًا وسلوكًا كلّيًّا قابلاً للتّوقع أكثر ممّا تعمل المتغيّرات العشوائيّة المفردة. وفي الممر العشوائيّ التقليديّ على خطّ، يوجد عند كلّ خطوة احتمال p للتّحرّك وحدة واحدة نحو اليسار، واحتمال p للتّحرّك وحدة واحدة نحو اليمين، واحتمال $1 - 2p$ لعدم التّحرّك. ومهما كان التّاريخ السّابق للممّر، فإنّ الموقع المتوقع بعد t من الخطوات يساوي الموقع الفعليّ بعد t -1 من الخطوات؛ وهذه هي الخاصيّة المُعرِّفة للشّكيمة.

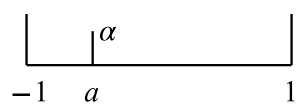
29.5.8. تعريف: **الشكيمة** (martingale) هي قائمة من متغيّرات عشوائيّة $X_o, \ldots, X_n$ بحيث إنّ التوقع لـ X_i يساوي X_{i-1} ، علمًا بأنّ القيم $X_o, \ldots, X_{i-1}$ معطاة.

إنَّ الموقع المتوقّع للممر العشوائيّ بعد n من الخطوات هو عند نقطة الأصل. والأقل وضوحًا هو أنّه من غير الملائم أنْ يكون الممرّ بعيدًا جدًّا عن نقطة الأصل، بوصفها دالّة بدلالة n. وسوف نرى بأنّ السّبب يكمن في عدم قدرته على التّحرّك أكثر من وحدة واحدة في كلّ خطوة.

تستطيع الشكائم أنْ تجعل من السّهل إثبات أنّ المتغيّر العشوائيّ يكون متركّزًا بصورة عالية حول قيمته المتوقّعة. وعند تطبيق الأسلوب، فإنّه يجعل الحسابات المفصّلة في طريقة العزم الثاني غير ضرورية. لاحظ أنّ العمل الصّعب قد أُنجز من خلال متباينة أزوما، وتسمى أيضًا متباينة ذيل الشّكيمة التي تنصّ على أنّه إذا كانت متغيّرات عشوائيّة متتابعة في شكيمة يختلف بعضها عن بعض بمقدار 1 على الأكثر، فإنّ احتمال أنّ X_n - X_o يتخطى $\lambda\sqrt{n}$ يكون محدودًا بـ $e^{-\lambda^2/2}$. سوف نبرهن أولاً تمهيديّتين. وهذه العبارات تتحقّق لمتغيّرات عشوائيّة متّصلة، ولكنّنا سنأخذ في الحسبان مجدّدا متغيراتٍ متقطعةً فقط.

30.5.8. تمهيدية : ليكن Y متغيّرًا عشوائيًّا بحيث يكون $E(Y) = 0$ و $|Y| \leq 1$. إذا كانت f دالّة محدّبة على [-1,1]، فإنّ $E(f(Y)) \leq ½[f(-1) + f(1)]$. بوجه خاصّ، $E(e^{tY}) \leq \frac{1}{2}[e^t + e^{-t})$ لكلّ $t > 0$.

الإثبات: عندما تأخذ Y القيم ± 1 فقط، كلّ مع احتمال .5، فإنّ $E(f(y))= ½ \ [f(-1)+f(1)]$. لتوزيعات أخرى، لاحظ أنّ دفع الاحتمال "خارجًا في إتجاه الأضلاع" يزيد $E(f(Y))$. وللمتغيّرات المتقطّعة، نستطيع استخدام الاستقراء على عدد القيم مع احتمال غير صفريّ. إضافة إلى أن التّحدّب يؤدي إلى أنّ $f(a) \leq \frac{1-a}{2}f(-1) + \frac{a+1}{2}f(1)$. إذا كان $P(Y = a) = \alpha$، فإنّنا نستطيع إنقاص الاحتمال عند a إلى ، وزيادة $P(Y=-1)$ بمقدار $\alpha\frac{1-a}{2}$، وزيادة $P(Y = 1)$ بمقدار $\alpha\frac{1+a}{2}$ لنحصل على متغيّر جديد Y' مع التّوقع نفسه. ومن متباينة التّحدّب وفرضيّة الاستقراء، نجد أنّ: $E(f(Y)) \leq E(f(Y')) \leq \frac{1}{2}[f(-1)+f(1)]$. ■



31.5.8. تعريف: للحادثين A و B، نحصل على **الاحتمال المشروط** (conditional probability) لـ A علمًا بحدوث B ومن خلال معاملة الحادث B بوصفه فضاءً احتماليًّا كاملاً والذي يعني مُعايرته بـ $P(B)$. لذلك نعرّف $P(A \mid B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$.

عندما يكون Y,X متغيرين عشوائيّين، فإنّنا نكتب $Y|X$ بدلاً من "Y علمًا بأنّ X". وهذا يعرف متغيّرًا عشوائيًّا لكلّ قيمة لـ X؛ حيث نعامل X بوصفها ثابت i ونُغيّر التوزيع الناتج لـ Y بـ $P\,(X = i)$.

لمتباينة أزوما، نستخدم التّوقع لمتغيّرات مشروطة. ولكلّ i، نحسب القيمة المتوقّعة لـ Y عندما تكون مقيدة لنقاط العينة حيث $X = i$. والتّوقع $E(E(Y|X))$ هو التّوقع لـ $(EY|X=i)$ على الاختيارات لـ i التي تحدث مع احتمال $P(X = i)$. والنتيجة هي توقّع على الفضاء العينيّ الكلّيّ. ونزيل أثر الاشتراط، ونحصل على $E\,(E(Y\backslash X) = E(Y)$.

32.5.8. تمهيدية : $E\,(E(Y|X) = E(Y)$.

الإثبات. ليكن $p_{i,j} = P\,(X = i$ و $Y = j)$. بما أنّ $E(Y\backslash X = i) = \dfrac{\sum_j jp_{i,j}}{P(X=i)}$، فإنّ $E(E(Y|X)) = E(Y)$. ■

33.5.8. نظرية : (متباينة أزوما) إذا كانت $X_0,\ldots X_n$ شكائم مع $|X_i - X_{i-1}| \le 1$، فإنّ:

$$P\,(X_n - X_0 \ge \lambda\sqrt{n}) \le e^{-\lambda^2/2}.$$

الإثبات: بتطبيق دالّة انسحاب، نستطيع افتراض أنّ $X_0 = 0$. لـ $t > 0$، فإنّ $X_n \ge \lambda\sqrt{n}$ إذا وفقط إذا كان $e^{tX_n} \ge e^{t\lambda\sqrt{n}}$. ولهذا السّبب فإنّ $\left(P\,(X_n \ge \lambda\sqrt{n}\right) = P\,(e^{tX_n} \ge e^{t\lambda\sqrt{n}})$. وبتطبيق متباينة ماركوف على e^{tX_n}، نجد أنّ $P(e^{tX_n} \ge e^{t\lambda\sqrt{n}}) \le E(e^{tX_n})\,/e^{\lambda\sqrt{n}}$. إنّ هذا الحدّ يتحقّق لكل $t>0$. وفيما بعد، سوف نختار t لتصغير الحدّ.

أولاً، سوف نبرهن باستخدام الاستقراء على n أنّ $E\,(e^{tX_n}) \le \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. سوف نضع شرطًا على $X\,n\text{-}1$. لاحظ أنّ التمهيديّة 32.5.8 تعطي:

$$E\,(e^{tX_n}) = E\,(e^{tX_{n-1}}e^{t(X_n - X_{n-1})} = E\,(E\,(e^{tX_{n-1}}\,e^{t(X_n - X_{n-1})}/|\ X_{n-1}).$$

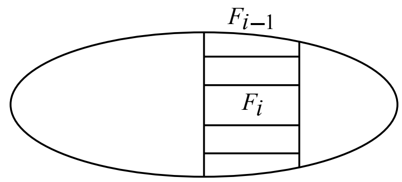
عندما نضع شرطًا على X_{n-1}، فإنّ القيمةَ لـ X_{n-1} ثابتةٌ للتّوقع الدّاخليّ. لذا، نستطيع إزالة $e^{tX_{n-1}}$ من التّوقّع الداخلي لنحصل على $E\,(e^{tX_n}) = E\,(e^{tX_{n-1}}E(e^{tY}\ |X_{n-1}))$، حيث $Y = X_n - X_{n-1}$. لأنّ $\{X_n\}$ شكيمة، فإن $E(Y) = 0$، ومن الفرض فإنّ $|Y| \le 1$. لذلك، فإنّ التمهيديّة 30.5.8 تنطبق وتعطي $E\ (e^{tY}\ |\ X_{n-1}) \le \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$. وهذا نفسه الآن ثابت، ويعطي $E\,(e^{tX_n}) = \dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t})E\,(e^{tX_{n-1}})$، وفرضية الاستقراء تكمل الإثبات.

سوف نضعّف الحدّ لصورة أكثر فائدة بملاحظة أنّ $\dfrac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \le e^{t^2/2}$. وهذا يتحقّق؛ لأنّ الطّرف الأيسر هو $\sum t^{2k}\ /\ (2k)!$، أمّا الطرف الأيمن فهو $\sum t^{2k}\ /\ (2^k\,k!)$. إذن، سيكون الاحتمال محدودًا بـ $e^{nt^2/2 - \lambda t\sqrt{n}}$ لكلّ $t > 0$. سوف نحصل على أفضل حدّ بالتصغير على t. يكون الأسّ تربيعيًّا؛ وسوف نصغّره باختيار t لحل $tn - \lambda\sqrt{n} = 0$، أو $t = \lambda/\sqrt{n}$. لذلك، فإنّ الحدّ الناتج هو $e^{-\lambda^2/2}$. ■

إنّ متباينة أزوما هي وحيدة الجانب، حيث إنها تحدّ احتمال أنْ يكون X_n أكبر كثيرًا من X_0. وبما أنّ الشّروط متماثلة بالإشارة، فإنّ تطبيق المتباينة على $\{-X_i\}$ يعطي المتباينة نفسها للذّيل الآخر الذي يكون فيه X_n أصغر كثيرًا من X_0.

34.5.8. مثال: المقامر الواقعيّ. يستطيع المقامر أنّ يراهن حتى n من المرات، حيث n مثبتة. وفي كل مرة يراهن فيها، فإنّه يربح أو يخسر 1، حيث يتساوى احتمالا الربح والخسارة. ويكون هدفه ربح $\lambda\sqrt{n}$. لذا، فسيتوقف عن اللعب إذا وصل إلى هذه القيمة. اجعل X_i تُمثّل أرباحه بعد i لعبة. لذلك، فإنّ X_i=X_{i-1} إذا كان $X_{i-1} \geq \lambda\sqrt{n}$ وغير ذلك، فإنّ $X_i = X_{i-1} \pm 1$ ، واحتمال كلّ واحدة منها يساوي 0.5. إذن، $\{X_i\}$ هي الشّكيمة التي تتغيّر بـ 1 على الأكثر عند كلّ خطوة، ولهذا تنطبق متباينة أزوما. لاحظ أنّ احتمال حصول المقامر على $\lambda\sqrt{n}$ يكون محدودًا بـ $e^{-\lambda^2/2}$. إذا كانت $\lambda = 1$، فمن الممكن وجود فرصة نجاح معقولة، ولكن إذا كانت $\lambda = 10$ ، فإنّ أمل النجاح ضئيل. ■

في التّطبيقات التّوافقيّة، سوف نأخذ في الحسبان شكيمة من نوع خاص، حيث لدينا فضاء احتماليّ متضمن أصلاً، و X هو التّوقع لمتغيّر عشوائيّ X. والمتغيّر X_n هو القيمة لـ X عند نقطة معينة واحدة. سوف نُعرّف شكيمة $X_o, \ldots, X_n$ تصف عمليّة تدرّجية للتّعلم أكثر حول القيمة النّهائيّة $X_n = X$.



35.5.8. تمهيدية. ليكن X متغيّرًا عشوائيًّا معرّفًا على فضاء احتماليّ. ولتكن $F_0 \supseteq F_1 \supseteq \ldots \supseteq F_n$ سلسلة مجموعات جزئيّة من الفضاء، حيث F_0 هي الفضاء كاملاً، أمّا F_n فهي مخرجة مفردة، في حين تكون F_i متغيّرا عشوائيًّا تشكّل قالبًا في تجزئة لـ F_{i-1}. إنّ الاحتمال لاختيار F_i داخل F_{i-1} يتناسب مع احتماله في الفضاء المتضمّن أصلاً. إذا كان $X_i = E(X \mid F_i)$ ، فإنّ القائمة $X_0, \ldots, X_n$ تكون شكيمة.

الإثبات: سنبرهن أنّ $E(X_i| X_0, \ldots, X_{i-1}) = X_{i-1}$. في لحظة معيّنة من العمليّة، فإنّ قائمة القيم تكون هي المخرجات لمتتالية معيّنة من القيود. وكلّ متتالية قيود تولّد القيم المعطاة $X_o, \ldots, X_{i-1}$ تصل بعض F_{i-1} حيث تملك $E(X| F_{i-1})$ القيمة المعطاة لـ X_{i-1}. لكلّ F_i مماثلة، فإننا نستطيع أخذ التوقع لـ X_i عبر القيم المحتملة لـ F_i. وفي كلّ حالة نحصل على X_{i-1}. لذلك، فإنّ الصّيغة المرغوبة تتحقق بصرف النّظر عن أيّ F_{i-1} ولدت القائمة $X_0, \ldots X_{i-1}$. لذلك، سنضع شرطًا على اختيار مثبت لـ F_{i-1} لحساب $(E(X_i|X_0, \ldots, X_{i-1})$ داخل F_{i-1}. لذا، فإنّ التمهيديّة 32.5.8 تعطي $E(X_i) = E(E(X| F_i)) = E(X)$. وهذا هو التّوقّع داخل الحادث F_{i-1} (يُعامل بوصفه فضاء احتمال). لذا، فإنّ هذه التّعابير جميعها تكون مشروطة على F_{i-1} ويكون التّعبير الأخير فعليًّا هو $X_{i-1} = E(X| F_{i-1})$. ■

إنّ مثل هذه الشّكائم التي تُدعى **شكائم مُقيّدة** (restriction martingles) تظهر عندما نكتشف بصورة تدريجية شيئًا أو كائنًا مولدًا بصورة عشوائية. هنا، F_i هي المجموعة الجزئيّة من فضاء الاحتمال حيث يكون الكائن محصورًا بعد i من الخطوات (F لـ "معلومة"). ففي عمليّة (نَقْف) العملة، تكون نقاط العينة قوائم طولها n، و F_i يمكن أنّ تكون معرفة أول i من القيم. ففي البيانات العشوائيّة، نجد أنّ F_i يمكن أنْ تكون البيانَ

الجزئيَّ المحدث من الرّؤوس $\{v_1, \dots, v_i\}$. أو أنّ تكون المعرفة التي تكون من خلالها أول i من الأضلاع موجودة.

ولتطبيق متباينة أزوما، نحتاج إلى وضع حدٍّ على $|\chi_i - \chi_{i-1}|$. إنّ المعرفة التي تظهر فيها أيّ أضلاع تقع على رأس مثبت v_i يمكن أنّ تغيّر العدد اللونيّ على الأكثر بـ 1؛ لأن $\chi(G - v_i)$ تساوي $\chi(G)$ أو $\chi(G)$ - 1. ومن هنا نستطيع استنتاج أنّ I في الشّكيمة المقيّدة المُعرّفة بإظهار الرّؤوس واحدًا تلو الآخر.

36.5.8. تمهيدية : خذ في الحسبان بناءً عشوائيًّا مُحددًا بخطوات مستقلة $S_1, \dots, S_n$. ولتكن F_i هي المعرفة لـ $S_1, \dots, S_i$، ولتكن $X_0, \dots, X_n$ هي الشّكيمة المقيّدة المقابلة لمتغيّر عشوائيّ X. ولتكن A هي المعرفة لـ S_j لكلّ $j \neq i$، مع S_i مجهولة. إذا تحقّق لكلّ A أنّ قيم X على نقاط في A تختلف على الأكثر بـ 1، فإنّ I لكلّ i (ولهذا؛ فإنّ $P(X - E(X) > \lambda\sqrt{n}) \le e^{-\lambda^2/2}$).

الإثبات: خذ في الحسبان مثالاً معينًا لـ F_{i-1}، حيث $X_{i-1} = E(X | F_{i-1})$ معطى. سوف نرتّب النّقاط لـ F_{i-1} في الخلايا لشبكة. ولهذه النقاط جميعها، فإنّ المخرجات لـ $S_1, \dots, S_{i-1}$ هي نفسها. إنّ كلّ صفّ هو خيار لـ F_i: وهو قالب في التّجزئة لـ F_{i-1}. وكلّ عمود هو A تكون فيه $S_{i+1}, \dots, S_n$ مثبتة، في حين تتغير S_i فقط. ومن الفرض، فإنّ القيم الكبرى والصّغرى لـ X تختلف في كلّ عمود بـ 1 على الأكثر. لتكن m_s, M_s القيم الصّغرى والكبرى لـ X في عمود s.

اختيارات لـ A ($S_{i+1}, \dots, s_n$ مثبتة داخل العمود)

اختيارات
لـ F_i
(أو S_i)

بما أنّ S_i و $S_{i+1}, \dots, S_n$ محدّدة بصورة مستقلة، فإنّ الاحتمال للمخرجات في صفّ r وعمود s هو $q_r p_s$، حيث q_r هو الاحتمال الذي يكون فيه S_i يعطي هذا الصّفّ، أمّا p_s فهو الاحتمال الذي يكون فيه $S_{i+1}, \dots, S_n$ يعطي هذا العمود. والحساب لـ X_i هو التّوقّع عبر صفّ واحد:

$$\sum m_s p_s \le E(X | F_i) \le \sum M_s p_s \le 1 + \sum m_s p_s.$$

بما أنّ هذه الحدود السّفليّة والعلويّة مستقلّة عن دليل الصّفّ، فإنّ أخذ التّوقّع خلال الشّبكة كاملة لحساب X_{i-1} يعطي المتباينات نفسها. لذا، فإنّ X_{i-1} و X_i محصورتان بفترة واحدة طولها 1 وتختلفان بـ 1 على الأكثر. وبناءً عليه، تنطبق متباينة أزوما. ■

عندما تتحقّق الشروط في التمهيديّة 36.5.8، فإنّنا نستنتج مباشرة أنّ قيمة X تكون متركزة بصورة كبيرة حول معدّلها (وسطها الحسابي).

37.5.8. مثال: العدد اللّونيّ للبيانات العشوائيّة. ثبّت n، وخذ في الحسبان نموذج A مع احتمال ضلعيّ p. افرض أنّنا نريد إظهار رأس واحد في كلّ مرّة في البيان العشوائيّ على n من الرّؤوس. في المرحلة i، نعلّم الأضلاع من v_i إلى الرّؤوس السابقة، وهذا هو S_i. والنموذج A يعيّن المخرجات للخطوات S_i بصورة مستقلة. والحادث A الذي تكون فيه الخطوات جميعها معيّنة ما عدا S_i هو البيان الجزئيّ $G - v_i$ للبيان العشوائيّ G إضافة إلى المعرّفة للأضلاع من v_i إلى الرّؤوس اللاحقة. وبما أنّ $\chi(G - v_i) \le \chi(G) \le \chi(G - v_i)+1$، فإنّ قيمة X تختلف على الأكثر بواحد عبر الاحتمالات جميعها في A. ومن هنا، فإنّ الفرضيّات في التمهيديّة 36.5.8 تتحقق. وباستخدام كلا الذيلين؛ نستنتج أنّ:

$$P\left(\left|\chi(G)-E\left(\chi(G)\right)\right| \ge \lambda\sqrt{n}\right) \le 2e^{-\lambda^2/2}.$$ ■

لاحظ أنّ النتيجة في المثال 37.5.8 لا تذكر شيئًا حول قيمة $E\left(\chi(G)\right)$. ولتقريب هذا نستخدم متباينة أزوما مرّة أخرى. مع احتمال ضلعيّ ثابت p، فإننا نعرف أنّ العدد العصبيّ لـ G^P هو تقريبًا دائمًا ضمن 1 عن $d = 2\log_b n - 2\log_b \log_b n+1+ 2\log_b (e/2)$، حيث $b=1/p$. والنتيجة نفسها تتحقق لمجموعات مستقرّة باستخدام الأساس $c = 1/(1 - p)$ للوغاريتم. ولإثبات أنّ العدد اللّونيّ لـ G^P قريب من $n/(2\log_c n)$؛ فقد بيّن بولوباس إمكانية استخلاص مجموعات مستقرّة بالحجم الأكبر تقريبًا حتى يصبح عدد الرّؤوس المتبقية قليلاً جدًّا ليكون مهمًّا.

38.5.8. نظرية: (Bollobás [1988]) تقريبًا، لكلّ G^P مع ثابت $p= 1 - 1/c$، فإنّ كلّ بيان جزئيّ محدث رتبته $m = \lceil n / \log_c^2 n \rceil$ على الأقلّ يملك مجموعة مستقرة حجمها $r = 2 \log_c n - 5\log_c \log_c n$ على الأقلّ.

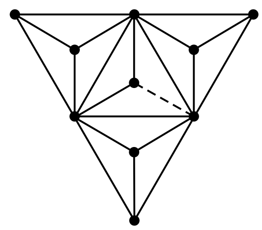
الإثبات: (مخطّط) لتكن S مجموعةً فيها m من الرّؤوس. سنحدّد احتمال عدم امتلاك S لمجموعة مستقرة حجمها r بـ $e^{-dm1+\epsilon}$ لبعض قيم ϵ . d. وهذا بدوره يحدّد احتمال وجود مجموعة فيها m عنصرًا، ولا تملك مجموعة مستقرّة حجمها r بـ $2^n e^{-dm1+\in} > e^{-dm1+\epsilon}$ بما أنّ $n = m^{1+0(1)}$، فإنّ هذا الحدّ يذهب إلى 0. وطريقة العزم الأول تعطي أنّ فيها G^P كلّه تقريبًا لا يملك مجموعة رديئة فيها m عنصرًا.

يكفي أنْ ندرس البيان الجزئيّ G المُحدث من $[m]$. ليكن X العددَ الأكبر من المجموعات المستقرّة التي حجمها r المنفصلة – مثنى زوجًا زوجًا في هذا البيان الجزئي، حيث إنّ منفصلة – مثنى تعني أنّها تتشارك برأس واحد على الأكثر. سوف نبيّن أنّ $X \ge 1$ تقريبًا دائمًا. ولتحقيق ذلك، يكفي بيان أنّ: (1) X متركز بصورة كبيرة حول وسطه الحسابيّ. (2) $E(X)$ أكبر من شيء ما كبير .

لـ (1)؛ نستدعي متباينة أزوما. خذ في الحسبان الشّكيمة المقيّدة لـ X التي تنتج عن إظهار G لشقّ ضلعيّ واحد في كلّ مرّة. وعند كلّ خطوة، يجب أنْ نعلم ما إذا كان زوج إضافيّ واحد من الرّؤوس يحدث ضلعًا. لذا، يكون لدينا $X_0=E(X)$ و $X_{\binom{m}{2}} = X$. لاحظ أنّ الوضع الحاليّ لشقّ ضلعيّ واحد يغيّر القيمة لـ X بـ 1على الأكثر. لذلك، فإنّ التمهيديّة 36.5.8 تنطبق، وينتج أنّ $P(X - E(X) \le -\lambda\binom{m}{2}^{1/2}) \le e^{-\lambda^2/2}$. مع $\lambda = E(X)/\binom{m}{2}^{1/2}$ فإنّ $P(X = 0) = P(X - E(X) \le -E(X)) \le e^{-E(X)^2/(m^2-m)}$. لذلك، يكفي بيان أنّ $E(X)/m\to\infty$.

ولبرهنة هذا؛ سوف نأخذ في الحسبان متغيّرًا عشوائيًّا آخر $\hat{X}$. وسنأخذ في الحسبان أيضًا عدد المجموعات المستقرّة التي حجمها r في G التي لا تملك أزواجًا مشتركة مع أيّ مجموعة مستقرّة أخرى حجمها r. يمثّل جمعٌ مثل هذا حشدًا من مجموعات مستقرّة حجمها r منفصلة – مثنى زوجًا زوجًا. لذا، فإنّ $X \geq \hat{X}$.

ولقد استحدثنا X لأنّ الشّكيمة المقيّدة لـ $\hat{X}$ لا تحقّق $\left|\hat{X}_i - \hat{X}_{i-1}\right| \leq 1$. فعلى سبيل المثال، في الرسم لـ $\overline{G}$ في الشّكل أدناه، فإن $r = 4$ ونبحث عن عصب من الدرجة 4؛ إذا كان الضّلع الأخير (المنقّط) موجودًا في $\overline{G}$ (غير موجود في G)، فإنّ $\hat{X} = 0$، أمّا إذا كان غير موجود في $\overline{G}$ (موجود في G)، فإنّ $\hat{X} = 3$.



إنّ حساب $E(\hat{X})$ أسهل من حساب $E(X)$. وبالتّعبير عن $\hat{X}$ بوصفها مجموعًا لـ $\binom{m}{r}$ من المتغيّرات المؤشِّرة، فإننا نحصل على $E(\hat{X})$ كـ $\binom{m}{r}$ مضروبًا في الاحتمال الذي تُحدث فيه $[r]$ مجموعة مستقرة حجمها r تكون منفصلة – مثنى عن المجموعات الأخرى جميعا. هذا هو $(1 - p)^{\binom{r}{2}}$ مضروبًا بالاحتمال المشروط الذي لا تتعارض فيه $[r]$ مع المجموعات المستقرّة الأخرى التي حجمها r، علمًا بأنّه معطى لدينا أنّ الحادث Z هو أنّ $[r]$ مستقلة. ليكن Y عددَ المجموعات المستقرة الأخرى التي حجمها r والتي تتداخل مع $[r]$ على الأقل في عنصرين. من متباينة ماركوف، فإنّ $E(Y|Z) \to 0$ يعطي $P(Y = 0|Z)\to 1$. وبما أنّ كلّ مجموعة عُدَّتْ تتشارك برأسين على الأقل مع $[r]$، فإنّ:

$$E(Y|Z) = \sum_{i\geq 2,r-1} \binom{r}{i}\binom{m-r}{r-i}(1-P)^{\binom{r}{2}\binom{i}{2}}\ .$$

عندما $m \to \infty$ فإنّ هذا يؤول إلى 0؛ وهذا يتبع من التعبير لـ r بدلالة m. لذلك، فإنّ $E(\hat{X})$ يكون مقاربًا لـ $\binom{m}{r}(1-p)^{\binom{r}{2}}$. والتعبير لـ r بدلالة m يعطي $E(\hat{X}) \in \Omega(m^{5/3})$. لذلك فإن $E(X)/m\to\infty$. وهذا يكمل الإثبات. ■

39.5.8. نتيجة: (Bollobás [1988]) لكلّ احتمال ضلعيّ ثابت $p = 1 - 1/c$، فإن G^p كلّه تقريبًا يحقق أنّ:

$$(1 + \in)n/(2\log_c n) \leq \chi(G^p) \leq (1+\in')\, n/(2\log c\ n)$$

حيث $\epsilon = \log_c \log_c n$ و $\in' = 5\log_c \log_c n / \log_c n$

الإثبات: يتحقق الحدّ السّفلي لأن G^p كلّه تقريبًا لا يملك مجموعة مستقرّة أكبر من $2\log_c n - 2\log_c \log_c n$. والحدّ العلوي يتبع من النظرية 38.5.8، لأنّنا نستطيع تقريبًا دائمًا اختيار مجموعات مستقرّة حجمها $2\log_c n - 5\log_c \log_c n$ حتى يبقى $n/lg_c^2 n$ من الرّؤوس فقط. بما أنّ $n/lg_c^2 n \in o(\log_{cn}/ n)$، فإنا نستطيع إكمال التّلوين باستخدام ألوان جديدة مختلفة على الرّؤوس المتبقّية. ■

تمارين (Exercises)

1.5.8. (–) التّوقع:

a) احسب العدد المتوقّع للنقاط الثابتة في تبديل عشوائيّ لـ $[n]$.

b) حدّد العدد المتوقّع للرؤوس التي درجتها k في بيان عشوائيّ على n من الرّؤوس مع احتمال ضلعيّ p.

2.5.8. (-) أثبت أنّ $1-p>e^{-p}$ لـ $0<p$.

3.5.8. (-) حدّد العدد المتوقّع للمثلثات الأحاديّة اللّون في تلوين عشوائيّ من الدّرجة 2 لـ $E(K_6)$.

4.5.8. (-) أثبت أنّ بعض التّلوينات من الدرجة 2 للأضلاع لـ $K_{m.n}$ تملك على الأقل $\binom{m}{r}\binom{n}{s}2^{1-rs}$ نسخة أحاديّة اللّون من $K_{r,s}$.

5.5.8. (-) العبارة "$f(G_n)\le(1+\in)n$" تعني أنه لكلّ $\in>$، فإنّ المتباينة تتحقّق لـ n كبيرة بما فيه الكفاية. أمّا العبارة "$f(G_n)\le n+o(n)$" فتعني أنّ $f(G_n)/n\to 1$ عندما $n\to\infty$. أثبت أنّ العبارتين متكافئتان.

6.5.8. احسب بصورة صريحة احتمال أنْ يكون الإغلاق الهاملتونيّ لبيان عشوائيّ على مجموعة الرّؤوس [5] تامًا.

7.5.8. ليكن G بيانًا له p من الرّؤوس، وq من الأضلاع، وزمرة تماثل ذاتيّ حجمها s. لتكن $n=(sk^{q-1})^{1/p}$. أثبت أنّه يوجد تلوين من الدّرجة k لـ $E(K_n)$ لا يملك نسخة أحاديّة اللّون من G. (Chva'tal- Harary [1973])

8.5.8. (!)

a) استخدم تجزئة عشوائيّة للرّؤوس لتبرهن أنّ كلّ بيان يملك بيانًا جزئيًا ثنائيّ الفرع يحوي نصف أضلاعه على الأقلّ.

b) استخدم تجزئات متساوية للرّؤوس لتحسّن فرع (a): إذا كان G يملك m ضلعًا وn رأسًا، فإنّه يملك بيانًا جزئيًّا ثنائيّ الفرع له $\frac{m\lceil n/2\rceil}{2\lceil n/2\rceil-1}$ من الأضلاع على الأقلّ.

9.5.8. جيش من الحواسيب مرتب على هيئة شجرة تامة ذات متعدد k (k- ary tree) مع أوراق على بعد l من الجذر. عند زمن مثبت، يعمل كلّ رأس باحتمال p بصورة مستقلة عن الرّؤوس الأخرى. وعندما لا يعمل رأس ما، فإنه لا يمكن الوصول إلى أيّ جزء من الشجرة الجزئيّة التي تقع تحت هذا الرّأس. ما العدد المتوقّع للرّؤوس التي يمكن الولوج إليها من الجذر.

10.5.8. لتكن G مواءمة حجمها n. اختر مجموعة مكوّنة من k من الرّؤوس بصورة عشوائية. احسب العدد المتوقّع للأضلاع المُحدثة من خلال الرّؤوس المختارة.

11.5.8. خذ في الحسبان رسمًا في المستوى لبيان بسيط G له n من الرّؤوس و m من الأضلاع، حيث $m\ge 4n$. ليكن H رسمًا جزئيًّا مُحدثًا عشوائيًّا. ومولّدًا من خلال استيفاء كلّ رأس احتماله p بصورة مستقلة. وليكن Y عددَ الأضلاع المتقاطعة في H. ضع $X = Y - [e(H) - (3n(H)-6)]$. استخدم التّوقعات لتبرهن أنّ $3n + p^3\nu(G) - pm>0$. واستنتج أنّ $\nu(G)\ge m^3/[64n^2]$، حيث $\nu(G)$ هو العدد الأصغر للتقاطعات في رسم G. (تعليق: هذا إثبات بديل النظرية 16.3.6).

12.5.8. إذا أُعطيت تبديلاً عشوائيًّا للرّؤوس في بيان بسيط G، فوجّه كلّ ضلع في اتجاه الرّأس الذي يكون دليله أعلى في التّبديل. احسب العدد المتوقّع للرّؤوس التي تُمثّل بالوعات (درجة خروجها 0) في التّوجيه الناتج. وبدلالة $n(G)$، حدّد القيم الصّغرى والكبرى لهذا التّوقع. أثبت أنّ احتمالية امتلاك بالوعة واحدة فقط هو على الأكثر $e(G)/\binom{n(G)}{2}$. (Jeurissen [1997]).

13.5.8. (!) يتكون البيان الزّائد (hypergraph) من حشد رؤوس وحشد آخر من الأضلاع؛ فإذا كانت مجموعة الرّؤوس هي V، فإنّ الأضلاع هي مجموعات جزئيّة من V. والعدد اللّونيّ $c(H)$ لبيان زائد H هو العدد الأصغر من الألوان الذي نحتاج إليه لوسم الرّؤوس بحيث لا يوجد ضلع يكون أحاديّ اللّون. ويكون البيان الزّائد موحدًا من الدرجة k (k- uniform) إذا كانت أضلاعه جميعها حجمها k:

a) أثبت أنّ كلّ بيان زائد موحّد من الدرجة k عدد أضلاعه أقلّ من 2^{k-1} يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة 2. (Erdös [1963]).

b) استخدم فرع (a) لتبرهن أنّه إذا امتلك كلّ رأس في بيان ثنائي الفرع على n من الرّؤوس قائمةً فيها أكثر من $1 + l\,gn$ من الألوان القابلة للاستخدام، فإنّ تلوينًا فعليًّا يمكن اختياره من هذه القوائم.

14.5.8. (!) استخدم طريقة الحذف لتبرهن أنّ البيان الذي له n من الرّؤوس، ومعدّل درجة رؤوسه $d \geq 1$ يملك مجموعة مستقلّة لها $n/(2d)$ رأسًا على الأقل. (مساعدة: اختر مجموعة جزئيّة عشوائيّة تشمل كلّ رأس احتماله p بصورة مستقلة لتُختار فيما بعد. واحسب العدد المتوقّع للأضلاع المحدثة).

15.5.8. الحجم الأكبر لبيان على n من الرّؤوس الذي لا يحوي H هو $ex(n;H)$. استخدم طريقة الحذف لتبرهن أنّ $ex\,(n;C_k) \in \Omega(n^{1+1/(k-1)})$. (تعليق: لـ k زوجيّ، بيّن بوندي- سيمونوفيتش [1974] أنّ $(ex\,(n;C_k) \in O\,(n^{1+2/k})$).

16.5.8. (!) لكلّ $n \in \mathbb{N}$، أثبت أنّ $R\,(k,k) > n - \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}$. استخدم هذا لتستنتج أنّ $R\,(k,k) > (1/e)(1-o(1))k\,2^{k/2}$.

17.5.8. للأعداد الطبيعة n,t ضع $m = n - \binom{n}{t}^2 2^{1-t^2}$. أثبت أنّه يوجد تلوين من الدّرجة 2 للأضلاع في $K_{m,m}$ دون أيّ نسخة أحاديّة اللّون لـ $K_{t,t}$.

18.5.8. (+) أعداد رامزي البعيدة عن القطر. افترض أنّ $0 < p < 1$:

a) أثبت أنّه إذا كان $\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$، فإنّ $R\,(k,l) > n$.

b) أثبت أنّ $R\,(k,l) > n - \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} - \binom{n}{l}(1-P)^{\binom{l}{2}}$ لكلّ $n \in \mathbb{N}$.

c) اختر n وp في فرع (b) لتبرهن أنّ $R\ (3,k) > k^{\,3/2-o(1)}$. ما الحدّ السّفليّ على $R\ (3,\ k)$ الذي قد نحصل عليه من فرع (a)؟ (Spencer [1977]).

19.5.8. ليكن H بيانًا. للثابت p، أثبت أنّ G^p كلّه تقريبًا يحوي H بوصفه بيانًا جزئيًّا مُحدثًا.

20.5.8. a) ثبّت $k,\ s,\ t,\ p$. أثبت أنّ G^p كلّه تقريبًا يملك الخاصية التّالية: لكلّ اختيار لمجموعات رؤوس منفصلة $T,\ S$ حجمها $t,\ s$ يوجد k على الأقلّ من الرّؤوس تكون مجاورة لكلّ رأس في S ولكنّها غير مجاورة لأيّ رأس في T. (Blass- Harary [1979]).

استنتج أنّ G^p كلّه تقريبًا يكون مترابطًا من الدرجة k.

d) طبّق التّعليل نفسه للدّوريات العشوائيّة: كلّ دوري تقريبًا يملك الخاصية الآتية: لكلّ اختيار لمجموعات رؤوس منفصلة S,T وحجمها s,t يوجد k على الأقلّ من الرّؤوس مع أضلاع لكـل رأس في S ومن كـل رأس في T.

21.5.8. يمكن توليد دوريّ عشوائيّ موسوم بتوجيه كلّ ضلع $v_i\,v_j$ من $v_j \to v_i$ أو من $v_i \to v_j$ بصورة مستقلة مع احتمال $1/2$:

a) أثبت أنّ كلّ دوريّ تقريبًا يكون مترابطًا بصورة قوية.

b) في دوريّ ما، "الملك" هو رأس يمكنه الوصول إلى أيّ رأس آخر بمسار طوله 2 على الأكثر. ومن المعلوم أنّ كلّ دوريّ يحوي ملكًا. هل صحيح أنّه في كلّ دوريّ تقريبًا يكون كلّ رأس ملكًا؟ (Palmer [1985]).

22.5.8. جد دالّة احتمال العتبة للخاصّيّة الآتية: نصف الأضلاع المحتملة على الأقل لبيان ما تكون موجودة. ما مقدار دقّة العتبة؟

23.5.8. لـ $p = 1/n$ ولـ $\epsilon > 0$ مثبتة، بيّن أنّ G^p كلّه تقريبًا لا يملك مركّبة فيها أكثر من $(1+\epsilon)n/2$ رأسًا. (مساعدة: بدلاً من محاولة وضع حدّ للاحتمال مباشرة، بيّن أنّه محدود باحتمال لحادث آخر، ويؤول إلى 0).

24.5.8. حدّد أصغر بيان بسيط مترابط بحيث لا يكون متوازنًا.

25.5.8. وسّع تعليل العزم الثّاني للنظرية 23.5.8 لتبرهن أنّ $n^{-1/\rho(H)}$ يكون دالّة عتبة لظهور H بوصفه بيانًا جزئيًّا من G^p، حيث $\max_{G \subseteq H} e(G)/n(G)$ (Rucin'ski- Vince[1985], Bollob'as, [1981a],).

26.5.8. لتكن Q خاصية البيان الآتية: لكلّ اختيار لمجموعات رأسيّة منفصلة T,S حجمها $c\lg n$، يوجد ضلع نقاطه الطّرفيّة في S وT. أثبت أنّه إذا كان $c > 2$، فإنّ كلّ بيان تقريبًا يملك الخاصية Q. (تعليق: يؤدي هذا إلى أنّ البيان العشوائيّ يملك عرض نطاق يساوي على الأقل n- 2 $\log n$).

27.5.8. أثبت أنّه إذا كان $k = l\, gn - (2+\epsilon)\, lg\, lg\, n$، فإنّ كلّ دوريّ ألعاب على n من الرّؤوس تقريبًا يملك الخاصّيّة الآتية: كلّ مجموعة فيها k من الرّؤوس تملك تابعًا مشتركًا.

28.5.8. يكون دوريّ الألعاب متعدّيًا إذا امتلك ترتيبًا رأسيًّا $u_1, \ldots, u_n$ بحيث $u_i \rightarrow u_j$ إذا وفقط إذا كان $j > i$. أثبت أنّ كلّ دوريّ ألعاب يملك دوريّ ألعاب جزئيًّا متعدّيًا فيه $1\ gn$ من الرّؤوس. وأنه إذا كان c عددًا ثابتًا أكبر من 1، فإنّ كلّ دوريّ ألعاب تقريبًا لا يملك دوريّ ألعاب جزئيًّا متعدّيًا فيه أكثر من $21\ gn + c$ رأسًا.

29.5.8. (!) جامع القسائم (الكوبونات):

a) خذ في الحسبان تكرارات لتجربة ما مع احتمال نجاح مستقلّ p. أثبت أنّ العدد المتوقّع للمحاولات التي تحقّق النجاح الأول هو $1/p$.

b) يحتوي كلّ صندوق لنوع معيّن من الحلوى على واحدة من n من الجوائز. وكلّ واحدة احتمالها $1/n$. يتطلّب الحصولُ على الجائزة الكبرى الحصولَ على كلّ جائزة من هذه الجوائز مرّة واحدة على الأقلّ. أثبت أنّ العدد المتوقّع للصّندوق الذي نحصل فيه على الجائزة الأخيرة هو $n\sum_{i=1}^{n} 1/i$.

c) أثبت أنّ $m\,(n) = n\ln n + (k - 1)\ln\ln n$ هي دالّة عتبة لعدد الصّناديق الذي نحتاج إليه للحصول على k من النسخ لكلّ جائزة على الأقلّ. (مساعدة: أثبت أنّه عندما يكون $p = o(1)$، وk ثابتًا، فإنّ الاحتمال على الأكثر k من النجاحات في m من المحاولات مع احتمال نجاح p يكون مقاربًا للاحتمال لـ k بالضبط من النجاحات).

30.5.8. أثبت أنّ الطول لأطول مسافة مجتازة في قائمة مكوّنة من n من الرّؤوس والذّيول العشوائيّة هو $Ign\ (1 + o(1))$. بكلمات أخرى، لـ $0 < \epsilon$، لا توجد قائمة تقريبًا تملك على الأقل $Ign\ (1 + \epsilon)$ شقلبات متطابقة متتالية، وكلّ قائمة تقريبًا تملك على الأقل $(1 - \epsilon)\ \lg n$ شقلبات متطابقة متتالية.

31.5.8. مع $p = (1 - \epsilon)\log n / n$، جد m كبيرة بحيث يكون كلّ بيان تقريبًا يملك على الأقل m من الرّؤوس المعزولة. ما $m(n)$ التي تنتج من متباينة تشيبيجيف (Chebyshev's Inequality)؟

32.5.8. ليكن G بيانًا معطى. نقول إنّ المجموعة S التي فيها k من العناصر هي مجموعة رديئة إذا كان G لا يملك رأسًا v بحيث إنّ $S \subseteq N(v)$. لـ p مثبتة. كم يمكن أنْ تكون k كبيرة بحيث G^p كلّه تقريبًا لا يملك مجموعة رديئة فيها k من العناصر؟ وكم يمكن أنْ تنمو k ببطء بحيث G^p كلّه تقريبًا يملك مجموعة رديئة فيها k من العناصر؟

33.5.8. بفحص جيران مشتركين؛ أثبت أنّه إذا كانت p مثبتة، و $k = o\,(n/\log n)$، فإنّ G^p كلّه تقريبًا يكون مترابطًا من الدرجة k.

34.5.8. (!) مع $p = (1 - \epsilon)\log n / n$، كم يمكن أنْ تكون m كبيرة بحيث يملك كلّ بيان تقريبًا على الأقل m من الرّؤوس المعزولة؟ (مساعدة: استخدم متباينة تشيبيجيف).

35.5.8. فترة - t (t- interval) هي مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$ والتي تكون الاتحاد لـ t من الفترات على الأكثر. أما **عدد الفترات** (interval number) لبيان G فهو t الصغرى بحيث يكون G بيانًا مكونًا من تقاطعات فترات من الدّرجة t (كلّ رأس معيّن بمجموعة تكون الاتحاد لـ t من الفترات على الأكثر). أثبت أنّ البيانات جميعها تقريبًا (احتمال ضلعيّ 1/2) تملك عدد فترات يساوي $(1 - o(1))n / (4\lg n)$ على الأقل. (مساعدة: قارن عدد التّمثيلات بعدد البيانات البسيطة. تعليق: بيّن شنيرمان [1990] أنّ البيانات جميعها تقريبًا تملك عدد فترات يساوي $(1+ o(1))n / (2\lg n)$ (Erdös- West [1985]).

36.5.8. (!) عتبة لمواءمة كاملة في بيان عشوائيّ ثنائيّ الفرع. ليكن G بيانًا جزئيًّا عشوائيًّا في $K_{n,n}$ مع مجموعات مجزّأة A، B، مولّدة باحتمال ضلعيّ مستقلّ $p = (1 + \epsilon)\ inn / n$، حيث ϵ ثابت غير صفريّ. نسمي S مجموعة مُنتَهَكَة إذا كان $|N(s)|<|S|$.

a) أثبت أنّه إذا كان $0 < \epsilon$، فإنّ G كلّه تقريبًا لا يملك مواءمة كاملة.

b) لتكن S مجموعة منتهكة أصغريّة. أثبت أنّ $|N(S)| = |S| - 1$ وأنّ $G[S \cup N(S)]$ مترابط.

c) افترض أنّ G لا يملك مواءمة كاملة. أثبت أنّ A أو B تحوي مجموعة منتهكة فيها $\lceil n/2 \rceil$ عنصرًا على الأكثر.

d) لـ $1 \geq r, s$، عدد الشّجرات المولّدة في $K_{r,s}$ هو $r^{s-1} s^{r-1}$. استخدم هذا، وفرع (b)، وفرع (c)، ومتباينة

ماركوف لتبرهن أنّه إذا كان $o < \in$، فإنّ G يملك مواءمة كاملة بصورة مؤكدة تقريبًا. (مساعدة: نستطيع تحديد المجموع الموجود في الحدّ على العدد المتوقّع لمجموعات منتهكة أصغريّة بمتسلسلة هندسيّة).

37.5.8. افترض أنّ $o < p < 1$، وأنّ $k_1, \ldots, k_r$ أعداد صحيحة غير سالبة مجموعها m.
أثبت أنّ $\Pi_{i=1}^{r}[1-(1-p)^{k_i}] \le [1-(1-p)^{m/r}]^r$.

38.5.8. الذّيل للتّوزيع الثنائيّ الحدّ. ليكن $X = \sum X_i'$، حيث كلّ X_i' هو متغيّر مؤشّر مع احتمال نجاح $P(X_i' = 1) = .5$، وبحيث يكون $E(X) = n/2$. إنّ تطبيق متباينة ماركوف للمتغيّر العشوائيّ $Z = (X- E(X))^2$ يعطي أنّ $P(|Z| \ge t) \le Var(X)/t^2$. إضافة إلى أنّ وضع $t = \alpha\sqrt{n}$ يعطي حدًّا على الإحتمال الذّيليّ: $P(|X-np| \ge \alpha\sqrt{n}) \le 1/(2\alpha^2)$، استخدم متباينة أزوما لتبرهن الحدّ الأقوى وهو $P(|X-np| > \alpha\sqrt{n}) < 2e^{-2\alpha^2}$. (مساعدة: ضع $Y_i' = X_i' - 0.5$. ليكن F_i هو المعرفة لـ $Y_1', \ldots, Y_i'$، ولتكن $(Y_i = E(Y|F_i)$)

39.5.8. التعبئة بالأوعية. لتكن الأعداد $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ مسحوبة وبصورة موحّدة ومستقلة عن الفترة $[0,1]$. يجب أنْ توضع الأعداد في أوعية سعة كلّ منها **1**. وليكن X هو عدد الأوعية الذي نحتاج إليه. استخدم التمهيديّة **36.5.8** لتبرهن أنّ $P(|X - E(X)| \ge \lambda\sqrt{n}) \le 2e^{-\lambda^2/2}$.

40.5.8. (!) متباينة أزوما، ومسألة رجل المبيعات المتجّول:

a) أثبت التعميم لمتباينة أزوما للشّكائم العامّة: إذا كان $E(X_i) = X_i - 1$ و $|X_i - X_{i-1}| \le c_i$، فإنّ $P(X_n - X_0 \ge \lambda\sqrt{\sum c_i^2}) \le e^{-\lambda^2/2}$.

b) لتكن Y المسافةَ من نقطة معطاة z في مربّع الفصل إلى أقرب نقطة من n من النقاط المختارة بصورة موحّدة ومستقلة في مربّع الفصل. أثبت أنّ $E(Y) < c/\sqrt{n}$، لثابت ما c. (مساعدة: لمتغيّر عشوائيّ متّصل غير سالب Y، والذي نستطيع التحقق منه باستخدام التكامل بالأجزاء. لوضع حدّ على هذا التكامل؛ استخدم (في مكان ما) المتباينة $1 - a < e^{-a}$ والتّكامل المحدود $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}/2$.

c) طبّق الفرعين (a) و (b) لتبرهن أنّ أصغر طول لمتعدد أضلاع يحدّ مجموعة عشوائيّة تحوي n من النقاط في مربّع الفصل يكون متركزًا بصورة عالية حول توقعه. بوجه خاص، إنّ احتمال انحرافه عن طول الجولة المتوقع بأكثر من $\lambda c\sqrt{\ln n}$ يكون محدودًا بـ $2e^{-\lambda^2/2}$ مناسبة لـ c. (مساعدة: للشّكيمة التي يكون فيها X_i هو الطول المتوقّع للجولة التي يكون فيها أول i من النقاط معروفة، أثبت أنّ $|X_i - X_{i-1}| < c(n-i)^{-1/2}$ إنّ تمهيديّة 36.5.8 لا تنطبق بصورة مباشرة).

6.8. القيم الذّاتيّة للبيانات (Eigenvalues of Graphs)

تساعد الأساليب في نظرية الزّمر والجبر الخطّيّ على دراسة البناء والتّعداد للبيانات، فالجبر الخطّيّ مثلًا ساعد في الفضاءات المتّجهة والمحدّدات على بيان G مع أضلاع $e_1, \ldots, e_m$، لاحظ أنّ **متّجه الوقوع (incidene vector)** لمجموعة $F \subseteq E(G)$ يملك إحداثيّات $a_i = 1$ عندما $e_i \in F$، و$a_i = 0$ عندما $e_i \notin F$ لتكن **C** مجموعة متجهات الوقوع لبيانات جزئيّة زوجيّة (البيانات الجزئيّة التي درجة رؤوسها زوجية)، ولتكن **B** مجموعة متجهات الوقوع للقاطعات الضّلعيّة؛ ولأنّ هاتين المجموعتين مغلقتان تحت عملية الجمع المتجهي الثنائية، فإنّ **C** و **B** فضاءان متجهان. (التمرينان 1–2) يدعيان **الفضاء الحلقي (cycle space)** و**فضاء الروابط (bond space)** لـ G. وبما أنّ أيّ بيان جزئيّ زوجيّ، وأيّ قاطع ضلعيّ يتشاركان في عدد زوجيّ من الأضلاع، فإنّ **C** و **B** يكونان متعامدين، وهذا يرتبط بصورة قريبة جدًّا بالثّنويّة بين الحلقات والرّوابط في النظرية 14.1.6 والنتيجة 42.2.8،

واستخدام المحدّدات في نظرية شجرة المصفوفة (النظرية 12.2.2). ولمزيد من مناقشة هذه الفضاءات المتّجهة؛ انظر بيجز [1993, Part 1] (Biggs). تظهر الزّمر في دراسة تشاكل البيان، والطّمر، والتعداد. لاحظ أنّ التّشاكلات الذّاتيّة لبيان تشكل زمرة تباديل على رؤوس هذا البيان. لقد قادت أفكار نظرية الزّمر إلى خوارزميّات لفحص التّشاكل، وإلى البناءات للطّمور على السّطوح أيضًا. وبالعكس، فإنّه يمكن نمذجة كلّ زمرة باستخدام البيانات. وهناك تقديم لتبادل الأدوار هذا في [White, 1973]؛ وانظر كذلك [Gross – Yellen, 1999, 13 – 15].

سوف نحصر اهتمامنا في القيم الذّاتيّة لمصفوفات التّجاور، ونفسّر كثيرة الحدود المميّزة بدلالة البيانات الجزئيّة، وعلاقة القيم الذّاتيّة مع المتغيّرات الأخرى للبيان، وتمييز مجموعات القيم الذّاتيّة للبيانات الثنائيّة الفرع والبيانات المنتظمة. ونتناول أخيرًا تطبيقات على البيانات الممتدّة و"نظرية الصّداقة". وهناك مناقشة شاملة للقيم الذّاتيّة للبيانات في [Cvetkovic´ – Doob – Śachs, 1979]. وقد قدّم [chung, 1997] نهجًا حديثًا لهذه المسألة من خلال تعديل مصفوفة التّجاور بطريقة معايرة القيم الذّاتيّة لإعطاء نتائج مماثلة، وتحقيق عمومية أكثر. سوف نستخدم النسخة التقليدية في هذا التّقديم المختصر.

كثيرة الحدود المميّزة (The Characteristic Ploynamial)

1.6.8. تعريف: القيم الذّاتيّة (eigenvalues) للمصفوفة A هي الأعداد λ، بحيث يكون للمعادلة $Ax = \lambda x$ حلّ متجهيّ غير صفريّ؛ وكلّ حلّ مثل هذا هو **متّجه ذاتيّ** (eigenvector) مرافق لـ λ. أو مرتبط بـ λ. والقيم الذّاتيّة للبيان هي القيم الذّاتيّة لمصفوفة التّجاور A للبيان. وهذه القيم الذّاتيّة $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ هي الجذور **لكثيرة الحدود المميّزة** (characteristic polynomial) $\phi(G;\lambda) = \det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$. أمّا **الطّيف** (spectrum) فهو قائمة القيم الذّاتيّة المختلفة مع تكراراتها $m_1,\ldots,m_t$؛ ونكتب $\text{spec}(G) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_t \\ m_1 \ldots m_t \end{bmatrix}$.

2.6.8. ملاحظة. الخصائص الأوّليّة للقيم الذّاتيّة هي:

0) القيم الذّاتيّة هي قيم λ بحيث تكون المصفوفة المربعة $\lambda I - A$ هي مصفوفة منفردة، وهذا يكافئ أنْ تكون $det(\lambda I - A) = 0$.

1) $Trace\ A = \sum \lambda_i$ **الأثر** (trace) هو مجموع عناصر القطر. وهو سالب معامل λ^{n-1} في $det(\lambda I - A)$. وبما أنّ $\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$، فإنّه يساوي $\sum \lambda_i$ أيضًا. أمّا للبيانات البسيطة، فإنه يساوي 0.

2) $\prod \lambda_i = (-1)^n \phi(G;0) = \det A = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$، حيث يتغير المجموع على التّباديل σ لـ $[n]$.

3) للمصفوفة A الحقيقية المتماثلة التي حجمها $n \times n$ ولـ $\lambda \in \mathbb{R}$، يكون التّكرار لـ λ بوصفها قيمة ذاتيّة للمصفوفة A هو $n - \text{rank}(\lambda I - A)$.

4) إنّ إضافة c إلى القطر يغيّر القيم الذّاتيّة بمقدار c؛ نظرًا لأن $\alpha + c$ تكون جذرًا لـ $det(\lambda I - (cI + A))$ إذا وفقط إذا كان a جذرًا لـ $det(\lambda I - A)$.

3.6.8. مثال: طيف العصب والعصب الثّنائية. إنّ مصفوفة التّجاور للبيان K_n هي $J - I$، حيث J هي المصفوفة التي تكون مدخلاتها جميعها **1**. لذا، فإنّ القيم الذّاتيّة للبيان K_n هي أقلّ من القيم الذّاتيّة لـ J بـ **1**. وبما أنّ $\text{spec } J = \begin{bmatrix} n & 0 \\ 1 & n\text{-}1 \end{bmatrix}$، فإنّ $\text{spec } K_n = \begin{bmatrix} n\text{-}1 & \text{-}1 \\ 1 & n\text{-}1 \end{bmatrix}$. إنّ رتبة مصفوفة التّجاور للبيان $K_{m,n}$ هي **2**. لذا، فإنها

تملك قيمتين ذاتيّتين λ_2 ،λ_1. وبما أنّ الأثر يساوي 0، فإنّ $\lambda_1 = -\lambda_2$؛ سُمّي هذا الثابت b.

لذلك، فإنّ $\phi\left(K_{m,n};\ \lambda\right) = \lambda^n - b^2\ \lambda^{n-2}$. نحسب b باستخدام $\phi(G; I) = det\ (\lambda I - A)$. بما أنّ λ تظهر فقط على القطر، فإنّ الإسهامات في تمديد التّباديل لمعاملات λ^{n-2} تظهر فقط من تباديل تستخدم $n-2$ موقعًا على القطر. أمّا الموقعان المتبقّيان، فيجب أنْ يكونا $-a_{i,j}$ و $-a_{j,i}$ لبعض قيم j, i. ويوجد mn إسهامًا غير صفريّ على هذا الشّكل، وجميعها سالبة. إذن، $b^2 = mn$، و $\text{spec}\,(K_{m,n}) = \begin{pmatrix} \sqrt{m,n} & 0 & -\sqrt{m,n} \\ 1 & m+n-2 & 1 \end{pmatrix}$. ■

ونضع دليلًا لمعاملات كثيرة الحدود المميّزة حيث $\phi(G;\lambda) = \sum_{i-0}^{n} c_i \lambda^{n-i}$. بما أنّ $\phi(G;\lambda) = \det(\lambda I - A)$، فإن $C_o=1$ و $C_1=\text{Trace } A=0$ دائمًا. لاحظ أن حساباتنا لـ C_2 للبيان $K_{\text{m'in}}$ تُعمم على البيانات جميعها.

4.6.8. تعريف: المصفوفة الجزئيّة الرّئيسة (principal submatrix) لمصفوفة مربّعة A هي مصفوفة جزئيّة تتكون من أعمدة وصفوف لها الدليل نفسه.

بما أنّ الإسهامات لـ $c_2\ \lambda^{n-2}$ تشمل $n - 2$ عاملاً لـ λ من القطر، فإنّ المعامل c_2 هو مجموع المحدّدات الجزئيّة من الحجم 2×2 الرّئيسة للمصفوفة $-A$. لبيان بسيط، فإنّ $-a_{i,j}$ هي -1 عندما $v_i \leftrightarrow v_j$ و 0 غير ذلك. لذا، $c_2 = -e(G)$.

وبالمثل، فإنّ c_3 هو مجموع المحددات الجزئيّة من الحجم 3×3 الرّئيسة للمصفوفة $-A$. وللثّلاثيّة i, j, k، لاحظ أنّ المحددة تعتمد على عدد الأضلاع فقط بين $v_i,\ v_j,\ v_k$. حيث تكون المحددة 0 إلاّ إذا شكّلت هذه الرؤوس مثلّثًا، وعند ذلك فإنها تكون -2، إذن، c_3 هو حاصل ضرب -2 في عدد الحلقات من الدرجة 3 في G.

بما أنّ المصفوفات الجزئيّة الرّئيسة هي مصفوفات التّجاور لبيانات جزئيّة محدثة، فإنّه يصبح لدينا $c_i = (-1)^i \sum_{|S|=i} \det\ A\,(G[S])$ عمومًا.

5.6.8. نظرية: ([Harary [1962 b) إذا أُعطيت بيانًا بسيطًا G، فاجعل $\mathbf{H}$ مجموعةَ البيانات الجزئيّة المولّدة التي يكون فيها كلّ مركّبة ضلعًا أو حلقة. إذا كان $k(H)$ و $s(H)$ يرمزان إلى عدد المركّبات في H وعدد المركّبات التي تكوّن حلقات على الترتيب، فإنّ $\det A(G) = \sum_{H\in \text{H}} (-1)^{n(H)-k(H)}\, 2^{s(H)}$.

الإثبات: صيغة المحددة هي: $\det A = \sum_\sigma (-1)^{t\,(\sigma)} \prod a_{i,\sigma\,(i)}$، حيث المجموع على تباديل لـ $[n]$، و $t[\sigma]$ هي التبديلات الصّفية (مناقلات transpositions) التي نحتاج إليها لوضع الموقعين $\sigma\ (i)$ و i على القطر. عندما تكون A مصفوفة مدخلاتها 0، 1، فإنّ الإسهام من σ يكون غير صفري إذا وفقط إذا كانت هذه المدخلات جميعها تساوي 1.

سوف ننظر إلى σ بوصفها تبديلًا رأسيًّا يرسل كلّ v_i إلى $v_{\sigma(i)}$. وهذا يقسم $V(G)$ إلى مدارات. وبما أنّ $a_{i,\,\sigma(i)} = 1$ تعني أنّ $v_i \leftrightarrow v_{\sigma(i)}$، فإنه لا يوجد مدارات حجمها 1 ولا مدارات حجمها 2 ترتبط بأضلاع، ولا مدارات أطول ترتبط بحلقات. لذلك، فإن التبديل يعمل إسهامًا غير صفري عندما يصف بيانًا جزئيًّا مولدًا H من G الذي تكون المركبات فيه أضلاعًا وحلقات.

إن إشارة الإسهام تحدد من خلال عدد المناقلات التي نحتاج إليها لنقل المدخلات إلى القطر. وتبديل الصفوف ينقل عنصرًا واحدًا من مدار في المرة الواحدة إلى القطر، لكن التبديل الأخير ينقل العنصرين الأخيرين إلى القطر. لذلك، فإن $t(\sigma) = n(H) - k(H)$. وأخيرًا، فإنّ كلّ حلقة طولها 3 على الأقل في H يمكن أن تظهر في أحد الطريقين في مصفوفة التباديل؛ لأننا نستطيع تتبع الحلقة في أحد الاتجاهين. لذا، فإن عدد التباديل التي

تُنتج H هو $2^{s(H)}$. ■

6.6.8. نتيجة: (Sachs [1967]) لترمز $\mathbf{H}_i$ إلى مجموعة بيانات جزئية على i من الرؤوس لبيان بسيط G الذي تكون مركباته أضلاعًا أو حلقات. إن كثيرة الحدود المميّزة لـ G هي $\sum_{c_i}\lambda^{n-i}$، حيث $c_i = \sum_{H\in \mathbf{H}_i} (-1)^{K(H)}\, 2^{S(H)}$.

الإثبات: هذا يتبع من النظرية **5.6.8.** والملاحظة السابقة التي تشير إلى أن $c_i = (-1)^{(i)} \sum_{|s|=i} \mathbf{det}\, \mathbb{A}\left(G[S]\right)$. ■

إنّ هذه الصيغة تقودنا إلى تعبير تتابعي لكثيرة الحدود المميّزة (التمرين **5**). ومن الممكن استخدام هذه الصيغة لإنشاء أشجار غير متشاكلة لها كثيرة الحدود المميّزة نفسها (مع ثمانية رؤوس فقط) (التمرين **7**).

وفيما يأتي، سنناقش خصائص القيم الذّاتيّة للبيانات الثنائية الفرع.

7.6.8. قضية. إن المدخلة (i, j) للمصفوفة A^k تحسب الممرات التي طولها k من v_i إلى v_j. والقيم الذّاتيّة لـ A^k هي القيم الذّاتيّة لـ A مرفوعة للقوة k.

الإثبات: تتحقق العبارة للممرات من خلال الاستقراء على k (التمرين **30.2.1**). وللعبارة الثانية، لاحظ أنّ $Ax = \lambda x$ تعطي $A^k x = \lambda^k x$ من خلال تكرار الضّرب. وباستخدام متجه ذاتيّ اختياري x، فإننا نتأكد من عدم تغيير التكرارات للقيم الذّاتيّة. ■

8.6.8. تمهيدية: إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع، وλ قيمة ذاتية لـ G مع تكرار m، فإنّ $-\lambda$ هي أيضًا قيمة ذاتية لـ G مع تكرار m.

الإثبات. إن إضافة رؤوس معزولة لإعطاء المجموعات المجزأة حجمًا متساويًا ما هو إلا إضافة صفوف وأعمدة صفريّة لمصفوفة التّجاور، وهذا لا يغير الرتبة، ولكنّه يغيّر الطّيف فقط من خلال تضمين 0 واحد إضافيّ لكلّ رأس مضاف. لذلك، يمكن الافتراض بأنّ المجموعات المجزّأة لها الحجم نفسه.
بما أنّ G ثنائيّ الفرع، فإنا نستطيع تبديل الصفوف والأعمدة في A لنحصل على الشّكل $A = \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix}$، حيث إن B مصفوفة مربعة. إذا كانت λ قيمة ذاتية مرافقة للمتجه الذاتيّ $v = \binom{x}{y}$ (مجزءًا تبعًا للتّجزئة الثّنائيّة لـ G)، فإنّ $\lambda v = Av = \begin{bmatrix} O & B \\ B^T & O \end{bmatrix}\binom{x}{y} = \begin{bmatrix} By \\ B^T x \end{bmatrix}$. لذلك، فإنّ $By = \lambda x$ و $B^T x = \lambda y$.

ضع $v' = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$. نحسب $Av' = \begin{bmatrix} B(-y) \\ B^T x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} = \lambda_{v'}$. إذن، v' متجه ذاتي لـ A للقيمة الذّاتيّة $-\lambda$. علاوة على ذلك وبالطريقة نفسها، فإنّ m من المتجهات الذّاتيّة المستقلة لـ λ التي تعطي m من المتجهات الذّاتيّة المستقلة لـ $-\lambda$. لذلك، فإنّ $-\lambda$ متّجه ذاتيّ لـ A له تكرار λ نفسه. ■

9.6.8. نظرية: العبارات الآتية حول البيان G متكافئة:

a) G ثنائيّ الفرع.

b) تظهر القيم الذّاتيّة غير الصّفريّة لـ G على صورة أزواج λ_i، λ_j حيث $\lambda_i = -\lambda_j$.

c) $\phi(G;\lambda)$ أو $\lambda\phi(G;\lambda)$ كثيرة حدود في λ^2.

d) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{2t-1} = 0$ لكلّ عدد صحيح موجب t.

الإثبات: برهنّا في التمهيدية أنّ $A \Rightarrow B$.

$C \Leftrightarrow B$ $(\lambda^2 - a) = (\lambda - \lambda_i)(\lambda - \lambda_j)$ إذا وفقط إذا $\lambda_j = -\lambda_i$. لذلك، فإنّ الجذور تظهر مثل تلك الأزواج إذا وفقط إذا كانت $\phi(G;\lambda)$ حاصل ضرب عوامل خطّيّة في λ^2.

$B \Rightarrow D$: إذا كان $\lambda_j = -\lambda_i$، فإنّ $\lambda_j^{2t-1} = -\lambda_i^{2t-1}$.

$D \Rightarrow A$: لأنّ $\sum \lambda_i^k$ يحسب الممرات من الدّرجة k المغلقة في البيان (من كلّ رأس ابتدائيّ)، فإنّ الشرط d يمنع

وجود ممرات مغلقة طولها فرديّ. وهذا يمنع وجود حلقات فرديّة؛ لأنّ الحلقة الفرديّة هي ممر مغلق فرديّ. ولذلك، فإنّ G ثنائيّ الفرع. ■

الجبر الخطّيّ للمصفوفات المتماثلة الحقيقيّة (Linear Algebra of Real Symmetric Matrices)

تتطلّب القيم الذّاتيّة التي لها علاقة مع متغيرات أخرى نتائج عديدة من الجبر الخطّيّ، مثل النظرية الطيفية، ونظرية كايلي وهاملتون للمصفوفات المتماثلة الحقيقية. وهذا يذكر عادة بعمومية أكثر، لكن مصفوفات التّجاور تكون حقيقية ومتماثلة، وهنا نلاحظ أنّ براهين المبرهنات أقصر. سنبدأ مع تمهيدية تنتج عن النظرية الطيفية عندما نبرهن الأخيرة باستخدام مصفوفات أعداد مركبة. ويمكن تجاوز البراهين لهذه النتائج، وخصوصًا من قبل المتمكنين جيدًا من مفاهيم الجبر الخطّيّ.

10.6.8. تمهيدية: إذا كان $f(x) = x^TAx$، حيث A مصفوفة متماثلة حقيقية، فإنّ f تحقق القيم العظمى والصغرى على متجهات الفصل x عند المتجهات الذّاتيّة لـ A؛ حيث إنها تساوي القيمة الذّاتيّة المقابلة (المرتبطة بذلك).

الإثبات: تكون الدالة f متصلة في $x_1, \ldots, x_n$. ولتقييد مثالي، نستخدم مضروبات لاجرانج. إذا أعطينا القيد $x^T x = 1$، فإنّنا نضع $g(x) = x^T x - 1$. وبتشكيل $L(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x)$، فإنّ القيم القصوى تظهر حينما تكون المشتقات الجزئيّة لـ L جميعها تساوي 0. وبالنسبة إلى λ، فإنّ هذا يعطي $x^T x = 1$.

ليرمز ∇ إلى متجه المشتقات الجزئيّة بالنسبة إلى $x_1, \ldots, x_n$.

نحسب $\nabla L(x, \lambda) = \nabla f(x) - \lambda\nabla g(x) = 2Ax - 2\lambda x$. لاحظ أنّ العبارة $\nabla f(x) = 2Ax$ تستخدم التماثل لـ A. ويكون لدينا $\nabla L = 0$ بالضبط عندما يكون $Ax = \lambda x$، وهذا يتطلب أن يكون x متجهًا ذاتيًّا لـ A مرافقًا للقيمة الذّاتيّة λ. وهذا يؤدي إلى أن $f(x) = x^T Ax = \lambda x^T x = \lambda$.

بما أن متغيراتنا في الأمثلية حقيقيةٌ، فإننا نكون قد وجدنا متجهًا ذاتيًّا حقيقيًّا وقيمة ذاتية على الأقل. ونستطيع استخدام هذا استقرائيًّا لنبين أن المتجهات الذّاتيّة جميعها تملك هذه الخاصية.

11.6.8. نظرية: (النظرية الطيفية) المصفوفة المتماثلة الحقيقية من الحجم n x n تملك قيمًا ذاتية حقيقية، وتمتلك n متجهًا ذاتيًّا متعامدًا مُعَيَّرًا (orthonormal).

الإثبات: سوف نستخدم الاستقراء على n. يكون الادعاء واضحًا لـ $n = 1$؛ خذ في الحسبان $n > 1$. ليكن v_n هو المتجه الذاتي الذي يعظّم $x^T Ax$. ولتكن W المتممةَ المتعامدة للفضاء المولد من v_n؛ لاحظ أن بُعد W هو $n - 1$. إذا كان $w \in W$، فإنّ $v_n^T\ Aw = w^T A\ v_n = \lambda_n w^T v_n = 0$. لذلك، فإنّ $A\ w \in W$. وبالنظر إلى الضرب في A كدالة f_A، فإن لدينا $f_A\colon W \to W$.

لتكن S هي المصفوفة التي أعمدتها المتجهات لأساس متعامد مُعَيَّر لـ $\mathbb{R}^n$ مع v_n بوصفه عمودًا أخيرًا لهذه المصفوفة. بما أنّ الأساس متعامد ومُعَيَّر، فإنّ $S^{-1} = S^T$. والمصفوفة لـ f_A بالنسبة إلى هذا الأساس هي S^TAS. وبما أنّ الأساس متعامد ومُعَيَّر، وv_n متجه ذاتي، فإنّ العمود الأخير لـ S^TAS يكون 0، ما عدا λ_n في الموقع الأخير. فضلًا عن ذلك، فإنّ المصفوفة متماثلة. لذلك، فإنّ أول $n - 1$ صفًّا وعمودًا لهذه المصفوفة تُشكّل المصفوفة A' لـ f_A على W بالنسبة إلى هذا الأساس.

من فرضية الاستقراء، فإن A' تملك متجهات ذاتية متعامدة مُعَيَّرة $v_1, \ldots, v_{n-1}$، مع قيم ذاتية حقيقية. وباستخدام S، نحول هذه المتجهات بإرجاعها إلى متجهات ذاتية حقيقية لـ A، لها القيم الذّاتيّة الحقيقية

نفسها، وتشكّلُ مجموعة متعامدة مُعَيَّرة. ■

لاحقًا، سوف نأخذ في الحسبان دوال كثيرة حدود لمصفوفة. وبالنظر إليها بوصفها عناصر في $\mathbb{R}^{n^2}$، فإنّ المصفوفات لا $\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, ..., \mathrm{A}^{n^2}$ يمكن أن تكون مستقلة بسبب وجود $n^2 + 1$ منها. وباستخدام معادلة الاعتماد الخطي، نحصل على كثيرة حدود p بحيث تكون $p(A)$ هي المصفوفة الصفرية. وكثيرة الحدود المميّزة نفسها تكفي، وهذا يتحقق لكلّ A. ولكن مجددًا سنأخذ في الحسبان المصفوفات الحقيقية المتماثلة فقط.

12.6.8. نظرية: (نظرية كايلي – هاملتون) إذا كانت $\phi(\lambda)$ كثيرة الحدود المميّزة لمصفوفة حقيقية متماثلة A، فإنّ $\phi(A)$ هي المصفوفة الصفرية (A «تحقق» كثيرة الحدود المميّزة خاصتها).

الإثبات: لتكن $\lambda_1, ..., \lambda_n$ القيمَ الذاتية للمصفوفة A. لذلك، فإن $\phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$. وبما أن القوى لـ A إبدالية، فإن $\phi(A)$ التي نحصل عليها باستخدام A بدلاً من λ تكون $\phi(A) = \prod_{i=1}^{n}(A - \lambda_i I)$. ولبرهَنة أن $\phi(A) = 0$، فإننا نحتاج فقط إلى بيان أن المصفوفة $\phi(A)$ ترسل كلّ متجه إلى $\mathbf{0}$. اكتب متجهًا اختياريًّا x كتركيب خطي من المتجهات الذّاتيّة التي تشكل أساسًا والمضمونة من النظرية الطيفية. ولاحظ أن تطبيق $A - \lambda_i I$ يقتل المعاملات لـ v_i. فضلًا عن أن الضرب في العوامل $A - \lambda_i I$ جميعها بصورة متتالية ينتج المتجه الصفري.

13.6.8. تعريف: كثيرة الحدود الصغرى (minimum polynomial) ψ لمصفوفة A هي كثيرة الحدود ذات أصغر درجة تحقق A، وتملك معاملاً قائدًا يساوي $\mathbf{1}$. وعندما تكون A مصفوفةَ التّجاور لـ G، فإن ψ تسمى **كثيرة الحدود الصغرى** (minimum polynomial) $\psi(G; \lambda)$ لـ G.

لاحظ أن كثيرة الحدود الصغرى تكون وحيدة؛ حيث إنه إذا كانت A تحقق كثيرتي حدود صغريين لهما الدرجة نفسها، فإن A سوف تحقق الفرق بينهما، وهذا الفرق يملك درجة أقل.

14.6.8. نظرية: كثيرة الحدود الصغرى للمصفوفة A هي $\psi(A) = \prod_{i=1}^{t}(\lambda - \lambda_i)$، حيث $\{\lambda_1, ..., \lambda_t\}$ هي القيم الذّاتيّة المختلفة لـ A.

الإثبات: كثيرة الحدود الصغيرة تقسم كلّ كثيرة حدود متحققة بواسطة A. وبخلاف ذلك، فإن الباقي سوف يكون كثيرة حدود بدرجة أقل متحققة بواسطة A. الآن، تعطي نظرية كايلي – هاملتون أن ψ تقسم ϕ، ويجب أن تكون حاصل الضرب لبعض عواملها. إن قتل المتجهات في الفضاء الجزئي للمتجهات الذّاتيّة للقيمة الذّاتيّة λ_i يتطلب عاملاً من الشكل $A - \lambda_i I$. وهذا العامل يقتل المتجهات جميعها في الفضاء الجزئي. لذلك، نحتاج إلى نسخة واحدة فقط لكلّ عامل مثل هذا العامل. ■

15.6.8. تمهيدية: (قانون سلفستر للقصور الذاتي) لتكن A مصفوفة حقيقية متماثلة. إذا أمكن كتابة x^TAx بوصفه مجموعًا لـ N من جداءات التراكيب الخطية، بمعنى $x^TAx = \sum_{m=1}^{N}\left(\sum_{i\in S_m} a_{i,m}x_i\right)\left(\sum_{j\in T_m} b_{j,m}x_j\right)$، فإن N هي العدد الأكبر لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة وعدد القيم الذّاتيّة السالبة للمصفوفة A على الأقل.

الإثبات: ([Tverberg [1982]) اكتب التعابير الخطية على هيئة $u_m(x)$ و $v_m(x)$. ولكل m، لاحظ أن $u_m(x)v_m(x) = L_m^2(x) - M_m^2(x)$، حيث $L = \frac{1}{2}(u+v)$ و $M = \frac{1}{2}(u-v)$ تركيبان خطيان لـ $x_1, ..., x_n$. وهذا يعبر عن الشكل التربيعي على الشكل $x^TAx = \sum_{m=1}^{N}\left[L_m^2(x) - M_m^2(x)\right]$.

ومن الناحية الأخرى، بما أنّ A مصفوفةٌ حقيقية متماثلة، فإنها تملك متجهات ذاتية متعامدة مُعَيَّرة

$w^1, \ldots, w^n$. وباستخدام هذا، نكتب $x^TAx = x^TS\,AS^Tx$، حيث A هي المصفوفة القطرية التي قيمها الذّاتيّة $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$، و S تملك الأعمدة $w^1, \ldots, w^n$. إذا كانت S تملك P متجهًا ذاتيًّا موجبًا، في حين تملك q متجهًا ذاتيًّا سالبًا، فإنّ $x^TAx = \sum_{i=1}^{p}\left(y^i . x\right)^2 - \sum_{i=n-q+1}^{n}\left(z^i . x\right)^2$، حيث تكون y^i أو z^i هي $|\lambda_i|^{1/2}\ w^i$.

والآن، لنأخذ في الحسبان نظامًا متجانسًا من المعادلات الخطية. حيث نشترط أن $L_m(x) = 0$ لـ $1 \leq m \leq N$، وأيضًا $z^i \cdot x = 0$ لـ $n - q < i \leq n$، وأيضًا $w^i . x = 0$ لـ $p < i \leq n - q$. لاحظ أنّ هذا يضع $N + n - p$ قيدًا خطيًّا متجانسًا على n من المتغيرات. إذا كان $n < p$، فإن هذه المعادلات تملك حلًّا متزامنًا غير صفري x'. وبوضع x بدلاً من x' في التعبيرين لـ $x^T Ax$، نجد أنّ $\sum_{i=1}^{P}\left(y^i\ . x'\right)^2 = -\sum_{m=1}^{N}M_m^2(x')$. وبما أنّ x' متعامد مع المتجهات الذّاتيّة جميعها التي قيمها الذّاتيّة غير موجبة، فإنّ الجهة اليسرى تكون موجبة، في حين تكون الجهة اليمنى غير موجبة. وهذا التناقض يعطي أنّ $N \geq p$؛ وبتعليل مماثل نجد أنّ $N \geq q$. ■

القيم الذّاتيّة ومتغيرات البيان (Eigenvalues of Graph Parameters)

توفر القيم الذّاتيّة حدودًا على متغيرات متنوعة. وبكلماتٍ أخرى، فإنّ متغيرات البيان تعطي حدودًا على القيم الذّاتيّة. ونتيجتنا الأولى الآتية تستخدم كثيرة الحدود الصغرى فقط.

16.6.8. نظرية : إن القطر لبيان مترابط G يكون أقل من عدد القيم الذّاتيّة المختلفة لـ G.

الإثبات: لتكن A مصفوفة التّجاور؛ فإن A تحقق كثيرة حدود من الدرجة r إذا وفقط إذا كانت بعض التركيبات الخطية لـ $A^0, \ldots, A^r$ هي 0. وبما أنّ عدد القيم الذّاتيّة المختلفة هي الدرجة لكثيرة الحدود الصغرى، فإننا نحتاج فقط إلى بيان أن $A^0, \ldots, A^k$ مستقلة خطيًّا عندما تكون $k \leq diam\ (G)$.

يكفي أن نبين أنه لكل $k \leq diam\ (G)$ فإن A^{k-1} ليست تركيبًا خطيًّا لـ $A^0, \ldots, A^k$. اختر $v_i, v_j \in V(G)$ بحيث تكون $d(v_i, v_j) = k$. وبحساب عدد الممرات، فإنّ $A_{i,j}^k \neq 0$ لكن $A_{i,j}^t = 0$ لكلّ $t < k$. وعليه، فإنّ A^k ليست تركيبًا خطيًّا للقوى الصغرى. ■

بما أن النظرية الطيفية تضمن وجود قيم ذاتية حقيقية، فنستطيع أن نضع دليلاً لقيمنا الذّاتيّة مثل $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$. وندعو λ_1 و λ_n بـ $\lambda_{max}(G)$ و $\lambda_{min}(G)$ على الترتيب.

17.6.8. تمهيدية : إذا كان G' بيانًا جزئيًّا مُحدثًا لـ G، فإن:

$$\lambda_{min}(G) \leq \lambda_{min}(G') \leq \lambda_{max}(G') \leq \lambda_{max}(G).$$

الإثبات: بما أنّ A مصفوفةٌ حقيقية متماثلة، فإنّ التمهيدية **10.6.8** تعطي أنّ $\lambda_{min}(A) \leq x^TAx \leq \lambda_{max}(A)$ لكل متجه وحدة x. خذ مصفوفة التّجاور A' لـ G' في الحسبان. وبتبديل الرؤوس في G، يمكن أنْ ننظر إلى A' بوصفها مصفوفة جزئية رئيسة علوية إلى اليسار للمصفوفة $A = A(G)$. ليكن z' متجهَ الفصل الذاتي لـ A' بحيث يكون $A'z' = \lambda_{max}(G')z'$. وليكن z متجهَ الفصل في $\mathbb{R}^n$ الذي نحصل عليه بإلحاق أصفار إلى z'. لذلك، فإنّ $\lambda_{max}(G') = z'^TA'z = z^TAz \leq \lambda_{max}(G)$. وبالمثل، فإنّ $\lambda_{min}(G') \geq \lambda_{min}(G)$. ■

لاحظ أنّ سلوك القيم الذّاتيّة القصوى تحت عملية حذف الرأس يكون حالة خاصة من «نظرية الحياكة أو التشابك» (Interlacing Theorem): إذا كان G يملك قيمًا ذاتية $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ و $G - x$ يملك قيمًا ذاتية

$\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$، فإنّ $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda n$. وبسبب عدم حاجتنا إلى هذا، فسنهمل الإثبات الذي يتضمن جبرًا خطيًّا فقط.

18.6.8. تمهيدية: لكلّ بيان G، فإنّ $\delta(G) \leq \frac{2\,\mathrm{e}(G)}{\mathrm{n}(G)} \leq \lambda_{\max}(G) \leq \Delta(G)$.

الإثبات: ليكن x متجهًا ذاتيًّا للقيمة الذّاتيّة λ، ولتكن $x_j = \max_i x_i$ هي قيمة أكبر إحداثي في x. لذا، فإنّ $\lambda \leq \Delta(G)$ تتبع من:

$$\lambda x_j = (Ax)_j = \sum_{v_i \in N(v_j)} x_i \leq d(v_j)x_j \leq \Delta(G)x_j$$

للحد السفلي، سوف نطبق التمهيدية 10.6.8 على متجه الفصل مع إحداثيات متساوية. بما أنّ مجموعَ المدخلات في مصفوفة التّجاور ضعفُ عدد الأضلاع في G، فإنّ:

$$\lambda_{\max} \geq \frac{\mathbf{I}_n^T}{\sqrt{n}} \mathrm{A} \frac{\mathbf{I}_n}{\sqrt{n}} = \frac{\mathrm{I}}{n} \sum\sum a_{ij} = \frac{2\,\mathrm{e}(G)}{n}$$ ■

تمكّننا التمهيدية 18.6.8 من تحسين الحدّ الواضح $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$ المعطى من خلال خوارزمية التلوين الشره. وتبديل $\Delta(G)$ بمعدل الدرجة يكون صغيرًا جدًّا؛ لأنّ $K_n + K_1$ يملك عددًا لونيًّا n، ومعدلًا درجته أقل من $n - 1$. وبما أنّ λ_{max} دائمًا تكون على الأقل مساوية لمعدل الدرجة، فإنّ $1 + \lambda_{max}(G)$ يملك فرصة للعمل، ولا يمكن تحسينه أكثر.

19.6.8. نظرية: (Wilf [1967]) لكلّ بيان G، فإنّ $\chi(G) \leq 1 + \lambda_{max}(G)$.

الإثبات: إذا كان $\chi(G) = k$، فنستطيع بصورة متتابعة حذف رؤوس دون تخفيض العدد اللوني حتى نحصل على بيان جزئي H بحيث إن $\chi(H\text{-}v) = k - 1$ لكل $v \in V(H)$. كما لوحظ في التمهيدية 18.1.5، فإنّ $\delta(H) \geq k - 1$. وبما أنّ H بيان جزئي محدث من G، فإنّ التمهيديتين 18.6.8 و 17.6.8 تعطيان:
$k \leq 1 + d(H) \leq 1 + \lambda_{max}(H) \leq 1 + \lambda_{max}(G)$. ■

يعطي قانون سلفستر للقصور الذاتي حدًّا سفليًّا على عدد العصب الثنائية التي نحتاج إليها لتفكيك بيان ما. ولأنّ النجومَ عصبٌ ثنائية، وكلّ بيان جزئي من نجمة هو نجمة، فإنّ عدد العصب الثنائية التي نحتاج إليها هو عدد الغطاءات الرأسية $\beta(G) = n(G) - \alpha(G)$ على الأكثر. وقد خمن إيردوز أنّ المساواة غالبًا ما تتحقق، ولكن هذا مازال دون حلّ. إن البيانات التي لها بنية خاصة ربما تملك تجزئات فاعلة باستخدام عصب ثنائية أخرى. وباستخدام القيم الذّاتيّة؛ فإنّ الحدّ السفلي العام يظهر بصورة صريحة في [Reznick – Tiwari – West, 1985]، ولكنه موجود بصورة ضمنية في عمل سابق بفكك البيان التام (Tverberg [1982], Peck [1984]).

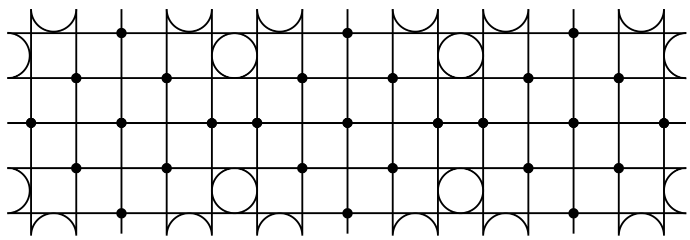
20.6.8. نظرية: لبيان بسيط G، يكون عدد العصب الثنائية التي نحتاج إليها لتفكيك G هو على الأقل العدد الأكبر لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة، وكذلك عدد القيم الذّاتيّة السالبة لمصفوفة التّجاور $A(G)$.

الإثبات: عندما يتفكك البيان G إلى بيانات جزئيات $G_1, \ldots, G_t$، فإن هذا يمكننا من كتابة $A(G) = \sum_{i=1}^{t} B_i$، حيث B_i هي مصفوفة التّجاور للبيان الجزئي المولد لـِ G مع مجموعة الأضلاع $E(G_i)$، وعندما يكون G_i هو العصبة

الثنائية مع التجزئة الثنائية T_i، S_i، فإنّ $x^T B_i x = 2\sum_{j\in S_i} x_j \sum_{k\in T_i} x_k$. وبكتابة هذه التعابير الخطية على صورة $u_i(x) = \sqrt{2}\sum_{j\in S_i} x_j$ و $v_i(x) = \sum_{k\in T_i} x_k$، فإننا نحصل على $x^T Ax = \sum_{i=1}^{t} x^T B_i x = \sum_{i=1}^{t} u_i(x)\, v_i(x)$ الآن، يعطي قانون سلفستر للقصور الذاتي (التمهيدية 15.6.8) الحدّ السفلي المزعوم. ■

21.6.8. مثال: تفكيك ثنائي العصبة لـ $C_n \,\square\, C_{(2t+1)n}$. هناك صيغ بسيطة لإيجاد القيم الذّاتيّة لحلقة (التمرين 6) ولحساب القيم الذّاتيّة لجداء كارتيزي من القيم الذّاتيّة للعوامل (التمرين 10). حيث تعطي هذه صيغًا بسيطة لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة والسالبة لـ $C_m \,\square\, C_n$ عندما يكون m مضاعفًا فرديًّا من n. بوجه خاص، يملك $C_{(2t+1)n} \,\square\, C_n$ $(2t+1)(n^2+1)/2$ قيمة ذاتية موجبة و $(2t+1)(n^2-1)/2$ قيمة ذاتية سالبة عندما يكون n فرديًّا (0 ليس قيمة ذاتية).

علاوة على ذلك، فإن مثل هذا الجداء يتفكك إلى $(2t+1)(n^2+1)/2$ عصبة ثنائية، مكونة من $(2t+1)$ $(n-1)/2$ حلقة من الدرجة 4 و $2(2t+1)(n+1)\,/$ نجمة (Kratzke – West). لاحظ أنّ الحلقات من الدرجة 4، والنجوم هي البيانات الجزئيّة الوحيدة من $C_m \,\square\, C_n$ التي تكون ثنائية العصبة. التفكيك الأمثل لـ $C_{15} \,\square\, C_5$ يظهر في الشكل أدناه. تلتف الأضلاع من الأعلى إلى الأسفل، ومن اليمين إلى اليسار، في حين تشير نقاط الشبكة جميعها إلى رؤوس، حيث تشير النقاط السميكة إلى الرؤوس التي تكون مراكز للنجوم في التفكيك، أما الدوائر فتشير إلى حلقات من الدرجة 4 في التفكيك. ■



القيم الذّاتيّة للبيانات المنتظمة (Eigenvalues of Regular Graphs)

تميز البيانات المنتظمة باستخدام الطيف مثلها مثل البيانات الثنائية الفرع. يقوم المتجه 1_n الذي له n من الإحداثيات حيث تكون جميعها إحداثياته 1 بدور خاصّ في هذا وفي العديد من المناقشات الأخرى التي تتضمن قيمًا ذاتية، كما تفعل مصفوفة الواحدات J جميعها.

22.6.8. نظرية: تكون القيمة الذّاتيّة لـ G التي لها أكبر قيمة مطلقة هي $\Delta(G)$ إذا وفقط إ ذا وُجد لـ G مركبة منتظمة من الدرجة $\Delta(G)$. وعدد مرات تكرار $\Delta(G)$ كقيمة ذاتية هو عدد المركبات المنتظمة من الدرجة $\Delta(G)$.

الإثبات: لتكن A مصفوفةَ التّجاور. إن المدخلة i للمصفوفة $A\mathbf{1}_n$ هي $d(v_i)$. وعندما يكون G منتظمًا من الدرجة k، فإننا نحصل على أن $A\mathbf{1}_n = k\mathbf{1}_n$. وعليه، فإن k هي قيمة ذاتية مع متجه ذاتي 1_n. وعمومًا، ليكن x متجهًا ذاتيًّا للقيمة الذّاتيّة λ، وليكن x_j الإحداثيَّ الذي قيمته المطلقة هي الأكبر من بين إحداثيات x المرتبطة برؤوس لمركبة ما H لـ G. للإحداثي j لـ Ax، فإنّ:

$$|\lambda|\,|x_j| = |(Ax)_j| = \left|\sum_{v_i\in N(v_j)} x_i\right| \le d(v_j)|x_j| \le \Delta(G)|x_j|$$

لذلك، فإنّ $|\lambda| \le \Delta(G)$. لاحظ أنّ المساواة تتطلب أنْ يكون $d(v_j) = \Delta\ (G)$ و $x_i = x_j$ لكلّ $v_i \in N(v_j)$. ونستطيع تكرار هذا التعليل للوصول إلى الإحداثيات جميعها للرؤوس الموجودة في H لذلك، فإن القيم الذّاتيّة المرافقة لـ x تملك قيمة مطلقة كبيرة مثل $\Delta\ (G)$ فقط إذا كان H منتظمًا من الدرجة $\Delta\ (G)$ لذلك، فإنّ القيمة الذّاتيّة المرافقة لمتجه ذاتي x لها قيمة مطلقة كبيرة مثل $\Delta\ (G)$ إذا وفقط إذا كان: (**1**) كل مركبة لـ G تحتوي على رأس بحيث يكون x غير صفري تكون منتظمة من الدرجة $\Delta\ (G)$، و (**2**) يكون x ثابتًا على الإحداثيات المرتبطة بكل مركبة مماثلة. ونستطيع اختيار الثابت باستقلالية لكل مركبة منتظمة من الدرجة $\Delta\ (G)$. لذا، فإنّ بُعْدَ فضاء المتجهات الذّاتيّة المرافقة لـ $\Delta\ (G)$ هو عدد المركبات المنتظمة من الدرجة $\Delta\ (G)$.

عندما يكون G مترابطًا وغير منتظم، فإنه يبقى صحيحًا أن القيم الذّاتيّة التي لها أكبر قيمة مطلقة تملك المضاعفة 1، وأنّ الإحداثيات للمتجه الذاتي المرافق تملك الإشارة نفسها. وهذا له علاقة مع نظرية بيرون وفروبينس في الجبر الخطي، فضلًا عن أنه يستخدم تعليلات كتلك الموجودة أعلاه؛ وسوف نهمل الإثبات.

تنويه: لاحظ أنّ القوى لمصفوفة التّجاور تعطي تمييزًا آخر.

23.6.8. نظرية : ([Hoffman [1963]) يكون البيان G منتظمًا ومترابطًا إذا وفقط إذا كان J تركيبًا خطيًّا لقوى من $A(G)$.

الإثبات : الكفاية. إذا أمكن التعبير عن J بهذا الشكل، فإنه لكل i, j يصبح لدينا أنّ $(A^k)_{i,j} \neq 0$ لبعض قيم $k \geq 0$، وهذا يتطلب ممرًّا من v_i إلى v_j طوله k. لذلك، فإنّ G مترابط. للانتظام؛ خذ في الحسبان المصفوفتين JA و AJ. ولاحظ أنّ الموقع i, j في المصفوفة AJ هو $d(v_i)$ (ثابت على الصفوف)، والموقع i, j في المصفوفة JA هو $d(v_j)$ (ثابت على الأعمدة). وبما أنّ J تركيب خطي لقوى من A التي يمكن تبديل كل منها مع A، فإنّ $JA = AJ$. لذلك، فإنّ الموقع i, j هو كل من $d(v_i)$ و $d(v_j)$ ويكون البيان منتظمًا.

الضرورة. بما أنّ G منتظمٌ من الدرجة k والتي هي قيمة ذاتية، وكثيرة الحدود الصغرى هي $\Psi(G : \lambda) = (\lambda - k)\ g(\lambda)$ لكثيرة حدود ما g، بما أنّ $\Psi(G ; A) = 0$، فإنّ $Ag(A) = kg(A)$. لذلك، فإنّ كلّ عمود في $g(A)$ هو متجه ذاتيّ لـ A مع قيمة ذاتية k. وبما أنّ G منتظم ومترابط، فإنّ كلّ متجه ذاتيّ مماثل هو مضاعف من I_n. لذلك، فإنّ الأعمدة في $g(A)$ تكون ثابتة، وعلى أي حال، فإنّ $g(A)$ هي تركيب خطي لقوى من مصفوفة متماثلة. وعليه، فإنّ $g(A)$ يجب أن تكون متماثلة. لذا، فإنّ الأعمدة تكون متساوية، و$g(A)$ تكون مضاعفة من J. ■

عندما يكون G بسيطًا ومنتظمًا، فإنّ $\overline{G}$ يكون منتظمًا أيضًا، ويمكن الحصول على القيم الذّاتيّة لـ $\overline{G}$ من القيم الذّاتيّة لـ G، وهذا يرتكز على التعبير المصفوفي للإتمام: $A\left(\overline{G}\right) = J - I - A\ (G)$.

24.6.8. تمهيدية : $\phi\left(\overline{G}\ ;\ \lambda\right) = (-1)^n \ \det\left[(-\lambda - 1)I - A\ (G) + J\right]$.

الإثبات : تعطي الحسابات المباشرة ما يأتي:

$$\det\left(\lambda I - A\ (\overline{G})\right) = \det\left(\lambda I - (J - I - A)\right)$$
$$= \det\left[(\lambda + 1)I - J + A\right] = (-1)^n \det\left[(-\lambda - 1)I - A + J\right]$$

25.6.8. نظرية : إذا كان G بيانًا بسيطًا ومنتظمًا من الدرجة k، فإنّ G، و $\overline{G}$ لهما المتجهات الذّاتيّة نفسها. القيمة الذّاتيّة المرافقة لـ $\mathbf{1}_n$ هي k في G، وتكون $n - k - 1$ في $\overline{G}$. إذا كان x متجهًا ذاتيًّا غير ثابت لـ G

مرافقًا للقيمة الذّاتيّة λ لـ G، فإنّ قيمته الذّاتيّة المرافقة في $\overline{G}$ هي λ - 1 - .

الإثبات: بما أنّ $\overline{G}$ منتظمٌ من الدرجة $n - k - 1$، فإنّ $\mathbf{1}_n$ متجه ذاتيّ لكلّ من G و $\overline{G}$، مع قيمة ذاتية k لـ G، و$n - k - 1$ لـ $\overline{G}$. ليكن x متجهًا ذاتيًا لـ G في أساس متعامد مُعَيَّر مكون من متجهات ذاتية، ولتكن $\overline{A} = A\left(\overline{G}\right)$. بما أنّ $x = 0$. $\mathbf{1}_n$، فإنّ $\sum_{xi} = 0$. نحسب $\overline{A}x = Jx - x - Ax = 0 - x - Ax = \left(-1 - \lambda\right)x$. ■

إنّ هذا يعطي حدًّا سفليًّا على القيمة الذّاتيّة الأصغر لبيان منتظم، ويعطي اشتقاقًا آخر لطيف للبيان K_n.

26.6.8. نتيجة: لبيان بسيط منتظم من الدرجة k، فإنّ $\lambda_n \geq k - n$.

الإثبات: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة k، وكانت $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$، فإنّ القيم الذّاتيّة لـ $\overline{G}$ هي $(n - k - 1, -1 - \lambda_n, \ldots, -1 - \lambda_2)$، وذلك من المبرهنات 22.6.8 – 25.6.8. وبوجه خاص، فإنّ $n - k - 1 \geq -\lambda_n - 1$. ■

يمكن استخدام القيم الذّاتيّة لبيان بسيط منتظم مترابط G لحساب أشجاره المولدة. ليس شرطًا أنْ تكون القيم الذّاتيّة نسبية، وعلى الرغم من ذلك، فإنّ الناتج $\tau(G)$ هو عدد صحيح. إن نظرية مصفوفة الشجرة (النظرية 12.2.2) تشير إلى أن $\tau(G)$ يساوي كل فرعي (minor) للمصفوفة $Q = D - A$، حيث A هي مصفوفة التّجاور، أما D فهي المصفوفة القطرية للدرجات. عندما يكون G منتظمًا من الدرجة k، فإنّ $D = kI$. إذا استخدمنا Adj Q لترمز إلى المصفوفة القرينة لـ Q (مصفوفة المتعاملات المؤشرة)، فإنّ نظرية مصفوفة الشجرة هي Adj $Q = \tau(G)J$. وباستخدام صيغة كايلي (النظرية 3.2.2) للأشجار المولدة في K_n، فإنّ $Adj\ (nI - J) = n^{n-2} J$.

27.6.8. تمهيدية: لتكن D المصفوفةَ القطريةَ لدرجات الرؤوس في بيان بسيط G، ولتكن$A = A(G)$، و $Q = D - A$. إذن، فإن عدد الشجرات المولدة لـ G هو $\tau(G) = \det(J + Q) / n^2$.

الإثبات: لاحظ أنّ $J\,Q = 0$ ، $J^2 = nJ$، و$\mathrm{Adj}(AB) = \mathrm{Adj}(A)\ \mathrm{Adj}(B)$. نطبق هذا باستخدام $J + Q$، والمصفوفة $nI - J$ التي تظهر من K_n للحصول على:

$$\mathrm{Adj}(nI - J)\ \mathrm{Adj}(J + Q) = \mathrm{Adj}[(nI - J)(J + Q)] = \mathrm{Adj}(nQ)$$

لأنّ $J^2 = nJ$ و $JQ = 0$. لقد حسبنا أنّ $\mathrm{Adj}\ (nI - J) = n^{n-2} J$. أيضًا $\mathrm{Adj}\ (nQ) = n^{n-1}\ \mathrm{Adj}\ Q$ لأي مصفوفة Q. واختصار العوامل المشتركة في n يعطي $J\ \mathrm{Adj}\ (J + Q) = n\ \tau(G)\ J$. كما أن ضرب طرفي المعادلة من اليمين في $(J + Q)^T$ يعطي: $J\,(\det(J + Q)\ I) = n\ \tau(G) n\ J$. وكلا الطرفين هما مضاعفات لـ J. لذلك، فإن المساواة المطلوبة تتحقق. ■

نستطيع الآن حساب $\tau(G)$ من القيم الذّاتيّة إذا كان G منتظمًا. (هذا التحليل يوسع للبيانات جميعها عندما يكون النظام المعدل للقيم الذّاتيّة مستخدمًا).

28.6.8. نظرية: إذا كان G بيانًا بسيطًا مترابطًا منتظمًا من الدرجة k على n من الرؤوس مع طيف $\begin{pmatrix} k & \lambda_2 \ldots \lambda_t \\ 1 & m_2 \ldots m_t \end{pmatrix}$ فإنّ $\tau(G) = n^{-1}\ \phi'(G\ ; k) = n^{-1}\ \prod_{j=2}^{t}\left(k - \lambda_j\right)^{mj}$.

الإثبات: بما أنّ $J + Q = J + kI - A$، فإنّ المحددة لـ $J + Q$ هي القيمة لكثيرة الحدود المميّزة لـ $A - J$ عند k. وبما أنّ G مترابط ومنتظم من الدرجة k، فإنه يملك $\mathbf{1}_n$ بوصفه متجهًا ذاتيًا مع قيمة ذاتية k، أما المتجهات الذّاتيّة الأخرى فتكون متعامدة مع $\mathbf{1}_n$. وكل متجه ذاتي مماثل لـ A هو أيضًا متجه ذاتي لـ $A - J$ مع القيمة الذّاتيّة نفسها، لأنّ $(A - J)x = Ax - Jx = Ax = \lambda x$.

أيضًا، $\mathbf{1}_n$ متجهٌ ذاتيٌّ لـ $J - A$ مع قيمة ذاتية $n - k$. وهذا ينتج مجموعة كاملة من القيم الذّاتيّة لـ $J - A$. وحساب كثيرة الحدود المميّزة عند k يعطي أنّ: $\det\left(J + Q\right) = n \prod_{j=2}^{t}\left(k - \lambda_j\right)$. وبما أنّ $\phi'\left(G ; \lambda\right)$ يملك k - λ كعامل غير متكرر عندما يكون G مترابطًا ومنتظمًا من الدرجة k، فإنّ حاصل الضرب يكون $\phi'\left(G ; k\right)$. ومن التمهيدية 27.6.8، فإننا نحصل على $\tau(G)$ بعد قسمتها على n^2. ■

النتائج في التمهيدية 24.6.8 – النظرية 28.6.8 وسّعت أيضًا للبيانات غير المنتظمة في [Kelmans, 1967] (وأيضًا [1974] Kelmans – Chelnokov) باستخدام القيم الذّاتيّة للمصفوفة اللابلاسية للبيان. هذه هي المصفوفة Q التي استخدمت أعلاه التي تظهر طريقة أخرى لحساب الأشجار المولدة في [Kelmans, 1965, 1966]، ويظهر تنوع آخر على نظرية مصفوفة الشجرة في [Hartsfield – Kelmans – Shen, 1996].

القيم الذّاتيّة والموسعات (Eigenvalues and Expanders)

إن العديد من التطبيقات في علم الحاسوب تتطلب «بيانات موسعة». ولقد جمع والترز [1996م] العديد من التعريفات التي استخدمت لبيانات مماثلة. إنّ الفكرة الأساسية للتوسعة هي أنّ المجموعات الصغيرة جميعها يجب أنّ تملك جوارات كبيرة، والهدف من ذلك هو إنشاء خصائص ترابطية جيدة دون وجود أضلاع كثيرة.

29.6.8. تعريف: نعرِّف الموسع ((n, k, c) – expander) من نوع (n, k, c) على أنه بيان ثنائي G بالتجزئة الثنائية X, Y حيث $|X| = |Y| = n$ وأنّ $\Delta(G) \le k$، وأنّ $|N(s)| \ge (1 + c(1 - |s| / n))$ لكلّ $S \subseteq X$ مع $\left|S\right| \le n / 2$. ونُعرِّف **المكبر** (**المضخم**) من نوع (n, k, c) ((n, k, c) – magnifier) على أنه بيان G على n من الرؤوس بحيث إن $\Delta(G) \le k$، وإن $\left|N\left(S\right) \cap \overline{S}\right| \ge c \cdot \left|S\right|$ لكل $S \subseteq V(G)$ مع $\left|S\right| \le n / 2$. ونعرِّف **المُركز الفائق من الدرجة** n (n – superconcentrator) على أنه بيان موجه لا حلقي مع n مصدرًا، وn بالوعة (مصبًّا) بحيث يوجد لكلّ مجموعة A من المصادر، وكلّ مجموعة B تتكون من $\left|A\right|$ بالوعة، $\left|A\right|$ مسار منفصل من A إلى B.

تظهر الموسعات في شبكة التصنيف الموازي لـ[Ajtai, Kamlós, Szemerédi, 1983م]. فضلًا عن أنّ الشرط للتوسيع يقوي شرط هال؛ نحن لا نملك مواءمة واحدة فقط، بل العديد منها. وهذا يساعد على استخدام الموسعات لبناء المركزات الفائقة. وقد نوقشت تطبيقات المركزات الفائقة في [Alon, 1986a]. إن الحد على الدرجة العظمى يجعل عدد الأضلاع خطيًّا في n. وبهذه الوسيلة، فإنّ تكلفة إنشاء الشبكة تكون محدودة.

إنّ الطرق الاحتمالية (التمرين 22) تؤدي إلى وجود الموسعات (والمركزات الفائقة) مع n كبيرة ومعدل درجة محدود ([Chung, 1978م b], [Pippenger, 1977م], [Pinsker, 1973م]). استخدم مارجوليس [Margulis, 1973م] أفكارًا جبرية لإنشاء مثال صريح (انظر أيضًا ([Gabber – Galil, 1981م]).

وعلى الرغم من أنّ بيانًا عشوائيًّا مولدًا بصورة مناسبة غالبًا ما يملك خصائص موسعة جيدة، إلا أنه من الصعب قياس التوسعة. استخدم كلٌّ من [Tanner, 1984م] و[Alon – Milman, 1984م, 1985م] بصورة مستقلة القيم الذّاتيّة لحلّ هذا. حيث برهنا أنّ البيانات تملك خصائص موسعة جيدة عندما تكون أكبر قيمتين ذاتيتين بعيدتين إحداهما عن الأخرى. وبما أنّ القيم الذّاتيّة سهلة الحساب (أو التقريب)، فإننا نستطيع أنّ نولد بيانًا بصورة عشوائية، ومن ثَمّ نحسب قيمه الذّاتيّة لفحص مقدار التّوسّع.

سوف نأخذ في الحسبان الحالة الخاصة للبيانات المنتظمة فقط. في التطبيقات، تكون الموسعات أكثر فائدة من المكبرات، ولكن من السهل الحصول على موسع من نوع $(n, (k + 1), c)$ من مكبر من نوع (n, k, c)

(التمرين 21). لذلك، سوف نأخذ في الحسبان العلاقة بين القيم الذّاتيّة والتكبير. وتمثيلنا يتبع ([Alon – Spencer, 1992, p119ff]) الذي يناقش خصائص إضافية للقيم الذّاتيّة للبيانات المنتظمة (والعشوائية).

30.6.8. إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة k على n من الرؤوس حيث λ ثاني أكبر قيمة ذاتية، وكانت S مجموعة جزئية فعلية غير خالية من $V(G)$ فإنّ:

$$|[S, \overline{S}]| \geq (k - \lambda)\ |S|\ |\overline{S}|/n$$

الإثبات: بما أنّ G منتظم من الدرجة k، فإنّ $\lambda_{max}(G) = k$. ويكون الادعاء واضحًا إذا كان $k - \lambda = 0$، لذلك نستطيع G مترابط، ثم نحسب:

$$x^T(kI - A)x = k\sum x_i^2 - 2\sum_{ij \in E(G)} x_i x_j = \sum_{ij \in E(G)} (x_i - x_j)^2$$

الآن، ليكن $s = |S|$، وضع $x_i = -(n-s)$ لـ $i \in S$، و $x_i = s$ لـ $i \notin S$. لاحظ أنّ المجموع عن اليمين أعلاه يصبح $n^2|[S,S]|$.

ولأنّ $|S| = s$ تعطي $\Sigma x_i = 0$، فإنّ المتجه x يكون متعامدًا على المتجه الذاتي $\mathbf{1}_n$ لـ A مع قيمة ذاتية k. والمتجه الذاتي $\mathbf{1}_n$ هو أيضًا المتجه الذاتي لـ $kI - A$ لأصغر قيمها الذّاتيّة 0. باستخدام التمهيدية 10.6.8 والنظرية 11.6.8، فإنّ القيمة الصغرى لـ $\frac{x^T(kI-A)x}{x^Tx}$ خلال متجهات عمودية على $\mathbf{1}_n$ هي أصغر قيمة ذاتية تالية لـ $kI - A$، والتي تكون $k - \lambda$. لذلك، فإنّ:

$$x^T(kI-A)x \geq (k-\lambda)x^Tx = (k-\lambda)\left(s(n-s)^2 + (n-s)s^2\right) = (k-\lambda)s(n-s)n$$

وبما أنّ $x^T(kI-A)x = n^2\left|\left[S, \overline{S}\right]\right|$، فإنّ $\left|\left[S, \overline{S}\right]\right| \geq (k-\lambda)s(n-s)/n$. ■

31.6.8. نتيجة: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة k على n من الرؤوس حيث إن λ هي ثاني أكبر قيمة ذاتية، فإنّ G هو مكبر من نوع (n, k, c)، حيث $c = (k - \lambda)/2k$.

الإثبات: إذا كانت S مجموعة رؤوس في G وعدد رؤوسها s بحيث $s \leq n/2$، فإنّ النظرية 30.6.8 تعطي أنّ $\left|\left[S, \overline{S}\right]\right| \geq (k-\lambda)s(n-s)/n$. وكلّ رأس في $\overline{S}$ يستقبل k من هذه الأضلاع على الأكثر. لذلك، فإنّ S يجب أنْ تملك $(k - \lambda)s(n-s)/(nk)$ جارًا على الأقل في $\overline{S}$. وبما أنّ $(n-s)/n \geq 1/2$، فهذا ينهي الإثبات. ■

لاحظ أنّ فصلاً أوسع بين أكبر قيمتين ذاتيتين يؤدي إلى تضخيم أكبر. ولقد حَسَّن ألون وميلمان [1984م] الحدّ السّفليّ إلى $c \geq (2k - 2\lambda)/(3k - 2\lambda)$. حيث أثبت ألون [1986 b] نتيجة عكسية جزئية هي: إذا كان البيان G المنتظم من الدرجة k مكبرًا من نوع (n, k, c)، فإنّ الفصل $k - \lambda$ هو $c^2/(4 + 2c^2)$ على الأقل.

إن بناءات صريحة للبيانات المنتظمة معروفة مع فصل بين λ_1 و λ_2 كبير قدر الإمكان. لاحظ أنّ ثاني أكبر قيمة ذاتية لبيان منتظم من الدرجة k قطره d هي على الأقل $2\sqrt{k-1}\left(1 - 0(1/d)\right)$ (انظر [Nilli, 1991]). لقد أنشأ كلّ من [Lubotzky – Phillips – Sarnak, 1982] و [Margulis, 1988] عائلات لانهائية من البيانات المنتظمة حيث تكون الدرجة k أكبر بـ 1 من عدد أولي يكافئ 1 بمقياس 4، وثاني أكبر قيمة ذاتية هي $2\sqrt{k-1}$ على الأكثر.

البيانات المنتظمة بقوة (Strongly Regular Graphs)

سوف نختتم هذا الفصل من خلال تطبيق على صف خاص من البيانات المنتظمة.

32.6.8. تعريف: يسمى البيان البسيط G على n من الرؤوس **منتظمًا بقوة** (Strongly regular) إذا وجدت متغيرات k, λ, μ بحيث يكون G منتظمًا من الدرجة k، ويملك كل زوج متجاور من الرؤوس λ جارًا مشتركًا، في حين يملك كل زوج من الأزواج غير المتجاورة μ جارًا مشتركًا.

إن خصائص القيم الذّاتيّة للبيانات المنتظمة بقوة توفر لنا إثباتًا قصيرًا مع نتيجة لافتة للنظر تدعى «نظرية الصداقة». هذه النظرية تقول إنه في أي حفلة يكون فيها كلّ زوج من الأشخاص له معرفة شخصية مشتركة واحدة، فإنه يوجد شخص واحد يعرف الأشخاص جميعهم (تخمينًا المضيف). إنّ البيان الناتج من علاقة المعرفة الشخصية يتكون من عدد من المثلثات التي تتشارك برأس. وهناك دافع آخر لدراسة البيانات المنتظمة بقوة وهو ربطها مع نظرية التصاميم. إنّ البيانات المنتظمة بقوة والتي فيها $\lambda = \mu$ ترتبط بالتصاميم القالبية غير التامة الموزونة المتماثلة. البيانات المنتظمة الأخرى مع بناء جبري غني موجودة في [Biggs, 1993م, part 3].

33.6.8. نظرية: إذا كان G بيانًا منتظمًا بقوة على n من الرؤوس ومتغيرات k, λ, μ، فإنّ $\overline{G}$ يكون منتظمًا بقوة مع متغيرات G , $K' = n - k - 1$ و $\mu' = n - 2k + \lambda$.

الإثبات: لكلّ زوج متجاور $w \leftrightarrow v$ في G يوجد λ - $2(k-1)$ رأسًا آخر في $N(v) \cup N(w)$. لذلك، فإنّ v و w يملكان $n - 2 - 2(k-1) + \lambda$ رأسًا مشتركًا غير مجاورين لهما. وعندما يكون $v \nleftrightarrow w$، فإنه يوجد $2k - \mu$ رأسًا في $N(v) \cup N(w)$. وعليه، فإنه يوجد $n - 2k + \mu$ رأسًا مشتركًا غير مجاورين لهما. ■

34.6.8. نظرية: إذا كان G بيانًا منتظمًا بقوة على n من الرؤوس ومتغيرات k, λ, μ، فإنّ $k(k - \lambda - 1) = \mu(n - k - 1)$.

الإثبات: نعدّ النسخ المحدثة لـ P_3 مع رأس ثابت v بوصفها نقطة طرفية. يمكن اختيار الرأس الأوسط w بـ k من الطرق. ولكل w مماثلة، فإنّ الرأس الثالث يمكن أنْ يكون أيّ جار لـ w غير مجاور لـ v. وعندما يكون v غير متوافر، فإنه يوجد دائمًا $k - \lambda - 1$ طريقة لاختيار الرأس الثالث. ومن ناحية أخرى، فإنّ الرأس الثالث يمكن اختياره بـ $n - k - 1$ طريقة بوصفه رأسًا غير مجاور لـ v. ولكل اختيار مثل هذا، فإنّه يوجد m جارًا مشتركًا مع v، ومن الممكن أنْ يخدم مثل w. ■

35.6.8. مثال: حالات مضمحلة: $\mu = 0$، أو $\lambda = k - 1$، أو $k = n - 1$. سوف نبين أنّ بيانًا منتظمًا بقوة مماثل هو عبارة عن اتحاد عصب منفصلة من الدرجة $k + 1$. من النظرية 34.6.8، فإنّ $\lambda = k - 1$ إذا وفقط إذا كان $\mu = 0$، أو $k = n - 1$. لذلك، يمكن افتراض أنّ $\lambda = k - 1$. الآن، كلّ جار لـv هو مجاور لكلّ رأس آخر، وهذا يمنع وجود P_3 محدث، ويجبر G ليكون اتحاد عصب منفصلة. ■

من الآن فصاعدًا، سوف نفترض $\mu > 0$، و $\lambda < k - 1$. تذكر النظرية 34.6.8 شرطًا ضروريًا على مجموعة المتغيرات لبيان منتظم بقوة. ويظهر أيضًا شرط ضروري آخر من القيم الذّاتيّة.

36.6.8. نظرية: (شرط التكامل) إذا كان G بيانًا منتظمًا بقوة على n من الرؤوس ومتغيرات k, λ, μ، فإنّ العددين أدناه يكونان صحيحين وغير سالبين.

$$\frac{1}{2}\left(n-1 \pm \frac{(n-1)(\mu-\lambda)-2k}{\sqrt{(\mu-\lambda)^2+4(k-\mu)}}\right)$$

الإثبات: هذان العددان يكونان صحيحين غير سالبين لأنهما من مضاعفات قيم ذاتية. خذ A^2 في الحسبان. المدخلة ij في A^2 هي k إذا كان $i = j$، في حين تكون λ إذا كان $v_i \leftrightarrow v_j$، وتكون μ إذا كان $v_i \not\leftrightarrow v_j$. وبما أنّ $v_i \leftrightarrow v_j$ تُعلِّم (تضع علامات) الواحدات (1s) في مصفوفة التّجاور، و $v_i \not\leftrightarrow v_j$ تُعلِّم الواحدات في مصفوفة التّجاور للمتممة، فإنّ $A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A)$. وإعادة ترتيب الحدود يعطي: $A^2 = (k - \mu) I + (\lambda - \mu) A + \mu J$.

وضرب كلا التعبيرين لـ A^2 في $\mathbf{1}_n$ يعطي $k^2\, \mathbf{1}_n = (k - \mu)\mathbf{1}_n + (\lambda - \mu)k\mathbf{1}_n + \mu\, n\mathbf{1}_n$ ،

وهذا يؤدي إلى إثبات آخر لـ $k(k - \lambda - 1) = \mu(n - k - 1)$. ليكن x متجهًا ذاتيًّا لقيمة ذاتية أخرى $\Theta \neq k$. بما أنّ x عمودي على $\mathbf{1}_n$، فإنّ $Jx = 0_n$. وضرب كلا التعبيرين لـ A^2 في x ينتج $\Theta^2 - (\lambda - \mu)\,\Theta - (k - \mu) = 0$.

وهذه المعادلة التربيعية لـ Θ تملك جذرين هما r، و s، اللذين يجب أن يكونا القيمتين للقيم الذّاتيّة الأخرى جميعها. وهما: $\frac{1}{2}\left(\lambda - \mu \pm \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)}\right)$.

الآن، ليكن a وb مضاعفات القيم الذّاتيّة لـ r و s. يصف المثال 35.6.8 الحالات جميعها عندما تكون $\mu = 0$. لذلك، من الممكن افتراض أنّ $\mu > 0$، وبالتالي يكون G مترابطًا. ولأن G مترابط، فإنّ عدد مرات تكرار القيمة الذّاتيّة k يساوي 1. وعليه، فإنّ $n = a + b + 1$. وبما أنّ مجموع القيم الذّاتيّة يساوي 0، فإنّ $k + ra + sb = 0$. إنّ الحلّ لهاتين المعادلتين الخطيتين لـ a و b هو $a = -\frac{k + s(n-1)}{r - s}$ و $b = \frac{k + r(n-1)}{r - s}$،
وهاتان القيمتان هما المزعومتان في الأعلى بأنهما صحيحتان وغير سالبتين. ■

تنويه: لاحظ أنه يمكن تتبع التعليل السابق في الاتجاه المعاكس.

37.6.8. نظرية: يكون البيان G المترابط المنتظم من الدرجة k منتظمًا بقوة مع متغيرات k, λ, μ إذا وفقط إذا كان يملك ثلاث قيم ذاتية $k > r > s$ تمامًا. وهذه القيم تحقق أنّ $r + s = \lambda - \mu$ و$rs = -(k - \mu)$. ■

38.6.8. مثال: صفوف البيانات المنتظمة بقوة. سوف نأخذ في الحسبان حالتين: $(n - 1)(\mu - \lambda) = 2k$، و $2k \neq (\mu - \lambda)(n - 1)$. باستثناء القيم الواضحة، فإنّ الحالة الأولى تتطلب أنْ يكون $m = \lambda + 1$؛ لأنّ $0 < 2k < 2n - 2$. ومن النظرية 33.6.8، فإنّ G و $\overline{G}$ يكونان بيانين منتظمين بقوة مع المتغيرات نفسها. في هذه الحالة، نعلم أيضًا أنّ $n = 4\mu + 1$، وأنّ n هي المجموع لمربعين كاملين. فضلًا عن ذلك، فإنّ للقيم الذّاتيّة r و s عدد مرات التكرار نفسها.

أما في الحالة الثانية، تتطلب النسبية أنْ يكون $(\mu - \lambda)^2 + 4(k - \mu) = d^2$ لعدد صحيح موجب ما d، وd يجب أنْ يقسم $2k - (\mu - \lambda)(n - 1)$. وهنا يجب أنْ تكون القيم الذّاتيّة أعدادًا صحيحة. وهناك أمثلة متنوعة معروفة. في الحالة الخاصة $\lambda = 0$ و$\mu = 2$ ، هناك ثلاثة بيانات مماثلة معروفة، ولكنه غير معروف فيما إذا كانت القائمة منتهية؛ والأمثلة المعروفة؛ بإدراج المتغيرات (n, k, λ, μ)؛ هي: المربع (4, 2, 0, 2)، وبيان كليبش (Clebsch graph) (16, 5, 0, 2) وبيان جويرتز (Gewirtz graph) (56, 10, 0, 2) (انظر [Cameron – van Lint,[1991, p43). بيان كليبش يظهر في التمرين 23. وتظهر بيانات منتظمة بقوة في التمارين 24 – 26. ■

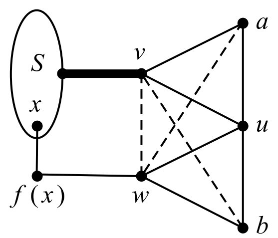
أخيرًا، سوف نثبت نظرية الصداقة. لاحظ أنّ كرايج هنيك (Craig Huneke) يملك إثباتًا قصيرًا لاستثناء البيانات المنتظمة من خلال حساب ممرات واستخدام حساب مقياسي؛ وهو ليس أطول من إثبات شرط التكاملية. ويناقش همرسلي [Hammersley,1983] براهين أخرى تتجنب استخدام القيم الذّاتيّة، وتستخدم تعليلات عددية معقدة لحذف البيانات المنتظمة.

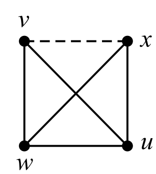
39.6.8. نظرية : (نظرية الصداقة – [Wilf, 1971]) إذا كان G بيانًا يتحقق فيه أنّ كلّ رأسين مختلفين يملكان جارًا مشتركًا واحدًا تمامًا، فإن G يملك رأسًا مربوطًا بالرؤوس الأخرى جميعها.

الإثبات: التماثل للشرط يقترح أنّ G يجب أنْ يكون منتظمًا. إذا كان G منتظمًا، فإنه سوف يكون منتظمًا بقوة مع $\lambda = \mu = 1$. ومن النظرية 36.6.8، فإنّ $\frac{1}{2}\left(n-1 \pm k/\sqrt{k-1}\right)$ يجب أنْ يكون عددًا صحيحًا. لذلك، فإنّ $k/\sqrt{k-1}$ عددٌ صحيح، والذي يحدث فقط عندما $k=2$. وعلى أي حال، فإنّ K_3 هو البيان المنتظم من الدرجة 2 الوحيد الذي يحقق الشرط، ويملك رؤوسًا درجتها $n-1$.

الآن، افترض أنّ G غير منتظم. سوف نبين أنّ $v \nleftrightarrow w$ تتطلب تَحَقُّقَ $d(v) = d(w)$. لاحظ أنّ الإصرار على وجود جيران مشتركين وحيدين يمنع وجود حلقات من الدرجة 4. وليكن u هو الجار المشترك لـ $\{v, w\}$. وليكن a هو الجار المشترك لـ $\{u,v\}$، وليكن b هو الجار المشترك لـ $\{u, w\}$. كلّ $x \in S = N(v) - \{u, a\}$ يملك $f(x)$ بوصفه جارًا مشتركًا مع w. إذا كان $f(x) = b$ لبعض $x \in S$، فإنّ x, b, v, u حلقةٌ من الدرجة 4. إذا كان $f(x) = f(x')$ لرأسين مختلفين $x, x' \in S$، فإنّ $x, v, x', f(x)$ حلقةٌ من الدرجة 4. لذا، نكون قد بينا أنّ $d(w) \geq d(v)$. ومن التماثل فإنّ $d(v) \geq d(w)$.

بما أنّ G غير منتظم، فإنه يملك رأسين v, w مع $d(v) \neq d(w)$. من الفقرة السابقة $w \leftrightarrow v$. ليكن u جارهما المشترك. بما أنّ درجة u لا يمكن أنْ تساوي درجتهما معًا فنستطيع افتراض أنّ $d(u) \neq d(v)$. إذا كان G يملك رأسًا $x \notin \mathrm{N(v)}$، فإنّ $d(x) = d(v)$، ولكن هذا يتطلب أنْ يكون $x \leftrightarrow w$ و $x \leftrightarrow u$. وهذا يبني الحلقة الرباعية v, u, x, w. لذلك، فإنّ $d(v) = n-1$. ■





تمارين (Exercises)

1.6.8. تفسير الفضاء الحلقي وفضاء الروابط. معطى بيان G، أثبت أنّ:

a) الفرق التماثلي لبيانين جزئيين زوجيين هو بيان جزئيّ زوجيّ.

b) الفرق التماثلي لقطعين ضلعيين هو قطع ضلعيّ.

c) كلّ قطع ضلعيّ يشترك مع كلّ بيان جزئيّ زوجي بعدد زوجيّ من الأضلاع.

2.6.8. البعد للفضاء الحلقي ولفضاء الروابط. من خلال الفرعين (a) و(b) في التمرين 1.6.8، فإنّ الفضاءَ الحلقيّ $\mathbf{C}$ وفضاءَ الروابط $\mathbf{B}$ لبيان G هما فضاءان متجهان ثنائيان. أثبت أنه عندما يكون G مترابطًا، فإنّ البعد لـ $\mathbf{C}$ هو $e(G) - n(G) + 1$، والبعد لـ $\mathbf{B}$ هو $n(G) - 1$. (مساعدة: بَيِّنْ أنَّ الحلقات التي تتكون بإضافة ضلع واحد إلى شجرة مولدة معينة تشكل أساسًا للفضاء الحلقي. وبَيِّنْ أنّ $n(G) - 1$ من الروابط التي تعزل رؤوسًا مفردة تشكّل أساسًا لفضاء الروابط، أو استخدم التعامد).

3.6.8. تذكر أنّ الجوار المغلق لرأس v هو $N(v) \cup \{v\}$:

a) لتكن S مجموعة رؤوس في بيان بسيط G بحيث إن جواراتها متطابقة أثبت أنّ إحدى القيم الذّاتيّة لـ G تكون مكررة على الأقل $|S|-1$ مرة. ما هي؟

b) لتكن S مجموعة رؤوس في بيان بسيط G بحيث إن جواراتها المغلقة تكون متطابقة. أثبت أنّ إحدى القيم الذّاتيّة لـ G تكون مكررة على الأقل $|S|-1$ مرة. ما هي؟

4.6.8. ليكن σ_k عددَ البيانات الجزئيّة للبيان G التي تكون حلقات من الدرجة k. وليكن $D_k = \sum d_i^k$ و $L_k = \sum \lambda_i^k$ هما مجموع القيم الذّاتيّة ودرجات الرؤوس مرفوعة للقوة k على الترتيب. احصل على صيغ لـ σ_3 و σ_4 بدلالة $\{L_k\}$ و $\{D_k\}$.

5.6.8. صيغ الحذف لكثيرة الحدود المميّزة. لتوضيح هذه المسألة، سوف نكتب $\phi(G\ ;\ \lambda)$ كَ ϕ_G. ليكن $v[xy]$ رأسًا [ضلعًا] عشوائيًّا لـ G، ولتكن $Z(v)[Z(xy)]$ مجموعة الحلقات التي تحوي $v[xy]$. أثبت أنّ كثيرة الحدود المميّزة تحقق العلاقات التكرارية الآتية:

a) $\phi_G = \lambda\phi_{G-v} - \sum_{u\in N(v)} \phi_{G-v-u} - 2\sum_{C\in Z(v)} \phi_{G-v(C)}$.

b) $\phi_G = \phi_{G-xy} - \phi_{G-x-y} - 2\sum_{C\in Z(xy)} \phi_{G-V(C)}$.

(مساعدة: من الممكن استخدام الاستقراء أو صيغة ساش (Sach). لاحظ أيضًا أنّ صيغة الحذف الضلعي يمكن أنْ تبرهن من صيغة الحذف الرأسيّ. تعليق: عندما يكون G غابة و v ورقة مع جار u، فإنّ الصيغ تختزل إلى $\phi_G = \phi_{G-xy} - \phi_{G-x-y}$ و $\phi_G = \lambda\phi_{G-v} - \phi_{G-v-u}$).

6.6.8. كثيرة الحدود المميّزة للمسارات والحلقات:

a) استخدم التمرين 5.6.8 في إيجاد صيغة تكرارية لـ $\phi(P_n\ ;\ \lambda)$ ولـ $\phi(C_n\ ;\ \lambda)$.

b) دون أنْ تحلّ الصيغة التكرارية، أثبت أنّ $\{2\cos(2\pi j/n): 0\le j\le n-1\}$ هي القيم الذّاتيّة لـ C_n.

c) معطى $Spec(C_n)$، احسب $Spec\ G$، حيث يكون G البيانَ الذي حصلنا عليه من C_n بإضافة أضلاع تربط رؤوسًا على مسافة 2 في C_n.

7.6.8. لشجرة، أثبت أنّ المعامل لـ λ^{n-2k} في كثيرة الحدود المميّزة هو $(-1)^k \mu k(G)$، حيث $\mu_k(G)$ هو عدد المواءمات التي حجمها k. استخدم هذا في إنشاء زوج من الأشجار على 8 رؤوس "بأطياف مشتركة" (*co–spectral*) بحيث يكون زوج الأشجار هذا غير متشاكل؛ وكلاهما يملك كثيرة الحدود المميّزة $\lambda^8 - 7\lambda^6 + 9\lambda^4$. (تعليق: عندما $n\to\infty$، تقريبًا لا توجد أشجار محددة بصورة وحيدة من أطيافها). (Schwenk [1973]).

8.6.8. (+) لتكن T شجرة. أثبت أنّ $a(t)$ هو عدد القيم الذّاتيّة غير السالبة لـ T. (مساعدة: انظر النظرية 20.6.8). (Cvetkovic′ – Doob – Sachs [1979, p233]).

9.6.8. لتكن λ قيمةً ذاتية لبيان G على n من الرؤوس و m من الأضلاع. أثبت أنّ $|\lambda|\le\sqrt{2m(n-1)/n}$.

10.6.8. لتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ و $\mu_1, \ldots, \mu_n$ قيمًا ذاتية لـ G و H على الترتيب. بَيِّنْ أنّ الـ mn قيمة ذاتية لـ $G\ \square\ H$ هي $\{\lambda_i + \mu_j\}$. استخدم هذا لاشتقاق الطّيف للمكعب من الدرجة k. (مساعدة: معطى متجه ذاتي لـ $A(G)$ مرافق لـ λ_i، ومتجه ذاتي لـ $A(H)$ مرافق لـ μ_j، أنشئ متجهًا ذاتيًّا لـ $A(G\ \square\ H)$ مرافقًا لـ $(\lambda_i + \mu_j)$.

11.6.8. احسب الطّيف للبيان التام $K_{m,\ \ldots,\ m}$ المجزأ إلى P مجموعة مجزأة (مجموعة تجزئة). (مساعدة: استخدم التعبير $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$ لمصفوفة التّجاور للمتممة).

12.6.8. معطى $\phi(G\ ;\ x) = x^8 - 24x^6 - 64x^5 - 48x^4$، حَدِّدْ G.

13.6.8. (!) أثبت أنّ G يكون ثنائي الفرع إذا كان G مترابطًا و $\lambda_{max}(G) = -\lambda_{min}(G)$.

14.6.8. (!) معطى بيان G، ولتكن $R(G)$ هي المصفوفة التي تكون مدخلتها i,j هي $d_G(v_i, v_j)$. أثبت أنّ بُعْدَ المكعّب المسحوق لبيان ما (التعريف 12.4.8) يكون على الأقل العدد الأكبر لعدد القيم الذّاتيّة الموجبة وعدد

القيم الذّاتيّة السالبة للمصفوفة $R(G)$. استنتج أنّ بُعْدَ المكعّب المسحوق للبيان K_n هو $n-1$. (مساعدة: أعد كتابة الشكل التربيعي $x^T Rx$ بوصفه مجموعًا لمربعات دوال خطية، وطبق قانون سلفستر للقصور الذاتي).

15.6.8. (!) **المصفوفة اللابلاسية** Q (Laplacian matrix) لبيان G هي $D-A$؛ حيث D مصفوفةُ الدرجات القطرية، وA مصفوفةُ التّجاور. **والطيف اللابلاسي** (Laplacian spectrum) هو القائمة للقيم الذّاتيّة لـ Q:

a) أثبت أنّ أصغر قيمة ذاتية لـ Q هي 0.

b) أثبت أنه إذا كان G مترابطًا، فإنّ القيمة الذّاتيّة 0 تتكرر مرة واحدة فقط.

c) أثبت أنه إذا كان G منتظمًا من الدرجة k، فإنّ $k - \lambda$ قيمةٌ ذاتية لابلاسية إذا وفقط إذا كانت λ قيمةً ذاتية عادية، مع المضاعفة نفسها (أي لها عدد مرات التكرار نفسه).

16.6.8. إذا أعطينا مصفوفة حقيقية متماثلة مجزأة على الصورة $M = \begin{bmatrix} P & Q \\ Q^T & R \end{bmatrix}$ حيث P، R مصفوفتان مربعتان، فإنّ تمهيدية في الجبر الخطي تعطي: $\lambda_{\max}(M) + \lambda_{\min}(M) \le \lambda_{\max}(P) + \lambda_{\max}(R)$.

a) لتكن A مصفوفة حقيقية متماثلة مجزأة إلى t^2 مصفوفة جزئية $A_{i,j}$ بحيث تكون المصفوفات الجزئيّة القطرية A_{ii} مربعة. أثبت أنّ: $\lambda_{\max}(A) + (t-1)\lambda_{\min}(A) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_{\max}(A_{ii})$.

b) أثبت أنّ $\chi(G) \ge 1 + \lambda_{\max}(G)/(-\lambda_{\min}(G))$ لبيان غير تافه G.

c) استخدم نظرية الألوان الأربعة لتبرهن أنّ $0 \le \lambda_1(G) + 3\lambda_n(G)$ للبيانات السوية.

17.6.8. (!) استخدم النظرية 28.6.8 لتعدَّ الأشجار المولدة في $K_{m,m}$. (تعليق: انظر التمرين 13.2.2).

18.6.8. (+) معطى مصفوفة A، لتكن $b_{i,j}$ تساوي $(-1)^{i+j}$ مضروبة في المصفوفة التي نحصل عليها بحذف الصف i والعمود j من A. ولتكن $\mathrm{Adj}\, A$ المصفوفةَ التي تكون مدخلتها في الموقع i,j هي $b_{j,i}$. إنّ تعريف المحددة من خلال التمديد على صفّ من صفوف A يعطي أنّ $A(\mathrm{Adj}\, A) = (\det A)I$. استخدم هذه الصيغة لتبرهن أنه إذا كان مجموع الأعمدة في A هو المتجه $\mathbf{0}$، فإنّ $b_{i,j}$ تكون مستقلة عن j. (تعليق: مع التمرين التالي، فإنّ هذا يكمل الإثبات لنظرية مصفوفة الشجرة (النظرية 12.2.2).

19.6.8. (+) لتكن $C = AB$، حيث A مصفوفةُ $n \times m$، و B مصفوفةُ $m \times n$. إذا أُعطيت $S \subseteq [m]$، لتكن A_S المصفوفةَ $n \times n$ التي أعمدتها هي الأعمدة في A التي يدل عليها بـ S، ولتكن B_S المصفوفة $n \times n$ التي صفوفها هي الصفوف في B التي يدل عليها بـ S. أثبت أنّ صيغة بينت وكوشي: $\det C = \sum_S \det A_S \det B_S$. حيث يوسّع المجموع على المجموعات الجزئيّة جميعها التي تحوي n عنصرًا من $[m]$. (مساعدة: خذ في الحسبان معادلة المصفوفات $\left(\begin{pmatrix} I_m & O \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -I_m & B \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_m & B \\ O & AB \end{pmatrix}\right)$

20.6.8. تكون المصفوفة **مُحَيّدة كليًا** (totally unimodular) إذا كانت محددة كلّ مصفوفة جزئية مربعة موجودة في $\{0, 1, -1\}$. أثبت أنّ مصفوفة الوقوع لبيان بسيط تكون محيدة كليًّا إذا وفقط إذا كان البيان ثنائيّ الفرع. (تذكير: مصفوفة الوقوع لبيان بسيط تملك $+1$ مرتين في كل عمود).

21.6.8. (-). ليكن G مُكبرًا من نوع (n, k, c)، ورؤوسه $v_1, \ldots, v_n$. وليكن H بيانًا ثنائي الفرع مع مجموعات مجزأة $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ و $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ بحيث يكون $x_i y_j \in E(H)$ إذا وفقط إذا كان $i = j$ أو $v_i v_j \in E(G)$. أثبت أنّ H موسّع من نوع $(n, k+1, c)$.

22.6.8. الوجود للموسعات التي حجمها خطي:

a) ليكن X متغيرًا عشوائيًّا يعطي الحجم لاتحاد k من المجموعات الجزئيّة التي درجتها s من $[n]$ مختارة عشوائيًّا من $\left[\binom{[n]}{s}\right]$. أثبت أنّ $p(x \le l) \le \binom{n}{l} (l/n)^{ks}$.

b) (+) لـ $\alpha\beta < 1$، أثبت أنه يوجد ثابت k، بحيث إنه إذا كان n كبيرًا بما فيه الكفاية، فإنه يوجد بيان جزئيّ من $K_{n,n}$ مع درجة كبرى على الأكثر k بحيث يكون $|N(S)| \ge \beta |S|$ عندما يكون $|S| \le \alpha n$.

(مساعدة: وَلِّدْ بيانًا جزئيًّا ثنائي الفرع من $K_{n,n}$ بأخذ الاتحاد لـ k مواءمة كاملة عشوائية).

c) استنتج الوجود لـ k بحيث تضمن وجود موسّعات من نوع (n, k, c) لكلّ n كبيرة بما فيه الكفاية. ونُعرِّف **موسّعًا** من نوع (n, α, β, d) $(n, \alpha, \beta, d - expander)$ على أنه بيان ثنائيّ الفرع $G \subseteq K_{A,B}$ مع $|A| = |B| = n$, $\Delta(G) \le d$ ، و $|N(S)| \ge \beta |S|$ عندما $|S| \le \alpha n$.

23.6.8. ليكن G بيانًا خاليًا من المثلثات على n من الرؤوس، بحيث يكون لكلّ زوج من الرؤوس غير المتجاورة بالضبط جاران مشتركان. أثبت أنّ G منتظم، وأنّ $n = 1 + \binom{k+1}{2}$ ، حيث k هي درجة الرؤوس في G. أثبت أنّ G منتظم بقوة. ما القيود على k المتضمنة باستخدام شروط التكامل؟ أنشئ أمثلة لكلّ $k \in \{1, 2, 5\}$. وهناك تحقيق لـ$k = 10$ معروف باستخدام التصاميم التركيبية التوافقية).

24.6.8. (+) أثبت أنّ بيان بيترسون منتظم بقوة، وحدِّدْ طيفه (يكون الطّيف سهلاً بوجود خصائص البيانات المنتظمة بقوة وليس صعبًا من غيرها). طَبِّق الطّيف لتبين أنّ أضلاع البيان التام K_{10} لا يمكن أنْ تجزّأ إلى ثلاث نسخ منفصلة من بيان بيترسون. (مساعدة: استخدم الطّيف لتبرهن أنّ نسختين من مصفوفة بيترسون تملكان متجهًا ذاتيًّا مشتركًا غير المتجه الثابت) ([Schwenk [1983]).

25.6.8. ليكن $F = G \,\square\, H$، حيث G و H بيانان بسيطان. أثبت أنه إذا كان كلّ رأسين غير متجاورين في F يملكان جارين مشتركين بالضبط، فإنّ G و H يكونان بيانين تامين.

26.6.8. **المكونات الجزئيّة** (subconstituents) لبيان G هي البيانات الجزئيّة المحدثة التي تكون على الشكل $G[U]$، حيث $v \in V(G)$، و $U = N(v)$، أو $U = \overline{N(v)}$. عَرَّفَ فينس [Vince, 1989] أنّ البيان G يكون **فائق الانتظام** (superregular) إذا كان لا يملك رؤوسًا، أو إذا كان منتظمًا، وكلّ مكون جزئي له فائق الانتظام. ليكن $\mathbf{S}$ الصّفَّ المكوَّنَ من $\{a K_b : a, b \ge 0\}$ (اتحادات منفصلة لعصب متشاكلة)، $\{K_m \,\square\, K_m : m \ge 0\}$ و C_5 ومتممات هذه البيانات:

a) أثبت أنّ كلّ بيان في $\mathbf{S}$ يكون فائق الانتظام، وأنّ كلّ بيان فائق الانتظام غير مترابط يكون في $\mathbf{S}$. (تعليق: في الحقيقة، كلّ بيان فائق الانتظام يكون في $\mathbf{S}$، لكن الإثبات الاستقرائي الكامل لهذا يتطلب صفحات عديدة ([West, 1996], [Maddox, 1996]).

b) أثبت أنّ كلّ بيان فائق الانتظام يكون منتظمًا بقوة.

27.6.8. (+) التشاكلات الذّاتيّة والقيم الذّاتيّة:

a) أثبت أنّ σ يكون تشاكلًا ذاتيًّا لـ G إذا وفقط إذا كانت مصفوفة التباديل المقابلة لـ s إبدالية مع مصفوفة التّجاور لـ G؛ بمعنى أنّ $PA = AP$.

b) ليكن x متجهًا ذاتيًّا لـ G للقيمة الذّاتيّة التي عدد مرات تكرارها 1، ولتكن P مصفوفةَ التبادیل للتشاكل الذاتي لـ G. أثبت أنّ $Px = \pm x$.

c) استنتج أنه عندما تكون كل قيمة ذاتية لـ G مكررة مرة واحدة فقط، فإن كل تشاكل ذاتي لـ G هو تبديلة عودة إلى الأصل (involution)، بمعنى أن مربع هذه التبديلة يعطي العنصر المحايد.

(Mowshowitz,[1969], Petersdorf – Sachs [1969])

28.6.8. (+) لتكن $l_1, \ldots, l_n$ مصابيحَ ضوئيةً متحكمًا فيها من خلال المفاتيح $s_1, \ldots, s_n$. المفتاح i يغير حالة المصباح i إلى تشغيل/ إغلاق وربما مصابيح أخرى، ولكن s_i يغير حالة l_j إذا وفقط إذا كان s_j يغير حالة l_i. مبدئيًّا، افترض أنّ المصابيح جميعها مغلقة. أثبت أنه يمكن تشغيل المصابيح جميعها. (Peled [1992]) (مساعدة: يُستخدم هنا الفضاءات المتجهة، وليس القيم الذاتية).

ملحق (Appendix A)

الخلفية الرياضية (Mathematical Background)

يلخص هذا الملحق أوجه اللغة والرياضيات التي لا تعدّ جزءًا مباشرًا من نظرية البيان، إلا أنها تزودنا بخلفية مفيدة لتعلم هذه النظرية، وسنذكر الأمثلة في سياق البيانات عندما يكون ذلك مناسبًا. لذا، من المفيد قراءة هذا الملحق وربطه مع الوحدة الأولى. إن هذا التقديم (العرض) منمذج على المادة الموجودة في النصف الأول من كتاب التفكير الرياضي لكل من :

.Douglas B. West, John P. D`Angelo (prentice – Hall, second edition, 2000)

المجموعات (Sets)

إن أول مفهوم رياضي أساسي ومهم هو مفهوم المجموعة، لأننا لا نستطيع تعريفها بواسطة مفاهيم أبسط. حيث إننا نفكر فيها على أنها جمع (حشد) من الأشياء المختلفة التي لها وصف دقيق يعطينا طريقًا لمعرفة (من حيث المبدأ) ما إذا كان شيء معين موجودًا فيها أم لا.

A.1. تعريف: تسمى الأشياء الموجودة في المجموعة عناصر أو أعضاء. وعندما يكون x عنصرًا في A، فإننا نكتب $x \in A$، ونقول: إن "x ينتمي إلى A"، ولكن عندما لا يكون x في A، فإننا نكتب $x \notin A$.

وإذا تحقق أن كل عنصر في مجموعة B يكون عنصرًا في المجموعة A، فنقول: إن B مجموعة جزئية من A، وأن A تحوي B. ونكتب $B \subseteq A$ أو $A \supseteq B$. ونكتب $B \subset A$ إذا كانت A تحوي B ولا تساويها.

فعلى سبيل المثال، يمكننا الحديث عن مجموعة البيانات A التي لها n من الرؤوس، وعندما نضيف شرطًا إضافيًا كأن يكون البيان مترابطًا، فإننا نحصل على مجموعة جزئية من A.

وعندما نضع قائمة صريحة بعناصر المجموعة، فإننا نضع أقواسًا متوسطة حول هذه العناصر. فمثلاً، عندما نكتب "$A = \{-1, 1\}$" فإن هذا يعني أن المجموعة A تحوي عنصرين هما 1 و 1-. إن كتابة عناصر المجموعة بترتيب مختلف لا يغيرها. ونكتب $x, y \in S$ لنعني أن x و y عنصران في S.

A.2. مثال: نستخدم الحروف: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ بوصفها أسماء لمجموعات الأعداد الطبيعية، والأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية، والأعداد الحقيقية على الترتيب. لاحظ أن $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. نتعامل مع

هذه المجموعات وعناصرها كأشياء معروفة. واصطلاحًا، فإن الصفر ليس عددًا طبيعيًّا. لذا، فإن $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ ومجموعة الأعداد الصحيحة هي:

$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ومجموعة الأعداد غير الكسرية Q هي مجموعة الأعداد الحقيقية التي يمكن وصفها على صورة a/b حيث كل من $a, b \in \mathbb{Z}$ و $a \neq 0$. $Q = \{{}^{a}/_{b} : a,b \in \mathbb{Z} : b \neq o\}$

وكذلك نفترض أن الخواص الحسابية الأساسية لأنظمة الأعداد معروفة، وهذا يشمل القواعد الجبرية، والمساواة، والمتباينات. ويشمل ذلك أيضًا الخواص الأساسية المتعلقة بقسمة الأعداد الصحيحة. ■

A.3. تعريف: نقول: إن المجموعتين A و B متساويتان، ونكتب $A = B$، إذا كان لهما العناصر نفسها. أما المجموعة الخالية Ø، فهي المجموعة الوحيدة التي لا تحتوي على عناصر. في حين نقصد بالمجموعة الجزئية الفعلية من A كلَّ مجموعة جزئية من A غير مساوية لها.

إن المجموعة الخالية هي مجموعة جزئية من كل مجموعة، فضلًا عن أن كل مجموعة تعدّ مجموعة جزئية من نفسها. إن تعريف البيان الجزئي (التعريف 1. 1. 16) مشابه لهذا التعريف. وكل بيان هو بيان جزئي من نفسه، إلا أنه يجب إهمال شيء للحصول على بيان جزئي فعلي.

«إن حل مشكلة رياضية» في الغالب يعني إعطاء وصف أسهل لمجموعة معطاة، ويجب إثبات أن مجموعة الأشياء التي تحقق الوصف الجديد تساوي المجموعة المعطاة.

A.4. ملاحظة: مساواة المجموعات

لإثبات أن $A = B$، علينا أن نبرهن أن كل عنصر في A هو عنصر في B، وأن كل عنصر في B هو عنصر في A. أي؛ يجب أن نثبت أن $A \subseteq B$، وأن $B \subseteq A$. ويكفي أيضًا أن نحوّل وصف مجموعة إلى وصف المجموعة الأخرى عن طريق عمليات لا تغير عضوية العناصر.

يعطي هذا الكتاب العديد من براهين المبرهنات التي تعطي أوصافًا مميزة لبعض صفوف البيانات، وأن مثل هذه المبرهنة تنص على أن المجموعتين هما المجموعة نفسها (مثال: إن مجموعة البيانات الثنائية الفرع تساوي مجموعة البيانات التي ليس لها حلقات فردية – المبرهنة18.2.1).

غالبًا، يعرِّف النموذج الرياضي مجموعة S من الحلول؛ إن هذه هي الأشياء التي تحقق شروط المسألة. ونرغب في إيجاد الحلول صراحة أو وصفها، وهذا يحدد مجموعة T. إن المسألة الآن هي إثبات أن $S = T$. ويعني إثبات $S \subseteq T$ أن كل حل ينتمي إلى T. كما أن إثبات $T \subseteq S$ يعني أن كل عنصر في T يكون حلًّا للمسألة. ■

A.5. ملاحظة: كيفية تحديد مجموعة

لتكن A مجموعة معطاة، قد نرغب في تحديد مجموعة جزئية S مؤلفة من عناصر A التي تحقق شرطًا أو خاصية معينة. ولعمل ذلك؛ نكتب "$S = \{x \in A : condition(x)\}$" ونقرأ هذا على الشكل "إن S هي مجموعة العناصر x التي تحقق الشرط". فعلى سبيل المثال، إن التعبير $\{n \in N : n^2 \leq 25\}$ هو صورة أخرى للمجموعة $\{1، 2، 3، 4، 5\}$.

وبهذه الصورة، فإن المجموعة A تشكل المجتمع الكلي لـ x. وبإمكاننا أن نهمل هذا الجزء من الرمز عندما يكون المقصود واضحًا من السياق. فعلى سبيل المثال، إن المجموعة $\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ هي مجموعة مربعات الأعداد الصحيحة الموجبة. ■

تنويه: يوجد للعديد من المجموعات أسماء أو رموز شائعة.

A.6. تعريف: نكتب $\{a, ..., b\}$ عادة للتدليل على المجموعة $\{i \in \mathbb{Z} : a \leq i \leq b\}$، في حين نكتب $[n]$ للتدليل على المجموعة $\{1, ..., n\}$ حيث $n \in \mathbb{N}$، ونكتب $[0] = Ø$. إن مجموعة الأعداد الزوجية هي:

$\{2k: k \in \mathbb{Z}\}$. أما مجموعة الأعداد الفردية فهي $\{2k+1: k \in \mathbb{Z}\}$. وأن نوعية العدد الصحيح هي فردية أو زوجية.

لاحظ أن 0 عدد زوجي، وأننا نتحدث عن الأعداد الزوجية والفردية فقط عند حديثنا عن الأعداد الصحيحة. ولاحظ كذلك أن كل عدد صحيح إما أن يكون عددًا زوجيًّا أو عددًا فرديًّا، ولكنه لن يكون الاثنين معًا.

A.7. تعريف: إن التجزئة لمجموعة A هي مجموعات جزئية $A_1, \ldots, A_k$ من A بحيث يظهر كل عنصر من عناصر A في مجموعة واحدة فقط من هذه المجموعات.

إن مجموعة الأعداد الزوجية والفردية معًا تشكلان تجزئة لمجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$. فإذا كانت $A_1, \ldots, A_k$ تجزئة معينة للمجموعة A، فإن المجموعات $A_1, \ldots, A_k$ تسمى "قوالب" أو "صفوفًا" أو "أجزاء" أو "مجموعات جزئية". إن كلمة قوالب شائعة الاستخدام في الرياضيات التوافقية (التركيبية). ولهذه الكلمة تعريف مختلف في نظرية البيان. لذا، نستخدم عادة كلمة صفوف أو مجموعات. أما مصطلح المجموعات الجزئية فنستخدمه عند تجزئة رؤوس بيان معين إلى مجموعات مستقلة.

A.8. ملاحظة: اصطلاح يتعلق بالمجتمعات (المجموعات) الكلية.

عندما نكتب "$[n]$" فمن الواضح أن n عدد صحيح غير سالب، وعندما نتكلم عنه بوصفه عدد رؤوس لبيان، فإننا نعلم من السياق أنه عدد طبيعي، وعندما نقول إن العدد موجب دون تحديد نظام الأعداد الذي يحوي هذا العدد، فإننا نعني عددًا حقيقيًّا موجبًا. لذا، فإن كتابة: افترض $x > 0$ تعني: افترض أن x عدد حقيقي موجب. ولكن في العبارة لـ $n \geq 2$ ، افترض أن G بيان على n من الرؤوس، فإن اصطلاحنا هو أن $n \in \mathbb{N}$.

A.9. تعريف: نقول: إن المجموعة A مجموعة منتهية إذا وفقط إذا وُجد ارتباط واحد لواحد بين A و $[n]$ لبعض $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. يشير n إلى حجم A، ونكتبه على الشكل $|A|$.

إن خاصية أولية أُخرى لأنظمة الأعداد هي أنه لا يمكن للمجموعة A أن تكون مرتبطة ارتباطًا واحدًا لواحد مع كل من $[m]$ و $[n]$ إذا كان $m \neq n$. لذا، فإن حجم المجموعة المنتهية هو عدد صحيح معرَّف تعريفًا حسنًا. وعدّ المجموعة يعني تحديد حجمها وتعيينه.

A.10. ملاحظة: كلمة " إذا " في التعريفات اصطلاحٌ شائع عندما نعرِّف خاصية رياضية، حيث نقول: إن شيئًا له خاصية معينة إذا حقق شرطًا معينًا. وبناءً على هذا، يمكن تعويض الشرط بالخاصية، والعكس بالعكس. لذا، فإن "إذا" تعني إذا وفقط إذا، إن هذا الاستخدام الاصطلاحي في التعريفات يعكس سمةَ أن المفهوم الذي يتم تعريفه غير موجود حتى يكون التعريف كاملاً. ■

تنويه: يوجد العديد من الطرق الطبيعية للحصول على مجموعات جديدة من مجموعات قديمة أو معطاة سابقًا.

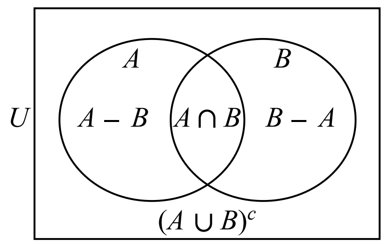
A.11. تعريف: افترض أن A و B مجموعتان، يتألف اتحادهما $A \cup B$ من العناصر الموجودة في A أو في B كلها أو في كليهما. فضلًا عن أن تقاطعهما $A \cap B$ يتألف من العناصر الموجودة جميعها في كل من A و B في الوقت نفسه. والفرق بينهما $A - B$ يتكون من العناصر الموجودة في A جميعها وغير الموجودة في B. أما الفرق التماثلي $A \Delta B$ فيتكون من العناصر جميعها التي تنتمي إلى مجموعة واحدة فقط من المجموعتين A و B.

ونقول: إن المجموعتين منفصلتان إذا كان تقاطعهما يساوي المجموعة الخالية $\emptyset$ وإذا كانت A مجموعة محتواة في مجموعة كلية U، فإن المتممة $\overline{A}$ لـ A هي مجموعة عناصر U التي لا تنتمي إلى A.

وعندما نتحدث عن أخذ (إيجاد) المتممة لبيان بسيط، فإننا نحافظ على مجموعة الرؤوس دون أي تغيير، ونأخذ متممة مجموعة الأضلاع (نعاملها بوصفها مجموعة أزواج من الرؤوس) ضمن المجموعة الكلية التي تمثل أزواج الرؤوس. وفي أحيان أخرى، نتكلم عن المتممة $\overline{S}$ لمجموعة الرؤوس S في G، وفي هذه الحالة، فإن $\overline{S} = V(G) - S$.

A.12. ملاحظة: في شكل فن (Venn)، يمثل الصندوقُ الخارجي المجموعةَ الكلية المأخوذة في الحسبان، كما أن المناطق الموجودة داخل الصندوق تمثل المجموعات. وترتبط المناطق غير المتداخلة (المتقاطعة) بالمجموعات المنفصلة. إن المناطق الأربعة في شكل فن أدناه الخاص بالمجموعتين A و B تمثل $A \cap B$، $A\text{-}B$، $\overline{(A \cup B)}$، و $B\text{-}A$ لاحظ أن $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

بما أن $A - B$ تتكون من عناصر A غير الموجودة في B، فإن $A - B = A\,\overline{B}$. وبالمثل، فإن الشكل يوحي بأن $\overline{B}$ هي اتحاد $A - B$ و $\overline{(A \cup B)}$، والتي هي منفصلة. إضافة إلى أنه يوحي أيضًا بأننا نحصل على الفرق التماثلي $A \Delta B$ من الاتحاد بحذف التقاطع. ■



A.13. ملاحظة: عندما تكون A و B مجموعتين، فإن $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. إن الاتحاد يبدأ بالعناصر جميعها الموجودة على الأقل في واحدة من هاتين المجموعتين، ونحذف العناصر الموجودة في كليهما.

عندما تكون A و B مجموعتين منتهيتين، فإن $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$. يُحسَبُ كل عنصر في التقاطع مرتين في كل جانب، أما حساب كل عنصر من عناصر الفرق التماثلي فيتم مرة واحدة في كل جانب، ولا يحسب أي عنصر آخر. ■

A.14. تعريف: نعني بقائمة من مدخلات A مجموعة من عناصرها بترتيب معين؛ حيث يسمح بتكرار العناصر. إن العديد k $(k - tuple)$ - هي قائمة تحوي k مدخلة. ونكتب A^k للتدليل على مجموعة العديدات $k-$ التي مدخلاتها من A. وفي الحالة التي تكون فيها $A = \{0,1\}$، فإن A^k تمثل مجموعة العديدات $k-$ الثنائية. الزوج المرتب (x,y) قائمة بمدخلتين. ونعرف الضرب الكارتيزي (الديكارتي) للمجموعتين S و T على الصورة: $S \times T = \{(x, y) : x \in S, y \in T\}$.

لاحظ أن $A^2 = A \times A$، وأن $A^k = \{(x_1, \ldots, x_k) : x_i \in A\}$، نقرأ x_i على الشكل x أدنى i. عندما $S = T = \mathbb{Z}$، فإن الضرب الديكارتي $S \times T$ يكون الشبكة الصحيحة (شبكة إحداثياتها أعداد صحيحة).

وهي تمثل مجموعة نقاط المستوى التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

محددات القياس والبراهين (Quantifiers and Proofs)

بكلام تقريبي، يمكن تحديد صحة العبارة الرياضية أو خطئها، ويتطلب هذا إيجاد قواعد رياضية صحيحة، إضافة إلى قياس المتغيرات وتحديدها.

فعلى سبيل المثال، في الجملة $x^2-4 = 0$، لا يمكن أن نقول أو أن نحدد ما إذا كانت صحيحة أم خطأ بسبب عدم معرفتنا بقيم x. وتصبح عبارة رياضية إذا سُبِقَتْ بكتابة مثل "عندما $x = 3$" أو $x \in \{-2, 2\}$، أو لبعض الأعداد الصحيحة x.

إذا أصبحت الجملة $p(x)$ عبارة رياضية في حال أخذ المتغير x قيمة في مجموعة معينة S، فإن الجملتين التاليتين تكونان عبارات رياضية.

«لكل $x \in S$، فإن الجملة $P(x)$ تكون صحيحة» «لبعض $x \in S$، فإن الجملة $P(x)$ تكون صحيحة.

15.A. تعريف: في العبارة "لكل $x \in S$، $P(x)$ صحيحة»، إن المتغير x محدد ومقاس كليًّا. ونكتب هذا على الشكل $(\forall x \in S)\ P(x)$ ونقول: إن الرمز $\forall$ هو محدد قياس كلي. أما في العبارة لبعض $x \in S$، فإن $P(x)$ صحيحة، فإن المتغير x محدد ومقاس وجوديًّا. ونكتب هذا على الشكل $(\exists x \in S)p(x)$، ونقول: إن الرمز $\exists$ هو محدد قياس وجودي. وتسمى مجموعة القيم المسموحة للمتغير بالمجتمع الكلي أو بالمجموعة الكلية لهذا المتغير.

16.A. ملاحظة: الكلمات الإنجليزية التي تستخدم في التعبير عن محددات القياس.

إن الكلمتين «كل» و«لكل» تعبران عن محددات القياس الكلية، أما الكلمتان «بعض» و «يوجد» فتعبران عن محددات القياس الوجودية (وجود الشيء أو عدم وجوده). ويمكن التعبير عن محددات القياس الكلي أيضًا من خلال حديثنا عن عنصر اختياري في مجموعتنا الكلية كقولنا «افترض أن x عدد صحيح» أو كقولنا «إذ رسب طالب في الامتحان، فإنه سيرسب في المقرر (المادة)". تجد أدناه قائمة بالمؤشرات الشائعة على التحديد والقياس.

كلي ($\forall$)	(مساعدات)	وجودي ($\exists$)	(مساعدات)
لكل، لكل عنصر		لبعض	
إذا	فإن	يوجد	بحيث
عندما، لـ، معطى		على الأقل واحد	يتحقق له
كل، أي	يحقق	بعض	يحقق
a، اختياري	يجب	له	بحيث إن
اجعل	يكون		

يمكن أن تكون «المساعدات» غائبة. فمثلاً، العبارة «مربع العدد الحقيقي غير سالب». هذه العبارة تعني أن $x^2 \geq 0$ لكل $x \in \mathbb{R}$، وهي ليست عددًا حقيقيًّا واحدًا، ولا يمكن إثبات صحتها أو التحقق منها بإعطاء مثال. عندما نكتب أنه لا توجد للبيان الثنائي الفرع حلقة فردية، فإننا نعني أن كل بيان ثنائي الفرع يخلو من حلقة فردية.

وعندما نكتب، افترض أن G بيان ثنائي الفرع، فإن ذلك يعني أننا نأخذ في الحسبان كلّ بيان ثنائي الفرع. ولكن عندما نأخذ رأسًا اختياريًا في البيان، فهذا يعني أننا نتحدث عن كل رأس من رؤوس هذا البيان. أما عندما نتحدث عن زوج اختياري من رؤوس بيان، فإننا نتكلم عن كل زوج على حدة.

الفرق بين "لكل G من جهة ولكل بيان G من جهة أخرى" هو أننا – في الثانية – حددنا المجموعة الكلية للمتغير G المحدد قياسيًّا تحديدًا كليًّا. ■

إن المحددات القياسية الوجودية تتحدث عن حدود دنيا كقولنا: «يوجد» أو «يوجد اثنان» التي تعني أنه «يوجد اثنان على الأقل» والعبارات مثل: «يوجد وحيد» أو يوجد اثنان بالضبط فتشير إلى المساواة. وقد تكون هذه المساواة واضحة من السياق أحيانًا، إلا أنه لا يوجد ضرر من الحديث عنها صراحة عندما تكون مقصودة».

إن العبارة يمكن أن تحوي أكثر من محدد قياسي، خذ في الحسبان الجملة «توجد بيانات خالية من المثلثات بحيث إن عددها اللوني كبير اختياريًّا». وبالتعبير عن محدداتها القياسية صراحة، فإنها تعني أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ يوجد بيان خالٍ من المثلثات، عدده اللوني يساوي n على الأقل. إن التعبير «كبير اختياريًّا» غالبًا ما يعني أو يشير ضمنيًّا إلى محدد قياسي كلي بهذه الطريقة.

وبالمقارنة، فإن التعبير «كبير كفاية» يفرض ضمنيًّا محددًا قياسيًّا وجوديًّا. فعلى سبيل المثال، إن العبارة $2^n > n^{1000}$ عندما تكون n كبيرة كفاية تعني أنه " يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث إن $2^n > n^{1000}$ لكل $n \geq N$ ".

A.17. ملاحظة : يعتمد معنى العبارة التي تحوي أكثر من محدد قياسي على ترتيب هذه المحددات. قارن بين الجملتين التاليتين:

«لكل بيان G يوجد $m \in \mathbb{N}$، بحيث إن درجة $v \in V(G)$ جميعها تساوي m على الأقل".

«يوجد $m \in \mathbb{N}$، بحيث إن لكل بيان G، تكون درجة $v \in V(G)$ جميعها تساوي m».

إن العبارة الأولى صحيحة، أما الثانية فغير صحيحة. لكل بيان (منتهٍ) درجة كبرى، لكن لا يوجد أكبر من بين البيانات جميعها. الآن، نكتب العبارتين باستخدام رموز المنطق:

$$(\forall G)(\exists m \in N)(\forall v \in V(G))(d_G(v) \leq m)$$
$$(\exists m \in N)(\forall G)(\forall v \in V(G))(d_G(v) \leq m)$$

في الإنجليزية، غالبًا ما تظهر المحددات القياسية في نهاية الجملة لتجميل القراءة أو تزيينها، كما في المثال "أشعر بالسعادة في كل مرة أتعلم فيها شيئًا جديدًا". وفي الجمل التي تحوي مفاهيم مجردة وتحوي أكثر من محدد قياسي، فإننا نتبنًى اصطلاحات حول الترتيب من أجل تجنب اللبس أو الخلط.

نطبق التحديدات (المحددات) القياسية بالترتيب نفسه الذي تظهر به في الجملة، وعلى وجه الخصوص، نختار متغيرًا بدلالة المتغيرات السابقة.

فعلى سبيل المثال، في العبارة $(\forall G)(\exists m \in \mathbb{N})\, p(G,m)$ لدينا الحرية في اختيار m بعد معرفة ماهية G. أما في العبارة $(\exists m \in N)(\forall G)\, p(G,m)$ فيجب أن نختار m واحدة صالحة لكل G. ■

A.18. ملاحظة : نفي العبارات المحددة قياسيًّا

الرمز المنطقي الخاص بالنفي هو $\neg$. إذا كانت العبارة أن كل $x \in S$ تجعل $P(x)$ صحيحة عبارة غير صحيحة، فلا بدّ من وجود بعض $x \in S$ بحيث إن $P(x)$ تكون غير صحيحة. وبالمثل، فإن نفي عبارة محددة بمحدد قياس وجودي يعطي نفيًا لمحدد قياسي كلي. وبالرموز فإن:

$\neg[(\forall x \in S)p(x)]$ لها معنى $(\exists x \in S)(\neg p(x))$ نفسه، وأن $\neg(\exists x \in S)(p(x))$ لها معنى $[(\forall x \in S)\neg p(x)]$ نفسه.

لاحظ أن مجتمع (المجموعة الكلية) التحديد لا يتغير بإجراء عملية النفي على عبارة معينة. فعلى سبيل المثال. إن العبارة غير الصحيحة في ملاحظة A. 17 كانت:

$$\left(\exists m\in\mathbb{N}\right)\left(\forall G\right)\left(\forall v\in V\left(G\right)\right)\left(d_G(v)\leq m\right)$$

وأن نفيها هو: $\left(\forall m\in\mathbb{N}\right)\left(\exists G\right)\left[\neg\left(\forall v\in V\left(G\right)\right)\left(d_G(v)\right)\leq m\right)]$، والتي نبسطها أكثر لتصبح $\left(\forall m\in\mathbb{N}\right)\left(\exists G\right)\left(\exists v\in V\left(G\right)\right)\left(d_G(v)>m\right)$. إن هذه العبارة هي "لكل عدد طبيعي m، يوجد بيان، له رأس درجته أكبر من m". وهي عبارة صحيحة. ■

تسمح الروابط المنطقية (أدوات الربط المستخدمة في المنطق) لنا ببناء عبارات مركبة.

19.A. تعريف: روابط المنطق، في الجدول الآتي، نعرِّف العمليات المسماة في العمود الأول من خلال صحة قيمها المحددة في العمود الأخير.

الاسم	الرمز	المعنى	شرط صحة العبارة
النفي	$\neg P$	ليس P	P غير صحيحة (خطأ).
توحيد، عطف	$P\wedge Q$	P و Q	كل منهما صحيحة.
فصل، انفصال	$P\vee Q$	P أو Q	إحداهما صحيحة
ثنائي الشرط	$P\Leftrightarrow Q$	P إذا وفقط إذا Q	لهما قيم الصواب نفسها.
شَرْطي	$P\Rightarrow Q$	P تتضمن Q	تكون Q صحيحة عندما تكون P صحيحة.

20.A. ملاحظة: العطف والفصل محددات قياسية حول صحة مركبات (مكونات) عبارات كل منهما. إن العطف "و" يكون صحيحًا، عندما تكون كل مركبة من مركبات عبارته صحيحة، أما الفصل "أو" فيكون صحيحًا، عندما توجد مركبة من بين مركبات عبارته صحيحة. إن فهمنا للنفي يعطينا تكافؤًا منطقيًّا بين $\neg\left(P\wedge Q\right)$ و $(\neg P\vee\neg Q)$ من جهة و $\neg\left(P\vee Q\right)$ و $(\neg P\wedge\neg Q)$ من جهة أخرى. ■

21.A. تعريف: في العبارة الشرطية $P\Rightarrow Q$، نسمي P فرضًا وQ نتيجة. أما العبارة $Q\Rightarrow P$ فهي عكس العبارة $P\Rightarrow Q$.

22.A. ملاحظة: العبارات الشرطية. إن العبارات الشرطية هي النوع الوحيد في التعريف 19.A الذي يتغير معناه بتبديل أدوار p و Q. لا يوجد تضمين عام بين $P\Rightarrow Q$ وعكسها $Q\Rightarrow P$. خذ في الحسبان العبارات الثلاثة الآتية عن بيان G:

العبارة P :G مسار.

العبارة Q :G بيان ثنائي الفرع.

العبارة R :G خالٍ من الحلقات الفردية.

هنا، نعلم أن $P\Rightarrow Q$ صحيحة، ولكن $Q\Rightarrow P$ غير صحيحة، ومن ناحية أخرى نعلم أن كلًّا من $R\Rightarrow Q$ و $Q\Rightarrow R$ عبارتان صحيحتان.

لاحظ هنا أن G متغير، ولقد أسقطناه من الرموز المستخدمة في العبارات لأن السياق واضح. إن المعنى الدقيق للعبارة $P\Rightarrow Q$ باستخدام G هو $\forall G\ \ (P(G)\Rightarrow Q(G))$.

وتكون العبارة الشرطية غير صحيحة عندما وفقط عندما يكون الفرض والنتيجة غير صحيحين. لذا فإن معنى $P\Rightarrow G$ هو $\left(\neg p\right)\vee\ Q$: إن هاتين العبارتين متكافئتان منطقيًّا. وتكون كل عبارة شرطية بفرض غير صحيح صحيحة دائمًا بغض النظر عن صحة النتيجة. إن معنى $\neg P\Rightarrow Q$ هو $p\wedge\left(\neg Q\right)$. ■

نضع على الصفحة اللاحقة قائمة طرق لقول إن $P\Rightarrow Q$ باللغة العربية.

إذا كانت P صحيحة، فإن Q تكون صحيحة.	تكون P صحيحة فقط إذا كانت Q صحيحة.
تكون Q صحيحة عندما تكون P صحيحة.	P شرط كاف لـ Q.
Q صحيحة إذا كانت P صحيحة.	Q شرط ضروري لـ P.

مهمة الرياضيات إعطاء براهين للتضمينات. ويمكن تفسير العبارة المحددة قياسيًّا بمحدد قياسي كلي على أنها عبارة شرطية. حيث إن للعبارة " $(\forall G \in \boldsymbol{G})(p(G))$" معنى العبارة نفسها"، وإذا كان $G \in \boldsymbol{G}$، فإن $P(G)$ (افترض أن تكون العبارتان في الحالة التي تكون فيها $\boldsymbol{G}$ عائلة بيانات ثنائية الفرع، و$P(G)$ هي القول بأن لـ G حلقة فردية).

تنويه: طرق الإثبات الأساسية تأتي من المعنى للعبارات الشرطية.

A.23. ملاحظة: برهنة التضمينات.

الطريق المباشر لإثبات أن $P \Rightarrow Q$ هو بافتراض أن P صحيحة، ونستخدم التعليل الرياضي لنستنتج أن Q صحيحة. عندما تكون p هي العبارة " $x \in A$ "، و Q هي «$Q(x)$" فإن الطريق المباشر يرى أن $x \in A$، ويستنتج $Q(x)$. لا يوجد إثبات «بإعطاء مثال». يجب أن ينطبق الإثبات على كل عنصر من عناصر A كمثال ممكن على x.

إن المكافئ العكسي للعبارة: $P \Rightarrow Q$، هو أن $\neg Q \Rightarrow \neg P$. كل عبارة من هاتين العبارتين تفشل فقط في الحالة التي تكون فيها p صحيحة و Q غير صحيحة. لذا، فإن هاتين العبارتين متكافئتان، وهذا يعني إمكانية برهنة أن $P \Rightarrow Q$ عن طريق إثبات أن $\neg Q \Rightarrow \neg P$. وتسمى هذه الطريقة بطريقة المكافئ العكسي.

لقد لاحظنا أن $[(p \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg[p \wedge (\neg Q)]$. لذا، فبإمكاننا أن نبرهن أن $P \Rightarrow Q$ عن طريق برهنة أنه لا يمكن لـ P و $\neg Q$ أن تكونا صحيحتين معًا. وهذه هي طريقة الإثبات بالتناقض.

إن الطريقتين الأخيرتين تؤديان إلى الإثبات غير المباشر، وفي الحالة التي لا يكون فيها الطريق المباشر لبرهنة أن $P \Rightarrow Q$ مُجد، فإننا نقول: "حسنًا، افترض العكس". وعند هذه النقطة، نبدأ من $\neg Q$ ويجب أن نعلم من البداية ما نبحث عنه، هل نرغب في التوصل إلى $\neg P$ (المكافئ العكسي) أم إلى $P \wedge (\neg G)$ للحصول على تناقض. ■

توجد في الكتاب أمثلة على كل طريقة من هذه الطرائق، وإن الإثبات غير المباشر يكون واعدًا عندما يعطي نفيُ النتيجة معلومات مفيدةً، وربما يكون هذا الطريق أسهل من إيجاد إثبات مباشر؛ وذلك لأنه يمكننا من استخدام الفرض ونفيِ النتيجة معًا، وإذا كان التناقض الذي حصلنا عليه هو استحالة تحقق الفرض الأصلي وهو $\neg Q$، فبإمكاننا في هذه الحالة كتابة إثبات مباشر بلغة بسيطة وسهلة، أما إذا حصلنا على $\neg P$، فنكون قد برهنا المكافئ العكسي.

A.24. ملاحظة: العبارات الثنائية الشرط.

إن العبارة الثنائية الشرط " $P \Leftrightarrow Q$ " تحمل معنى "$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$" نفسه. ونقرأها P إذا وفقط إذا Q، حيث $Q \Rightarrow P$ تعني "P إذا Q"، و " $P \Rightarrow Q$ " تعني "P فقط إذا Q".

على الرغم من أننا نبرهن أحيانًا العبارات الثنائية الشرط عن طريق سلسلة من التكافؤات، فإننا نبرهن عادةً العبارة الشرطية وعكسها؛ حيث إن الأخيرة أيضًا هي عبارة شرطية، لكل منهما لدينا الطرق الثلاث الأساسية التي ذكرت أعلاه. ولبرهنة أن" $P \Leftrightarrow Q$ "، فيجب أن نبرهن عبارة واحدة في كل عمود في الجدول أدناه من خلال استخدام طرق الإثبات المعروفة وهي: الإثبات المباشر، والمكافئ العكسي، والتناقض على الترتيب. إن إثبات عبارتين في العمود نفسه يؤول لإثبات العبارة نفسها مرتين.■

$$P \Rightarrow Q \qquad\qquad Q \Rightarrow P$$
$$\neg Q \Rightarrow \neg P \qquad\qquad \neg P \Rightarrow \neg Q$$
$$\neg(P \wedge \neg Q) \qquad\qquad \neg(Q \wedge \neg P)$$

تتساءَل الطلبة في بعض الأحيان عن المعنى الدقيق لكلمات مثل نظرية (Theorem)، وتمهيدية (Lem-ma)، ونتيجة (Corollary) التي تستخدم في التعبير عن النتائج الرياضية وتمييزها. إن كلمة (Lemma) اليونانية تعني (premise) بالإنجليزية، وتمهيدية بالعربية، أما كلمة (therema) اليونانية فتعني بالإنجليزية (Thesis to be proved)، وبالعربية نظرية. لذا، فإن المبرهنة هي نتيجة رئيسة تتطلب جهدًا من أجل إثباتها، أما التمهيدية فهي عبارة أقل حيث تُستخدم عادة للمساعدة على إثبات عبارات أخرى أقوى. في حين تعني كلمة قضية شيئًا نقترحه من أجل أن نبرهنه، ويأخذ هذا جهدًا أقل من جهد إثبات المبرهنة عادة، أما كلمة نتيجة (Corollary) فتأتي من اللاتينية بوصفها تعديلًا لكلمة تعني هدية "gift" ، وعادة تتبع النتيجه مباشرةً من نظرية أو من قضية دون إجراء جهد إضافي.

الاستقراء والتكرار (Induction and Recurrence)

يمكن إثبات العديد من العبارات التي يكون متغيرها عددًا طبيعيًّا عن طريق استخدام الاستقراء الرياضي. في المبرهنة 1.2.1، نصف النسخة الأقوى للاستقراء، أما هنا فسنراجع النسخة العادية من الاستقراء التي يتعلمها معظم الطلبة عندما يصادفون الاستقراء أول مرة. يشتمل الاستقراء على خاصية الترتيب الحسن للأعداد الطبيعية، والتي تنص على أن كلّ مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{N}$ تحوي عنصرًا أدنى (أقل)؛ حيث نتعامل معها بوصفها حقيقة بديهية، وبوصفها جزءًا من فهمنا الحدسي لماهية الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. وعلى الرغم من أننا نضع مبدأ الاستقراء كمبرهنة، إلا أنه في الحقيقة يكافئ خاصية الترتيب الحسن للأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$.

25.A نظرية : (مبدأ الاستقراء) افترض أن $P(n)$ عبارة رياضية لكل $n \in \mathbb{N}$. إذا تحققت الخاصيتان (a) و (b) أدناه، فإن العبارة $P(n)$ تكون صحيحة لكل $n \in \mathbb{N}$.

(a) $P(1)$ صحيحة.

(b) إذا كانت $P(k)$ صحيحة لكل $k \in \mathbb{N}$ ، فإن $P(k+1)$ تكون صحيحة.

الإثبات: إذا كانت $P(n)$ غير صحيحة لكل n، فإن مجموعة الأعداد الطبيعية التي تفشل فيها العبارة تكون مجموعة غير خالية. ومن خاصية الترتيب الحسن، يوجد حد أدنى لهذه المجموعة، ويكون هذا الحد عنصرًا من عناصر هذه المجموعة. من (a)، الحد الأدنى لا يمكن أن يكون العدد 1. ومن (b)، نجد أنه لا يمكن أن يكون أكبر من 1. إن هذا التناقض يضمن صحة النتيجة $P(n)$ لكل n. ■

عند تطبيق طريقة الاستقراء، فإننا نبرهن العبارة (a) في المبرهنة 25.A بوصفها خطوة الأساس، والعبارة (b) بوصفها خطوة الاستقراء. إن العبارة (b) هي عبارة شرطية وفرضها "$P(k)$ صحيحة" هو فرض الاستقراء. سنقوم بعرض (تقديم) مثال واحد بلغة رسمية نوعًا ما.

26.A قضية : إذا كانت S مجموعة n من الخطوط في مستوى، بحيث إن كل خطين فيها يتقاطعان في نقطة واحدة، وبحيث لا يشترك ثلاثة منها في نقطة واحدة، فإن S تقطع المستوى إلى $1+n(n+1)/2$ منطقة.

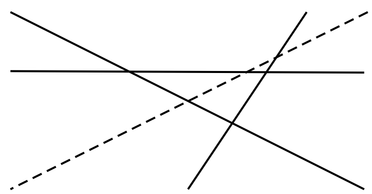
الإثبات: نستخدم الاستقراء على n لإثبات الادعاء لكل $n \in \mathbb{N}$. افترض أن $P(n)$ هي العبارة التي تنص على أن الادعاء يتحقق لهذه المجموعات جميعها التي تحوي n من الخطوط.

الخطوة الأساس ($P(1)$). بوجود خط واحد، نعلم أن عدد المناطق يساوي 2، وهذا يساوي$1+1(1+1)/2$.

خطوة الاستقراء ($P(k) \Rightarrow P(K+1)$). إن العبارة $p(k)$ هي فرضية الاستقراء. افترض أن S عبارة عن مجموعة مؤلفة من $k+1$ خطًّا تحقق الشروط. اختر خطًّا L في S (الخط المنقط في الشكل)، واجعل S' هي مجموعة الـ k خطًّا التي نحصل عليها بحذف L من S.

بما أن S' تحقق الشروط، فإن فرض الاستقراء ينص على أن S' تقطع المستوى إلى $1+k(k+1)/2$ منطقة. وبإعادة L إلى مكانه الأصلي، فيُقطَع بعض المناطق. إن الزيادة في عدد المناطق تساوي عدد المناطق التي يقطعها L؛ حيث يتحرك L من منطقة إلى أخرى وذلك في كل مرة يقطع فيها خطًّا من الخطوط الموجودة في S'. وبما أن L يقطع هذه الخطوط جميعها؛ لأنه يقطع كل خط منها مرةً واحدة، فإن الخطوط في S' تقطع L إلى $k+1$ قطعة. وكل قطعة ترتبط بمنطقة يقطعها L. لذا، فإن عدد المناطق التي تشكلها S يزيد بمقدار $k+1$ على عدد المناطق التي تشكلها S'. إذن، عدد المناطق التي تشكلها S يساوي:
$1+k(k+1)/2+(k+1)=1+(k+1)(k+2)/2$

وبذلك نكون قد برهنا أن $P(k) \Rightarrow P(K+1)$. إن مبدأ الاستقراء يضمن تحقق النتيجة لـ $n\in\mathbb{N}$ جميعها. ■



27.A. ملاحظة: يوحي النقاش في القضية 26.A بالعديد من التعليقات والملاحظات حول الإثبات بالاستقراء. أولاً، لاحظ أنه كان بإمكاننا استخدام $n = 0$ بوصفها خطوة الأساس لبرهنة العبارة للأعداد غير السالبة n جميعها.

لاحظ أنه لا يتضح مباشرةً من نص المسألة أن عدد المناطق يكون هو نفسه للمجموعات جميعها التي تحوي n من الخطوط، إلا أن هذا يتضح لأننا برهنا صيغةً لهذا العدد تعتمد على n فقط.

في إثبات خطوة الاستقراء، بدأنا بـ L التي تُعَدُّ مثالاً أو شاهدًا لمسألة أكبر حجمًا. ويؤكد هذا الطريق أننا أخذنا في الحسبان هذه الشواهد جميعها، وسنعود إلى هذه النقطة بعد قليل.

لقد برهنا $P(k+1)$ من $P(k)$ كما اقترح في فرع (b) من المبرهنة 25.A في معظم أمثلة هذا الكتاب، نستخدم صياغة مختلفة منسجمة أكثر مع مبدأ الاستقراء القوي الذي تم قُدِّم في الدرس 2.1. لإثبات $P(n)$ لكل $n \in \mathbb{N}$، وفي هذا المثال، يمكننا أن نكتب "خطوة الأساس: $n = 1$..." إذن "خطوة الاستقراء: $n > 1$...". ففي إثبات خطوة الاستقراء، نأخذ في الحسبان مجموعة اختيارية S مؤلفة من n خطًّا، ونطبق فرض الاستقراء على المجموعة S' التي نحصل عليها بحذف خط واحد L.

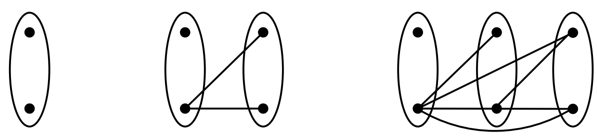
إن محتوى الإثبات هو نفسه في كلتا الصياغتين. إن الصياغة التي وصفناها للتو تؤكد وتشدد على البند الذي يتم برهنة الادعاء حوله. إن خطوة الأساس تحقق مباشرة الادعاء لأصغر قيمة لوسيط الاستقراء. وعندما يكون للوسيط قيمة أكبر، فإن الادعاء حول البند يُبرهن بافتراض أن الادعاء يتحقق لبند سابق، وهذه هي خطوة الاستقراء. إن العودة لها كلما اقتضى الأمر تعطي تحقق الادعاء لكل قيمة لاحقة لهذا الوسيط. ■

يعاني العديد من الطلبة بعض المشاكل عند بداية تعلمهم استخدام الاستقراء في نظرية البيان. وتتلخص هذه المشاكل في جانبين؛ الجانب الأول هو أن العبارة $P(n)$ التي نرغب بإثباتها بالاستقراء هي نفسها عبارة شرطية $A(n) \Rightarrow B(n)$، وأن فرضية الاستقراء هي $A(n-1) \Rightarrow B(n-1)$. لقد عُرض نموذج جاهز لخطوة الاستقراء في هذه الحالة في الملاحظة 25.3.1، كما توجد أمثلة على هذا في هذا الفصل.

أما الجانب الثاني الذي نسميه «مصيدة الاستقراء»، فقد نوقش مطولاً في المثال 26.3.1، وسنعطي مثالاً آخر مستخدمين اللغة التي استخدمت في إثبات $P(n+1)$ من $P(n)$ والتي قد تقود الطالب إلى فخ في بعض الأحيان.

28.A. مثال: مسألة التصافح بالأيدي. افترض أن حفلة التصافح بالأيدي من الرتبة n (أي حفلة من الرتبة n أو حفلة n-) هي حفلة لـ n من الأزواج المتزوجين، حيث إن الأزواج لا يصافحون بعضهم بعضًا، وأن الـ $2n - 1$ فردًا عدا المضيف يتصافحون مع أعداد مختلفة من الأشخاص الموجودين. وهنا سنستخدم الاستقراء في برهنة أن المضيفة تصافح $n - 1$ شخصًا بالضبط.

ننمذج الحفلة بوصفها بيانًا بسيطًا تمثل رؤوسه الأشخاص الموجودين في الحفلة، وتمثل أضلاعه الأزواج الذين يتصافحون. إن درجة الرأس هي عدد شركاء التصافح. وإذا لم يصافح أي زوج (زوجة)، زوجته (زوجها) فإن درجة الرأس تكون بين 0 و $2n - 2$. والشرط في هذه المسألة هو أن الـ $2n - 1$ عدد غير المضيف تكون مختلفة يتضمن أن درجات الرؤوس تمتد من 0 إلى $2n - 2$. يمثل الشكل أدناه البيان الذي يجب أن يكون في حال أن $n \in \{1, 2, 3\}$، إن كل زوج من الرؤوس المحاط بدائرة يعني أن الشخصين متزوجان؛ حيث يظهر المضيف والمضيفة في أقصى يمين كل بيان.



الخطوة الأساس: إذا كانت $n = 1$، فإن المضيفة تتصافح مع 0 شخصًا (والذي يساوي $n - 1$)؛ لأن المضيف والمضيفة لا يتصافحان. خطوة الاستقراء (باطلة): إن خطوة الاستقراء هي أن الادعاء يصلح لحفلات n-. خذ في الحسبان مثل هذه الحفلة. من فرض الاستقراء، إن درجة المضيفة (الرأس الذي يُمثل المضيفة) تساوي $n - 1$، ومن نقاشنا السابق، فإن درجات الرؤوس ما عدا المضيف هي $2n\text{-}2,\dots,0$. نُشكل حفلة $(n + 1)$- بإضافة ثنائي آخر (زوج وزوجة). افترض أن أحد الزوجين من الثنائي الجديد يصافح كل شخص في الـ n ثنائيًّا الأولى. لذا، فإن درجات الرؤوس التي تمثل هؤلاء الأشخاص تصبح على النحو $2n - 1, \dots, 1$ ، فضلًا عن أن درجات الرؤوس التي تمثل الزوج الجديد هي: 0 و $2n$. لذا، فإن الشكل (الهيئة) الأكبر هي الحفلة $(n + 1) -$. وقد زادت درجة الرأس الذي يمثل المضيفة بمقدار 1، لذا، فإن درجة هذا الرأس تساوي n.

خطوة الاستقراء (صحيحة، ومتحققة): إن فرض الاستقراء هو أن الادعاء صحيح لحفلات $n-$ جميعها. خذ في الحسبان حفلة $(n + 1) -$، من نقاشنا السابق، نعلم أن درجات الرؤوس ما عدا درجة الرأس الذي يمثل المضيف هي $0, \dots, 2n$. افترض أن p_i ترمز إلى الشخص الذي درجته (درجة الرأس الذي يمثله) i من بين هؤلاء. بما أن p_{2n} يصافح الأشخاص جميعهم ما عدا شخصًا واحدًا، والشخص p_o الذي لا يصافح أحدًا يجب أن يكون الشخص المفقود من مصافحة p_{2n}. لذا، فإن p_o يمثل زوجة p_{2n} بالإضافة لذلك، فإن الثنائي المتزوج $S = \{p_o, p_{2n}\}$ ليس المضيف والمضيفة؛ لأن المضيف ليس من المجموعة $\{p_o, \dots, p_{2n}\}$.

إن كل شخص غير موجود في S يتصافح مع شخص واحد بالضبط في S، وخصوصًا (بالاسم) مع p_{2n}. إذا

حذفنا S للحصول على حفلة أصغر، تبقّى لدينا n من الثنائيات (الزوجات) (وهذا يشمل المضيف والمضيفة) حيث لا يوجد أي شخص يتصافح مع زوجه، وكل شخص يتصافح مع عدد يقل بواحد عن العدد الكلي لكامل الحفلة. إذن، في الحفلة الأصغر، نجد أن الأشخاص يتصافحون مع عدد مختلف منهم ما عدا المضيف.

بحذف المجموعة S، نحصل على حفلة n – (حذف الزوج الموجود في أقصى اليسار في الصورة لـ $n = 3$ يعطينا الصورة في حال أن $n = 2$). وتطبيق فرض الاستقراء على الحفلة - n يخبرنا أنه ما عدا الزوجين في S، فإن المضيفة تتصافح مع $n - 1$ شخصًا. وبما أنها تتصافح مع p_{2n} أيضًا في S، فإنها تتصافح مع n شخصًا في كامل الحفلة $(n + 1)$ –. ■

التعليل الأول في المثال 28.A يسقط في فخ (مصيدة) الاستقراء، لأنه لا يأخذ في الحسبان الحفلات – $(n + 1)$ الممكنة جميعها، بل إنه – فقط - يعد الحفلات التي نحصل عليها بإضافة ثنائي (متزوج) إلى حفلة n – بطريق معين، دون إثبات إمكانية الحصول على كل حفلة – $(n + 1)$ بهذه الطريقة.

البدء بحفلة – $(n + 1)$ اختيارية يجبرنا على إثبات أن كل حفلة – $(n + 1)$ تظهر بهذه الطريقة من أجل الحصول على شكل يمكننا أن نطبق عليه فرض الاستقراء، لا يمكننا حذف أي ثنائي متزوج للحصول على حفلة أقل فقط. بل يًجب علينا أن نجد ثنائيًّا S بحيث يتصافح كل شخص خارج S مع شخص واحد فقط في S. وعند ذلك - فقط - نجد أن الحفلة الأصغر تحقق الفرضيات اللازمة لتكون حفلة - n .

إن الحاجة إلى إثبات أن الشيء الأصغر الموجود لدينا يحقق الشروط في فرضية الاستقراء، يحل محل الحاجة إلى إثبات أن الأشياء ذات الحجم الأكبر جميعها تمّ توليدها من خلال إنبات (إنماء) شيء ذي حجم أصغر.

في بعض الأحيان، نجد أن إثبات خطوة الاستقراء يستخدم أكثر من شاهد (مثال) سابق. إذا استخدمنا $P(n-1)$ و $P(n-2)$ لإثبات $P(n)$ دائمًا، فيجب أن نتحقق من صحة $P(1)$ و $P(2)$ وذلك بوصفها بداية. إن إثبات خطوة الاستقراء غير صحيح (باطل) عندما $n = 2$، وذلك بسبب عدم وجود $P(0)$ بوصفها بداية. وأن إثبات خطوة الاستقراء غير صحيح (باطل) عندما $n = 2$ أيضًا لعدم وجود $P(0)$ متاحة للاستخدام.

29.A مثال: افترض أن $a_1, a_z, \ldots$ معرفة على الشكل $a_1 = 2, a_2 = 8$ و $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ لكل $n \geq 3$. نبحث عن صيغة لـ a_n بدلالة n. الآن، من الممكن أن نخمن الصيغة التي تحقق هذه المعطيات وتناسبها. يعطينا التعريف أن $a_3 = 34$، $a_4 = 64$، و$a_5 = 160$. وتحقق هذه القيم جميعها أن $a_n = n\ 2^n$. آخذين في الحسبان اقتراحنا بشأن هذه الصيغة، وبإمكاننا محاولة إثباتها عن طريق الاستقراء.

عندما $n=1$، لدينا $a_1=2=1\cdot 2^1$. وعندما تكون $n=2$، تصبح عندما $a_1=8=2.2^2$ وفي كلتا الحالتين نجد أن الصيغة صحيحة. وفي خطوة الاستقراء، سنقوم بإثبات أن هذه الصيغة صحيحة لكل $n\geq 3$. حيث نفترض أن الصيغة صحيحة للشواهد (الأمثلة) السابقة $n-1$ و$n-2$، وهذا يسمح لنا بحساب a_n باستخدام تعريفها بدلالة القيم السابقة:
$$a_n = 4\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right) = 4\left[\left(n-1\right)2^{n-1} - \left(n-2\right)2^{n-2}\right] = \left(2n-2\right)2^n - (n-2)2^n = n\ 2^n.$$
إن صحة الصيغة لـ a_n تتبع من صحتها لكل من $n-1$ و-2، وهذا ينهي الإثبات. ■

في هذا الإثبات، يجب أن نتحقق من صحة الصيغة لقيم $n = 1$، و $n - 2$ في الخطوة الأساس، إن إثبات خطوة الاستقراء غير صحيح (باطل) لـ $n = 2$. والمثال 29.A يحدد قيم $a_p, a_2, \ldots$ من خلال علاقة معاودة (تكرار). أما الحد العام، فإنه يُحدد عن طريق استخدام حدود سابقة. وبالمثل، إثبات القضية 26.A يحدد

قيم ... $a_1, a_2,$ من خلال علاقة معاودة (تكرار). الحد العام يُحدد عن طريق استخدام حدود سابقة. وبالمثل، إثبات القضية 26.A يعطينا علاقة معاودة للعدد r_n الذي هو عدد المناطق المُشكلة من قبل r_n من الخطوط حيث إن $r_n = r_{n-1}+n$، علمًا بأن $r_1 = 2$.

إذا استخدمت علاقة المعاودة k من الحدود السابقة لحساب a_n، فيجب أن يكون لديك في هذه الحالة k من القيم الابتدائية من أجل تحديد الحدود بالضبط، ويسمى هذا معاودة (تكرار) من الرتبة k. إن العبارات التي تُبرهن بالاستقراء، والمتعلقة بمعاودة من الرتبة k تفرض التحقق من صحة k من الشواهد (الأمثلة) في خطوة الأساس. إن التقنيات القياسية (المعيارية) من التوافقية (التركيبية) العدية تعطي حلولاً للعديد من علاقات التكرار دون تخمين الصيغة أو استخدام الاستقراء.

وفي بعض الأحيان، نستخدم حسابات المعاودة أيضًا في نظرية البيان. حيث يمكن أن يكون لدينا قيمة لكل بيان G بدلاً من بيان واحد فقط من كل «حجم» كما يكون الأمر في متتالية. إذا استطعنا التعبير عن القيمة لبيان G بوصفه صيغة بدلالة بيانات عدد أضلاعها أقل (واستطعنا تحديد القيم للبيانات التي ليس لها أضلاع)، فإننا نحصل على معاودة مرة أخرى. ونستخدم هذه التقنية لحساب الأشجار المولدة (الدرس 2.2) والتلوينات الفعلية (الدرس 3.5).

الدوال

تقوم الدالة بنقل (تحويل) عناصر مجموعة معينة إلى مجموعة أخرى.

30.A تعريف: الدالة f قاعدة من المجموعة A إلى المجموعة B بحيث إنها تُحدد لكل عنصر $a \in A$ عنصرًا وحيدًا $f(a)$ في B، ويسمى $f(a)$ بصورة a تحت f. للدالة f (تكتب $f: A \longrightarrow A$)، تسمى المجموعة A مجال f، في حين تسمى المجموعة B مجموعة الهدف، إن مجموعة صور f هي المجموعة $\{f(a): a \in A\}$ حيث إن A هي مجموعة مجال f.

يمكننا افتراض أن الكثير من الدوال الأولية دوال معروفة مثل دالة القيمة المطلقة وكثيرات الحدود (كل منها معرف على $\mathbb{R}$). «الحجم» هو دالة، مجالها مجموعة المجموعات المنتهية وهدفها $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

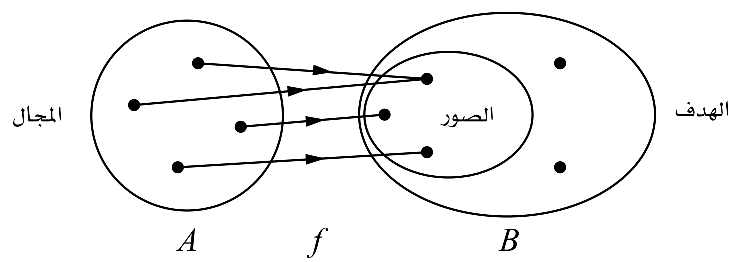
31.A تعريف: لـ $x \in \mathbb{R}$، نعرف دالة الأرضية $\lfloor x \rfloor$ على أنها أكبر عدد صحيح أقل من x أو يساويه. في حين نعرف دالة السقف $\lceil x \rceil$ على أنها أصغر عدد صحيح أكبر من x أو يساويه. أما المتتالية، فتعرف على أنها دالة مجالها $\mathbb{N}$.

إن دالة كل من الأرضية والسقف تنقل $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{Z}$. عندما يكون هدف المتتالية A، فإننا نحصل على متتالية من العناصر في A، ونُعبر عن ذلك على الشكل $a_1, a_2, a_3, \ldots$، حيث $a_n = f(n)$. لقد استخدمنا الاستقراء في الإثبات متتاليات من العبارات، وكذلك في الإثبات صيغ تحدد متتاليات من الأعداد.

ربما نرغب في معرفة مدى سرعة نماء (نمو) دالة من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ وعلى وجه الخصوص عند تحليل الخوارزميات. فعلى سبيل المثال، نقول: إن نمو الدالة تربيعي على الأكثر إذا كانت محدودة بكثيرة حدود من الدرجة الثانية، وذلك لقيم جميعها مدخلاتها الكبيرة كفاية. إن نقاشًا أكثر دقة لمعدلات نمو الدوال يظهر في ملحق B.

32.A. ملاحظة : التمثيل التخطيطي. الدالة $f : A \to B$ معرفة على A، وتنقل A إلى B. لنتخيل دالة $f : A \to B$، نرسم منطقة تمثل A، ومنطقة أخرى تمثل B، ثم نرسم من كل $x \in A$ سهمًا إلى $f(x)$ في B. بلغة البيان الموجه، إن هذا يُنتج توجيهًا لبيان ثنائي الفرع، ومجموعتا فرعيه هما: A و B حيث يمثل كل عنصرٍ من عناصر A ذيلاً لضلع واحد بالضبط.

صورة الدالة (مجموعة صور عناصر المجال) تكون محتواة في الهدف. لذا، نرسم منطقة الصورة داخل منطقة الهدف. ■



لوصف أي دالة؛ لا بد من تحديد قيم $f(a)$ لكل $a \in A$. حيث نستطيع وضع قائمة بالأزواج $(a, f(a))$، ونعطي صيغة لحساب $f(a)$ من a، أو نعطي وصفًا بكلمات للقاعدة التي من خلالها نحصل على $f(a)$ من a.

33.A. تعريف: نقول: إن الدالة $f : A \to B$ دالة تناظر إذا تحقق أن: لكل $b \in B$ يوجد عنصر واحد بالضبط $a \in A$ بحيث إن $f(a) = b$.

تحت التناظر، يكون كل عنصر في الهدف صورة لعنصر واحد فقط من عناصر المجال. لذا، عندما نمثل دالة التناظر كما في الملاحظة 32.A، فإن كل عنصرٍ من عناصر الهدف يكون رأسًا لضلع واحدٍ فقط.

34.A. مثال: مزاوجة المتزوجين. افترض أن M تمثل مجموعة الرجال في حفلة، وأن W تمثل مجموعة النساء، إذا كان الحضور يتألف من ثنائيات المتزوجين فقط، فعندئذ يمكننا تعريف دالة $f : M \to W$ بجعل $f(x)$ زوجة x. لكل $w \in W$، يوجد بالضبط عنصر وحيد x في M بحيث إن $f(x) = w$. لذا، فإن f دالة تناظر من M إلى W. ■

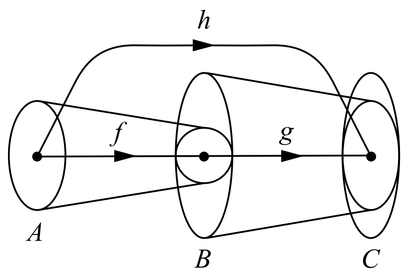
إن دوال التناظر تعمل أزواجًا من عناصر مجموعتين مختلفتين. لذا، فإننا نصف دالة التناظر من A إلى B كذلك. وفي هذا الكتاب نقول بصورة غير رسمية أحيانًا بأن عناصر مجموعة واحدة ترتبط بعناصر مجموعة أخرى. ونعني بهذا وجود ارتباط واحد لواحد طبيعي بين المجموعتين.

عندما تحوي A n من العناصر، فإن تسميتها $a_1, \ldots, a_n$ يعرف تناظرًا من A إلى $[n]$، وبالنظر إلى هذا الارتباط من الاتجاه الآخر، نكون قد عرّفنا تناظرًا آخر من A إلى $[n]$. لاحظ أنه يمكن عكس دوال التناظر جميعها.

A.35. تعريف: إذا كانت f تناظرًا من A إلى B، فإن نظير f هو الدالة $g : B \to A$ بحيث إن لكل $b \in B$ فإن $g(b)$ هي العنصر الوحيد $x \in A$ الذي يحقق أن $f(x) = b$. ونكتب الدالة g على الشكل f^{-1}.

عندما يكون هدف دالة مجالاً لدالة أُخرى، فإنه يمكننا أن نعرِّف الدالة الجديدة من خلال تطبيق الدالة الأولى ثم الدالة الثانية؛ لأن هذا يعطي دالة من مجال الدالة الأولى إلى هدف الدالة الثانية.

A.36. تعريف: إذا كانت $f : A \longrightarrow B$ و $g: B \longrightarrow C$، فإن تركيب g مع f هو دالة $h : A \longrightarrow C$ معرَّفة على الصورة $h(x) = g(f(x))$ لكل $x \in A$. وعندما تكون h هي تركيب g مع f فإننا نكتب $h = g \circ f$.



من التعريف مباشرة، نستطيع بسهولة إثبات أن تركيب تناظرين يعطي تناظرًا. ونستخدم هذه في القضية 24.1.1 لنتحقق من أن تركيب دوال التشاكل يعطي تشاكلاً.

العد ومعاملات ذات الحدين (Counting and Binomial coefficients)

مناقشة طرق العد (التعداد) بسرعة إلى المجاميع وحواصل الضرب، ويمكن ضبط كتابة هذه الأشياء باستخدام الرموز المناسبة.

A.37. ملاحظة: نعبّر عن المجموعة بكتابة $\sum$ وهي الحرف اليوناني الكبير سيجما "*sigma*". عندما يكون كل من a و b أعدادًا صحيحة، فإن قيمة $\sum_{i=a}^{b} f(i)$ تعبّر عن حاصل جمع الأعداد $f(i)$ حيث إن i تتغير على الأعداد الصحيحة من a إلى b. وتسمى i دليل المجموع، في حين تسمى الصيغة $f(i)$ المجمّع.

تكتب $\sum_{i=a} f(j)$ لإيجاد حاصل جمع قيم الدالة ذات القيم الحقيقة f وذلك على عناصر مجموعة S في مجال f. وفي الحالة التي لا نحدد فيها مجموعة جزئية كما في $\sum_{j} x_j$، فإننا نجمع العناصر على المجال كله. وعندما يكون للمجمع رمزٌ واحدٌ بوصفه متغيّرًا، فإننا نستطيع حذف الدليل السفلي على إشارة المجموع كما في $\sum x_i$. يشير الرمز $\prod$ إلى حاصل الضرب، وهذا هو الحرف اليوناني الكبير باي «*pi*»، إضافة إلى أن التعليقات السابقة المتعلقة بـ $\sum$ تنطبق على $\prod$. ■

لاحظ أن قاعدتين بسيطتين تساعدان على تنظيم عد المجموعات المنتهية من خلال تجزئة المسألة إلى مسائل فرعية. إن هذه القواعد تتبع من تعريف الحجم وخواص دوال التناظر.

A.38. تعريف: تنصّ قاعدة الجمع على أنه إذا كانت A مجموعة منتهية بحيث إن $B_1, \ldots ,B_k$ تجزئة لـ A، فإن $|A| = \sum_{i=1}^{m} |Bi|$.

افترض أن T مجموعة يمكن وصف عناصرها باستخدام نهج يشتمل على عدة خطوات $S_1, \ldots, S_m$ بحيث يمكن عمل الخطوة S_i بـ r_i طريقة، بغض النظر عن كيفية إجراء الخطوات $S_1 , \ldots, S_{i-1}$. إن قاعدة الضرب

تنص على أن $|T| = \prod_{i=1}^{K} r_i$.

فعلى سبيل المثال، يوجد q^k قائمة بطول k من مجموعة حجمها q. يوجد q خيارًا لكل موقع، وذلك بغض النظر عن خيارات المواقع الأخرى. من قاعدة الضرب، يوجد q^k طريقة لتشكل عديد (K- tuple) -k.

39.A. تعريف: تسمى دالة التناظر من مجموعة منتهية S إلى نفسها بتبديلة لـ S. إن هيئة الكلمة للتبديلة f للمجموعة $[n]$ هو قائمة على الصورة $f(1), \dots, f(n)$ مع الحفاظ على هذا الترتيب. وأن ترتيبًا لعناصر من مجموعة S قائمة من عناصر S (بترتيب معين). نكتب $n!$ (مضروب n) للتدليل على $\prod_{i=1}^{n} i$، واصطلاحًا، نكتب $0! = 1$.

إن هيئة الكلمة لتبديلة لـ $[n]$ يشمل الوصف الكامل للتبديلة. ولأغراض العد؛ نسمي هيئة الكلمة بالترتيبة. لذا، فإن 614325 تبديلة لـ $[6]$. ومع وجهة النظر هذه، فإن تبديلة لـ $[n]$ ترتيب لعناصر $[n]$ جميعها.

40.A. نظرية : يوجد $n!$ تبديلة لمجموعة فيها n من العناصر (ترتيبات دون تكرار). وعمومًا، عدد ترتيبات k من العناصر المختلفة من مجموعة حجمها n يساوي $n\ (n - 1) \cdots\ (n - k + 1)$.

الإثبات: نحسب القوائم التي فيها k من العناصر المختلفة من مجموعة حجمها n. لا يوجد مثل هذه القائمة عندما $k > n$، وهذا يتفق مع الصيغة المعطاة.

في هذه القوائم، تبني عنصرًا واحدًا في كل مرة وذلك بتحديد العنصر في الموقع $i + 1$ بعد تحديد العناصر في المواقع السابقة.

يوجد n من الطرق لاختيار صورة العنصر 1، ونعمل هذا لكل طريقة. يُوجد $n - 1$ طريقة لاختيار صورة العنصر 2. وعمومًا، بعد اختيارنا أول i من الصور، فإن تجنب هذه الخيارات يترك لنا $n - i$ طريقًا لاختيار الصورة التالية بغض النظر عن الكيفية التي اتبعناها في أول i من الخيارات. إن قاعدة الضرب تعطي أن $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$ هو عدد الترتيبات. ■

تنويه: غالبًا ما يكون ترتيب العناصر في القائمة غير مهم.

41.A. تعريف: اختيار k عنصرًا من $[n]$ هو مجموعة جزئية تحوي k عنصرًا من $[n]$. عدد هذه الخيارات هو (n)، اختر k، واكتبه على الشكل $\binom{n}{k}$.

إذا كان $k < 0$، أو $k > n$، فإن $\binom{n}{k}=0$. في هذه الحالات لا يوجد خيارات لـ k من العناصر من $[n]$. وعندما يكون $0 \le k \le n$، فإننا نحصل على صيغة بسيطة.

42.A. نظرية : للأعداد الصحيحة n و k حيث $0 \le k \le n$، يكون: $\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$.

الإثبات: نضع علاقة بين الاختيارات والترتيبات. حيث نحسب ترتيبات k من العناصر من$[n]$ بطريقتين هما: أ- إن التقاط العناصر للمواقع كما في المبرهنة 40.A يعطينا أن عدد الترتيبات هو $n(n - 1)(n - k + 1)$.

ب- نستطيع أن نختار أولاً مجموعة جزئية فيها k من العناصر، ثم نكتبها بترتيب معين. وبما أن التعريف

$\binom{n}{3} = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)/6$

يضمن وجود $\binom{n}{k}$ خيارًا، فإن قاعدة الضرب تعطينا أن عدد الترتيبات هو $\binom{n}{k}k!$ لعدد الحجج.
وفي كل حالة، نحسب عدد الترتيبات. لذا، نستنتج أن $n(n-1)...(n-k+1) = \binom{n}{k}k!$. وبالقسمة على $k!$ يكتمل الرهان. ■

يمكن كتابة الصيغة $\binom{n}{k}$ على الشكل $\frac{n!}{(n-k)!k!}$، إلا أن الشكل الموجود في المبرهنة 42.A يميل ليكون مفيدًا أكثر، خاصة عندما يكون k صغيرًا. فعلى سبيل المثال $\binom{n}{2} = n(n\text{-}1)/2$ و$\binom{n}{3} = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)/6$ ، حيث تمثل الأولى عدد أضلاع البيان التام على n من الرؤوس، يعكس هذا الشكل التعليل الحسابي ويختصر الـ $(n - k)!$ التي تظهر في البسط والمقام.تسمى الأعداد $\binom{n}{k}$ بمعاملات ذات الحدين؛ لأنها تظهر بوصفها معاملات في القوة n لمجموع حدين.

43.A. نظرية : (نظرية ذات الحدين)، لكل $n \in \mathbb{N}$ ، $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

الإثبات: يشرح الإثبات عملية ضرب العوامل في حاصل الضرب $(x + y)(x + y)...(x + y)$. ولإيجاد حد في حاصل الضرب؛ يجب أن نختار x أو y من كل عامل. إن عدد العوامل التي تُسهم بـx هو عدد صحيح k في $\{0,......,n\}$، في حين تسهم الـ $n - k$ عاملاً الباقية في y. إن عدد الحدود التي على الصورة $x^k y^{n-k}$ يساوي عدد الطرق لاختيار k من العوامل المساهمة بـ x. والجمع على k يأخذ الحدود جميعها في الحسبان. ■

باستخدام تعريف الحجم وتركيب دوال التناظر، نجد أن المجموعتين المنتهيتين A و B لهما الحجم نفسه إذا وفقط إذا وُجدَت دالة تناظر من A إلى B. لذا، نستطيع حساب الحجم عن طريق إيجاد دالة تناظر بينهما وبين مجموعة أخرى معروفة الحجم.

بعض الأمثلة البسيطة تشمل عبارات مثل: إن للبيان التام $\binom{n}{2}$ ضلعًا، لذا يوجد $2^{\binom{n}{2}}$ بيانًا بسيطًا على مجموعة الرؤوس $[n]$. إن القضية 32.3.1 تستخدم دالة تناظر لحساب الحلقات السداسية في بيان بيترسون، إضافة إلى أن التمرين.32.3.1 يستخدم دالة تناظر لحساب عدد البيانات التي مجموعة رؤوسها هي $[n]$ ودرجاتها زوجية.أما المبرهنة 3.2.2. فإنها تستخدم التناظر لحساب الأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$.

44.A. تمهيدية : لكل $n \in \mathbb{N}$، عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ ذات الحجم الزوجي يساوي عدد المجموعات الجزئية من $[n]$ ذات الحجم الفردي.

الإثبات: إثبات 1 (تناظر). في كل مجموعة جزئية ذات حجم زوجي، احذف العنصر n إذا ظهر، وأضفه إن لم يظهر. إن هذا يغير الحجم دائمًا بمقدار 1، وينتج مجموعة ذات حجم فردي. وأن هذه الدالة هي دالة تناظر؛ لأن كل مجموعة جزئية فردية تحوي n تظهر فقط من مجموعة جزئية زوجية تحذف n، وكل مجموعة جزئية تحذف n تظهر فقط من مجموعة جزئية زوجية تحوي n.

إثبات2 (نظرية ذات الحدين). ضع $x = -1$ و $y = 1$ في المبرهنة 43.A لتحصل على $\sum_{k=o}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (-1+1)^n = o$. (لاحظ أننا برهنّا المبرهنة 43.A باستخدام دوال تناظر) . ■

سنبرهن بعض المتطابقات التي تشتمل على معاملات ذات الحدين لتوضيح بعض التعليلات التوافقية

التي تشتمل على تناظرات وفكرة حساب المجموعة بطريقتين. لاحظ أنه يمكننا إثبات المساواة عن طريق إثبات أن كلًّا من الطرفين يحسبان المجموعة نفسها.

A.45. تمهيدية : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

الإثبات: إثبات 1 (حساب بطريقتين). من التعريف، نعلم أنه يوجد لـ $[n]$ $\binom{n}{k}$ مجموعة جزئية من الحجم k. لاحظ أن طريقة أخرى لحساب اختيار k من العناصر، وهي حساب اختيار $n - k$ من العناصر لنحذفها، ويوجد $\binom{n}{n-k}$ من هذه العناصر.

إثبات 2 (التناظر). إن الطرف الأيسر يحسب المجموعات الجزئية من $[n]$ التي فيها k من العناصر، أما الطرف الأيمن، فإنه يحسب المجموعات الجزئية التي فيها $n - k$ من العناصر، بالإضافة إلى أن عملية «أخذ المتممة» تضمن وجود دالة تناظر بين المجموعتين (الجمعين) . ■

في الغالب، إن الحساب بطريقتين يعني تجميع العناصر بطريقتين، وفي بعض الأحيان العد (الحساب) فقط يعطي حدًّا على المجموعة، وفي هذه الحالة، يبرهن التعليل العدي (الحسابي) وجود متباينة. يوجد الكثير من الأمثلة (الشواهد) على هذه الظاهرة في الوحدة 3 (انظر أيضًا التمرين 31.3.1). هنا سنلزم أنفسنا بالمساويات.

A.46. تمهيدية : (متطابقة الرئيس) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

الإثبات: كل طرف من المساواة يحسب كيفية الحصول على لجان في كل منها k من الأشخاص، ويعين لها رئيس من بين مجموعة من n شخصًا. عن اليسار، نختار اللجنة، ثَمّ نختار منها الرئيس، أما عن اليمين، فإننا نختار الرئيس، ثم نختار باقي أعضاء اللجنة. ■

العديد من الطلبة ينظر للصيغة الآتية على أنها أول تطبيق للاستقراء، إلا أنه أيضًا يمكن برهنتها بسهولة عن طريق حساب (عد) مجموعة بطريقتين.

A.47. تمهيدية $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

الإثبات: الطرف الأيمن هو $\binom{n+1}{2}$ ، ويمكننا النظر إلى هذا على أنه حساب الفترات غير التافهة التي أطرافها في المجموعة $\{1,...n+1\}$. من جانب آخر، نستطيع تجميع الفترات بحسب الطول؛ حيث توجد فترة واحدة طولها n، وفترتان من الطول $n - 1$، وهكذا حتى نصل إلى أنه توجد n فترة طول كل منها يساوي $\binom{l}{k}$. ■

يمكن تعميم التمهيدية A.47 $\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+}$. لبرهنة هذا عن طريق الحساب؛ نُجزِّئ أولاً بتجزئة مجموعة المجموعات الجزئية للمجموعة $[k + 1]$ التي تحوي $n + 1$ عنصرًا إلى زمر بحيث إن حجم الزمرة i يساوي ، ثم نحسب معاملات ذات حدين عن طريق التكرار.

A.48. تمهيدية : (صيغة باسكال)، إذا كان $n \geq 1$ ، فإن $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

الإثبات: نحسب المجموعات k– (المجموعات التي تحوي k عنصرًا) في $[n]$.

يوجد $\binom{n-1}{k}$ من هذه المجموعات التي لا تحوي n، ويوجد $\binom{n-1}{k-1}$ من هذه المجموعات تحوي n. ■

بإعطاء الشروط الابتدائية لـ $n = 0$ وهي $\binom{o}{o} = 1$، و $\binom{o}{k} = 0$ لـ $k \neq 0$، فإنه يمكن استخدام صيغة باسكال لإعطاء إثبات استقرائي للعديد من العبارات المتعلقة بمعاملات ذات الحدين، بما في ذلك كلّ من المبرهنتين 42.A، و 43.A.

49.A. ملاحظة: (معاملات متعددات الحدود). يمكن تعميم نظرية ذات الحدين ومعاملاتها إلى متعددات الحدود. عندما $\sum n_i = n$، فإن معامل متعددة الحدود $\binom{n}{n_1,\dots,n_k}$ هو معامل $\Pi x_i^{n_i}$ في تمديد $\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)^n$، وقيمتها تساوي $n!/\Pi n_i!$. وتظهر الحدود على الشكل $\Pi x_i^{n_i}$ في التمديد فقط عندما $\sum n_i = n$. وبخلاف ذلك، لا يوجد أي شيء نحسبه (نعده)، ونقول إن $\binom{n}{n_1,\dots,n_k} = 0$ عندما $\sum n_i \neq n$.

المساهمات لهذا المعامل ترتبط بعديدات -n التي هي ترتيبات لـ n من الأشياء، باستخدام n_i نسخة من الشيء i لكل i. إن الحصول على نسخة i في موقع j يرتبط باختبار الحد x_i من العامل $j(x_1 + \dots + x_k)$.

نشتق الصيغة $n!/\Pi n_i!$ من خلال حساب هذه الترتيبات. يوجد $n!$ من الترتيبات لـ n من الحدود المختلفة. إذا افترضنا أن هذه الأشياء مختلفة، فإننا نحسب كل ترتيبة $\Pi n_i!$ مرة؛ لأن تبديل النسخ لشيء واحد لا يغير الترتيبات.

في النتيجة 2.2.4، ترتبط هذه الترتيبات بالأشجار التي مجموعة رؤوسها $[n]$، ولها درجات رؤوس محددة. وعندما نضع $x_i = 1$ لكل i، فإننا نحصل على العدد الكلي للعديدات -n المشكلة من k نوعًا من الحروف على تضاعفات التكرار جميعها. وبذلك، فإن النتيجة هي k^n. ■

العلاقات (Relations)

إذا أعطينا شيئين s و t ليسا بالضرورة من النوع نفسه، فلربما نسأل عما إذا كانا يحققان علاقة معينة. افترض أن S مجموعة الأشياء من النوع الأول، وأن T مجموعة الأشياء من النوع الثاني. إن بعض الأزواج المرتبة (s, t) ربما تحقق العلاقة، في حين لا يحقق بعضها الآخر ذلك، والتعريف الآتي يلخص هذه الفكرة.

50.A. تعريف: عندما تكون كلّ من S و T مجموعة، فإن أي مجموعة جزئية من $S \times T$ هي علاقة بين S و T، أما العلاقة على S فهي مجموعة جزئية من $S \times S$.

عادة ما نحدد العلاقة بوضع شرط على الأزواج. في الدرس 1.1 نعرف عدة علاقات ترتبط ببيان G. إن علاقة الوقوع بين $S = V(G)$ و $T = E(G)$ هي مجموعة الأزواج المرتبة (v, e) حيث $v \in V(G)$، و $e \in E(G)$، و x نقطة طرفية لـ e. فضلًا عن أن علاقة التجاور على المجموعة $V(G)$ هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) من الرؤوس. بحيث إن x و y نقطتان طرفيتان لضلع.

51.A. ملاحظة: افترض أن R علاقة على مجموعة S، عندما نناقش عدة حدود من S، فإننا نستخدم الصفة زوجًا زوجًا لتحديد أن كل زوج من بين هذه الحدود يحقق R. لذا، يمكننا الحديث عن عائلة من المجموعات المنفصلة زوجًا زوجًا، أو عائلة من البيانات المتشاكلة زوجًا زوجًا. إن المجموعة المستقلة في بيان هي مجموعة الرؤوس غير المتجاورة زوجًا زوجًا، ونعني بمجموعة الأشياء المختلفة كلّ مجموعة مؤلفة من أشياء غير متساوية زوجًا زوجًا.

نحتاج إلى المصطلح "زوجًا زوجًا"؛ لأن العلاقة معرّفة للأزواج، وللسبب نفسه، لا نستخدم "زوجًا زوجًا"

عندما نتحدث عن شيئين فقط. فعندما يكون بيانان متشاكلين، لا نقول إنهما متشاكلان زوجًا زوجًا. وبالمثل نقول: إن النقاط الطرفية لضلع تكون متجاورة ولا نقول: إنها متجاورة زوجًا زوجًا، إن بعض الأزواج المعينة تحقق علاقة التجاور. ■

لتحديد علاقة بين S و T، يمكننا وضع قائمة بالأزواج التي تحققها. ومن المناسب كثيرًا أن نجعل S دليلاً على الصفوف، و T دليلاً على الأعمدة لشبكة من المواقع تسمى مصفوفة. عندئذٍ يكون بإمكاننا أن نحدد العلاقة من خلال تسجيل 1 في الموقع الموجود في صف s وعمود t إذا كان الزوج (s,t) يحقق العلاقة، ونسجل 0 إذا كان الزوج (s, t) لا يحقق هذه العلاقة. لذا، فإن مصفوفات التجاور والوقوع لبيان هي المصفوفات التي تُسجل علاقات التجاور والوقوع (انظر التعريف17.1.1).

إن الشرط "لهما النوعية نفسها" يعرِّف علاقة على $\mathbb{Z}$. إذا تحقق أن كلًّا من x و y عددان زوجيّان أو عددان فرديان، فإن الزوج (x,y) يحقق هذه العلاقة. وبخلاف ذلك، فإن هذا الزوج لا يحقق هذه العلاقة. إضافة إلى أنّ الخواص الأساسية للنوعية تقود إلى صف مهم من العلاقات.

52.A. تعريف: تُعرَّف علاقة التكافؤ على مجموعة S على أنها علاقة R على S بحيث إنه لخيارات العناصر المختلفة جميعها $x, y, z \in S$ يتحقق أن:

a) $(x,x) \in R$ (خاصية الانعكاس)

b) $(x,y) \in R$ تضمن أن $(y,x) \in R$ (خاصية التماثل).

c) $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$ تعطي أن $(x,z) \in R$. (خاصية التعدي).

لكل مجموعة S، لاحظ أن علاقة المساواة $R = \{(x,x) : x \in S\}$ هي علاقة تكافؤ على S. في القضية 24.1.1 ، نبرهن أن علاقة التشاكل هي علاقة تكافؤ على البيانات. لاحظ أن الرمز $G \cong H$ لهذه العلاقة يوحي بنوع من المساواة.

53.A. تعريف: إذا أُعطينا علاقة تكافؤ على S، فإن مجموعة العناصر التي تكافئ $x \in S$ هي صف التكافؤ الذي يحوي x.

صفوف التكافؤ لعلاقة تكافؤ على S تشكل تجزئةً لـ S؛ حيث إن العنصرين x و y ينتميان إلى الصف نفسه إذا وفقط إذا كان الزوج (x,y) يحقق هذه العلاقة، وعكس العبارة السابقة يتحقق أيضًا. فإذا كانت $A_1, \ldots, A_k$ تجزئة S، فإن الشرط «x و y يكونان موجودين في المجموعة نفسها في التجزئة"، يعرِّف علاقة تكافؤ على S.

لاحظ أن النوعية (فردي أو زوجي) تجزِّئ الأعداد الصحيحة إلى صفي تكافؤ بحسب باقي قسمة العدد على 2. إن هذه الفكرة قابلة للتعميم لأي عدد طبيعي.

54.A. تعريف: افترض عدداً طبيعيًا n، يكون العددين الصحيحين x، y شكلي متطابقين من n إذا كان

$x - y$ يقبل القسمة على n. عندها نكتب هذه النتيجة على صورة $x \equiv y$ مود n. حيث n هو الشكل.

A.55. نظرية: لكل $n\in\mathbb{N}$، إن التطابق بمقياس n هو علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

الإثبات: خاصية الانعكاس: $x\text{-}x = 0$، وهذا يقبل القسمة على n

خاصية التماثل: إذا كان $x \equiv y \mod n$ ، فإن n يقسم $x - y$ (من التعريف). لذا، فإن n يقسم $y - x$، لأن n يقسم m إذا وفقط إذا تحقق أن n يقسم $-m$. لذا، فإن $y \equiv x \mod n$.

خاصية التعدي: إذا كان $n|(x - y)$ و $n|(y - z)$، فتوجد أعداد صحيحة a وb بحيث إن $x - y = an$ و $Y - z = bn$ ، وبجمع هاتين المعادلتين، نجد أن $x - z = (a + b)n$. لذا، فإن $n|(x - z)$، إذن، العلاقة متعدية. ■

A.56. تعريف: صفوف تكافؤ العلاقة "تطابق بمقياس n" على $\mathbb{Z}$ هي صفوف البواقي أو صفوف التطابق بمقياس n. ونكتب مجموعة صفوف التطابق هذه على الشكل $\mathbb{Z}_n$ أو $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

يوجد n من صفوف البواقي بمقياس n. لكل $0 \le r < n$، إن الصف رقم r في $\mathbb{Z}_n$ هو $\{kn + r : k \in Z\}$. والعددان a و b يقعان في الصف رقم r إذا وفقط إذا كان لهما الباقي نفسه عند القسمة على n. لذا، فإن العبارة $m \equiv r \mod n$ لها المعنى نفسه الذي يشير إلى أن "m تزيد بمقدار r على أحد مضاعفات n»

مبدأ طواقي الحمام(The pigeonhole principle)

مبدأ طواقي الحمام مفهوم بسيط يؤدي إلى براهين رائعة، ويقلل تحليل الحالات. في كل مجموعة أعداد، يقع المتوسط بين أصغر وأكبر قيمة. وعند التعامل مع الأعداد الصحيحة، فإن مبدأ طواقي الحمام يسمح لنا بأخذ السقف والأرضية للمعدل (المتوسط) في الاتجاه المنشود.

A.57. تمهيدية: (مبدأ طواقي الحمام) إذا كان لدينا مجموعة مؤلفة من kn شيئًا، وجزّأناها إلى n صفًّا، فإن أحد هذه الصفوف يجب أن يحوي أكثر من k شيئًا.

الإثبات: إن المكافئ العكسي ينص على أنه إذا وضعنا k شيئًا على الأكثر في كل صف، فإن مجموع هذه الأشياء الكلي يساوي kn على الأكثر. ■

يختصر مبدأ طواقي الحمام ، وتحليل الحالة من خلال السماح لنا باستخدام معلومات إضافية حول عنصر متطرف لمجموعة. هذه الفكرة البسيطة يمكن أن تظهر على نحو غير متوقع، إلا أن استخدامها فاعل جدًّا، فعندما نجد أننا بحاجة إلى استخدام مبدأ طواقي الحمام، فلا توجد أي مشكلة في تطبيقه: نحتاج إلى قيمة كبيرة كفاية في مجموعتنا، ويزّودنا هذا المبدأ بهذه القيمة.

بعض تطبيقات مبدأ طواقي الحمام دقيقة جدًّا. والدرس 3.8 يعطي تقديمًا للعديد منها. وتظهر الدقة عندما لا تكون كيفية تعريف الأشياء والصفوف واضحة، بحيث يمكن عندها تطبيق مبدأ طواقي الحمام.

القضية 15.3.1 تبرهن القضية الآتية باستخدام الملاحظة 13.A. هنا نستخدم مبدأ طواقي الحمام بدلاً من ذلك.

58.A. قضية : إذا كان G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس بحيث إن $\delta(G) \geq (n-1)/2$، فإن G مترابط.

الإثبات: اختر $u,v \in V(G)$. إذا كان $u \nleftrightarrow v$ ، فيوجد على الأقل $n-1$ ضلعًا تربط $\{u,v\}$ إلى بقية الرؤوس. بما أن $\delta(G) \geq (n-1)/2$ ، فيوجد $n-2$ رأسًا آخر. لذا، فإن مبدأ طواقي الحمام يضمن أن أحد هذه الرؤوس يستقبل ضلعين من هذه الأضلاع. وبما أن G بسيط، فإن هذا الرأس يكون جارًا مشتركًا لكل من u و v.

إذن، لكل رأسين $u,v \in V(G)$، نكون قد برهنا أن u و v متجاوران، أو أنّ لهما جارًا مشتركًا. لذا، فإن G مترابط. ■

إن هذا المبدأ يمكن أن يكون مفيدًا في العبارات المتعلقة بالأشجار، حيث يزيد عدد الرؤوس على عدد الأضلاع بمقدار 1. إذا كان كل رأس يختار ضلعًا بطريقة معينة، فإن ضلعًا يجب أن يتم اختياره مرتين، والفكرة هي في تصميم الاختيار بحيث تتحقق النتيجة المطلوبة عندما يتم اختيار ضلع مرتين. التطبيقات على هذه الفكرة موجودة في التمهيدية 10.1.8، وفي المبرهنة 8.3.2 كذلك.

مبدأ طواقي الحمام هو النسخة المنفصلة للعبارة: إن معدل مجموعة من الأعداد يكون بين أصغر وأكبر قيمة، لقد تم الحديث عن هذه العبارة صراحة لدرجات الرؤوس في النتيجة 1.3.4 وقد نُشِرَت تطبيقات أخرى في هذا الكتاب.

ملحق (Appendix B)

الأمثلية والتعقيد (Optimization and Complexity)

يخطّط منـدوب مبيعات لزيارة n - 1 من المـدن الأخرى والعودة إلى مدينته؛ حيـث يهدف إلى تقليل الفترة الزمنية الكلية التي تسـتغرقها هذه الرحلة. إذا عيّنا وزنًا لكلّ ضـلع في K_n مساويًا لزمن الرحلة بين المدينتين المقابلتين، فإنّنا نبحث عن حلقة مولّدة بأصـغر وزن كلّيّ. وهذه هي **مسألة مندوب المبيعات المتجوّل** (TSP) (Traveling Salesman Problem). وهي تشـبه كما يبدو الشّـجرة المولّدة الصـغرى. وحتى الآن، لا تملك خوارزمية جيّدة.

بصورة مشابهة، وعلى الرّغم من امتلاكنا خوارزميّة جيّدة لإيجاد موائمات كبرى، فلا نملك خوارزميّة لإيجاد أكبر حجم لمجموعة مستقلّة من الرؤوس، وبما أنّ المذكور أولاً حالة خاصة من المذكور لاحقًا للبيانات الخطّانيّه، فليس من المستغرب إذن أنْ تحلّ بطريقة أسهل.

صعوبة التحكم (Intractability)

عرَّفنا خوارزميّة جيّدة (التعريف 3.2.3) في زمن تشغيل محدّد بدالة كثيرة حدود بدلالة حجم المدخلات. إنّ إحدى الخوارزميّات لـ TSP تأخذ في الحسبان الحلقات المولّدة جميعها، وتختار أقلّها تكلفة، ولا تعدّ هذه الخوارزمية جيدة؛ لأنّ K_n يملك $(n-1)!/2$ حلقة مولدة، وهذا يكبر بصورة أسرع أيّ دالة كثيرة حدود بدلالة n. إنّ حساب البيانات التي لها حجم ضخم يأخذ وقتًا كبيرًا، والتّطبيقات العمليّة تتطلّب حلّ مسائل TSP على بيانات لها المئات أو الألوف من الرّؤوس.

لم يستطع أحد إيجاد خوارزميّة جيّدة، ولكن لم يستطع أحد كذلك أنْ يبرهن عدم وجودها. تنتمي مسائل TSP إلى صفٍّ كبير من المسائل التي تملك الخاصّيّة التي تفيد أنّ أيّ خوارزميّة جيّدة لأيّ مسألة من هذه المسائل سوف تؤدي إلى خوارزميّة جيّدة لكلّ واحدة منها؛ فخوارزميّة جيدة لـ B تؤدي إلى خوارزميّة جيدة لـ A إذا استطعنا «اختزال» مسألة A إلى مسألة B.

وبوصفه مثالاً سهلاً على هذا، نستطيع استخدام خوارزميّة جيدة لـ TSP (مسألة B) لتَّعرُّف البيانات الهاملتونيّة (مسألة A). من بيان G، شَكِّل مثالاً لـ TSP على مجموعة الرّؤوس$V(G)$ بتعيين الوزن 0 لأزواج الرّؤوس التي تكون أضلاعًا في G، والوزن 1 للأزواج التي لا تكون أضلاعًا في G. يملك البيان G حلقة هاملتونيّة إذا وفقط إذا كانت تكلفة الحلّ الأمثل لهذا المثال لـ TSP تساوي 0. يعدّ زمنُ التحويل كثيرةَ حدود بدلالة $n(G)$. لذلك، فإنّ خوارزميّة لـ TSP تنتج خوارزميّة جيدة لاختبار الحلقات المولّدة، ونستنتج أنّ صعوبة مسائل TSP تكون كصعوبة مسائل الحلقات الهاملتونيّة على الأقل.

في المناقشة الرسمية، نأخذ في الحسبان **مسائل اتخاذ القرار** (**Decision Problems** فقط)، حيث يكون الجواب نعم أو لا. وهذا منطقي لتّعرُّف البيانات الهاملتونيّة. ولكن TSP مسألة أمثلية، وعند صياغتها

بوصفها مسألة قرار (تدعى حلقة مولدة صغرى)، فإنّ مدخلاتها تكون بيانًا موزونًا G وعدد k، وتكون المسألة هي فحص ما إذا كان G يملك حلقة مولدة مع وزن k على الأكثر. يمكن تطبيق مسألة القرار هذه عدة مرات (على الأكثر عدد كثير حدود من التطبيقات) لإيجاد الوزن الأصغر لحلقة واحدة مولدة. وبالمثل، فإنّ مجموعة مستقلّة كبرى ستأخذ بيان G وعددًا صحيحا k بوصفها مدخلات، وتفحص $\alpha(G) \geq k$ كذلك.

الحكم على خوارزميّة بيان سيكون من خلال زمن تشغيلها الأكبر (في أسوأ حالتها) عبر مدخلات على n رأسًا كدالّة بدلالة n. وأنّ **التعقيد** (Complexity) لمسألة القرار هو زمن التشغيل الأصغر لأسوأ حالة عبر خوارزميّات الحلول جميعها، مرة أخرى كدالة بدلالة حجم المدخلات.[1] وفي وصف النّمو لدالّة g، فإنّنا نقارنها بدالة مرجع f. ونعرف العديد من مجموعات دوال بدلالة f؛ حيث إنّ المجموعتين $O(f)$ و $\Omega(f)$ تصفان دوال محدودة من أعلى ومن أسفل بمضاعفات f. في حين أن الدّوال في $\Theta(f)$ تنمو تقريبيًا بمعدل نمو f نفسه، أمّا الدّوال في $o(f)$ فإنها تنمو بصورة أكثر بطئًا. في حين تنمو الدّوال التي في $\omega(f)$ بصورة أسرع.

$$O(f) = \{g: \exists c, a \in \mathbb{R} \text{ بحيث } |g(x)| \leq c\,|f(x)| \text{ لكل } > a\}$$
$$\Omega(f) = \{g: \exists c, a \in \mathbb{R} \text{ بحيث } |g(x)| \geq c\,|f(x)| \text{ لكل } > a\}$$
$$\Theta(f) = O(f) \cap \Omega(f)$$
$$o(f) = \{g: |g(x)|\,/\,f(x)| \to 0\}$$
$$\omega(f) = \{g: |g(x)|\,/\,f(x)| \to \infty\}$$

إنّ صفّ المسائل الذي له تعقيد ككثيرة حدود (يُحَلُّ بخوارزميّة جيدة) يسمى"P". لقد ناقشنا خوارزميّات محدّدة فقط؛ حيث تؤدي كلّ مدخلة إلى حساب زمن كثيرة حدود واحدة بالضبط.

الآن، سنأخذ في الحسبان خوارزميّات غير محدّدة. فللعديد من مسائل القرار التي لم تُعرف لها خوارزميّة جيدة، هناك براهين قصيرة لإجابات نعم. فعلى سبيل المثال، إذا حزرنا التّرتيب الصّحيح للرّؤوس في مسألة الحلقات الهاملتونيّة (معينة بمتتالية مؤلّفة من $O(n \log n)$ بت)، فإنّنا نستطيع التّحقق بشكل سريع أنّ هذا التّرتيب يشكّل حلقة مولّدة.

إنّ أيَّ **خوارزميّة كثيرة حدود زمنية غير محددة** (nondetermisitic polynomial-time algorithm) تجرب القيم جميعها لمتتالية كثيرة حدود طولية من البتات آنيًّا، وذلك بتطبيق حساب كثيرة حدود زمنية لكل حزر (كثرة حدود بدلالة الطول للمدخلة). إذا كان أيّ حزر يظهر جواب نعم لمسألة القرار، فإنّ الخوارزميّة تقول نعم. وخلاف ذلك، فإنّ الجواب يكون لا. وهذا يكافئ القول إنّه عندما يكون الجواب نعم، فإن يوجد لهذه إثبات بكثيرة حدود زمنية، إضافة إلى أنّ عدم التّقرير لا يقع في الجواب، بل في اختيار المسار الحسابيّ.

يُسمى صفُّ المسائل القابلة للحلّ خوارزميّات كثيرة حدود زمنيّة غير محددة "NP". إنّ الآلة التي تملك القوة لتتبّع العديد من مسارات الحسابات المتوازية تستطيع كذلك تتبّع إحداها. لذلك، فإنّ $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$. ويعتقد بصورة شائعة أنّ $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$. إلاّ أنّ هذا غير مبرهن، لذا، لا يمكن أنْ نأخذ NP لتعني "ليست كثيرة حدود". وبدلاً من ذلك، نستخدم الحدّ غير الرّسميّ **صعب التّحكم** (intractable) للمسائل في NP التي تكون صعوبتها كصعوبة المسائل في NP جميعها بصورة أساسيّة.

---

[1] تقنيًّا، الحجم (size) لمثال مسألة هو طولها في تشفير ما، وإنّ قياس الحجم لمسألة بيان بعدد الرّؤوس يكفي لتحقيق الهدف. تكون دالة ما محدودة بكثيرة حدود بدلالة n إذا وفقط إذا كانت محدودة بكثيرة حدود بدلالة n^2 أو n^3. لذلك، فإنّ التمييز غير مهم، إلا إذا كان من الممكن أنْ تملك المدخلة أوزانًا ضلعيّة كبيرة.

يُطلق الوصف **صعب** – NP (NP- hard) على مسألة ما إذا أمكن استخدام خوارزميّة كثيرة الحدود الزّمنيّة الخاصة بها لبناء خوارزميّة كثيرة حدود زمنيّة لكلّ مسألة في NP. أمّا الوصف تام – NP، (NP- complete) ، فيُطلق على المسألة التي تنتمي إلى NP وكانت صعب – NP. وإذا كانت مسألة تام – NP تنتمي إلى P، فإنّ P = NP. لاحظ أنه لا تُعرَف خوارزميّة كثيرة حدود زمنيّة لأيّ من العديد من المسائل تام – NP. وهذا يدعم الاعتقاد السائد بأنّ $P \neq NP$. وقد قدّم كلّ من جيري وجونسون [1979] مقدمة شاملة لهذا الموضوع.

إذا أُعطينا مسألة تام – NP، فإنّ خاصّيّة تام – NP لمسائل أخرى تتبع من تعليلات تقوم على مبدأ الاختزال كما اقترح سابقًا. ونقدّم في هذا الملحق العديد من هذه التّعليلات. وهنا نضع قائمة بالتّعقيدات لبعض المسائل التي نوقشت في هذا الكتاب.

يستخدم الأسلوب القياسيّ في علم الحاسوب أسماء بحروف كبيرة لمسائل القرار. ولأيّ مسألة يحتوي اسمها على أمثليّة، فإنّ مسألة القرار هي فحص ما إذا كانت القيمة هي قيمة قصوى لعدد معطى بوصفه جزءًا من المدخلات. وعلى أيّ حال، فإنّ المتغيرات في الاسم مثبتة بوصفه جزءًا من نصّ المسألة. ويعدّ هذا تمييزًا مهمًّا. فعلى سبيل المثال، فإنّ مجموعة مستقلة من الدرجة k لـ k مثبتة هي في P، لأنّ عدد المجموعات من الدرجة k للرّؤوس هي كثيرة حدود في n درجتها k عندما تكوَن k مثبتة، ونستطيع فحصها كلّها للاستقلالية بصورة بسيطة. ومن ناحية أخرى، فإنّ مجموعة مستقلة كبرى تكون تام – NP؛ وهذه هي المسألة لفحص ما إذا كان G يملك مجموعة مستقلة حجمها k على الأقل ، حيث k جزء من المدخلات (يمكن أنْ تنمو مع n).

مسائل في P	مسائل تام- NP
مجموعة مستقلة من الدرجة k	مجموعة مستقلّة كبرى
خصر (أصغر حلقة)	محيط (أطول حلقة)
حلقة (دارة) أويلريّة	حلقة هاملتونيّة
قطر	أطول مسار، مسار هاملتونية
ترابط	
قابل للتّلوين من الدرجة 2	قابل للتّلوين من الدّرجة k (لأيّ k مثبتة حيث $3 \le k$)
مواءمة كبرى	قابل للتّلوين الضّلعيّ من الدّرجة $\Delta(G)$
سويّة	جنس (نوع)

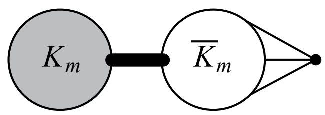
ترتبط خاصّيّة تام – NP بنقص الشّروط الضّرورية والكافية للإجابة بنعم، والقابلة للفحص بصورة سهلة، فضلًا عن أنّ أيّ **تمييز جيد** (good characterization) هو تمييز لشرط قابل للفحص بدلالة كثيرة حدود زمنية. لاحظ أنّ التّمييز للبيانات الأويلريّة جيد، ويمكن حل مسائل الخصر والقطر، وقابلية التلوين من الدّرجة 2 جميعها من خلال كثيرة حدود زمنية باستخدام البحث الأفقيّ أولاً. إنّ السّلوك ككثيرة حدود هو أقلّ وضوحًا للتّرابط، إلا أنّ علاقات أصغر- أكبر مثل نظرية منجر تقود عمومًا إلى خوارزميّات كثيرة حدود زمنية أمثليّة، وغالبًا ما تكون معتمدة على طرق تدفّق الشّبكات (البند 4.3).

الموجهات والحدود (Heuristics and Bounds)

ما زال البائع المتجول ينتظر التّعليمات. إنّ خاصية تام – NP لا تنهي الحاجة إلى جواب. لذا، سوف نبحث عن خوارزميّات موجهة توجد حلولاً قريبة من الأمثليّة. وربما نستطيع أنْ نضمن كم من الممكن أنْ تكون النتيجة بعيدة عن الحلّ الأمثل. فعلى سبيل المثال، قد نقبل بامتلاك حلّ تكلفته على الأكثر ضعفا الحلّ الأمثل عندما تكون لدينا خوارزميّة تستطيع توليد مثل هذا الحلّ بصورة سريعة. وبوجه دائم، فإنّ أيّ **خوارزميّة تقريب** (Approximation algorithm) تولّد حلًّا تكون نسبته إلى الحلّ الأمثل محدودة بثابت[1].

يعدّ الجشع تجربة بسيطة. فلمسألة الشجرة المولدة الصغرى، تكون النتيجة أمثليّة. ولكن في مسائل أخرى، قد يكون إنجاز خوارزميّات الجشع سيّئًا جدًّا. خذ في الحسبان مجموعة مستقلّة كبرى. ولاحظ أنّه يمكن توليد مجموعة مستقلّة كبرى بصورة تكراريّة من خلال اختيار رأس وحذفه مع جيرانه. كيف يجب أنْ نختار الرأس التالي؟ إذا قمنا بالاختيار الصحيح دائمًا، فإنّ النّتيجة تكون مجموعة مستقلّة كبرى. ونحصل على تجربة شرهة باختيار رأس ذي درجة صغرى من الرّؤوس المتبقّية، بسبب أنّ هذا يترك المجموعة الأكبر من المرشحين للمجموعة المستقلّة. ويمكن أنْ تكون النتيجة سيّئة بصورة اختياريّة.

مثال 1.B: حلّ الخوارزميّة الجشعة. خذ في الحسبان $\left(K_1+K_m\right)\vee\overline{K_m}$. لاحظ أنّ هذا البيان يملك رأسًا واحدًا درجته m، و m من الرّؤوس درجتها $m+1$، و m من الرؤوس درجتها $2m-1$. إنّ التّجربة الشّرهة تختار الرّأس الذي درجته صغرى وتحذفه مع جيرانه، تاركة عصبة. لذلك، فإنّ خوارزميّة الشّراهة تعثر على مجموعة مستقلة حجمها 2. ولكن في الحقيقة، فإنّ $\alpha(G)=m$. ■



وعلى الرّغم من ذلك، فإنّ الخوارزميّة الشّرهة تعمل جيّدًا على بيانات كبيرة مولّدة بصورة عشوائيّة. في هذا النموذج (انظر بند8.5)، تجد مجموعة مستقلة دائمًا حجمها على الأقل نصف حجم المجموعة الكبرى تقريبًا. يقدم التمرين 12 تجربتين لغطاء رأسيّ أصغر؛ إحداهما تفشل كما في المثال 1.B، ولكن الأخرى تنجح في إعطاء خوارزميّة تقريب.

بعدها، نأخذ في الحسبان تجارب بسيطة لـ TSP، حيث $\{v_1,\ldots,v_n\}$ الرّؤوس، أمّا w_{ij} فترمز إلى وزن الضّلع v_iv_j. الآن، من رأس بداية عشوائيّ، يبدو أنّ التّحرّك إلى رأس جديد من خلال الضّلع الواقع على هذا الرأس والأقل تكلفة يُعدُّ منطقيًّا. وبصورة مستمرة، فإنّنا نتحرك إلى أقرب جار للرّأس الحاليّ لم يتمّ الوصول إليه سابقًا. هذه هي خوارزميّة "الشّراهة" التي تعمل بصورة سريعة. إنها تجربة **الجار الأقرب** (nearest- neighbor).

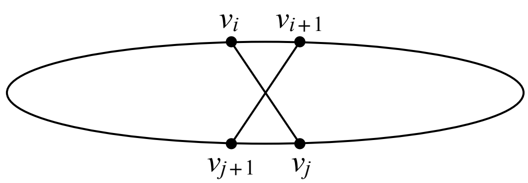
2.B مثال: فشل موجه الجار الأقرب. نأخذ بعين الاعتبار وزن 0 على المسار الهاملتوني P، والوزن n^2 على الخواص المتبقية. لهذا المثال دورات ممتدة من الوزن n، ولكن موجه الجار الأقرب تنتج دورة من الاوزان على الأقل بقيم n^2 من الرأس الأول. لذا يكون ثمن الدورة الناتجة بواسطة اللوغارثيم غير محدود بثابت متعدد التكلفة الأمثل، وهي كذلك ليس تقريب للوغارثيم. ■

يوجد العديد من التّجارب المشابهة، حيث يمكن أنْ نحاول تنمية حلقة بأخذ رأس واحد في كلّ مرّة، وبصورة شرهة نمتصّ الرّأس الذي يسبب إدخاله في الحلقة الزيادة الأقل في التكلفة. تمتلك تجربة **الإدخال الأقرب** (nearest insertion) فرصة أفضل من تجربة الجار الأقرب؛ لأنّه عند مرحلة i في تجربة الجار الأقرب، فإنّنا نختار بين $n-i$ من البدائل، أمّا عند المرحلة i في تجربة الإدخال الأقرب، فإنّنا نختار بين

$(n - i)i$ من البدائل (أيها ستضاف، ومكان إدخالها). وعلىالرّغم من ذلك، فإنّ هذه ليست خوارزمية تقريب أيضًا (التمرين 7).

يعدُّ طريق اقتراب آخر بداية مع حلقة مولّدة مرشّحة ومحاولة تحسينها. إنّ المحافظة على حلّ قابل للتّحقيق (حلقة فعليّة) وإدخال تغييرات طفيفة عليه لتحسينه يدعى بحثًا محليًّا (local search). لاحظ أنّ السّماح بالتغييرات يأخذنا خارج نطاق الخوارزميّات الشّرهة، وربّما يكون الأداء بصورة أفضل.

لتحسين الحلقة الحاليّة، نأخذ في الحسبان تغيير زوج من الأضلاع. إذا كانت $(v_1,\ldots, v_n)$ حلقتنا، فإنّنا نستطيع تعويض الأضلاع $v_i\ v_j$ و $v_{i+1}\ v_{j+1}$ بدلاً من $v_i\ v_{i+1}$ و $v_j\ v_{j+1}$ لنحصل على حلقة جديدة (يقود التّبديل المحتمل الآخر إلى حلقتين منفصلتين بدلاً من حلقة واحدة). ويكون التّبديل نافعًا إذا كان $w_{i,j} + w_{i+1,j+1} < w_{i,i+1} + w_{j,j+1}$. إنّ الحلقة الحالية تملك $\binom{n-1}{2} = \binom{n}{2}-n$ زوجًا من أضلاع غير واقعة على بعضها مع مراعاة التّبديل. إنّ خوارزمية لنْ وكيرنجان (Lin- Kernighan) [1973] التي ثبت صعوبة تحسينها عمليًا بصورة لافتة للنّظر، تأخذ في الحسبان الانتقال والتّبديل بين ثلاثة أضلاع في المرّة الواحدة.



تبدو المبرهنة الآتية أنّها تقضي على جهود إيجاد خوارزميّة تقريب لـ TSP العامّة.

3.B نظرية: (Sahni- Gonzalez {1976}) إذا وجد ثابت $c \geq 1$، وخوارزميّة كثيرة حدود زمنية A، بحيث تنتج A لكلّ مثال لـ TSP حلقة مولدة مع تكلفة على الأكثر c ضرب الأمثل، فإنّ P = NP.

الإثبات: سوف نبيّن بأنّ خوارزميّة مثل A يمكن أنْ تُستخدم في بناء خوارزميّة كثيرة حدودٍ زمنيّة لحلقة هاملتونيّة تكون تام - PN (نتيجة 11.B). إذا أعطيت بيان G على n من الرّؤوس، فأنشئ مثالاً لـ TSP على مجموعة الرّؤوس نفسها بوضع $w_{ij} = 1$ إذا كان $v_i v_j \in E(G)$، و $w_{ij} = cn$ خلاف ذلك.

في هذا المثال لـ TSP، فإنّ كلّ حلقة مولدة تكلفتها على الأكثر cn تملك تكلفة تساوي n تمامًا وتكون مرتبطة بحلقة مولّدة من المدخلة الأصليّة G، وبما أنّ A تنتج حلًّا تكلفته على الأكثر c ضرب الأمثل، فإنّها تنتج حلًّا تكلفته n إذا وفقط إذا كان G يملك حلقة مولّدة. لذلك، فإنّ خوارزميّة كثيرة الحدود خاصتنا لحلقة هاملتونيّة تولّد مثالاً لـ TSP كما ذكر، وتشغل A على هذا المثال. ويكون البيان G هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كانت A تنتج حلقة تكلفتها n. ■

إنّ خوارزميّات التّقريب موجودة لبعض الصّفوف الخاصّة لمسائل TSP. ولنبرهن أنّ خوارزميّة ما هي خوارزميّة تقريب، فنحتاج إلى حدّ سفليّ على الحلّ الأمثل.

لتكن M التكلفةَ لشجرة مولّدة صغرى في بيان موزون G. إذا حذفنا ضلعًا من الحلقة الأمثل في G، فإنّنا

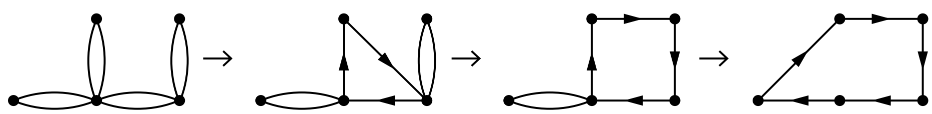
نحصل على مسار مولّد، وبما أنّ هذه شجرة مولدة، فإنّ تكلفتها تساوي M على الأقلّ. والتّكلفة للحلقة الأمثل هي M على الأقلّ، بالإضافة إلى التّكلفة الصغرى لضلع ليس موجودًا في شجرة ما ذات تكلفة M. ونستطيع تشغيل خوارزميّة كرسكال لأشجار مولّدة صغرى لحساب هذا الحدّ.

4.B نظرية : على الصّفّ لمسائل مندوب المبيعات المتجوّل حيث تحقق المدخلة المتباينة المثلثيّة، توجد خوارزميّة تقريب تعثر على حلقة مولّدة تكلفتها ضعفا الأمثل على الأكثر.

الإثبات: يعني تحقيق المتباينة المثلثيّة أنّ مصفوفة التّكاليف تحقق $w_{i,j}+w_{j,k}\geq w_{i,k}$ لكلّ i، j، k. ونعرف أنّ التّكلفة للحلقة الأمثل تكون M على الأقل، حيث M هي التّكلفة للشّجرة المولّدة الصّغرى. نستخدم المتباينة المثلثيّة والشّجرة المولّدة الصّغرى لنحصل على حلقة مولّدة تكلفتها $2M$ على الأكثر.

ابدأ بمضاعفة كلّ ضلع في شجرة مولّدة صغرى كالتي عن اليسار في الأسفل، ممّا يجعل الدّرجات جميعها زوجية، لذلك توجد دارة أويلريّة تملك $2n$ ضلعًا، وتكلفة كليّة $2M$. بصورة متعاقبة سوف نقلّل عدد الأضلاع دون زيادة التّكلفة حتى يبقى n من الأضلاع فقط. وبالمحافظة على الخاصّيّة التي تشير إلى أنّ الدّارة تزور الرّؤوس جميعها، فإنّنا نؤكّد أنّ الدّارة في النهاية تكون حلقة مولّدة مع تكلفة $2M$ على الأكثر.

إذا امتلكت دارة ما أكثر من n ضلعًا، فستزور رأسًا ما أكثر من مرّة، فلنقل خلال الأضلاع $v_i\rightarrow v_j\rightarrow v_k$ و $v_r\rightarrow v_j\rightarrow v_s$. إذا استبدلت الضّلعين v_iv_j و v_jv_k بالضلع v_iv_k، فستبقى الدّارة تزور الرّؤوس الأصليّة كلّها. فضلًا عن ذلك، تضمن المتباينة المثلثيّة أنّ التّكلفة الكليّة للأضلاع ليست أكبر من ذي قبل. في الشّكل أدناه، نوجّه الأضلاع لاقتراح سلسلة متوالية معيّنة من الدّارات. ■



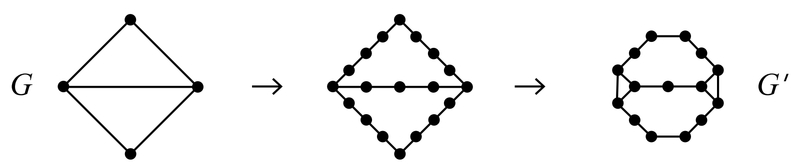
لقد أُعيد اكتشاف الخوارزميّة في المبرهنة 4.B مرات عدّة؛ حيث حَسّن كريستوفيدز [1976] نسبة الأداء 2/3. لاحظ أنّه بعد إيجاد شجرة مولّدة صغرى، فإنّنا لا نحتاج إلى مضاعفة الأضلاع جميعها للحصول على دارة أويلريّة؛ ويكفي إضافة أضلاع لأزواج رؤوس في الشّجرة، درجاتها فرديّة. يملك البيان الناتج دارة أويلريّة، والجزء اللاحق من الخوارزميّة ينتج حلقة مولّدة مع تكلفة M على الأكثر إضافة إلى تكلفة المواءمة. وللحصول على نسبة الأداء 2/3، فيكفي أنْ نبيّن وجود مواءمة مماثلة تكلفتها نصف التّكلفة للحلقة الأمثل على الأكثر(التمرين 8). ويملك التّحسين قيمة لأنّه يمكن إيجاد مواءمة وزن صغرى تشبع الرّؤوس التي درجاتها فردية في الشّجرة باستخدام كثيرة حدود زمنيّة.

براهين خاصّيّة تام- NP (NP- Completeness)

التّحويل (transformation) من مســألة A إلى مســألة B هو إجراء يحول أمثلة في A إلى أمثلة في B، بحيث يكون الجواب لـ A على المثال الأصــليّ محدّدًا من خلال الجواب لـ B على المثال المحوّل. إذا كان لدينا تحويل (كثيرة حدود زمنية) فاعل من A إلى B، وخوارزميّة فاعلة لـ B، فسيكون لدينا خوارزميّة فاعلة لـ A. ونقول إنّ A **تختزل** (reduce to) أو تحوّل (transforms) إلى B.

إذا كانت A صعب – NP، وتختزل إلى B من خلال تحويل متعدد الحدود الزمنية، فإنّ B تكون صعب – NP أيضًا (خوارزميّة كثيرة حدود لـ B تعطي خوارزمية كثيرة حدود لـ A ومن ثم لـ NP) جميعها. إذا كانت B في NP – أيضًا، فإنّنا نقول إنّ B تام – NP من خلال **الاختزال من** (reduction from) أو **تحويل من** A (transformation from).

يكون اتجاه الاختزال حاسمًا؛ فعلى سبيل المثال، تختزل دارة أويلريّة بسهولة إلى حلقة هاملتونيّة. افترض أنّ G بيان معطى بوصفه مدخلة. استبدل كلّ ضلع بمسار مكوّن من أربعة أضلاع تمرّ بثلاثة رؤوس جديدة، ثمّ أضف أضلاعًا لتجعل جيران كلّ رأس أصليّ متجاورة زوجًا زوجًا، واحذف $V(G)$. يكون البيان G أويلريًّا إذا وفقط إذا كان البيان الناتج G' هاملتونيًّا. إنّ تطبيق خوارزميّة على حلقة هاملتونيّة لـ G' يمكن أنْ يحدّد ما إذا كان G أويلريًّا. وهذا يخبرنا أنّ حلقة هاملتونيّة تكون صعبة على الأقلّ بوصفها دارة أويلريّة، بإهمال عامل كثيرة حدود. وبما أنّ دارة أويلريّة تكون سهلة (في P)، فإنّنا لا نتعلم شيئًا حول استخدام التّعقيد لحلقة هاملتونيّة.



تتطلب طريقة الاختزال تتطلّب مسألة تام – NP ابتدائية. وقد قدّم كوك (Cook) [1971] التّحققية بوصفها مسألة مماثلة. تأخذ التّحققيّة صيغة منطقيّة معبّرًا عنها بوصفها قائمة من العبارات بوصفها مدخلة. وكلّ عبارة هي تشكيلة حروف (متغيّرات أو نفي المتغيّرات). وتعدُّ العبارة صحيحة عندما يكون أحد حروفها صحيحًا على الأقلّ. وتكون العبارة **قابلة للتّحقّق** (Satisfiable) إذا وجد تعيين لقيم صحيحة للمتغيّرات بحيث تجعل كلّ عبارة صحيحة. والسؤال هنا عما إذا كان مثل هذا التّعيين موجودًا.

برهن كوك أنّه لكلّ مسألة A في NP، هناك مثال للتّحقّقيّة يمكن أنْ ينتج من خلال كثيرة حدود زمنيّة من مثال ما لـ A، بحيث يكون الجواب لمثال التّحقّقيّة الجواب نفسه للمثال A. لذلك فإنّ كلّ مسألة في NP تختزل إلى مسألة تحقّقيّة.

لا حاجة إلى تكرار هذا الجهد لكلّ مسألة تام – NP . ولبرهنة أنّ B هي صعب – NP، فإنّنا نستطيع اختزال التّحقّقيّة لـ B. يمكن اختزال أيّ مسألة تام – NP لتبيّن أنّ B هي صعب – NP . ومع المزيد من الخيارات، فإنّ إيجاد البراهين يصبح أكثر سهولة من حيث المبدأ. ولكن في أثناء الممارسة، فإنّ القليل من مسائل تام – NP الأساسيّة تصلح كمسألة تام – NP المعروفة في معظم براهين خاصّيّة تام – NP .

بدءًا من التّحقّقيّة، فقد زودنا كارب (Karp) [1972] بـ 21 مسألة مشابهة تتضمن العديد من المسائل الأساسيّة في نظريّة البيان؛ إذ تتضمن حلقة هاملتونيّة ومجموعة مستقلّة كبرى. فضلاً عن أنها تساعد على امتلاك نسخة معدّلة من مسألة تام – NP مقيّدة قدر الإمكان. ومع ذلك، فإنّها تبقى تام – NP . وعلى الرّغم من أنّ المرونة لنسخة معدّلة مقيدة تكون أقل، إلا أنّه من السهل اختزالها إلى المسألة التي نحاول إثبات أنّها تام – NP ؛ فعلى سبيل المثال، تبقى التّحقّقيّة تام – NP عندما تُقيَّدُ بالشّرط الذي يشير إلى أنّ كلّ عبارة تملك ثلاثة أحرف. وتدعى المسألة المقيّدة تحقّقيّةَ- 3 أو 3-SAT. ويبرهن هذا أنّها تام – NP آخذين في الحسبان مثالًا عشوائيًّا للتّحقّقيّة، واستبدال كلّ عبارة بتشكيلة مكافئة من العبارات على ثلاثة أحرف (وهذا يكلّف إضافة بعض المتغيّرات الإضافيّة). إن 3-SAT مقيّدة بصورة كافية؛ لأنَّ العديد من براهين خاصّيّة تام – NP تستخدم اختزالًا من 3-SAT. حتى إنّه من الأسهل اختزال المقيّدة بصورة أكثر من 2-SAT، ولكنّ 2-SAT تكون قابلة للحلّ في كثيرة حدود زمنيّة، وهي مقيّدة جدًّا.

سوف نبدأ من 3-SAT؛ لأنّ الخاصّيّة تام – NP للتّحقّقيّة واختزالها إلى 3-SAT لا تتضمّن نظريّة البيان. إضافة إلى أنّ الاختزالات إلى قابليّة التّلوين من الدّرجة 3، والمسار الهاملتونيّ الموجّه يتبع تقديم جيبونز (Gibbons) [1985].

5.B تعريف: تحقّقيّة – 3 (3-SAT)

مثال: مجموعة من **المتغيّرات** المنطقيّة $U=\{u_j\}$، و مجموعة $\mathbf{C}=\{C_i\}$ من **العبارات** حيث تتكوّن كلّ عبارة من ثلاثة أحرف، ويكون الحرف متغيّرًا u_i أو نفيه $\overline{u_i}$.

سؤال: هل يمكن وضع القيمة لكلّ متغيّر لتكون صائبة أو غير صائبة بحيث تكون كلّ عبارة "متحقّقة" (تحتوي على حرف قيمته صائبة على الأقل)؟

6.B نظرية: (كارب [1972] Karp) 3-SAT هي تام – NP .

الإثبات: (التمرين 14). ■

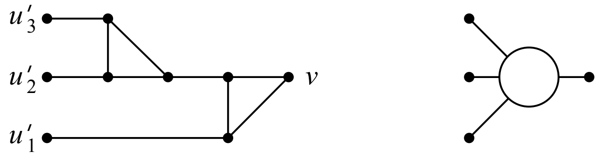
7.B نظرية: (ستوكمير[1973] (Stockmeyer)) إنّ قابليّة التّلوين من الدّرجة 3 هي تام – NP .

الإثبات: أعطينا في هذه المسألة بيانًا، وسُئلنا عما إذا كان هذا البيان قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3. إذا كان الجواب نعم، فإنّه يوجد تلوين فعليّ من الدّرجة 3. ونستطيع التّحقّق من أنّ التّلوين يكون فعليًّا في زمن تربيعيّ. لذلك، فإنّ قابلية التّلوين من الدّرجة 3 تكون في NP. ولإثبات أنّه صعب – NP ؛ سوف نختزل 3-SAT إلى قابليّة تلوين من الدّرجة 3.

خذ في الحسبان مثالًا على 3-SAT مع متغيّرات $U=\{u_j\}$، وعبارات $\mathbf{C}=\{C_i\}$. سوف نحوّل هذا إلى بيان G بحيث يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3 إذا وفقط إذا كان المثال على 3-SAT قابلاً للتّحقّق. سوف نستخدم البيان

المساعد H المرسوم على الصفحة اللاحقة ونسميه $\{u'_1,u'_2,u'_3\}$ **بالمدخلات** (inputs) وv_3 **بالمخرجة**

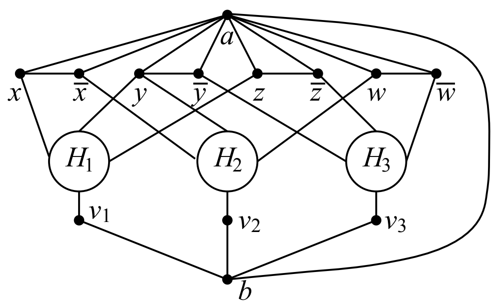
(output). وعندما نستخدم H في التّحويل، فسنقرّنه ببيان أكبر عند المدخلات، كما هو مقترح عن اليمين.



سنأخذ في الحسبان تلوينات من الدّرجة 3 باستخدام مجموعة الألوان $\{0,1,2\}$. وكلّ تلوين فعليّ من الدّرجة 3 لـ H تكون فيه المدخلات جميعها تملك اللون 0 يعين أيضًا اللون 0 لـ v. ومن ناحية أخرى، إذا استقبلت المدخلات ألوانًا ليست 0 كلّها، فإنّ هذا التّلوين يوسَّع إلى تلوين فعليّ من الدّرجة 3 في H، والذي لا يملك فيه v اللّون 0.

من مثالنا على 3-SAT، سوف ننشئ بيانًا G يملك رؤوسًا u_j و $\overline{u_j}$ لكلّ متغير في U، ونسخة H_i من H لكلّ عبارة C_i، ويملك رأسين خاصّين a,b. لاحظ أنّ الرّؤوس u_j, a . $\overline{u_j}$ تشكّل مثلثًا لكلّ j. ولكلّ عبارة C_j، فإنّ البيان الجزئيّ H_i يقترن بالبيان المشكّل حتى الآن عند الرّؤوس للحروف في C_i. إضافة إلى أنّ الرّأس للحرف الذي دليله j في C_i يقوم بدور u'_j في H_i. وما عدا هذه الرّؤوس المقرونة، فإنّ البيانات الجزئيّة H_i تكون منفصلة زوجًا زوجًا.

أخيرًا، لاحظ أنّ الرّأس b يكون مجاورًا لـ a وإلى رأس المخرجة v_i لكلّ H_i. وقد رسمنا أدناه البيان G الناتج عن مثال على 3-SAT الذي يملك أربعة متغيّرات وثلاث عبارات.



إنّ تعيين قيم صواب تحقّقيّة لـ $\{c_i\}$ يعطي تلوينًا فعليًّا f من الدّرجة 3 لـ G. وعندما يكون u_i صائبًا في التّعيين، ضع $f(u_i)=1$ و $f\left(\overline{u_i}\right)=0$؛ وبخلاف ذلك، ضع $f(u_i)=0$ و $f\left(\overline{u_i}\right)=1$. ولكلّ عبارة، فإنّ حرفًا ما يكون صائبًا. لذلك، فإنّه لكلّ H_i يتحقّق أنّ واحدًا على الأقل من $\{u'_3\ ,\ u'_2\ ,\ u'_1\}$ يملك اللّون 1. ومن خلال ملاحظتنا حول H، نستطيع توسيع f بحيث يملك v_i كلّه لونا غير اللّون 0. ونكمل التّلوين الفعليّ من الدّرجة 3 بوضع $f(a)=2$ و $f(b)=0$.

وبالعكس، افترض أنّ G يملك تلوينًا فعليًّا f من الدّرجة 3. ومن خلال إعادة تسمية الألوان إذا كان ذلك ضروريًّا، يمكن افتراض أنَّ $f(a)=2$ و $f(b)=0$. وبما أنّ $f(a)=2$، فإنّ لكلّ متغير حرفين؛ الأوّل ملوّن باللّون 0 والآخر ملوّن باللّون 1. خذ في الحسبان التعيين الصّائب الذي يكون فيه المتغيّر u_j صائبًا أو غير صائب عندما $f(u_j)$ هي 1 أو 0 على التّرتيب. سوف ندّعي أنّ هذا التّعيين يحقّق الصّواب. وبما أنّ $f(b)=0$،

فإنّ كلّ رأس مخرج v_i يملك لونًا غير صفريّ. ومن خلال ملاحظتنا حول H، فإنّ الرّؤوس التي تقابل المدخلات في H_i لا يمكن أنْ تملك جميعها اللّون 0. وبناءً على ذلك، فإنّ كلّ عبارة ستحتوي على حرف واحد صائب على الأقلّ. ■

يوسِّع تمرين 2 هذا إلى قابلية التّلوين من الدّرجة k لكلّ k مثبتة و$k \le 3$. ولكلّ k، تكون حالة خاصة من العدد اللّونيّ، والتي تكون كذلك تام – NP .

8.B نظرية : (كارب [Karp [1972) إنّ المجموعة المستقلّة، والعصبة، والغطاء الرّأسيّ جميعها تام – NP .

الإثبات: يمكن التّحقّق من الجواب نعم للسؤال فيما إذا كان بيان مُدخل G يملك مجموعة مستقلة كبيرة؛ مثل كبر العدد الصحيح مدخلاً k بإظهار المجموعة واختبار (في زمن تربيعيّ) أنّ رؤوسها مستقلة. لذلك، فإنّ أي مجموعة مستقلّة تكون في NP.

ينصّ التمرين 31.1.5 على أنّ G يكون قابلاً للتّلوين من الدّرجة m إذا وفقط إذا كان $G\square K_m$ يملك مجموعة مستقلّة حجمها $n(G)$. وهذا التّحويل يختزل العدد اللّونيّ إلى مجموعة مستقلّة. يكون البناء لـ $G\square K_m$ تربيعيًّا في $n(G)$ ؛ لأنّ العدد اللّونيّ يكون واضحًا إذا كان $m > n$. لذا، نستنتج أنّ مجموعة مستقلّة تكون صعب – NP .

بما أنّ العصب في G تكون مستقلة في $\overline{G}$ ، فإنّ عصبة ومجموعة مستقلّة متكافئتان على هيئة كثيرة حدود. وبما أنّ $\alpha(G) + \beta(G) = n(G)$ (التمهيديّة 21.1.3) ، فإنّ مجموعة مستقلّة وغطاءً رأسيًّا متكافئتان على هيئة كثيرة حدود. ■

سوف نركّز لاحقا على مسائل بيانات مستعرضة من خلال مسارات مولّدة وحلقات. تكون مسائل البيانات الموجّهة أكثرَ من مسائل البيان عامّة؛ لأنّنا نستطيع نمذجة البيانات باستخدام بيانات موجّهة متماثلة. لذلك، قد يكون من الأسهل إثبات نسخة من بيان موجّه لمسألة صعب – NP، ثمّ الحصول على النّسخة الخاصّة للبيان من خلال قيد بسيط.

9.B تعريف: إذا أُعطينا الرأسين x، y في بيان موجه D، فإنّ مسألة المسار الهاملتونيّ الموجّه هي ما إذا كان D يملك مسارًا مولّدًا من x إلى y.

10.B نظرية : (كارب [Karp [1972) إنّ أيّ مسار هاملتونيّ موجّه هو تام – NP .

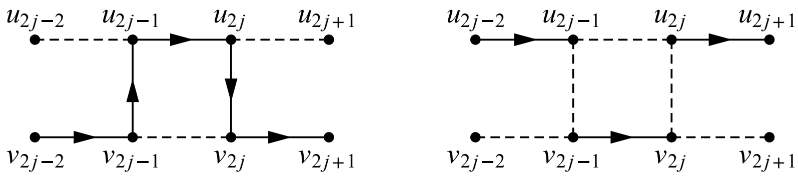
الإثبات: يمكن التّحقّق من أيّ مسار مولّد من x إلى y في بيان موجّه D في زمن خطّيّ. لذلك، فإنّ مسارًا هاملتونيًّا موجّهًا يكون في NP. ولإثبات أنّه صعب – NP ، فإنّنا سوف نختزل غطاءً رأسيًّا لمسار هاملتونيّ موجّه.

افترض غطاءً رأسيًّا يتكون من بيان G وعدد صحيح k. نريد معرفة ما إذا كان G يملك غطاءً رأسيًّا حجمه k على الأكثر سوف ننشئ بيانًا موجّهًا D يملك مسارًا هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان G يملك غطاءً رأسيًّا حجمه k على الأكثر. نضع دليلاً للأضلاع الواقعة على كلّ رأس بصورة عشوائيّة. وعندما يكون الضلع $uv = e$ هو الضّلع الذي دليله i الواقع على u، والضّلع الذي دليله j الواقع على v، فإنّنا نكتب $e_i(u) = e = e_j(v)$.

لبناء D، سوف نبدأ بـ $k + 1$ رأسًا خاصًّا $z_k ,..., z_0$. لكلّ $v \in V(G)$، ونضيف مسار $(v) = v_1 ,..., v_{2r}$ لـ D، حيث $r = d_G(v)$. ونضيف أضلاعًا من كلّ من $z_{k-1} ,..., z_0$ إلى البداية لكلّ $P(v)$، ومن النّهاية لكلّ $P(v)$ إلى كلّ من $z_k ,..., z_1$. أيضًا، ولكلّ ضلع $e = e_i(u) = (v)e_j$ في $E(G)$، سوف نُكوّن الأضلاع $u_{2i-1}\, v_{2j-1}$ ، $u_{2i-1}v_{2j-1}$ و $v_{2j}\, u_{2j}$.

افترض أنّ G يملك غطاءً رأسيًّا حجمه k، ويتكون من الرّؤوس $v^1,..., v^k$. سوف نشكّل مسارًا من z_0 إلى z_k في D من خلال $z_0, P(v^1), z_1, ..., P(v^k), z_k$. إنّ هذا المسار يهمل كلًّا من $P(u)$ لكلّ رأس غير

مغطى u. وسوف نمتصّ هذه الرّؤوس بأزواج، وبامتصاص كلّ زوج $u_{2i-1}u_{2i}$ من خلال عمل تحويلة من المسار $P(v)$ إلى الرّأس الذي يغطّي الضّلع $uv = e_i(u) = e_j(v)$. والتحويلة هي $v_{2j-1}u_{2j-1}u_{2j}v_{2j}$ كما هو مبين أدناه. ولأن الرأسين v_{2j} و v_{2j-1} مرافقان لضلع واحد فقط، فإنّ كلّ تحويلة مماثلة تكون مطلوبة مرّة واحدة على الأكثر. وبعد تضمين التّحويلات جميعها، سوف يكون لدينا مسار هاملتونيّ من z_0 إلى z_k في D.



وبالعكس، افترض وجود مسار مثل Q. لاحظ أنّ كلّ رأس لـ $P(u)$ ما عدا الأوّل والأخير يملك درجتي دخول وخروج 2 لكلّ $u \in V(G)$. سوف نبيّن أوّلاً لكلّ $i \geq 1$ و $u \in V(G)$ أنّ $u_{2i+1}u_{2i} \in E(Q)$ إذا وفقط إذا كان $u_{2i-2}u_{2i-1} \in E(Q)$، حيث لـ $i = 1$، نأخذ u_0 لتعني عنصرًا ما من $\{z_r\}$. وبالمثل، عندما $i = d(u)$، فإنّنا نأخذ u_{2i+1} لتعني عنصرًا ما من $\{z_r\}$. وبما أنّ الضّلع الذي دليله i الواقع على u حَسَنَ التّعريف، فإنّنا نستطيع وضع الرّأس v والدّليل j بحيث $e_j(v) = e_i(u)$.

إذا كان $u_{2i-2}u_{2i-1} \notin E(Q)$، فإنّ Q يجب أنْ يدخل u_{2i-1} من v_{2j-1}. وهذا يؤدّي إلى أنّ Q يمكن أنْ يترك u_{2i-1} فقط على $u_{2i-1}u_{2i}$، ويستطيع دخول v_{2j} فقط على $u_{2i}v_{2j}$. وهذا بدوره يعطي أنّ $u_{2i}u_{2i+1} \notin E(Q)$.

أمّا إذا كان $u_{2i-2}u_{2i-1} \in E(P)$، فإنّ P لا يستطيع ترك v_{2j-1} على $v_{2j-1}u_{2i-1}$، ويجب أنْ يترك v_{2j-1} على $v_{2j-1}v_{2j}$ وهذا يؤدّي إلى أنّ Q يدخل v_{2j} على $v_{2j-1}v_{2j}$ وليس على $u_{2i}v_{2j}$. لذلك، فإنّ Q لا يترك u_{2i} على $u_{2i}v_{2j}$، ويجب أنْ يترك Q على $u_{2i}u_{2i+1}$. (في هذه الحالة، يمكن لـ Q أنْ يتضمّن $\{u_{2i-1}u_{2i}, v_{2i-2}v_{2i-1}, v_{2i}v_{2i+1}\}$ أو $\{u_{2i-1}v_{2i-1}, v_{2i}u_{2i}\}$).

الآن، ضع $S = \{v \in V(G) : z_i v_1 \in Q\}$؛ هذه هي الـ k رأسًا في G التي أدخلت نسخها الأوليّة من $z_0, \ldots, z_{k-1}$ من خلال Q. وتبيّن مناقشتنا أنّه لكلّ ضلع uv حيث $u \notin S$ تعطي أنّ $v \in S$. لذلك، فإنّ S غطاء رأسيّ ويكون لدينا الاختزال المطلوب لغطاء رأسيّ إلى مسار هاملتونيّ موجّه. ■

11.B. نتيجة: (كارب Krap [1972]) تكون أيّ حلقة هاملتونيّة موجّهة، وأيّ مسار هاملتونيّ وأيّ حلقة هاملتونيّة جميعها تام - NP.

الإثبات: تكون هذه المسائل جميعها في NP. ولاختزال مسار هاملتونيّ موجّه إلى حلقة هاملتونيّة موجهة، أضف رأسًا واحدًا z وضلعين vz و zu لمثال يتطلّب مسارًا مولّدًا من u إلى v في D.

إن اختزال مسار هاملتونيّ (مع نقاط طرفيّة محدّدة) إلى حلقة هاملتونيّة يكون الشّيء نفسه.

ولاختزال مسار هاملتونيّ موجّه إلى مسار هاملتونيّ؛ خذ في الحسبان مثالاً يتطلّب مسارًا من u إلى v في D. ولتشكيل مثال G على مسار هاملتونيّ؛ قسّم أولاً كلّ رأس x إلى مسار x^-, x^0, x^+. وليكن x^- هو الرّأس الذي يرث الأضلاع كلّها التي مقدماتها على x، وليكن x^+ هو الرّأس الذي يرث الأضلاع جميعها التي ذيولها عند x. إنّ أيّ مسار مولّد من u إلى v في D يصبح مسارًا مولّدًا من u^- إلى v^+ في G، وذلك باستبدال كلّ رأس x بالمتتالية x^-, x^0, x^+.

وبالعكس، بما أنّ أيّ مسار من u^- إلى v^+ في G يجب أنْ يزور كلّ x^0، فعليه اجتياز المسارات جميعها التي على شكل x^-, x^0, x^+، إلى الأمام أو إلى الخلف ؛ وبسبب عدم وجود رؤوس متجاورة لها الإشارة نفسها ، فيجب أنْ تكون الاجتيازات جميعها في الاتجاه نفسه، وتبقى ثمّ، فإنّها تنكمش إلى المسار من u إلى v المطلوب في D.
لذا، فإنّ G يملك مسارًا مولّدًا من u^- إلى v^+ إذا وفقط إذا كان D يملك مسارًا مولّدًا من u إلى v. ■

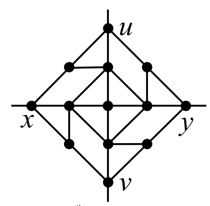
يبحث استكشاف للحدّ بين P وتام -NP عن مسائل أكثر تقييدًا والتي ما تزال تام -NP، وعن صفوف أكبر من المدخلات التي يوجد لها خوارزميّات حلول على هيئة كثيرات حدود زمنيّة. تزودنا المناقشة السّابقة ببراهين أسهل لخاصية تام -NP، وتضع حدودًا على النّجاحات للنّوع التّالي. وهدفنا اللّاحق هو توسعة قابليّة التّطبيق لخوارزميّات جيّدة.

سوف نوضّح هذه العمليّة بإثبات أنّ قابلية التّلوين من الدّرجة 3 تبقى تام -NP لبيانات السّويّة.

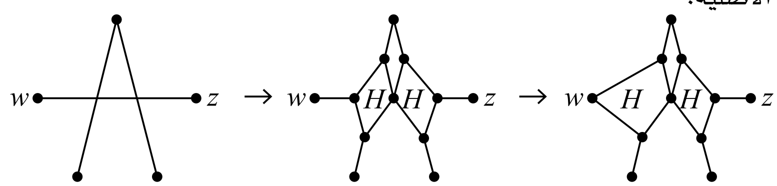
12.B. نظرية: (ستوكمير Stockmeyer [1973]، انظر أيضًا جيري وجونسون وستوكمير [1976]) التّلوين الثّلاثيّ السّويّ عبارة عن تام -NP.

الإثبات: كالعادة، يمكن التّحقق بسهولة من أنّ تلوينًا من الدّرجة 3 يكون تلوينًا فعليًّا. سوف نختزل قابليّة التّلوين من الدّرجة 3 إلى قابليّة تلوين ثلاثيّ سوّيّ. افترض أنّ G بيان معطى. سوف ننشئ بيانًا سويًّا G' قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3 إذا وفقط إذا كان G' قابلاً للتّلوين من الدّرجة 3.

خذ في الحسبان رسمًا لـ G في المستوى. سوف نضع بدل كلّ تقاطع «أداة» سويّة لها تأثير نشر اللّون عبر التّقاطع في تلوين من الدّرجة 3. في كلّ تلوين فعليّ من الدّرجة 3 للبيان H في الأسفل، لاحظ أنَّ u و v يملكان اللّون كما يفعل كلّ من x و y (التمرين17). وتشير الأضلاع الجزئيّة إلى مكان ربط نسخ من H مع بقيّة البيان.



في الرسم لـ G، قُطِعَ كلّ ضلع متضمّن في k من التّقاطعات إلى $k + 1$ قطعة من خلال التّقاطعات. وعلى كلّ قطعة، أضف رأسًا جديدًا. واستبدل كلّ تقاطع بنسخة من H موصولة من خلال نهاياتها بالرّؤوس الجديدة على القطع الأربع التي تقع على التّقاطع أخيرًا، لكلّ ضلع أصليّ wz، اختر نقطة طرفيّة، وقلّص الضّلع الذي بينها وبين الرّأس الذي على القطعة wz والواقع عليها لاحظ أنّ الضّلع غير المتضمّن في تقاطعات يعود إلى حالته الأصليّة.



في تلوين فعليّ من الدرجة 3 للبيان الجديد G'، لاحظ أنّ نشر اللّون عبر الأدوات يتطلّب أنْ تملك النقاط الطّرفيّة لكلّ ضلع أصليّ ألوانًا مختلفة. لذلك، فإنّ تقييد هذا التّلوين للرّؤوس الأصليّة يعطي تلوينًا من الدّرجة 3 للبيان G.

وبالعكس، إذا أُعطينا تلوينًا فعليًّا من الدّرجة 3 لـ G، فإنّنا نستطيع أنْ نبدأ عبر كلّ ضلع من النّقطة الطّرفيّة المستخدمة في نسخة من H، ونشر الألوان إلى 3 ألوان فعليّة في G'. ونستطيع القيام بذلك لأنّ H يملك تلوينًا فعليًّا من الدّرجة 3 يكون فيه لـ y و x و v و u اللّون نفسه، ويملك تلوينًا فعليًّا من الدّرجة 3 يملك فيه كلّ من x و y لونًا يختلف عن لوني u و v (التمرين 17). ■

أيضًا، فإنّ أيّ حلقة هاملتونيّة تبقى تام -NP للبيانات السّويّة. وفي الحقيقة، فإنّها تبقى تام -NP

لبيانات سويّة منتظمة من الدّرجة 3 ومترابطة من الدّرجة 3، ولا تملك وجهًا طوله أقلّ من 5 (انظر جيري وجونسون وتارجان [1976]). وتكون أيضًا تام -NP لبيانات- ثنائيّة الفرع (انظر كريشنامورثي [1975]). ولبيانات خطّيّة (انظر بيرتوسي Bertossi [1981]؛ وكذلك التمرين 14). لاحظ أنّ التّقييد لقابلية التّلوين من الدّرجة 3 على بيانات خطّيّة هو كقابليّة التّلوين الضّلعيّ من الدّرجة 3 للبيانات؛ وهذا يكون تام -NP حتى لبيانات منتظمة من الدّرجة 3، بواسطة الاختزال من 3-SAT (هولير [1981] Holyer).

تمارين (Exercises)

1.B (−) باستخدام الخوارزميّات التي طُوّرت في هذا الكتاب، صِفْ خوارزميّة جيّدة لحساب $\alpha(G)$ عندما يكون G بيانًا ثنائيّ الفرع.

2.B (!) استخدم المبرهنة B.7 لتبرهن أنّ قابليّة التّلوين بـ k من الألوان هي تام -NP لكلّ قيمة مثبتة لـ k بحيث تساوي هذه القيمة 3 على الأقلّ.

3.B أعطِ خوارزميّة كثيرة حدود بالنّسبة للزّمن إلى التّلوين الثّنائيّ.

4.B برهن أنّ الحلقة الهاملتونيّة والمسار الهاملتونيّ متكافئان بالنسبة إلى كثيرة حدود. أيّ، برهن أنّ أيّ خوارزميّة كثيرة حدود زمنيّة لأيّ منهما يمكن استخدامها للحصول على كثيرة حدود زمنيّة حتى النّهاية.

5.B إنّ اختبار وجود حلقة ذات طول مثبت k في بيان معطى على n من الرّؤوس يمكن أنْ يتمّ بزمن محدود بأحد مضاعفات $k!n^k$. انظر إلى كلّ مجموعة جزئيّة من الرّؤوس من المجموعات $\binom{n}{k}$ التي حجم كلّ منها يساوي k باتّباع دور معيّن، واختبر التّرتيبات الممكنة جميعها. بما أنّ k ثابت، فإنّ هذه كثيرة حدود زمنيّة. ولحلقة رباعيّة، نجد أنّ زمن تشغيل هذه الخوارزميّة هو $O(n^4)$. جد خوارزميّة تختبر وجود حلقة رباعيّة بزمن مقداره $O(n^2)$، (Richard-Liestman [1985]).

6.B افترض أنّ G بيان معطى، وأنّ k عدد صحيح. إنّ مسألة الشّجرة المولّدة ذات الدّرجة الصغرى تسأل عما إذا كان يوجد لـ G شجرة مولّدة T، بحيث $\Delta(T) \le k$ فضلًا عن أنّ مسألة أطول مسار تسأل عما إذا كان يوجد لـ G مسار طوله يساوي k على الأقلّ. في مسألة المسار -k، لاحظ أنّ k ليس جزءًا من المدخلات، إضافة إلى أنّ السؤال هو: هل يوجد لـ G مسار طوله k على الأقل؟

a) برهن أنّ الشّجرة المولّدة ذات الدرجة الصغرى وأطول مسار يكونان تامّين -NP.

b) برهن أنّ المسار -k يكون موجودًا في P لكلّ k حيث k مُثبت.

7.B ابْنِ عائلة أمثلة لتبرهن أنّ نسبة الأداء لأقرب إدخال لمساعد كشف لـ TSP غير محدودة بأيّ ثابت.

8.B (!) افترض شاهدًا لـ TSP حيث تحقّق التّكاليف المتباينة المثلثيّة. برهن أنّ مواءمة للرّؤوس ذات الدّرجات الفرديّة في شجرة مولّدة صغرى تستخدم أضلاعًا لها تكلفة كلّيّة تساوي نصف التّكلفة لحلقة مولّدة على الأكثر. استنتج أنّ نسبة أداء خوارزميّة كرستوفايدز تساوي 2/3 على الأكثر.

9.B برهن أنّه لحلّ مسألة الـ TSP بالضبط، يكفي أنْ يكون لدينا خوارزميّة تحلّ الـ TSP عندما تحقق أوزان الأضلاع المتباينة المثلثيّة. (مساعدة: إذا أعطينا مثالًا اختياريًّا لـ TSP، فجد مثالًا على TSP بزمن بحسب كثيرة حدود، وحيث إنّ أوزان الأضلاع تحقق المتباينة المثلثيّة $\left(w_{ij} + w_{jk} \ge w_{ik}\right)$ وأنّ مجموعة الجولات المثلى هي نفسها كما في المثال الأصليّ).

10.B برهن أنّ 2-SAT ينتمي إلى P.

11.B يوجد في مدينة ما نظام طرق معيّن، ولكن هذه المدينة تمتلك آلة واحدة فقط لإزالة الثّلوج التي يجب

إزالتها من شوارعها الضّيّقة. افترض أنّ الثّلج يُزال تمامًا من خلال مرور الآلة بالشّارع مرّة واحدة فقط. وتوجد طرق زراعيّة يمكن استخدامها لتغيير الموقع بشرط عدم إزالة الثّلج من هذه الطرق. لذا، يوجد لدينا بيان موزون فيه نوعان من الأضلاع؛ النّوع الأوّل من الأضلاع هو التي يجب تتبعها وإزالة الثّلج عنها، أمّا النّوع الثّاني فهو الأضلاع التي ليست بحاجة إلى تتبّع. ترغب المدينة بالحصول على خوارزميّة تستطيع من خلالها إيجاد حلقة ذات طول أصغر تمرّ على الأضلاع جميعها من النّوع الأوّل في مثل هذا البيان. برهن أنّ هذه المسألة من نوع صعب -NP وذلك من خلال الاختزال من مسألة حلقة هاملتونيّة.

12.B خوارزميّات مساعدة للكشف عن أغطية الرّؤوس. خوارزميّة 1: ضمّن رأسًا ذا درجة كبرى، احذف، وكرّر العمليّة حتى يصبح البيان المتبقّي مجموعة مستقرّة. خوارزميّة 2: اختر ضلعًا اختياريًّا ضمن طرفي هذا الضّلع، احذفهما، ثمّ كرّر هذه العمليّة حتى يصبح البيان المتبقّي مجموعة مستقلّة. ربما يظهر أنّ مساعد الكشف في خوارزميّة 1 أكثر قوة، إلاّ أنّ للخوارزميّة 2 ضمان أداء أفضل:

a) برهن أنّ خوارزميّة 2 تنتج دائمًا غطاء رؤوس حجمه ضعف الحجم الأصغر $\beta(G)$ على الأكثر.

b) برهن أنّ خوارزميّة 1 ربّما تنتج غطاء رؤوس حجمه قرابة $\text{Log}\,\beta(G)$ مضروبًا في الأصغر. (مساعدة: ابْن بيانًا ثنائيّ الفرع G بحيث تختار خوارزميّة 1 قرابة $\beta(G)/i$ رأسًا درجة كلّ منها تساوي i لكلّ $1 \le i \le \beta(G)$.

13.B يكون البيان G حرجًا بالنّسبة إلى α إذا تحقق أنّ $\alpha(G-e) > \alpha(G)$ لكلّ $e \in E(G)$. برهن أنّه لا يوجد رأس- قطع لبيان مترابط حرج بالنّسبة إلى α. (مساعدة: إذا كان e_1, e_2 ضلعين يقعان على رأس قطع x، فاستخدم المجموعات المستقلّة الكبرى في $G\text{-}e_1$ و $G\text{-}e_2$ لبناء مجموعة مستقلّة في G تحوي أكثر من $\alpha(G)$ رأسًا).

14.B لاحظ أنّ التّحقّقيّة تختلف عن التّحقّقيّة الثّلاثيّة (3-SAT) في أنّه يمكن أنْ يكون للعبارات حجوم اختياريّة. برهن أنّ أيّ عبارة تحوي أكثر من ثلاثة أحرف يمكن تحل محلها عبارة ذات ثلاثة أحرف (نسمح بإضافة بعض المتغيّرات الجديدة) بحيث تتحقّق العبارة الأصليّة إذا وفقط إذا كانت الشواهد الجديدة لـ 3-SAT متحققة. استنتج أنّ التّحقّقيّة تختزل إلى 3-SAT ([1972] Karp).

15.B (!) إذا علمت أنّ الحلقة الهاملتونيّة تكون تام - NP للبيانات المنتظمة من الدّرجة 3، برهن أنّ حلقة التّغطية هي تام -NP. هذا هو السؤال فيما إذا كان البيان المعطى G يحوي مسربًا مغلقًا يشتمل على نقطة طرفيّة لكلّ ضلع على الأقلّ. برهن أنّ البيان الخطّانيّ لـ G يكون هاملتونيًّا إذا وفقط إذا وجد لـ G حلقة تغطية. استنتج أنّ الحلقة الهاملتونيّة تكون تام -NP للبيانات الخطّانيّة.

16.B تُعَدُّ مسألة المجموعة المسيطرة بيانًا معطى H وعددًا صحيحًا k، وتسأل عما إذا كان يوجد لـ H مجموعة مسيطرة حجمها يساوي k على الأكثر (تعريف 26.1.3):

a) إذا كان G بيانًا معطى، فاجعل G' هو البيان الذي نحصل عليه بإضافة نسخة إضافيّة من كلّ ضلع من أضلاع G، وتقسيم نسخة واحدة من كلّ ضلع (لذا، يُستبدل بكلّ ضلع مثلثًا يشتمل على رأس جديد). برهن أنّه يوجد لـ G غطاء رؤوس حجمه يساوي k على الأكثر إذا وفقط إذا وُجد لـ G' مجموعة مسيطرة حجمها k على الأكثر.

b) استخدم تمام -NP لغطاء الرؤوس لتبرهن تمام -NP للمجموعات المسيطرة.

17.B برهن الادعاء الموجود في المبرهنة 12.B المتعلّق بالتّلوين الثّلاثيّ للجزء H.

18.B (*) استخدم مسارا هاملتونيًّا في بيان موجّه لتبرهن أنّ تقاطع الماترويد الثّلاثيّ يكون تام -NP.

19.B (*) استخدم مواءمة 3-D لتبرهن أنّ تقاطع الماترويدات الثّلاثيّ هو تام -NP. إذا أعطينا حشدًا من الثّلاثيّات على الشّكل (x_1,x_2,x_3) حيث $x_i \in \text{v}_i$، وكانت المجموعات V_1,V_2,V_3 غير متقاطعة (منفصلة). فإنّ المواءمة D-3 هي مسألة إيجاد أكبر عدد من الثّلاثيّات بحيث يظهر كلّ عنصر على الأكثر في واحدة من الثّلاثيّات التي تمّ اختيارها. (بالمقارنة، نعلم أنّ مواءمة ثنائيّ الفرع هي مسألة مواءمة 2 - D حيث تكون المجموعات أزواجًا).

ملحق (Appendix C)
مساعدات لحلّ بعض التمارين المختارة (Hints for Selected Exercises)

نورد في هذا الملحق بعض خطوط الإرشاد العامة، وبعض الاقتراحات المحددة المتعلقة بحلول بعض التمارين المختارة. ونتوقع من خلال هذه الاقتراحات أن نساعد الطلبة الذين يعانون بعض المشاكل على البدء بإيجاد البراهين وكتابتها.

مناقشة عامة (General Discussion)

الخطوة الأولى في حلّ أيّ مسألة هي التأكد من فهم المطلوب فيها، بُرهنت وتتطلب بعض المسائل التحقق من بعض العبارات الرياضية، وربما تمثل التعريفات خارطة طريق للأشياء التي يلزم التحقق من صحتها؛ ففي بعض الأحيان، نجد أن العبارة المنشودة تنبع من نظرية بُرهنت سابقًا. عندها، يجب التحقق من أن فرضيات المبرهنة متحققة لكي نستطيع تطبيقها.

وربما تشتمل بعض المسائل الأخرى على إجراء بعض الأشياء التجريبية اللازمة لاكتشاف العبارة التي يلزم إثباتها. وفي بعض الأحيان، نختبر الحالات الصغيرة لاكتشاف النمط العام وإثباته بالاستقراء وفي بعض المسائل الأخرى، يكون من المفيد اختبار تحقق المسألة على بعض الأمثلة؛ لأن ذلك ربما يوحي أحيانًا عن كيفية التحقق من صحة العبارة.

افهم التعريفات، واستخدمها بحرص وحذر. ولا يلزم وجود رأس معزول للبيان غير المترابط. إن العرى والحلقات مفاهيم مختلفة وعليك التفريق بين كلمتي أعظم وأعظمي. غطاء الرؤوس هي مجموعة من الرؤوس، أما غطاء الأضلاع فهو مجموعة من الأضلاع. البيان الذي درجة ترابطه تساوي 3 يكون مترابطًا من الدرجة 2 (مترابط ثنائي)، أما البيان الذي عدده اللوني يساوي 3، فيكون قابلاً للتلوين بـ 17 لونًا.

عندما نبحث عن إثبات مباشر لعبارة شرطية، فبإمكاننا العمل من طرفي المسألة. اعمل قائمة بالعبارات التي تتبع من الفرضيات، وقائمة أخرى بالعبارات الكافية لإعطاء الاستنتاج. وعندما تظهر عبارة في كلتا القائمتين، فإننا نكون قد حللنا المسألة.

عندما تفشل الطريق المباشر للإثبات، اعمل قائمة بالأشياء التي تتبع في حال فرض أن النتيجة غير صحيحة إذا وجد شيء في هذه القائمة يتناقض مع شي في النتائج التي تتبع من الفرضيات (أو يتناقض مع أي من العبارات الصحيحة المعرفة)، فهذا يشير إلى أن المسألة قد حُلّت باستخدام طريقة الإثبات بالتناقض مرة أخرى.

الإثبات بالتناقض يناسب العبارات المتعلقة بالاستحالة (أي استحالة حدوث خاصية معينة) لإثبات شيء موجود، فغالبًا ما يكون بإمكاننا بناء مثال، وإثبات أن لهذا المثال الخواص المنشودة، وهذه هي الطريقة المباشرة في هذه الحالة.

يمكن تفسير معظم العبارات الشرطية بوصفها عبارات محددة قياسيًّا بصورة كلية أو عامّة؛ فإثبات العبارة المحددة قياسيًّا بصورة كلية، يجب أن يتحقق لكل قيمة من قيم المتغير المعطى في المجموعة الكلية. وربما تساعد الأمثلة على فهم المسألة أو توضيح الإثبات، إلا أن الأمثلة في نفسها لا تشكل إثباتا للمسألة. إن توضيح أن للمثال الخواص المنشودة بلغة تنطبق على الأمثلة الممكنة جميعها، يمكن أن يؤدي إلى إثبات العبارة المنشودة.

في أغلب الأحيان، نجد أن الاستقراء يقع في إثبات العبارات التي تحوي عددًا طبيعيًّا كوسيط أو متغير. كن حذرًا من مصيدة الاستقراء! (لقد تم مناقشتها في المثال 26.3.1 وفي المثال A . 28) تذكر النموذج المعد سلفاً لإثبات العبارات الشرطية بوساطة الاستقراء (الملاحظة 25.3.1). وأن اكتشاف الحالات الصغيرة (القيم الصغيرة) يمكن أن يساعد على فهم المسألة المراد إثباتها، أو فهم الطريقة التي يمكن أن تنتقل بها من قيمة للوسيط إلى القيمة التي تليها، إلا أن مثل هذا النقاش لا يشكل جزءًا من الإثبات النهائي فيما عدا ما نحتاج إليه في الخطوة الأساس.

تستخدم بعض التقنيات الأخرى كلًّا من مبدأ القيم القصوى وصناديق الحمام. أحيانًا، نتعامل مع أصغر مثال ناقض لعبارة منشودة، ومن ثم نستخدم وجوده للحصول على مثال ناقض أصغر، ويمكن رؤية ذلك بوصفه استقراءً أو تناقضًا أو تطرفية (قيم قصوى).

ربما لا يكون الأسلوب (أو التقنية) التي تعطي حلًّا لمسألة معينة واضحًا ففي بعض الأحيان، نجد أن هناك أكثر من طريق يصلح للإثبات، وبذلك نحصل على براهين مختلفة للمسألة نفسها. يقوم الرياضيون بإيجاد البراهين من خلال العمل بجد واجتهاد. إن الصلابة والمرونة ميزتان؛ فعلينا تجريب التقنيات التي يمكن تخيلها جميعها لحل مسألة معينة. فضلًا عن أن ممارسة حلّ المسائل تزيد الفهم، وتُسرع عملية إيجاد البراهين.

الخطوة الأخيرة هي إعطاء تفسير وشرح تام بحذر للحل، وكتابة الإثبات يمكن أن تُظهر الدقة المختفية أو الحالات التي تم تمحيصها. كما أنها يمكن أن تشرح وتوضح أفكارًا يمكن أن تكون غير ذات صلة. إضافة إلى أن إنتاج حل مكتوب كتابة جيدة يجب أن يشتمل على مراجعات مكررة. ومن المفيد كتابة الحل مسبقًا، ووضعه جانبًا، وقراءته ثانية قبل تسليمه؛ وذلك لرؤية ما إذا كان هذا الحل ما زال تامًا ومقنعًا وشاملاً؛ لأن عملية كتابة الحل تساعد على تطوير مهارات مفيدة كالقدرة على التعبير عما في النفس بصورة مختصرة وواضحة ودقيقة.

مساعدات محددة إضافية (Supplemental Specific Hints)

14.1.1. يساعد التناقض غالبًا على الاستنتاجات غير الموجودة. افترض أن مثل هذا التفكيك موجود، فما الاستنتاجات التي تستنتجها حول اللوح؟

25.1.1. استنتاج آخر غير موجود. افترض وجود حلقة سباعية، واستخدم خواص بيان بيترسون لتحصل على تناقض.

26.1.1. خذ في الحسبان ضلعًا في G (يمكن أن تبدأ برأس).

27.1.1. ابدأ برأس في G.

29.1.1. خذ في الحسبان مجموعة المعارف الشخصية أو اللامعارف (أيهما أكبر) لشخص معين.

32.1.1. اهتم بنوعية حجم كل مجموعة من مجموعتي التجزئة.

34.1.1. بما أنه يجب أن تكون البيانات الجزئية الثلاث متشاكلة زوجًا زوجًا، فإن هذا يساعد على اختيار رسم للبيان يكون له تماثل ثلاثي الطية.

37.3.1. قارن المساهمات من أطراف المسارات بالمساهمات من الرؤوس الداخلية.

38.3.1. احصل على تفكيك من تجزئة ثنائية، واحصل بالمقابل على تجزئة ثنائية من تفكيك.

15.2.1. ماذا يحدث عندما يتكرر رأس؟

17.2.1. استخدم خاصية التعدي لعلاقة الربط.

18.2.1. ارسم G لبعض قيم n الصغيرة من أجل معرفة ماذا سيكون الجواب، ثم برهن ذلك.

19.2.1. للحد الأعلى؛ استخدم الحقيقة الآتية: عندما يكون القاسم المشترك الأعظم بين العددين a وb يساوي 1، فإن هذا يوجد أعدادًا صحيحة p وq، بحيث إن $pa + qb = 1$.

26.2.1. التوصيف المميز للبيانات الثنائية الفرع يجعل هذا سهلاً.

28.2.1. المسألة لا تحصر الانتباه إلى البيانات الجزئية المستحدثة.

38.2.1. استخدم الاستقراء والتمهيدية 25.2.1.

40.2.1. إذا كان كل من P وQ منفصلين، فخذ في الحسبان مسارًا أقصر من $V(P)$ إلى $V(Q)$، واحصل على تناقض.

12.3.1. ربما يساعد على ذلك بناء مثال في الحالة $k=1$، ثم عمّم ذلك.

15.3.1. للفرع (b)؛ افتراض المتممات.

18.3.1. على فرض أن e ضلع – قطع، و H مركبة من مركبات $G - e$، احسب عدد أضلاع H من خلال وجهة نظر كل مجموعة من مجموعتي التجزئة. وستحصل على تناقض بوضع مساواة بين هذه الصيغ.

19.3.1. للفرع الثاني؛ اجعل البيانات المنشودة ترتبط ببيانات منتظمة من الدرجة 3.

22.3.1. في فرع (a)، ماذا يحدث إذا وجد لرأس خارجي ثلاثة جيران في $V(\mathrm{C})$؟ للفرع (b)؛ إن الفرع (a) يعطينا حدًّا واحدًا على عدد الأضلاع بين $V(\mathrm{C})$، و $V(\mathrm{G}) - V(\mathrm{C})$، فضلًا عن أن الفرض على الدرجة الصغرى يعطينا حدًّا آخر.

28.3.1. عندما يكون k زوجيًّا، جد تشاكلاً. ولكن عندما يكون k فرديًّا، فجد حلقة فردية في Q'_k.

31.3.1. للفرع (a)، افترض مثال 18.3.1.

33.3.1. للفرع (a)؛ جد ارتباطًا واحدًا لواحد بين العناصر غير المجاورة لـ x، وأزواج جيران x.

34.3.1. خذ في الحسبان رأسين متجاورين x, y، وجد ارتباط واحد لواحد بين $V(\mathrm{x})$ و $V(\mathrm{y})$.

43.3.1. للبناء؛ لاحظ أن البيانات المنتظمة غير صالحة؛ لأننا نحتاج إلى رؤوس درجاتها عالية، وكذلك إلى رؤوس أخرى درجاتها متدنية، إلا أن الرؤوس جميعها يجب أن تكون مجاورة لرؤوس درجاتها عالية.

50.3.1. لكل n، ابن مثالاً بأضلاع قليلة، واستخدم الاستقراء على n لتبرهن أن هذا أفضل ما يمكن. إن صيغة جمع الدرجاتَ تعطي أنه يوجد للبيان البسيط الذي له n من الرؤوس وعدد أضلاعه أقل من $n3/2$ رأس درجته تساوي 2 على الأكثر.

53.3.1. عرِّف بيانًا لعمل نموذج لأزواج الأشخاص الذين ما زال بإمكانهم اللعب معًا. ما الشرط الذي يسمح بلعب شوط (دور) إضافي؟

55.3.1. للفرع (a)، برهن أولاً أن $\Delta(G) \geq \mathrm{n(G)}/2$. وللفرع (b)؛ برهن أن $\overline{G}$ يجب أن يكون غير مترابط.

57.3.1. احتفظ بالنموذج المعد سلفًا الموجود في الملاحظة 25.3.1. حاضرًا في ذهنك.

63.3.1. أي إثبات استقرائي للكفاية يجب أن يتحقق من أن «الشيء الأصغر" يحقق الشرط قبل تطبيق فرضيات الاستقراء.

16.4.1. للفرع (a)؛ اجعل تعريف l حاضرًا في ذهنك.

23.4.1. بيّن أنه يمكن تغيير التوجيه غير المتوازن لتقليل (تصغير) عدم التوازن.

25.4.1. أعط توجيهًا يحوي أكثر من رأسين، بحيث تكون درجة خروج كل منهما فردية، ثمّ اعمل تبديلًا (تغيرًا) مناسبًا.

29.4.1. استخدم الترابط بقوة لـ D، والحلقة الفردية المرجعية في G في بناء حلقة فردية في D.

34.4.1. برهن أن درجة الدخول تساوي درجة الخروج لكل رأس في البيان الجزئي F من G الذي يتكون من أضلاع موجهة عكسيًّا في H. قرب G من H عن طريق إيجاد حلقة ثلاثية عكسية تشتمل على رأس له درجة خروج عظمى في F.

37.4.1. استخدم الاستقراء القوي على رتبة الدوري.

38.4.1. في أحد الاتجاهين، برهن وجود مثل هذا الدوري على n من الرؤوس، وذلك إذا وجد دوري على $n - 2$ من الرؤوس. كن حذرًا عندما $n = 6$.

2.1.2. في الفرع (b)، تشتمل العبارة على إمكانية إضافة نسخ مضاعفة من الأضلاع الموجودة أصلاً (سابقًا).

17.1.2. قارن بإثبات $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}, \mathrm{C}$ في المبرهنة 4.1.2.

25.1.2. استخدم الاستقراء على n، ولخطوة الاستقراء؛ احذف ورقة.

27.1.2. احتفظ بالمحدد القياسي في ذهنك. برهن أن الشرط على قائمة الأعداد كافٍ وضروري لوجود

شجرة درجات رؤوسها $d_1, \ldots, d_n$. ويجب إثبات تضمينين.

29.1.2. احسب الأضلاع بطريقتين.

31.1.2. خذ في السحبان المكافئ العكسي.

33.1.2. يجب إثبات تضمينين، كل منهما يتعامل مع بيان مترابط على n من الرؤوس.

34.1.2. استخدم الاستقراء على n.

40.1.2. عبر عن G كاتحاد لعدد مناسب من المسارات. ماذا يمكن أن نعمل إذا لم تكن هذه المسارات متقاطعة زوجًا زوجًا؟

41.1.2. استخدم شجرة مولدة لأحد المركبات.

47.1.2. في الفرع (a)، تذكر أن اتحاد المسارين من u إلى v، ومن v إلى w ليس بالضرورة مسارًا من u إلى w.

59.1.2. في المسألة، كلٌّ من n و k مثبت. ويجب إعطاء الجواب بدلالة هذين الوسيطين.

61.1.2. كوّن G' من $G - x - y$ بإضافة k ضلعًا منفصلاً تربط $N_G(x)$ إلى $N_G(y)$.

5.2.2. لكل حلقة خماسية؛ خذ في الحسبان عدد الأضلاع التي ستستخدم.

7.2.2. من التماثل، نعلم أن كل ضلع في K_n يقع في العدد نفسه من الأشجار المولدة لـ K_n.

9.2.2. استخدم شيفرة برفر.

19.2.2. في الشجرة التي مجموعة رؤوسها $[n]$. اقطع الضلع عند الرأس n على المسار من n إلى 1.

24.2.2. ابن الأضلاع بترتيب متناقص بحسب الفرق بين طرفي كل ضلع.

29.2.2. إذا لم تكن الشجرة جرارة، فإنها تحوي الشجرة Y الموجودة في المثال 18.2.2.

33.2.2. افترض الرؤوس التي يمكن الوصول إليها بمسار من الجذر.

11.3.2. ماذا يحدث إذا كانت الشجرة المولدة ذات الوزن الأصغر تحوي ضلعًا وزنه أكبر من الوزن الأكبر في الشجرة المولدة التي تمثل عنق الزجاجة؟

13.3.2. افترض أثقل ضلع في T'، وذلك من بين الأضلاع غير الموجودة في T.

31.3.2. في خطوة الاستقراء. قم جزّئ مجموعة الكلمات في شفرة أمثل إلى مجموعتين بحسب الجزء (القطعة) الأول (الأولى).

8.1.3. افترض الفرق التماثلي لمواءمتين كاملتين.

9.1.3. استخدم غطاء رؤوس، أو قارن مواءمة عظمى بمواءمة أعظمية مستخدمًا الفرق التماثلي.

16.1.3. استخدم الاستقراء على k.

24.1.3. حول هذا إلى مسألة بيانات.

25.1.3. جد مصفوفة تباديل مناسبة، وعدّل ما تبقى بمعامل ثابت لتطبيق فرضيات الاستقراء.

26.1.3. استخدم النتيجة 13.1.3 للفرع (a)، والاستقراء على n للفرع (b).

29.1.3. ماذا تقول نظرية كونج وإيجرفاري عن مسألة غطاء الرؤوس عندما لا توجد (G) مواءمة من الحجم k.

30.1.3. يتطلب هذا إيجاد حد ومثال يحقق هذا الحد.

39.1.3. إعتبر الأضلاع التي تربط مجموعة مستقلة عظمى بمتممتها.

11.2.3. افترض أن أول حدوث لمثل هذا الرفض في خوارزمية مشاريع الزواج هي أن a ترفض x حتى في الحالة التي تمثل فيها xa زوجًا في مواءمة مستقرة M. إذا رفضت a x من أجل y، فلاحظ أن y يزاوج مع امرأة b في M ماذا يمكن أن نستنتج حول ما يفضله هؤلاء الأشخاص؟

2.3.3. لا يعدّ غطاء الرؤوس قويًّا بصورة كافية لإثبات أمثلية المواءمة.

7.3.3. هذا سهل عندما يكون k زوجيًّا، أما إذا كان فرديًّا، فقم ببناء مثال للحالة $k = 3$ وعمم ذلك.

11.3.3. استخدم نظرية توت.

12.3.3. لإثبات وجود مواءمة حجمها يساوي الوزن لغطاء معمم؛ اجعل T تساوي مجموعة عظمى من الرؤوس تكبر كمية $|T|$ - $o(G - T)$ (النقص).

14.3.3. أثبت أن $o(G - S) - |S|$ تكون صغيرة كفاية وذلك لكل $S \subseteq V(G)$. وهناك طريق آخر لحلّ المسألة، وهو أن تجعل X مجموعة بها k من الرؤوس تولد أصغر عدد من الأضلاع، وبعد ذلك تبرهن وجود مواءمة من X إلى $\overline{X}$.

16.3.3. عمّم التعليل الموجود في النتيجة 8.3.3 .

17.3.3. إذا أعطيت رأسين متجاورين x ،y ، فحقق شرط توت لـ G - x - y .

18.3.3. فكر في حجم مناسب لمجموعة توتية S (Tutte set) وعدد مناسب من المركبات الفردية في G - S

19.3.3. استخدم النتيجة 8.3.3 للحصول على عامل أحادي. جمّع نسخًا من P_4 عن طريق الأخذ في الحسبان تدويرًا منسجمًا للحلقات في العامل الثنائي المتبقي .

5.1.4. برهن أن G' مترابط، ولا يوجد له رأس قطع. يوجد كذلك إثبات قصير باستخدام المسارات المنفصلة داخليًّا

10.1.4. المبرهنة 11.1.4 والنتيجة 5.3.1. تعطي إثباتا قصيرًا.

14.1.4. برهن المكافئ العكسي .

17.1.4. برهن أولاً أنه إذا كان $|[S,\overline{S}]|=3$، فإن حجم كل من S و $\overline{S}$ يكون فرديًّا .

18.1.4. للفرع الأول؛ برهن أنه يوجد للبيان الجزئي المستحدث من الجانب الأصغر لضلع قطع والذي له ضلعان على الأكثر، العديد من الأضلاع لتفادي وجود مثلث .

23.1.4. حقق شرط توت. تذكر أن الشرط الممنوع هو عدم وجود النجوم الكبيرة بوصفها بيانات مستحدثة، وليس النجوم الكبيرة فقط.

26.1.4. يمكن إثبات الضرورة من خلال تتبع الحلقات حلقة حلقة. وللكفاية، عرف بيانًا مساعدًا رؤوسه هي مركبات G - F، برهن أن هذا البيان ثنائيّ الفرع من أجل الحصول على التجزئة المنشودة لمركبات G - F .

27.1.4. تذكر أن ضلع القطع يكون رابطة إذا وفقط إذا كانت رؤوس كل جانب من جانبي القطع تحدث بيانًا جزئيًّا مترابطًا.

6.2.4. استخدم التفكيك للمقابض .

14.2.4. مبدئيًّا، يشكل هذا النسخةَ الضلعية للمبرهنة 2.2.4 بالإضافة إلى الاستنتاج. والنقاط المشتركة تحدث بالترتيب نفسه على المسارين .

21.2.4. ماذا نعرف عن البيانات المترابطة التي لها رأسان على الأكثر، درجة كل منهما فردية؟

23.2.4. من بيان ثنائي الفرع G، صَمِّمْ بيان H، بحيث يوصل تطبيق نظرية منجر على H إلى النتيجة التي نحتاج إليها على G .

28.2.4. استخدم تمهيدية التوسع التمديد ومبرهنة منجر.

13.3.4. صمّم شبكة بحيث يوجد تحديد (تعيين) للمشاركين في مجموعات (زمر) إذا وفقط إذا كانت قيمة تدفق الشبكة تساوي $\sum m_i$. استخدم نظرية فورد وفولكرسون للتعبير عن مثل هذا التدفق بدلالة القطوع (جمع قطع). برهن أن الشرط المعطى على المعطيات يكافئ الشرط الموجود على القطوع من المنبع (المصدر) إلى المصب (البالوعة).

20.1.5. إحدى الطرق هي أن تبرهن المكافئ العكسي، إضافة إلى طريقة أخرى هي من خلال حذف حلقة فردية.

22.1.5. نحتاج إلى ترتيب بحيث إنه عندما تتم مقابلة (مواجهة أو وصول) أي رأس، فإنه يوجد لذلك الرأس جاران على الأكثر من بين الرؤوس التي تسبقه في الترتيب .

23.1.5. تشتمل الحدود الدنيا على الحساب و (أو) مبدأ طواقي الحمام. إن الجزء المثير (الممتع) هو أن نعطي بناءً لإثبات أن البيان قابل للتلوين بـ $k + 2$ لوناً، بحيث إن $k + 1$ لا تقسم n .

26.1.5. (كذلك المسألة التالية) احصل على عصية وتلوين فعلي من الحجم نفسه .

30.1.5. إذا أعطيت تلويناً فعليًّا بـ r من الألوان للبيان G_n، فأنتج حشدًا من المجموعات الجزئية المختلفة من الألوان. ترتبط كل مجموعة بعنصر من n وبالعكس، وضّح كيف تستخدم مثل هذا الحشد لإنتاج تلوين فعلي.

31.1.5. من تلوين فعلي بـ m من الألوان، ابن مجموعة من الحجم نفسه من مجموعة مستقلة كبيرة بما فيه الكفاية، وابن تلويناً فعليًّا بـ m من الألوان .

32.1.5. كما في المبرهنة 23.2.1، يمكنك أن تستخدم الاستقراء لتشفير الألوان كثنائيات من عديد -k، وطبق مبدأ طواقي الحمام .

39.1.5. احصل على متباينة تربيعية لـ k بدلالة m من خلال استخدام حدود عليا ودنيا على $e(G)$.

41.1.5. باستخدام فرضيات الاستقراء، لا ينتهك بيان جديد الحد إلا إذا حذفنا رأسًا، ووجدنا تناقضًا بين العدد اللوني لكل من البيان ومتممته. هل يمكن حدوث ذلك في الحالة التي يكون فيها مجموع الأعداد اللونية يساوي القيمة العظمى سلفًا؟

44.1.5. احصل على الحد الأعلى من الفرع (a). وللحد الأدنى؛ استخدم التوجيه الموجود في المبرهنة 21.1.5 نفسه.

51.1.5. عدّل تلويناً فعليًّا بـ k من الألوان، بحيث يصبح تلويناً فعليًّا بـ $k + 1$ من الألوان له قيم محددة سلفًا على رؤوس P .

2.2.5. افترض المتممة .

9.2.5. بما أن G' مترابط، إذن يكفي أن نفترض حذف الأضلاع من G'، انظر ملاحظة 12.2.5 .

15.2.5. استخدم الجوارات الكبيرة بوصفها صفوفًا لونية، في حين يبقى هناك رؤوس ذات درجات عالية، ثم طبقّ نظرية بروك .

17.2.5. للفرع (b)، افترض المتممة .

19.2.5. عدِّل $K_{n-a} + \overline{K}_a$ لتحصل على $T_{n,r}$، وعَدِّد (احسب) التغييرات في عدد الأضلاع .

21.2.5. إن إثبات المبرهنة 9.2.5 يحول البيان الذي ليس له عصبة من الدرجة $r + 1$ إلى بيان متعدد الفروع من الدرجة r له عدد الأضلاع نفسه على الأقل. يزداد عدد الأضلاع بإحكام، إلا إذا تحققت المساواة في كل خطوة من خطوات الحساب. ماذا نحتاج لتحقيق المساواة؟

27.2.5. للحد الأعلى، إن حذف أضلاع حلقة من مثال ناقص يترك غابة، وهذا يحصر الخصر ويحدده. إن الاختزال للحالة $\delta(G) \geq 3$ يتطلب أن يكون $n \leq 8$ ، وهذا يتناقض مع تمرين 26.2.5 .

28.2.5. للحد الأعلى، اختزل للحالة $\delta(G) \geq 3$، وافترض حلقة أقصر C.

إن حذف $V(C)$ يترك غابة، وأوراقها تمتلك ثلاثة جيران على الأقل على C.

29.2.5. للفرع (b)، إذا كان الفرق في الحجم بين أكبر وأصغر صف لوني أكثر من 1، فاستخدم الفرع (a) لتغيير التلوين بالطريقة المناسبة.

32.2.5. يستخدم الفرع (a) خواص البيانات الحرجة من الدرجة k لـ G وH وفي الفرع (c)، يمكن إعطاء أمثلة صريحة من الرتبة 4،6، و8، ثمّ تطبيق فرع (a).

40.2.5. لحساب العدد اللوني؛ افترض مجموعات مستقلة. ولمنع تقسيمات البيانات التامة افترض قطوع رؤوس. إن أي تقسيم لـ K_k يجب أن يحوي $k - 1$ مسارًا منفصلاً داخليًّا زوجًا زوجًا تربط بين رأسين من رؤوسه التي درجتها $k - 1$.

43.2.5. استخدم الاستقراء على k في خطوة الاستقراء، أهمل مجموعة جزئية مناسبة من $V(G)$.

44.2.5. اختزل للحالة $\delta(G) \geq k - 1$، ثم استخدم الاستقراء على k.

3.3.5. إذا كانت $\chi(G; k) = k^4 - 4k^3 + 3k^2$، فكم رأسًا وضلعًا يوجد للبيان G؟

4.3.5. للفرع (a)؛ استخدم التكرار اللوني أو نظرية 10.3.5.

6.3.5. فسر (علل) كيف تظهر المساهمات في معاملات $k^{n(G)-1}$ عند حساب $\sum_{r=1}^{n} P_r(G) k_{(r)}$.

12.3.5. استخدم التكرار اللوني للفرع (a). وللفرع (b)، ارجع إلى التمرين 40.3.1 المتعلق بأكبر عدد من الأضلاع في بيان على n من الرؤوس وعدد مركباته r .

18.3.5. يضمن الفرع (a) أن الفرع (b) يحتاج إلى إجراء عملية حسابية واحدة. إن التعبير عن كثيرة الحدود اللونية بوصفها حاصل جمع كثيرتي حدود لونيتين يشتمل على إضافة ضلع كما في المثال 9.3.5 .

23.3.5. استخدم ترتيب حذف مبسطي .

26.3.5. للفرع (a) استخدم ترتيب حذف مبسطي، يمكن أن يكون الرأس المبسطي موجودًا في $G \cap H$ أو لا يكون. وللفرع (b)، لاحظ أن $N(x)$ ربما يساوي $V(G) - x$ أو لا يساويه.

28.3.5. ابن ترتيب حذف مبسطي لـ G، وتوجيهًا متعديًا لـ $\overline{G}$.

20.1.6. ما بيانات المستوى التي تحوي وجهًا واحدًا؟ وعندما يحوي بيان المستوى أكثر من وجه، فما نوع الأضلاع التي يمكن أن نحذفها لتقليل عدد الأوجه؟

24.1.6. في خطوة الاستقراء، احذف ضلعًا لحلقة.

25.1.6. استخدم صيغة أويلر..

28.1.6. يمكن إثبات هذا بتطبيق صيغة أويلر لبيان سوي مناسب، إضافة إلى أنه يمكن استخدام الاستقراء في إثبات المطلوب.

30.1.6. قلّد إثبات المبرهنة 23.1.6.

6.2.6. من أجل تطبيق الادعاء وفرضيات الاستقراء؛ جد رأسًا مناسبًا لحذفه من بيان أكبر.

7.2.6. إذا أعطيت البيان G من أجل اختباره، فابن البيان H بحيث يكون G سويًّا خارجيًّا إذا وفقط إذا كان H سويًّا، ومن ثم يمكن تطبيق نظرية كوراتوسكي على H.

8.2.6. نحتاج إلى الأخذ في الحسبان عدة حالات تتعلق بكيفية ترتيب أي تقسيم لـ K_5 في البيان .

9.2.6. البناء، ابدأ بـ $n = 5$. صغّر الحد الأعلى لافتراض البيانات السوية التي لها $2n$ ضلعًا، والتي درجتها الصغرى تساوي 3 على الأقل وتحوي مثلثًا. وفي كل حالة، احصل على حلقات منفصلة، أو تقسيم لـ $K_{3,3}$.

11.2.6. افترض أن H' بيان جزئي قابل للانقباض إلى H. خذ في الحسبان البيانات الجزئية من H' التي تتقلص (تنقبض) لرؤوس H.

5.3.6. استخدم نظرية الألوان الأربعة.

9.3.6. عندما يكون طول $C=4$، فإن استبدال الداخل (أو الخارج) بضلع واحد بين رؤوس متضادة في C يسمح للفرد بالحصول على تلوين بأربعة ألوان لفلقة C– التي تستخدم ألوانًا مختلفة على رأسين متضادين من رؤوس C

12.3.6. للبناء؛ استخدم مجموعات من ثلاثة رؤوس لبناء "خلوات" بحيث لا يوجد أي حارس يرى أكثر من خلوة واحدة.

19.2.6. أثبت أن اتحاد هذين البيانين هو $C_5 \vee K_6$.

20.3.6. برهن أن الحد الأدنى الناتج عن قضية 10.3.6 يساوي $r/2$ على الأقل عندما $s>(r-2)^2/2$ ويعطينا تفكيكًا إلى $r/2$ بيانيًّا جزئيًّا سويًّا.

25.3.6. خذ في الحسبان الضرب الكارتيزي للحلقات.

27.3.6. افترض النسخ من $K_{m,n}$ في أي رسم لـ $K_{m+1,n}$.

38.3.6. (كذلك المسألة التالية). خذ في الحسبان ما يحدث عندما يتحرك رأس عبر ضلع وللفرع الثاني؛ افترض رسمًا يسهل فيه عدّ التقاطعات .

11.1.7. للضرورة في فرع (b)؛ برهن أن معدل درجة الرؤوس يجب أن يكون 2 .

16.1.7. اجعل $G = L(H)$، استخدم H لتبرهن أن $S \subseteq V(G)$ عدد مركبات $G - S$ يساوي $|S|+1$ على الأقل.

17.1.7. استخلص طمرًا لـ G من طمر لـ $L(G)$.

20.1.7. افترض تعريف 20.4.1 .

24.1.7. ربما تكون معالجة الحالة $H = K_2$ أولاً مفيدة على الرغم من عدم حاجتنا إلى إثبات هذه الحالة منفصلة عن الحالة العامة.

26.1.7. كل ضلع يقع على رأس قطع يجب أن يظهر في أحد الألوان.

33.1.7. برهن أننا نستطيع عمل تحسين عندما يظهر لون بكثرة، وعندما يكون اللون الثاني غير كافٍ .

17.2.7. اختزل المسألة للحالة التي يكون فيها البيانان الهاملتونيان حلقتين.

23.2.7. لكل k، حدد أكبر حجم لـ S بحيث يوجد لـ $G - S, k$ من المركبات .

29.2.7. اكتب الشرط المشتمل على درجات G، و $\overline{G}$ بدلالة درجة G فقط، ثمّ بين أن G تحقق شرط كفتال للمسارات المولدة.

31.2.7. استخدم نظرية كفتال وإيردوز.

32.2.7. كن حذرًا حول كيفية تعديل التحويل للدرجات، صياغة الشرط صحيحة. (نظرية 19.2.7) .

3.3.7. البيان الثنوي منتظم من الدرجة 3 .

4.3.7. افترض الأوجه الداخلية والخارجية لحلقة مولدة كلّ على حدة .

5.3.7. انقل هذه المسألة إلى عبارة بُرهنت سابقًا .

17.3.7. اختزل هذا لدراسة البيان الذي حُلِّلَ في المثال 6.3.7.

18.3.7. عدِّل البيان للحصول على الحالة التي تنطبق فيها نظرية جرينبرج .

21.3.7. إذا أعطيت ثلاثة ألوان على $\{x_{i-1}x_i,\ y_{i-1}y_i,\ z_{i-1}z_i\}$ ، فخذ في الحسبان إمكانية الألوان الثلاثة على $\{x_ix_{i+1},\ y_iy_{i+1},\ z_iz_{i+1}\}$.

ملحق (Appendix D)
مسرد المصطلحات (Glossary of Terms)

بالإضافة إلى المصطلحات المختلفة في هذا الكتاب، فإن قائمة المصطلحات هذه تحتوي على بعض المصطلحات المتعلقة بالمواضيع المطروحة، والتي يمكن للقارئ أن يواجهها في دراساته الإضافية لهذه المواضيع. ويشمل هذا بعض المصطلحات البديلة التي يستخدمها مؤلفون آخرون.

تمثل المفردات شرحًا غير رسمي للتعريف. وتشير الأرقام المستخدمة داخل الأقواس إلى رقم الصفحة التي ورد بها التعريف الكامل، أو الصفحة التي استخدم فيها المصطلح للمرة الأولى. عندما تستخدم "G" دون تحديد، فإنها تشير إلى بيان، أو ربّما بيان موجّه، أما "D"، فتشير إلى بيان موجه، في حين تشير v أو e إلى رأس أو ضلع، إضافة إلى n التي تشير إلى عدد الرؤوس.

خاصية الامتصاص (الماترويدات) [351]: $r(X) = r$ $r(X \cup f)$ $= (X \cup e)$ تتضمن أن: $r(X)=f(X \cup f \cup e)$

لا حلقي [67] : خالٍ من الحلقات.

توجيه لا حلقي [203،208] : توجيه دون حلقات.

مصفوفة التجاور A [6] : المدخلة $a_{i,j}$ تساوي عدد الأضلاع من الرأس i إلى الرأس j.

علاقة التجاور: مجموعة من الأزواج المرتبة أو غير المرتبة التي تشكل أضلاعًا في بيان أو في بيان موجه.

مجموعة تجاور $N(v)$: مجموعة الرؤوس المجاورة لـ v.

متجاورة [2] : الرؤوس التي هي نقاط طرفية لضلع. وتستخدم أحيانًا لوصف أضلاع لها نقاط طرفية مشتركة.

يقترن: يكون مجاورًا لـ

قرين: مصفوفة مرافقات المعاملات.

في أغلب الأحيان [430] : لها احتمالية مقاربة 1.

مسار متناوب -M: مسار يتناوب بين أضلاع في M وأضلاع ليست في M أيضًا.

السلف [100]: في شجرة مجذرة، رأس على المسار إلى الجذر.

مضاد سلسلة: عائلة من المفردات غير القابلة للمقارنة زوجًا زوجًا (تحت علاقة ترتيب).

مضاد عصبة: مجموعة مستقرة.

مضاد فجوة: بيان جزئي مستحدث بشكل متممة حلقة.

خوارزمية التقريب [496]: خوارزمية كثيرة الحدود بالنسبة إلى الزمن، ونسبة أدائها محدودة.

مخطط تقريب [496]: عائلة من خوارزميات التقريب لها نسبة أداء جيدة بصور اختيارية.

الشجراني: غابة موجهة فيها الدرجة الخارجة لكل رأس تساوي 1 على الأكثر.

التشجير $\gamma\,(G)$ [372]: أقل عدد من الغابات يغطي الأضلاع.

قوس: ضلع موجه (زوج مرتب من الرؤوس).

مترابط قوسيًّا من الدرجة k: مثل مترابط ضلعيًّا من الدرجة k للبيانات الموجهة.

نقطة مفصلة: رأس، حذفه يزيد عدد المركبات.

مسألة الواجب (الفرض المنزلي) [126]: صغِّر (أو كبِّر) مجموع أوزان الأضلاع في مواءمة كاملة لبيان ثنائي الفرع تام، متساوي حجم الفرعين.

النجم الثلاثي [346]: ثلاثة رؤوس مختلفة بحيث إن كل زوج منها مربوط بمسار يتفادى جوار الثالث.

لا متماثل: لا يوجد له أي تشاكل ذاتي مختلف عن التشاكل المحايد.

مقارب [431]: له نسبة تقترب من 1 .

خاصية التوسيع (الماترويدات) [352]: $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ حيث $|I_2|>|I_1|$ تتضمن وجود $e \in I_2 - I_1$ بحيث إن $I_1 \cup e \in \mathbf{I}$.

المسار الموسع [109]: للمواءمة هو مسار متذبذب يمكن استخدامه لزيادة حجمها؛ وللتدفق، يزيد من قيمة التدفق.

التشاكل الذاتي [14]: تبديلة للرؤوس تحافظ على علاقة التجاور.

زمرة التشاكل الذاتي $\acute{e}$: زمرة التشاكلات الذاتية تحت عملية تركيب التشاكلات.

معدل الدرجة: $\sum d(v)/\,n(G) = 2e(G)/n(G)$.

متباينة أزوما (Azuma):حد على الاحتمالية في نهاية التوزيع.

الرجوع بالأثر (استرجاع الأثر) [156]: البحث بعمق أولاً (البحث العمودي أولاً).
البيان المتوازن [434]: هو البيان الكامل، وهو البيان الجزئي الذي له أكبر معدل درجة رؤوس.
متعدد الفرع من الدرجة k المتوازن: تختلف مجموعات التجزئة لرؤوسه بعضها عن بعض من حيث الحجم بمقدار 1 على الأكثر (انظر متساوي التجزئة).
عرض النطاق: الأصغر، على ترقيم الرؤوس بأعداد صحيحة مختلفة، لأكبر فرق بين العلامات الدالة على الرؤوس المتجاورة.
مركز الكتلة [78]: رأس يصغر مجموع المسافات للرؤوس الأخرى.
أساس (ماترويدات) [349]: مجموعة مستقلة كبرى.
خاصية تبادل الأساس (ماترويدات) [351]: لكل $B_1,B_2\in\mathbf{B}$ و $e\in B_1 - B_2$ يوجد عنصر $f\in B_2\text{-}B_1$ بحيث إن $B_1 - e+f$ هي أساس.
بيان بيرج (Berge) [340]: بيان ليس له فجوة فردية أو مضاد فجوة فردية.
أفضل ما يمكن: تصبح غير صحيحة عند إهمال بعض الشروط.
الشجرة الثنائية المركز: الشجرة التي مركزها ضلع.
عصبة ثنائية [9]: بيان ثنائي الفرع تام.
ثنائي الترابط: مترابط من الدرجة 2.
قابل للتمثيل كبيان ثنائي [65،185]: زوج من المتتاليات التي يمكن تحقيقها كدرجات رؤوس لمجموعتي التجزئة في بيان ثنائي الفرع بسيط.
البيان الثنائي X,Y- [24]: بيان ثنائي الفرع، مجموعتا تجزئته هما: X ، Y.
مصفوفة ثنائية (أو متجه): المدخلات في $\{0,1\}$ جميعها.
ماترويد ثنائي [357]: يمكن تمثيله على الحقل الذي يحوي عنصرين.
شجرة ثنائية [101]: شجرة مجذرة (لها جذر) يوجد فيها طفلان على الأكثر لكل رأس غير ورقة.
معاملات ذات الحدين [487] $\binom{n}{k}$: عدد طرق اختيار k لعنصر من مجموعة بها n من العناصر ويساوي $[n!(n-k)!]/n!$.
ثنائي الفرع [422]: عدد البيانات الجزئية الثنائية الفرع اللازمة لتجزئة الأضلاع.
بيان ثنائي الفرع [4]: البيان الذي يمكن تغطية رؤوسه بمجموعتين مستقلتين.
عدد رامزي لثنائي الفرع: للبيان لثنائي الفرع G، هو أصغر عدد n، بحيث إن أي تلوين ثنائي لأضلاع $K_{n,n}$ يجبر G أن يكون أحادي اللون.
التجزئة الثنائية [24]: تجزئة لمجموعة الرؤوس إلى مجموعتين مستقلتين.
ماسة بيركوف (Birkoff) [259]: هيئة مختصرة خاصة لمسألة الألوان الأربعة.
قالب [155]: (1) بيان جزئي أكبر ليس له رأس قطع (2) بيان ليس له رأس قطع (3) صف في تجزئة مجموعة.
بيان قالب النقطة الفاصلة [156]: بيان ثنائي الفرع بسيط، تكون قوالبه مجموعات التجزئة ورؤوس الفصل، وعلاقة التجاور هي الاحتواء.
بيان القالب: بيان تقاطع قوالب G.
البرعم [142]: حلقة فردية تظهر في خوارزمية إدموندز لمواءمة عامة.
رابطة [154]: قاطعة أضلاع أصغريه.
ماترويد الروابط [362]: ثنائي لماترويد حلقة لبيان.
فضاء الروابط [452]: المتمم العمودي لفضاء الحلقات، التركيبات الخطية للروابط (على حقل يحوي عنصرين).
طمر الكتاب: تفكيك لـ G إلى بيانات سوية خارجية بترتيب متناغم للرؤوس (كما على العمود الفقري لكتاب).
باقة: بيان يتألف من رأس واحد ومجموعة من العرى.
رأس تفريع (تغصين) [249]: رأس، درجته تساوي 3 على الأقل.
التغصين (التفريع): بيان موجه، تساوي درجة الدخول لكل رأس فيه 1 ما عدا رأسًا واحدًا درجة دخوله تساوي 0.
تفريع - r [404]: تفريع جذره r.
البحث الأفقي أولاً [99]: بحث عن الرؤوس بترتيب بحسب بعدها عن الجذر.
الشجرة الأفقية الأولى: الشجرة التي يولدها البحث الأفقي أولاً بدءًا من الجذر.
الجسر [304]: ضلع – قطع.
جسر – H لـ G: الشظية – H (يستخدم من قبل مؤلفين آخرين).
بيان خال من الجسور [304]: بيان ليس له أضلاع – قطع.
نظرية برُوكس: $\chi(G)\le\Delta(G)$ وذلك للبيانات المترابطة، ما عدا العصب والحلقات الفردية.
الصبار [160]: بيان مترابط، بحيث يظهر كل ضلع من أضلاعه في حلقة واحدة على الأكثر.
قفص من نوع [49] (k,g) –: بيان منتظم من الدرجة k، رتبته أصغر ما يمكن وذلك من بين البيانات التي يساوي خصرها g.
السعة [176،178]: حد على التدفق (1) من خلال ضلع في شبكه، (2) عبر قطع.
ضرب كارتيزي $G_1\square G_2$: البيان الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1)\times V(G_2)$ وأضلاعه معطاة على الشكل $(u_1,u_2)\leftrightarrow(v_1,v_2)$ إذا تحقق أن

(1) $u_1 = v_1$ و $u_2 \leftrightarrow v_2$ في G_2 أو (2) $u_2 = v_2$ و $u_1 \leftrightarrow v_1$ في G_1.

الجرارة [88]: شجرة فيها ممر واحد يحوي احدى النقاط الطرفية لكل ضلع على الأقل.

صيغة كيلي [81]: عبارة تنص على وجود n^{n-2} شجرة مجموعة رؤوسها $[n]$.

خلية ثنائية [268]: على السطح هي منطقة متماثلة بصورة استمرارية مع قرص، بمعنى أن كل منحنى مغلق قابل للتقليص إلى نقطة.

طمر خلية ثنائية [72]: طمر تكون فيه كل منطقة عبارة عن خلية ثنائية.

المركز [72]: البيان الجزئي الذي تحدثه الرؤوس التي اختلافها المركزي أقل ما يمكن.

الشجرة المركزية [78]: شجرة مركزها رأس واحد.

السلسلة α, β –: مسار تتذبذب ألوانه بين اللونين α و β.

كثيرة الحدود المميزة $\phi(G;\lambda)$ [453]: كثيرة الحدود المميزة لمصفوفة التجاور للبيان، وجذورها هي القيم الذاتية (eigen values).

الأطفال [100]: في شجرة مجذرة، هي جيران الرأس الحالي البعيدة عن الجذر.

مسألة ساعي البريد الصيني [408]: مسألة إيجاد أرخص ممر مغلق يغطي الأضلاع جميعها في بيان موزون ضلعيًا.

عدد الاختيار [408]: قابلية الاختيار.

قابل للاختيار -χ [408]: للقوائم التي من الحجم χ جميعها المعينة لرؤوس G، يوجد تلوين فعلي يختار لونًا لكل رأس من قائمته.

وتر [225]: ضلع يربط بين رأسين غير متتابعين في مسار أو في حلقة.

بيان وتري [225]: لا توجد فيه حلقات غير وترية.

حلقة لا وترية [225]: حلقة مستحدثة طولها 4 على الأقل.

مسار لا حلقي: مسار يُشكل بيانًا جزئيًا مستحدثًا.

الدليل اللوني $\chi'(G)$ [275]: العدد اللوني للأضلاع.

العدد اللوني $\chi(G)$ [5،191]: أقل عدد من الألوان في تلوين فعلي.

كثيرة الحدود اللونية $\chi(G;k)$ [220]: كثيرة حدود، قيمتها عند k تساوي عدد التلوينات الفعلية لـ G باستخدام الألوان $\{1, \dots, k\}$.

المعاودة (التكرار) اللونية: علاقة معاودة (تكرار) لكثيرة الحدود اللونية.

لوني من الدرجة k [192]: عدده اللوني يساوي χ.

بيان الدائرة [341]: بيان التقاطع لأوتار دائرة.

الدارة [27،60]: صف تكافؤًا لمسارب مغلقة دون تحديد رأس بداية (بيان زوجي)، (تنويه– يستخدمها بعض المؤلفين لتعني حلقة).

البيان المستدير: بيان يُبنى على دائرة بمسافات متساوية بين رؤوسه حيث يعتمد التجاور فيه على المسافة فقط.

بيان أقواس الدائرة [341]: بيان التقاطع لأقواس دائرة.

دوران (جريان) [187]: تدفق في شبكة، بحيث إن محصلة التدفق تساوي 0 عند كل رأس.

المحيط [293]: طول أطول حلقة.

الفقرة (العبارة) [499]: جمع من الأحرف في صيغة منطقية (بولينية) (Boolean).

المخلب [12]: البيان $K_{1,3}$

خال من المخالب: ليس له $K_{1,3}$ كبيان جزئي مستحدث.

العصبة [4]: مجموعة من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا (يستخدم من قبل العديد من المؤلفين ليعني بيانًا تامًا).

غطاء العصب [226]: مجموعة من العصب تغطي الرؤوس (أقل حجم $=\theta(G)$).

التفكيك لعصب: تجزئة مجموعة الأضلاع إلى بيانات جزئية تامة.

غطاء الأضلاع بعصب: مجموعة من البيانات الجزئية التامة التي تغطي الأضلاع.

تحديد العصب: عملية تحافظ على الكمال، وتدمج العصب في بيانين.

عدد العصب $\omega(G)$: أكبر رتبة لعصبة في G.

عدد تجزئة العصب: أقل حجم تفكيك لعصب.

شجرة العصب [327]: تمثيل تقاطع لبيانات وترية. يتألف من شجرة مضيفة، بالإضافة إلى دالة تناظر بين رؤوس هذه الشجرة والعصب الأعظمية لـ G بحيث تحتوي هذه العصب على رأس تشكل شجرة جزئية من الشجرة المضيفة.

مصفوفة وقوع رأس – عصبة [328]: مصفوفة 0،1- فيها المدخلة (i,j) تساوي 1 إذا كان رأس j ينتمي إلى عصبة أعظمية i.

أذن مغلقة [164]: مسار بين رأسين قديمين (ربما متساويين) عبر رؤوس جديدة.

التفكيك لآذان مغلقة [116]: بناء بيان من حلقة من خلال إضافة آذان فعلية.

مجموعة مغلقة (ماترويدات) [360]: مجموعة تساوي ما تولده.

ممر مغلق [20]: ممر يبدأ بالرأس نفسه وينتهي به.
إغلاق [289،360]: (1) البيان $C(G)$ الذي يحصل عليه من G بإضافة أضلاع (ضلعًا ضلعًا) تربط بين الرؤوس غير المتجاورة بحيث يساوي مجموع الدرجات $n(G)$، (2) الصورة تحت مؤثر إغلاق.
مؤثر إغلاق [360]: مؤثر قابل للتمدد، يحافظ على الرتبة، وجامد.
مرافق أساس [360]: أساس للماترويد الثنوي.
مرافق حلقة [360]: حلقة في الماترويد الثنوي.
زوج مرافق حرج: رأسان غير متجاورين، بحيث إن إضافتهما بوصفها ضلعًا تزيد عدد العصب.
ماترويد مرافق الحلقات [362]: الماترويد الثنوي لماترويد الحلقات.
فضاء مرافق الحلقات: فضاء الروابط.
مرافق بيان [202]: بيان خال من p_4 (يكافئ متممة بيان مصغر).
صف لوني [191]: مجموعة الأشياء التي لها اللون نفسه في تلوين معين.
حرج اللون (حرج لوني) [192] بيان يتحقق فيه أن لكل بيان جزئي منه عددًا لونيًّا أصغر.
لوني من الدرجة -k [191]: له تلوين فعلي بـ k من الألوان على الأكثر.
تلوين من الدرجة -k [191،380]: تجزئة لـ k من المجموعات.
تلوين P: تجزئة للرؤوس إلى مجموعات جزئية تولد بيانات لها الخاصية P.
ماترويد أعمدة $M(A)$ [351]: هي ماترويد، بحيث إن مجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية المستقلة خطيًّا من أعمدة المصفوفة A.
شفرة خالية من فاصلة: لا توجد كلمة شفرة بوصفها مقدمةٍ (بداية) لشفرة أخرى.
نظام مشترك للتمثيلات المختلفة (CSDR) [171]: إذا أُعطينا عائلتين **A** و **B** من المجموعات فإن الـ $CSDR$ هي مجموعة من العناصر التي تشكل SDR لـ **A** و **B**.
بيان مقارنة [228]: بيان له توجيه متعدٍّ.
المتممة $\overline{G}$ [3]: بيان، أو بيان موجه بسيط له مجموعة رؤوس G نفسها، معرف من خلال $uv \in E(\overline{G})$ إذا وفقط إذا كان $uv \notin E(G)$.
تصغير متممة [344]: قابل للاختزال لبيان تافه من خلال تكرار أخذ متممة المركبات.
البيان التام K_n [9]: بيان بسيط، كل رأسين فيه يكونان متجاورين.
البيان المتعدد الفرع -k التام $K_{n_1,\dots,n_k}$ [207]: بيان متعدد الفرع، عدد مجموعات رؤوسه الجزئية يساوي k، يتجاور فيه أي رأسين لا ينتميان إلى المجموعة الجزئية نفسها (أحجام مجموعاته الجزئية هي $n_1,\dots,n_k$).
خلية تامة الوسم [388]: منطقة مبسطية بعلامات دالة مختلفة على الزوايا.
درجة التعقيد [404]: أسوأ حالة لعدد العمليات اللازمة، بوصفها دالة لحجم المدخلات.
المركبة [22]: أكبر بيان جزئي مترابط.
المركبة -S لـ G: انظر الفلقة -S.
تركيب $G_1[G_2]$ [332]: البيان الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1)\times V(G_2)$، والمعرف على الشكل $(u_1,u_2) \leftrightarrow (v_1,v_2)$ إذا وفقط إذا كان $u_1 \leftrightarrow v_1$ في G_1 أو $u_1=v_1$ و $u_2 \leftrightarrow v_2$ في G_2.
بيان تعارض [252]: بيان، رؤوسه هي الجسور لحلقة، حيث تكون الجسور متجاورة (متعارضة) عندما يكون لها ثلاث نقاط طرفية مشتركة، أو أن يكون لها أربع نقاط طرفية متناوبة على الحلقة.
أوتار متعارضة: وتران، تتناوب نقاطهما الطرفية على حلقة معينة.
التجزئات المترافقة: تجزئتان لـ n، تعطي إحداهما حجم الصفوف، أما الأخرى فتعطي حجم الأعمدة لشكل فيريرز (Ferrers diagram).
مترابط [6]: يحوي مسارًا من u إلى v لكل زوج من الرأسين u و v.
مترابط من الدرجة -k [149،164]: درجة ترابطه تساوي k على الأقل.
علاقة الربط (الوصل) [21]: علاقة يحققها الرأسان x و y إذا وُجِدَ مسار من x إلى y.
الترابطية (درجة الترابط) $k(G)$ [149،164]: أصغر عدد من الرؤوس، بحيث إذا حُذِفَت هذه، يصبح البيان غير مترابط، أو يصبح عبارة عن رأس واحد (أحيانا تسمى درجة "الترابط للرؤوس" وكذلك من أجل الوضوح).
خاصية الواحدات المتتابعة (للصفوف) [176]: توجد تبديلة للأعمدة بحيث تظهر الواحدات متتابعة في كل صف.
قيود المحافظة [186]: للتدفق، تعني أن محصلة التدفق تساوي 0 عند كل رأس.
التقريب (التدوير) المنسجم أو الملائم [84]: تحويل المعطيات ومجاميع الصفوف (الأعمدة) في مصفوفة إلى أقرب الأعداد الصحيحة أعلى أو أسفل، بحيث تبقى مجاميع الصفوف (الأعمدة) صحيحة.
خطوات البناء: خطوات التكرار (المعاودة) لبناء أعضاء صف من البيانات من بيان (بيانات) أساسية أصغر.

الانقباض (التقليص) [84]: أن يحل محل الضلع uv رأس w يقع على الأضلاع جميعها التي كانت واقعة أصلاً على u أو v.
العكس D^{-1}: تحصل عليه من بيان موجه D من خلال تبديل الرأس مع ذيل ضلع.
الطمر المحدب [248]: بيان مستوى، فيه كل وجه محدود مجموعة محدبة، أما الحدود الخارجية فهي مضلع محدب.
دالة محدبة [443]: تحقق المتباينة $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$، لكل a,b ولكل $0\leq\lambda\leq1$.
شكل رباعي محدب: لا يقع أي رأس من رؤوسه داخل المثلث الذي تشكله الرؤوس الثلاثة الأخرى.
التكلفة [125]: اسم الدالة الموضوعية للعديد من مسائل إيجاد القيم الصغرى الموزونة.
مرافق شجرة: بالنسبة إلى البيان، تعني الأضلاع التي لا تنتمي إلى شجرة مولدة معطاة.
غطاء (تغطية) -$\mathbf{F}$: تغطية لمجموعة أضلاع ببيانات جزئية في العائلة $\mathbf{F}$.
ضلع مربع [122،339]: ضلع، يزيد عدد الاستقلال إذا حُذف.
بيان حرج [192]: مصطلح يستخدم للعديد من خواص البيانات، حيث يشير إلى أن حذف رأس (أو ضلع، بحسب السياق) يلغي الخاصية المعطاة.
بيان حرج من الدرجة -k [192]: عادة تعني حرجًا لونيًّا، عدده اللوني k.
حرج الترابط الثنائي: إن حذف ضلع يلغي خاصية الترابط الثنائي.
التقاطع [234]: في الرسم لبيان، فإن هذا يعني تقاطعًا داخليًّا لضلعين.
عدد التقاطع $\upsilon(G)$ [262]: أصغر عدد للتقاطعات عند رسم G في المستوى.
المكعب Q_k [36]: المكعب ذو البعد k.
بيان تكعيبي [304]: بيان منتظم من الدرجة 3.
قطع $[S,\bar{S}]$ [166]: الأضلاع من مجموعة جزئية من الرؤوس إلى متممتها (وخصوصًا في الشبكات).
ضلع – قطع [23]: ضلع، يزيد عدد المركبات إذا حُذف.
مجموعة قطع (فصل): مجموعة فاصلة من الرؤوس.
رأس قطع [23]: رأس، يزيد عدد المركبات إذا حُذف.
حلقة [5،55]: بيان بسيط، يمكن وضع رؤوسه على دائرة، وتكون هذه الرؤوس متجاورة إذا وفقط إذا ظهرت بالتتابع على الدائرة.
(تنويه– تستخدم من قبل بعض المؤلفين الآخرين لتعني بيانًا زوجيًّا).
غطاء حلقات مزدوج [312]: قائمة من الحلقات، بحيث يظهر كل ضلع في مفردتين من مفردات القائمة.
حلقة -K [9]: حلقة طولها k، تتألف من k رأسًا و k ضلعًا.
ماترويد الحلقات [350] $M(G)$: ماترويد، داراته هي حلقات G.
الرتبة الحلقية: بُعد فضاء الحلقات، ويساوي عدد الأضلاع – عدد الرؤوس + عدد المركبات.
فضاء الحلقات [452]: الفضاء الصفري لمصفوفة الوقوع: ترتبط العناصر بالبيانات الجزئية الزوجية.
مقدار الترابط – الضلعي الحلقي: عدد الأضلاع التي يجب أن تحذف من أجل فصل مركبة بحيث تحوي كل مركبة من المركبات المتبقية حلقة.
مترابط ضلعي حلقي من الدرجة k: مقدار ترابطه الضلعي الحلقي يساوي k على الأقل.
بيان دوبروجن [61]: بيان موجه يُشفر الانتقال الممكن بين عديد -k، وترتيبه -n عند استلام الأحرف الإضافية.
مسألة قرار (تقرير) [494]: مسألة حسابية جوابها نعم أو لا.
التفكيك (التحليل) [11]: كتابة بيان G على هيئة اتحاد لبيانات جزئية منفصلة ضلعيًّا.
تفكيك $\mathbf{F}$ – [397]: تفكيك باستخدام بيانات في العائلة $\mathbf{F}$.
عدد تفكيك –$\mathbf{F}$ لـ G: أصغر عدد من البيانات في تفكيك -$\mathbf{F}$ لـ G.
الدرجة [6،34] $d(v)$: (1) لرأس؛ هي عدد مرات ظهور هذا الرأس في الأضلاع (ربما تعد من رؤوس هذا البيان).
متتالية الدرجات [44] $d_1 \geq \ldots \geq d_n$: قائمة بدرجات الرؤوس، تفهرس عادة بدليل غير متناقص بغض النظر عن ترتيب الرؤوس.
مجموعة الدرجات: مجموعة درجات الرؤوس (تظهر كل درجة مرة واحدة فقط).
صيغة مجموع الدرجات: $\Sigma d(v) = 2e(G)$.
طريقة الحذف [428]: تقوية لتعليل وجود شيء بطريقة الاحتمالات.
الطلب [184]: قيود على المَصابّ في شبكات النقل.
الكثافة [435]: نسبة عدد الأضلاع إلى عدد الرؤوس.
الضلع التابع [231]: ضلع في توجيه لا حلقي، بحيث ينتج عكسه حلقة.
المجموعة التابعة (غير المستقلة) (ما ترويدات) [349]: مجموعة تحوي حلقة (دارة).
البحث بعمق (العمودي) أولاً [156]: البحث باسترجاع (الرجوع) الأثر من رأس، وذلك بدءًا من عند أحدث رأس تام الوصول إليه، ودعمه في الحالة التي لا يوجد فيها جيران جدد.

خلف (سلالة) [100] x: في الشجرة ذات الجذر؛ هي عناصر الشجرة الجزئية التي جذرها x.

عدد رامزي القطري [385]: عدد رامزي لمثال (شاهد) عندما تكون العتبات (البدايات أو ما يستهل به) (أعداد أو بيانات) متساوية.

القطر [70]: القيمة العظمى للمسافات $d(u,v)$ بين الرؤوس.

بيان موجه [53]: بيان له توجيه.

خوارزمية ديجكسترا [97]: خوارزمية لحساب أقصر المسارات من رأس واحد.

نظرية دل ورث [413] (Dilworth): أكبر عدد للعناصر غير القابلة زوجًا زوجًا يساوي أصغر عدد من المجموعات الجزئية المرتبة كليًّا واللازمة لتغطية العناصر جميعها.

المكعب Q_k ذو البعد K [36]: بيان بسيط مجموعة رؤوسه $\{0,1\}^k$، حيث تتجاور الرؤوس إذا وفقط إذا اختلفت أسماؤها في إحداثي واحد بالضبط.

مخمنة دينتز [410] (Dinitz): كل بيان ثنائي الفرع يكون قابلاً للتلوين ضلعيًّا بقائمة تحوي $\Delta(G)$ لونًا.

البيان الموجه [53]: مجموعة أضلاع، ومجموعة رؤوس، وتحديد رأس كل ضلع حلقة وذيله،مسار، مسرب، ممر – موجه ... الخ [57]: المعنى نفسه دون إضافة الصفة (موجه). ورأس كل ضلع هو ذيل الضلع الذي يليه.

قرص: منطقة مستوية محاطة بمنحنى مغلق.

غير مترابط (منفصل) [6]: بيان له أكثر من مركبة.

مجموعة فاصلة [152]: مجموعة أضلاع، إذا حُذفَت، فإنك ستحصل على رأس لا تستطيع الوصول إليه من رأس آخر.

الاتحاد المنفصل $G_1 + G_2$ [39]: اتحاد لبيانينَ منفصلي مجموعتي الرؤوس.

بيان فصل: متممة بيان تقاطع.

المسافة $d(u,v)$ [70]: أصغر طول لمسار من u إلى v.

طمر حافظ للمسافات [400]: دالة $f: V(G) \to V(H)$ بحيث $d_H(f(u),f(v))= d_G(u,v)$ الاثنا عشري [243]: بيان سوي له 20 رأسًا، و 30 ضلعًا، و 12 وجهًا، طول كل منها يساوي 5.

مجموعة مسيطرة [116]: مجموعة $S \subseteq V$ بحيث إن لكل رأس خارج جارًا في S.

عدد السيطرة [116]: أصغر حجم مجموعة رؤوس مسيطرة.

قفزة مزدوجة (ثنائية) [437]: البناء المختلف الموسوم لبيان عشوائي في النموذج A لدوال الاحتمالية التي لها الشكل c/n حيث $c = 1$، $c < 1$ و $c > 1$.

النجم المزدوج [77]: شجرة لها رأسان على الأكثر، درجة كل منهما أكبر من 1.

الطارة المزدوجة (الثنائية) [266]: السطح (الموجه) بمقبضين.

مثلث مزدوج $K_4 - e$: [280]

المصفوفة التصادفية المزدوجة [120]: مصفوفة مربعة، مجموع مدخلاتها يساوي 1 في كل صف وفي كل عمود أيضًا.

خاصية التوسيع الثنوية (ماترويدات) [362]: مجموعات منفصلة مستقلة في الماترويد والثنوي له ويمكن توسيعها لأساس ومرافق أساس متمم.

الضلع الثنوي e^* [236]: هو ضلع البيان الثنوي G^* المرتبط بالضلع e لبيان المستوى G.

البيان الثنوي G^* [236]: لبيان المستوى G، هو البيان الذي فيه رأس لكل منطقة في G، حيث تكون فيه الرؤوس متجاورة إذا اشتركت حدود مناطقها في G بضلع (يمتد لطمور الخلايا الثنائية على أي سطح).

نظام وراثي ثنوي (أو ماترويد) M [360]: نظام وراثي، أساساته متممات أساسات M.

المسألة الثنوية [113]: للمسألة $\max c^Tx$ بحيث $Ax \le b$ و $x \ge 0$، إن المسألة الثنوية لهذا هي $\min y^Tb$ حيث $yA \ge c$ و $y \ge 0$.

فجوة الثنوية: متباينة صارمة بين قيم مثلى لزوج من البرامج الصحيحة الثنوية.

مضاعفة الرأس x [321]: إضافة x' حيث $N(x') = N(x)$.

مقبض (أذن) [163]: مسار، درجة رؤوسه الداخلية 2 (أو «جديدة»).

تفكيك مقبضي [163]: بناء G من حلقة بإضافة مقابض.

الاختلاف المركزي[70] $\in_G(v)$: أكبر مسافة للرؤوس الأخرى.

ضلع [2]: (1) في البيان، زوج من الرؤوس ($E(G)$ ترمز إلى مجموعة الأضلاع).

(2) في بيان زائدي، مجموعة جزئية من مجموعة الرؤوس.

قابلية اختيار الأضلاع $\chi'_l(G)$ [409]: أصغر k بحيث تكون قابلية اختيار أضلاع G تساوي k.

قابلية اختيار الأضلاع k- [409]: للقوائم من الحجم k المحددة لأضلاع G جميعها، يوجد تلوين فعلي لأضلاع G بحيث يختار هذا التلون لونًا لكل ضلع من قائمته.

العدد اللوني للأضلاع $\chi'(G)$ [275]: أصغر عدد من الألوان في تلوين فعلي للأضلاع.

قابل للتلوين الضلعي بـ k من الألوان [275]: يوجد تلوين فعلي للأضلاع يستخدم على الأكثر k لونًا.

تلوين الأضلاع [274]: تحديد علامات دالة للأضلاع.

مترابط ضلعيًّا من الدرجة Kk[152،164]: مقدار ترابطه الضلعي يساوي K على الأقل.

مقدار (درجة) الترابط الضلعي [152] $k'(G)$: أصغر عدد من الأضلاع، بحيث يؤدي حذف هذه الأضلاع إلى فصل G (يجعل G غير مترابط).
غطاء الأضلاع [114]: مجموعة أضلاع تقع عليها الرؤوس جميعها.
قطع ضلع [152،164] $[S, \bar{S}]$: مجموعة الأضلاع التي تربط رأسًا في S مع رأس غير موجود فيه.
قابل لإعادة البناء – ضلعيًّا: البيان الذي يمكن تحديده (بإهمال التشاكل) من خلال معرفة مجموعة البيانات الجزئية التي تحصل عليها بحذف أضلاع منفردة.
مخمنة إعادة بناء الأضلاع: المخمنة التي تنص على أن كل بيان له أربعة أضلاع على الأقل يكون قابلاً لإعادة البناء – ضلعيًّا.
متعدٍّ ضلعيًّا [18]: توجد لكل زوج من الأضلاع $e,f \in E(G)$ تبديلة تنقل e إلى f.
القيمة الذاتية [453]: لبيان، هي القيمة الذاتية لمصفوفة تجاور هذا البيان.
المتجه الذاتي لـ [453] A: المتجه X' بحيث $A_X = \lambda X$ لثابت λ.
انقباض بسيط (أولي) [84]: انقباض.
حلقة بسيطة (أولية): حدود منطقة في بيان مستوى (تنويه: بعض المؤلفين الذي يستخدمون "حلقة" لتعني دارة، يستخدمون حلقة بسيطة (أولية) لتعني حلقة)
تقسم أولي [162]: استبدال ضلع بمسار من ضلعين يربط بين النقاط الطرفية للضلع الأصلي. (انظر تقسيم الأضلاع).
الطمر [234]: دالة (تطبيق أو تحويل) من بيان لسطح، بحيث لا تتقاطع (صور) أضلاعه إلا عند نقاط طرفية مشتركة.
بيان خالٍ [22]: البيان الذي لا يحوي أضلاعًا.
نقطة طرفية [2]: (1) كل عنصر من عناصر ضلع؛ (2) أول أو آخر رأس لمسار أو مسرب أو ممر.
رأس طرفي (نهاية): رأس، درجته تساوي 1.
متساوي التجزئة (الفرع) [207]: له مجموعات تجزئة تختلف في أحجامها بمقدار 1 على الأكثر.
تلوين عادل (منصف): له صفوف لونية تختلف أحجامها بمقدار 1 على الأكثر.
تكافؤ [399]: كبيان، اتحاد لبيانات تامة منفصلة زوجًا زوجًا.
علاقة تكافؤ [490]: علاقة منعكسة، متماثلة ومتعدية.
عدد إيردوز: المسافة عن إيردوز في بيان التعاون للرياضيين.
مميز أويلر: للسطح، من جنس γ هو $2\text{-}2\gamma$.
جولة أويلر: دارة (حلقة) أويلرية.
دارة (حلقة) أويلرية [26،60]: مسرب مغلق يحوي كل ضلع.
بيان (بيان موجه) أويلري [26،60]: بيان، أو بيان موجه يحوي دارة (حلقة) أويلرية.
مسرب أويلري [26،60]: مسرب يحوي كل ضلع.
صيغة أويلر [241]: الصيغة $n - e+f = 2 - 2\gamma$ وذلك لطمر ثنائي الخلية لبيان مترابط له n من الرؤوس، و e من الأضلاع، و f وجهًا على سطح جنسه يساوي γ.
حلقة زوجية [24]: حلقة، عدد أضلاعها (رؤوسها) زوجي.
زوج زوجي [348]: زوج من الرؤوس x، y بحيث يكون كل مسار لا وتري من x إلى y زوجي الطول.
مثلث زوجي [280]: مثلث T بحيث إن لكل رأس عددًا زوجيًّا من الجيران في T.
رأس زوجي [26]: رأس درجته زوجية.
التطور (النشوء): النموذج الذي يولد بيانات عشوائية من خلال إضافة أضلاع عشوائية بالتتابع.
المُمدد (المكبر)– [463] (n,k,c): ثنائي الفرع، حجم كل من مجموعتي تجزئته يساوي n ودرجات رؤوسه تساوي k على الأكثر، بحيث يوجد جارٌ على الأقل لكل مجموعة S بها على الأكثر نصف رؤوس المجموعة الجزئية الأولى $|S|(1+c(1 - |s|/n))$.
التمدد (التوسع): في بيان منتظم ثلاثي، يُقَسَّمُ ضلعان، ويُضاف ضلع جديد يربط بين رؤوس جديدة.
تمهيدية التمدد [162]: إضافة رأس درجته k إلى بيان مترابط من الدرجة. يحافظ k على درجة الترابط k.
خاصية التمدد (التوسع) [358]: للدالة σ المعرفة على المجموعات الجزئية لمجموعة، تعني أن تكون $X \subseteq \sigma(X)$ لكل X.
التوقع [427]: لمتغير عشوائي متقطع هي $\sum k\, prob(X = k)$.
المنطقة الخارجية: المنطقة غير المحدودة في بيان مستوى.
رأس خارجي: رأس في المنطقة غير المحدودة.
وجه [235]: منطقة في طمر.
عامل [136]: بيان جزئي مولد.
عامل [140] f-: بيان جزئي مولد، فيه $d(v) = f(v)$.
عامل [140] k-: بيان جزئي مولد منتظم من الدرجة k.
قابل للتحليل لـ k من العوامل [276]: له تفكيك (تحليل) إلى k من العوامل.

تحليل للعوامل: التعبير عن G بوصفها اتحادًا لبيانات جزئية مولدة منفصلة ضلعيًّا.

تحليل إلى k من العوامل [276]: تحليل البيان إلى k من العوامل.

المروحة x, U [170]: مسارات منفصلة داخليًّا زوجًا زوجًا من x إلى الرؤوس المختلفة في U.

نظرية فاري (Fa'ry) [246]: يوجد للبيان السوي طمرٌ في المستوى في صورة خطوط مستقيمة.

مثلث سمين [275]: بيان ثلاثي الرؤوس، لكل زوج من رؤوسه عدد مرات التكرار الضلعي نفسها.

التدفق الملائم [176]: يحقق تدفق في شبكة قيود الأضلاع، وتساوي محصلة التدفق عند كل رأس داخلي 0.

الحل الملائم [322]: خيار لقيم المتغيرات يحقق القيود جميعها في مسألة أمثلية.

بيان فيريرز (Ferrers) الموجه: بيان موجه (يسمح بالعرى) بحيث لا يوجد x,y,z,w (ليست مختلفة بالضرورة) بحيث $x \to y$ و $z \to w$، لكن $z \nrightarrow y$ و $x \nrightarrow w$؛
يكافئ ذلك، إن مجموعات كل من الخلف أو السلف ترتب بالاحتواء يكافئ ذلك. لا يوجد لمصفوفة التجاور أي مصفوفة تباديل جزئية من الرتبة 2×2.

نظرية الألوان الخمسة [257]: المبرهنة التي تقول: إن البيانات السوية قابلة للتلوين بخمسة ألوان.

مُسطح (مُبسط) [266]: مجموعة مغلقة في ماترويد.

التدفق [176]: تحديد أوزان لأضلاع في شبكة.

تدفق k- [307]: تحديد أوزان من $\{-k+1, \ldots, k-1\}$ لأضلاع موجهة بحيث إن محصلة التدفق الخارج تساوي 0 عند كل رأس.

الزهرة (في خوارزمية إدموندز للبراعم) [142]: تتألف من ساق (مسار متذبذب (متناوب) من رأس غير مشبع) وبرعم (حلقة فردية بمواءمة كاملة تقريبًا).

هاملتوني بالضرورة: متتالية درجات، بحيث يكون كل بيان بسيط درجات رؤوسه هي هذه المتتالية هاملتونيًّا.

غابة [67]: اتحاد منفصل لأشجار، أو بيان لا حلقي.

نظرية الألوان الأربعة [260]: المبرهنة التي تنص على أن كل بيان سوي يكون قابلاً للتلوين بأربعة ألوان.

التوجيه الأخوي [345]: توجيه يتجاور فيه رأسان إذا وُجد لهما تابع مشترك.

الشظية H- لـ G [252]: مركبة لـ $G - H$ بالإضافة إلى الأضلاع التي تصلها مع رؤوس ربطها.

خالٍ من H [41]: توجد فيه نسخة من H بوصفها بيانًا جزئيًّا مستحدثًا.

ماترويد حر [357]: ماترويد يتحقق فيه استقلال كل مجموعة من عناصره.

نظرية الصداقة [467]: إذا وجد لكل شخصين في مجموع معين صديق مشترك في المجموعة، فإنه يوجد شخص يكون صديقًا لكل شخص في المجموعة.

الحلقة الأساسية [374]: لشجرة مولدة، هي الحلقة المشكلة بإضافة ضلع إليها.

قامويد [377]: ماترويد على E يظهر من مجموعات الرؤوس F,E في بيان موجه من خلال جعل المجموعات المستقلة هي المجموعات المشبعة من قبل مجموعة من المسارات المنفصلة التي تبدأ في F.

العدد اللوني المعمم (العام): أصغر عدد من الصفوف يلزم لتجزئة الرؤوس، بحيث يمتلك كل بيان جزئي مستحدث من قبل كل صف لون الخاصية **P**.

بيان بيترسون العام (المعمم) [316]: البيان الذي رؤوسه $\{u_1, \ldots, u_n\}$ و $\{v_1, \ldots, v_n\}$ وأضلاعه $\{u_iv_i\}$, $\{u_iu_{i+1}\}$ و $\{v_iv_{i+k}\}$ حيث يتم الجمع بمقياس n.

عدد رامزي المعمم [386] $r(G_1, \ldots, G_k)$: أصغر n، بحيث إن أي تلوين لأضلاع K_n بـ k من الألوان يجبر وجود نسخة من G_i ملونة باللون i لبعض i.

جنس [266] γ: (1) للسطح، عدد المقابض بالوصف التوبولوجي لهذا السطح، (2) لبيان، أصغر جنس لسطح يطمر فيه هذا البيان.

الخط الجيوديسي: أقصر مسار بين نقطتيه الطرفيتين.

الجيوديسي: له خاصية أن كل زوج من الرأسين u و v يكون نقاطًا طرفية لمسار وحيد طوله $d(u,v)$.

خصر G [13]: طول أقصر حلقة في G.

مضلع k-: في طمر، هو حلقة k- تحد منطقة.

خوارزمية جيدة [124]: خوارزمية، زمن تشغيلها يتبع كثيرة حدود (معطى بحسب كثيرة حدود).

توصيف جيد [495]: توصيف يمكن اختباره في زمن يتبع كثيرة حدود (زمن معطى بحسب كثيرة حدود).

تلوين جيد: غالبًا، نعني بذلك تلوينًا فعليًّا.

مسألة القيل والقال [406]: تقليل عدد المكالمات، بحيث ينقل كل رأس إلى كل رأس من الرؤوس المتبقية بمسار متزايد.

العلامات الدالة الجميلة [87]: تحديد (تعيين) أعداد صحيحة للرؤوس بحيث إن 1) هذه الأعداد بين 0 و $e(G)$ ، و 2) يعطي الفرق بين العلامات الدالة على النقاط الطرفية للأضلاع الأعداد الصحيحة $1, \ldots, e(G)$.

بيان جميل [87]: بيان له علاقات دالة جميلة.

شجرة جميلة [87]: شجرة لها علامات دالة جميلة.

مخمنة الشجرة الجميلة [87]: توجد علامات دالة جميلة لكل شجرة.

بيان [2]: مجموعتا رؤوس وأضلاع، وتعيين مجموعة تحوي عنصرين على الأكثر بوصفها نقاطًا طرفية للأضلاع.

ماترويد بياني [350] $M(G)$: ماترويد، مجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية اللاحلقية من $E(G)$.

متتالية بيانية [44]: قائمة بأعداد صحيحة يمكن تحقيقها بوصفها متتالية درجات لبيان بسيط.

الخوارزمية الجشعة [95،354]: خوارزمية سريعة لإيجاد حل مناسب جيد من خلال تكرار عمل خيار جيد لمساعد أو موجه، يساعد الطالب على الكشف بنفسه.

التلوين الجشع [194]: بالنسبة إلى ترتيب معين للرؤوس، لون كل رأس باللون الذي دليله أقل ما يمكن، والذي لم يظهر سابقًا بين جيران الرأس المراد تلوينه.

شرط جرنبرج [303] (Grinberg): ضروري للحلقات الهاملتونية في البيانات السوية التي حاصل جمعها (طول -2) على كلّ من الأوجه الداخلية أو الخارجية يعطي المجموع الكلي نفسه.

بيان جروتزك [205]: أصغر بيان خالٍ من المثلثات، رباعي اللون.

عدد جرندي (Grundy): أكبر عدد من الألوان في تطبيق لخوارزمية التلوين الجشع.

مخمنة هادوايجر [213]: يوجد لكل بيان لوني من الدرجة k بيان جزئي يمكن تقليصه لـ K_k (صحيحة على الأغلب للبيانات جميعها).

مخمنة هاجوز [213]: كل بيان لوني من الدرجة k يحوي تقسيمًا لـ K_k (غير صحيحة لـ $k > 5$)

شرط هال [110]: يوجد رأس لكل مجموعة جزئية S لمجموعة تجزئة X في بيان ثنائي الفرع، على الأقل $|S|$ له جيران في S.

نظرية هال [110]: شرط هال ضروري وكافٍ لوجود مواءمة تشبع X.

جولة (رحلة) هاملتون: حلقة هاملتونية.

هاملتوني [286]: كل بيان يحوي حلقة هاملتونية.

الإغلاق الهاملتوني [289]: بيان نحصل عليه عن طريق إضافة أضلاع بالتتابع بحيث تربط هذه الأضلاع بين رؤوس مجموع درجاتها كبير بمقدار عدد هذه الرؤوس.

مترابط هاملتوني [297]: يوجد فيه مسار هاملتوني من أي رأس إلى أي رأس آخر.

حلقة هاملتونية [286]: حلقة تحوي كل رأس.

مسار هاملتوني [291]: مسار يحوي كل رأس.

بيان هراري [150]: عائلة من البيانات المترابطة من الدرجة k على n من الرؤوس لها أقل عدد من الأضلاع.

الرأس [53]: الرأس الثاني في ضلع في بيان موجه.

صيغة هيود [268]: العدد اللوني لبيان مطمور على السطح الموجه الذي له γ مقبضًا يساوي $\left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1+48\gamma}) \right\rfloor$ على الأكثر.

خاصية هيلي [80]: خاصية خط الأعداد (أو الأشجار) التي تنص على وجود نقطة تقاطع مشتركة للمجموعة المتقاطعة زوجًا زوجًا.

صف وراثي [226]: صف F بحيث توجد البيانات الجزئية المستحدثة من بيانات F جميعها في F أيضًا.

عائلة وراثية [349]: عائلة F من المجموعات بحيث توجد كل مجموعة جزئية من عنصر من عناصر F في F.

نظام وراثي [349]: نظام يتألف من عائلة وراثية والطرق البديلة التي تحددها.

الحفرة [340]: حلقة لا وترية في بيان.

متماثلة استمراريًّا: بيانان، يُحصَل عليهما من البيان نفسه من خلال تقسيم الأضلاع.

متجانسة [380]: في نظرية رامزي، تعني مجموعة أن لقطعها الملونة اللون نفسه.

التشاكل: دالة $f: V(G) \rightarrow V(H)$ تحافظ على التجاور.

شفرة هفمان [103]: تشفير خالٍ من المقدمات من أجل تقليل زمن البحث المتوقع.

الخوارزمية الهنجارية [126]: خوارزمية لحل القروض المنزلية.

المكعب الزائدي Q_k [36]: المكعب ذو البعد k.

بيان زائدي [449]: تعميم للبيان ربما تكون فيه الأضلاع أي مجموعة جزئية من الرؤوس.

مستوى زائدي (ماترويدات) [360]: مجموعة جزئية فعلًا مغلقة أعظمية من مجموعة الأساس.

تحت هاملتوني: بيان غير هاملتوني، بحيث تكون بياناته الجزئية الناتجة عن حذف الرؤوس هاملتونية جميعها.

تحت قابل لتتبع الأثر: بيان غير قابل لتتبع الأثر، بحيث تكون بياناته الجزئية الناتجة عن حذف الرؤوس جميعها قابلة لتتبع الأثر.

العشريني [243]: تثليث سوي له 12 وجهًا، و 30 ضلعًا، و 20 رأسًا.

خاصية الجمود (ماترويدات) [359]: $\sigma^2(X) = \sigma(X)$ لكل X.

المطابقة: عملية يحل فيها رأس واحد محل رأسين مع الحفاظ على الوقوعات الموجودة جميعها على هذين الرأسين (هي الانقباض نفسه في حال تجاور الرأسين).

بيان غير كامل [232]: يحقق فيه أن $\chi(H) > \omega(H)$ لبيان جزئي مستحدث H.

مصفوفة الوقوع [6]: (1) لبيان، هي المصفوفة التي مدخلاتها 0 و 1 حيث تساوي المدخلة (i,j) 1 إذا وفقط إذا وقع الرأس i على الضلع j؛ (2) لبيان موجه، تساوي المدخلة (i,j) 1 إذا كان الرأس i رأسًا للضلع j في حين تساوي 1- إذا كان ذيلًا، وتساوي 0 بخلاف ذلك i (3) بشكل عام هي مصفوفة لعلاقة عضوية.

الوقوع (يقع على) [6]: (1) الرأس v يقع على الضلع e إذا تحقق أن $v \in e$، (2) لضلعين إذا كانت لهما نقطة طرفية مشتركة.

مبدأ التضمين والاستبعاد [223]: عدد الأشياء خارج $A_1, \ldots, A_n$ يساوي $\sum_{S \in [n]} (-1)^{|S|} \left| \bigcap_{i \in S} A_i \right|$.

بيان لا مقارنة: المتممة لبيان مقارنة.

خاصية الاندماج (ماترويدات) [359]: $r(\sigma(X)) = r(X)$

درجة الدخول [58]: للرأس في بيان موجه، عدد الأضلاع التي يكون هذا الرأس رأسًا لها.

عدد الاستقلال [113] $\alpha(G)$: أكبر حجم لمجموعة مستقلة من الرؤوس.
عدد السيطرة المستقلة [117]: أصغر حجم لمجموعة مسيطرة مستقلة.
مجموعة مستقلة [3]: مجموعة مؤلفة من رؤوس غير متجاورة زوجًا زوجًا.
المتغير المؤشر [427]: متغير عشوائي يأخذ القيم في $\{0,1\}$.
خاصية أحداث حلقة (ماترويدات) [355]: إضافة عنصر إلى مجموعة مستقلة تنتج حلقة واحدة على الأكثر.
بيان (موجه) جزئي مستحدث [23] $G[A]$: البيان (الموجه) الجزئي على مجموعة رؤوس $A \subseteq V(G)$ نحصل عليه بأخذ A وأضلاع G جميعها التي طرفاها في A.
برنامج أعداد صحيحة [323]: برنامج خطي، تكون المتغيرات فيه ذات قيم من مجموعة الأعداد الصحيحة.
نظرية التتام [181]: في الشبكة التي سعات أضلاعها أعداد صحيحة، يوجد تدفق أمثل معبر عنه كوحدات تدفق عبر مسارات من المنبع إلى المصب.
نظرية التحابك (التشابك) [458]: لكل رأس x، تحقق القيم الذاتية $\{\lambda_i\}$ و $\{\mu_i\}$ لـ $G - X$ أن $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \mu_n \geq \lambda_n$.
الرؤوس الداخلية 1) :[20]) للمسار، النقاط غير الطرفية (2) لبيان مستوى، الرؤوس غير الموجودة على حدود الوجه الخارجي.
المسارات المنفصلة داخليًّا [161]: المسارات التي تتقاطع عند النقاط الطرفية فقط.
بيان التقاطع [324]: لعائلة من المجموعات، هو البيان الذي يحوي رأسًا من كل مجموعة، وتتجاور فيه الرؤوس إذا جاءت من مجموعات متقاطعة.
عدد التقاطع [397]: أصغر حجم لمجموعة U بحيث يكون G بيان تقاطع لمجموعات جزئية من U (يساوي أصغر عدد من البيانات الجزئية التامة التي تغطي $E(G)$).
تقاطع الماترويدات [366]: النظام الوراثي الذي تكون مجموعاته المستقلة هي المجموعات المستقلة المشتركة بين هذه الماترويدات.
تمثيل تقاطع [324]: تعيين مجموعة S_v لكل رأس v بحيث إن $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $S_u \cap S_v \neq \phi$.
بيان فترات [195]: بيان له تمثيل بفترات.
عدد فترات (الفترة) [451]: أصغر عدد t بحيث يكون لـ G تمثيل في t من الفترات.
تمثيل فترات لـ [195] G: مجموعة فترات، بحيث إن بيان تقاطعها هو G.
فترات t- [451]: اتحاد لـ t من الفترات على الأكثر في $\mathbb{R}$.
تمثيل بفترات [451] t-: تمثيل تقاطع حيث إن كل مجموعة معينة تكون فترات t-.
شجرة – داخلة [89]: شجرة موجهة بحيث إن كل ضلع فيها موجه نحو الجذر.
تبديلة العودة إلى الأصل [470] (Involution): تبديلة، مربعها التبديل المحايد.
رأس أو ضِلع معزول [22]: لا يقع على أي ضلع آخر.
الطمر المتقايس [400]: تحويل من $V(G)$ إلى $V(H)$ يحافظ على المسافات.
تفكيك متشاكل: تفكيك لبيانات جزئية متشاكلة.
التشاكل [7]: تناظر بين الرؤوس يحافظ على علاقة التجاور.
البرزخ: ضلع – قطع.
الربط [138] $G\acute{U}H$: الاتحاد المنفصل $G + H$ بالإضافة إلى الأضلاع $\{uv: u \epsilon V(G), v \epsilon V(H)\}$.
موصول (مربوط) بـ: يجاور.
ملتقى (نقطة) اتصال: رأس درجته تساوي 3 على الأقل.
سلسلة كمب [258]: مسار بين رأسين يتذبذب بين لونين (على وجه الخصوص كما تم استخدم في منع بيانات سوية صغرى خماسية اللون)
النواة [57,410]: في البيان الموجه، مجموعة مستقلة في المجموعة المسيطرة.
كامل النواة [410]: له نواة في كل بيان جزئي مستحدث.
قانون كيركوف للتدفق: محصلة التدفق حول ممر مغلق تساوي صفرًا.
الطائرة الورقية [12]: بيان بسيط على أربعة رؤوس تحصل عليه بحذف ضلع من K_4.
نظرية كونج وإيجرفاري [112]: يكون للمواءمة العظمى والرأس الأصغر في بيان ثنائي الفرع الحجم نفسه.
نظرية كونج الأخرى [115]: حجم أكبر مجموعة مستقلة وأصغر غطاء أضلاع لبيان ثنائي الفرع دون رؤوس معزولة هو نفسه.
تفكيك كروسز [285] (Krausz): تغطية الأضلاع بواسطة بيانات جزئية تامة باستخدام كل رأس مرتين على الأكثر (هذا يقود إلى البيان الذي يكون له هذا هو البيان الخطاني)
ضرب كرونكر: ضرب المؤثرات، أو الضرب التنسوري.
خوارزمية كروسكال [95]: إنبات شجرة مولدة موزونة صغرى عن طريق تكرار أو معاودة إضافة الضلع الأرخص الأقل وزنًا في البيان الذي لا يتم حلقة.
البيان الجزئي الكوارتوسكي [247]: تقسيم لـ K_5 أو $K_{3,3}$.
نظرية كوارتوسكي [246]: يكون البيان سويًّا إذا وفقط إذا خلا من تقسيم لـ K_5 أو $K_{3,3}$.
الوسم (التعليم الدال أو وضع العلامات الدالة): تعيين أعداد صحيحة للرؤوس.
الورقة [67]: رأس درجته تساوي 1.

قالب الورقة [156]: قالب يحوي رأس – قطع واحدًا فقط.
الطول [20]: عدد الخطوات (أو مجموع الأوزان) من البداية إلى النهاية.
الضرب (الجداء) المعجمي [393] $G[H]$: تركيب.
خط: اسم آخر للضلع.
البيان الخطاني [168,273] $L(G)$: بيان التقاطع لأضلاع G، حيث ترتبط الرؤوس بأضلاع G وتتجاور إذا اشتركت الأضلاع المتناظرة برأس.
الماترويد الخطي [351]: ماترويد مجموعاته المستقلة هي مجموعات الأعمدة المستقلة لمصفوفة معرفة على حقل معين.
برنامج (برمجة) خطي (خطية) [179]: مسألة إيجاد أفضل دالة خطية قيود خطية.
أداة الربط (الروابط): ضلع.
موصول (مربوط) من الدرجة k: شرط أقوى من مترابط من الدرجة k، بحيث يتحقق أنه لكل عديدي k من الرؤوس $(u_1,\dots, u_k)$ و $(v_1,\dots, v_k)$ توجد مجموعة مؤلفة من k من المسارات المنفصلة داخليًّا تربط بين الرؤوس المتناظرة u_i و v_i.
قائمة الدليل اللوني [409]: اختيارية الأضلاع.
قائمة العدد اللوني [408]: الاختيارية.
مخمنة قائمة التلوين [409]: تكون اختيارية الأضلاع مساوية للعدد اللوني للأضلاع دائمًا.
حرفي [500]: متغير منطقي (صحيح أو خطأ) هو أو نفيه.
الفلقة -S [211]: بيان جزئي من G مستحدث من $S \cup V_i$، حيث إن V_i هي مجموعة رؤوس أحد مركبات $G - S$
البحث الموضعي: تقنية لحل مسائل الأمثلية بإجراء تغييرات صغيرة متتابعة في حل ملائم.
العروة [2]: ضلع يبدأ بالنقطة نفسها وينتهي بها (الرأس).
العروة [6]: لا يحوي أي عروة.
المكبر (n,k,c) [463]: بيان على n من الرؤوس، درجته الكبرى تساوي k، يتحقق فيه أن كل مجموعة S في هذا البيان تحوي على الأكثر نصف رؤوس هذا البيان، وتمتلك على الأقل $c|S|$ جارًا خارج S.
سلسلة ماركوف [54]: نظام متقطع له احتمالات انتقالية.
متباينة ماركوف [432]: لمتغير عشوائي غير سالب هي: $\mathrm{Prob}\,(X \geq t) \leq E(X)/t$
توقع مشروط: متتالية من المتغيرات العشوائية بحيث إن $E(X_i/X_0,\dots,X_{i-1}) = X_{i-1}$
المواءمة [443]: مجموعة من الأضلاع لا تشترك بأي نقاط طرفية.
مواءمة -b: ليكن b متجه قيود معطى، فإن المواءمة -b هي بيان جزئي H بحيث إن $d_H(v) \leq b(v)$ لكل v.
تدوير المصفوفات [186]: مسألة تحويل المعطيات ومجموع صفوف أو أعمدة مصفوفة إلى أقرب عدد صحيح من الأعلى أو من الأسفل، بحيث يبقى حاصل جمع الصفوف والأعمدة صحيحًا.
نظرية مصفوفة الشجرة [86]: إن طرح مصفوفة التجاور من مصفوفة الدرجات القطرية، وحذف صف وعمود، وأخذ المحددة، يعطينا عدد الأشجار المولدة.
الماترويد [354]: نظام وراثي يحقق أي شرط من قائمة العديد من الخواص المتكافئة.
بيان أساسات الماترويد [376]: بيان، رؤوسه حشد من الأساسات لماترويد، تكون رؤوسه متجاورة في الحالة التي يحوي الفرق التماثلي بينها عنصرين.
نظرية غطاء (تغطية) الماترويد [372]: عدد المجموعات المستقلة اللازمة لتغطية العناصر لماترويد هو $\max_{x \subseteq E} \lceil |X| \, r(X) \rceil$.
نظرية تقاطع الماترويدات [367]: إن أكبر حجم لمجموعة مستقلة مشتركة في ماترويدين على E يساوي الأصغر على $X \subseteq E$ من الرتبة لـ X في الماترويد الأول زائدًا الرتبة لـ $\overline{X}$ في الماترويد الثاني.
نظرية تحزيم الماترويدات [372]: إن أكبر عدد من الأساسات المنفصلة زوجًا زوجًا في ماترويد هو: $\lfloor (|E| - CA(X))/\, r(E) - r(X) \rfloor$ $min_r(x) < {}_r(E)$.
نظرية اتحاد الماترويدات [370]: إن اتحاد الماترويدات $M_1, \dots, M_k$ عبارة عن ماترويد دالة رتبته هي $r(X) = \min_{y \subseteq X} (|X - Y| + \sum r_i(Y))$.
نظرية أكبر تدفق وأصغر قطع [180]: قيمة أكبر تدفق تساوي قيمة أصغر قطع.
عصبة أعظمية [31]: مجموعة أعظمية من الرؤوس المتجاورة زوجًا زوجًا.
مسار أو مسرب أعظمي [27]: مسار أو مسرب لا يمكن تمديده أو تكبيره.
بيان سوي أعظمي [242]: يكافئ تثليثًا سويًّا.
البحث عن أكبر عدد أصلي (كاردينالي) [325]: خوارزمية لمعرفة البيانات الوترية.
أكبر درجة [34] Δ: الدرجة الكبرى من بين درجات الرؤوس.
أكبر (أعظم) تدفق [176]: شبكة تدفق ملائمة ذات قيمة عظمى، أو القيمة نفسها.
أكبر جنس $\gamma_M(G)$: أكبر جنس لسطح بحيث يكون لـ G طمر ثنائي الخلية على هذا السطح.
أعظم (أكبر) (شيء – [31] P): للخاصية P، لا يوجد شيء أكبر من النوع نفسه له أيضًا الخاصية P.
نظرية منجر [167-169]: تعطي توصيفاً أصغر – أكبر لمقدار (درجة) الترابط (الترابطية) بحسب عدد المسارات المنفصلة داخليًّا، أو المنفصلة ضلعيًّا بين أزواج الرؤوس.

بيان مينيل [330]: هو أي بيان، بحيث إن أي حلقة فردية طولها 5 على الأقل تمتلك وترين على الأقل.
بيان غير كامل أصغري [320]: بيان غير كامل يكون فيه كل بيان جزئي مستحدثًا كاملاً.
مترابط من الدرجة 2 صغير [175]: حذف أي ضلع يدمر الترابط الثنائي.
قطع أصغر [178]: قطع من المنبع إلى المصب، له قيمة صغرى أو قيمة هذا القطع.
أصغر درجة [34] $\delta(G)$: أصغر درجة لرأس من رؤوس البيان.
أصغر (شيء – [31])P: للخاصية P، لا يوجد شيء أصغر من النوع نفسه يحقق الخاصية P.
شجرة مولدة صغرى [95] (MST): شجرة مولدة، بحيث إن مجموع أوزان أضلاعها هو قيمة صغرى.
الفرع (الجزء) [251،362]: بيان (ماترويد) نحصل عليه من خلال الحذف والتقليص (الانقباض).
بيان مخلوط: نموذج لبيان نسمح فيه بوجود أضلاع موجهة وأخرى غير موجهة.
سلم موبيص (Mobius): البيان الذي نحصل عليه بإضافة أوتار إلى حلقة زوجية بين أزواج الرؤوس التي تقع على الحلقة، وتكون المسافة بينها أكبر ما يمكن (يمكن رسم ذلك كسلم مفتول أو مجدول).
شريط موبيص: السطح غير القابل للتوجيه الذي نحصل عليه من خلال مطابقة جانبين متضادين لمستطيل باستخدام توجيه متضاد.
نموذج [430] A: توزيع احتمالي يولد بيانًا بسيطًا مجموعة رؤوسه $[n]$ وذلك بجعل كل زوج يمثل ضلعًا احتماله $P(n)$ باستقلالية.
نموذج [430] B: توزيع احتمالي يجعل البيانات البسيطة التي رؤوسها المجموعة $[n]$ وعدد أضلاعها m متساوية الاحتمالية، أو متشابهة الحدوث.
العزم [433] -r: توقع X^r.
أحادي اللون [386]: في التلوين، مجموعة يكون لعناصرها اللون نفسه.
خاصية البيانات الرتيبة [432]: مُحافظ عليها تحت حذف الأضلاع والرؤوس.
البيان المتكرر: تستخدم من قبل العديد من المؤلفين لتعني البيانات التي تسمح (دون اشتراط) بوجود الأضلاع المكررة والعرى (بعض المؤلفين يمنع وجود العرى في البيانات المتكررة).
معامل متعدد الحدود [489]: تُعد الترتيبات التي لمفرداتها تكرارات مُثبّتة، وبوجود k_i مفردة من النوع i، فإنه يوجد $(\sum k_i)! / \prod (k_i !)$.
الأضلاع المكررة [2]: أضلاع لها النقاط الطرفية نفسها.
التدخيل الأقرب [497]: موجه مساعد TSP لبناء حلقة.
الجار الأقرب [496]: موجه مساعد TSP لبناء مسار.
جوار [34] $N(v)$: مجموعة جيران v (الجوار المغلق $N(v)$ يشتمل كذلك على v).
جيران [2]: (كاسم) هي الرؤوس الموجودة في الجوار، و (كفعل) تعني مجاور لـ.
محصلة التدفق الخارجي [178]: عند الرأس، هي مقدار ناتج طرح مقدار التدفق الداخل من مقدار التدفق الخارج.
الشبكة [176]: بيان موجه له رأس بداية مُميز (المصدر أو المنبع) وله رأس نهاية مُميز (المصب) حيث يتم تعيين سعة تدفق لكل ضلع فيه وربما أيضًا تعيين (حد أدنى) للتدفق المطلوب.
عقدة: رأس، وخصوصًا في مسائل تدفق الشبكات.
خوارزمية غير مُحدِّدة (مُعيِّنة) [494]: تسمح «بالتكهن» وذلك من خلال امتلاكها لمسارات حسابية متوازية.
خوارزمية كثير حدود غير مُحدِّدة [494]: تمتلك مسارًا حسابيًّا على شكل كثيرة حدود زمنية لكل تخمين لعدد القطع الصغيرة (bits) المعطاة على هيئة كثيرة حدود.
سطح غير قابل للتوجيه: سطح له جانب واحد فقط.
بيان غير تافه [22]: له ضلع واحد على الأقل.
غير سوي [243]: لا يوجد له طمر في المستوى.
تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان: تدفق -k بحيث إن الأوزان المعينة جميعها له تكون مختلفة عن الصفر.
NP [495]: صف المسائل القابلة للحل من خلال خوارزميات كثيرات الحدود غير المُحدِّدة.
تام – NP [495]: صارم (محكم من نوع) -NP و NP الوقت نفسه.
صارم NP [495] -: يعطي خوارزمية كثيرة حدود لكل مسألة في NP.
بيان خال [3]: بيان ليس له رؤوس.
الترقيم: دالة تناظر من $V(G)$ إلى $[\,n(G)\,]$.
إعاقة (انسداد): تراكيب جزئية ممنوعة.
مضاد فجوة فردي [340]: متممة فجوة فردية.
مركبة فردية [136]: مركبة لها عدد فردي من الرؤوس.
حلقة فردية [24]: حلقة عدد أضلاعها (رؤوسها) فردي.
البيان الفردي: بيان الفصل للمجموعات الجزئية التي عدد عناصرها k للمجموعة $[\,2k+1\,]$.

فجوة فردية: حلقة فردية لا وترية.
رأس فردي [27]: رأس درجته فردية.
ممر فردي [24]: ممر طوله فردي.
ممر مفتوح [20]: ممر فيه أول وآخر رأس مختلفين.
جولة مثلى: حل لمسألة البائع المتجول، أو لمسألة ساعي البريد الصيني.
رتبة البيان [34]: عدد رؤوسه.
بيان مرتب [406]: بيان ذو علاقة ترتيب (عادة خطية) على أضلاعه.
خاصية المحافظة على الرتبة (الترتيب) [358]: لدالة σ معرفة على المجموعات الجزئية لمجموعة معينة، هي أن $x \subseteq y$ تعطي أن y ($\sigma (x) \subseteq \sigma$).
سطح قابل للتوجيه: سطح له جانبان مختلفان.
توجيه لبيان [62]: بيان موجه نحصل عليه بتحديد رأس كل ضلع وذيله.
درجة الخروج (الخارجة) [58]: لرأس، هي عدد الأضلاع التي يكون هذا الرأس ذيلاً لها.
بيان سوي خارجي [239]: بيان سوي قابل للطمر في المستوى بحيث تكون رؤوسه جميعها واقعة على حدود المنطقة الخارجية.
بيان مستوى خارجي [239]: طمر معين لبيان سوي خارجي.
العناصر المتوازية [351]: ليست عرى في ماترويد بحيث تشكل مجموعة رتبتها 1.
والد [100]: جار لرأس على مسار إلى الجذر في شجرة مجذّرة.
النوعية [473]: فردي أو زوجي.
بيان جزئي نوعي من G [312]: بيان جزئي H بحيث إن: $d_H (v) \equiv d_G (v) \bmod 2$ لكل $v \in V (G)$.
متعدد الفرع من الدرجة k [5]: مثل قابل للتلوين بـ k من الألوان.
مجموعة جزئية من الرؤوس [4]: مجموعة ضمن تجزئة للرؤوس إلى مجموعات مستقلة (صف لوني).
ماترويد تجزئة [357]: الماترويد المستحدث من قبل تجزئة للمجموعة الأصلية (الأرضية) بحيث تكون مجموعة فيه مستقلة إذا وفقط إذا حوت عنصرًا واحدًا من كل قالب في التجزئة.
بيان قابل للتجزئة [335]: بيان له $a\ w + 1$ رأسًا، حيث يكون كل بيان جزئي ناتجًا عن حذف رأس قابل للتلوين بـ w من المجموعات المستقرة من الحجم a وقابلة للتغطية بـ a عصبة من الحجم w.
مسار [5]: بيان بسيط بحيث يمكن وضع رؤوسه في قائمة، وبحيث يتجاور فيه أي رأسين إذا وفقط إذا كانا متتابعين في هذه القائمة.
مسار من u إلى v [20]: مسار، طرفاه u و v.
جمع المسارات [163]: خطوة في تفكيك المقابض.
التفكيك لمسارات [414]: تعبير عن البيان كاتحاد لمسارات منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا.
الكف [12]: بيان بسيط له أربعة رؤوس، نحصل عليه بإضافة ضلع واحد إلى المخلب.
بيان حرج -p (من النوع – p) [334]: بيان غير كامل، بحيث إن أي بيان جزئي فعلي مستحدث منه يكون كاملاً.
ضلع متدلٍّ [67]: ضلع يقع على رأس درجته 1.
رأس متدلٍّ [67]: رأس درجته تساوي 1.
كامل من نوع – α [319]: $a (H) = q (G)$ لكل بيان جزئي مستحدث H.
كامل من نوع – β [335]: $\alpha (H)\ \omega (H) \geq n (H)$ لكل بيان جزئي مستحدث H.
كامل من نوع –γ [319]: $\chi(H) = \omega (H)$ لكل بيان جزئي مستحدث H.
ترتيب حذف كامل [229]: ترتيب الحذف، بحيث إنه عندما يُحذَف رأس، فإن جواره فيما تبقى يكون عصبة (تمامًا مثل ترتيب الحذف المبسطي).
بيان كامل [226]: بيان، بحيث إن $\chi(H) = \omega (H)$ لكل بيان جزئي مستحدث H.
نظرية البيان الكامل [226،320] (PGT): يكون البيان كاملاً إذا وفقط إذا كانت متممة هذا البيان كاملة.
ترتيب كامل [331]: ترتيب للرؤوس يعطي تلوينًا جشعًا أمثل للبيانات الجزئية جميعها.
بيان قابل للترتيب الكامل [331]: يوجد له ترتيب كامل.
مواءمة كاملة [107]: مجموعة أضلاع، بحيث إن كل رأس ينتمي إلى وحدة منها بالضبط.
الرأس البعيد عن المركز (المحيطي) [70]: رأس له اختلاف مركزي أعظم (أكبر).
التبديلة [486]: دالة تناظر من مجموعة منتهية لنفسها.
بيان تبديلة: قابل للتمثيل بتبديلة σ حيث $v_i \leftrightarrows v_j$ إذا وفقط إذا كانت σ تحافظ على الترتيب لـ i وj.
مصفوفة التبديلة [120]: مصفوفة مدخلاتها 0 و 1 وتحوي واحدًا بالضبط في كل صف وفي كل عمود.
بيان بيترسون [12]: بيان الفصل للمجموعات الثنائية في مجموعة ذات خمسة عناصر.

مبدأ طواقي (أعشاش) الحمام [491]: كل مجموعة من مجموعات الأعداد تحوي مجموعة واحدة على الأقل تكون كبيرة بقدر المتوسط (المعدل).
خاصية طواقي الحمام [427]: فضاء احتمالي منتهٍ، يمتلك عنصرًا حيث تكون قيمة المتغير العشوائي كبيرة كمقدار توقعها على الأقل.
البيان السوي [5،235]: بيان قابل للطمر في المستوى.
بيان المستوى [235]: طمر سوي معين لبيان سوي.
شجرة مستوى [101]: شجرة بترتيب طمر حلقي لأضلاعها عند كل رأس.
الشجرة المزروعة [101]: شجرة مستوى مجذرة (لها جذر).
مجسمات أفلاطونية [242]: متعدد سطوح منتظم محدود.
نقطة: رأس.
منحنى مضلع [234]: تسلسل للقطع المستقيمة، أو سلسلة القطع المستقيمة.
متعدد السطوح [242]: تقاطع لأنصاف فضاءات.
مسطح بأي بُعد: الغطاء (الغلاف أو القشرة) المحدب لمجموعة من الرؤوس.
لعبة المواقع [120]: لعبة، الهدف منها الاستيلاء على مواقع المجموعة الرابحة.
القوة k (G^k): البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V(G)$، ويكون فيها $u \leftrightarrow v$ إذا وفقط إذا تحقق أن $d_G(u, v) \le k$.
السابق (السلف) [54]: لـ v في بيان موجه، هو رأس u بحيث إن $u \to v$.
مجموعة السلف [58]: لـ v في بيان موجه، هي مجموعة السلف.
شفرة تخلو من المقدمات [101]: عدم وجود كلمة شفرة بوصفها مقدمة لكلمة أخرى.
خوارزمية برم [104]: تُنبت شجرة مولدة صغرى عن طريق إضافة ورقة إلى الشجرة الحالية بأرخص (أقل وزنًا) طريقة.
مصفوفة جزئية رئيسة: مصفوفة جزئية مربعة تستخدم الصفوف والأعمدة بالدليل نفسه.
بُعد حاصل الضرب [398]: أصغر عدد من الإحداثيات في تمثيل ضرب لـ G.
تمثيل حاصل الضرب [398]: تشفير البيان، بحيث تكون الرؤوس متجاورة إذا وفقط إذا كانت شفراتها تختلف في كل إحداثي.
تلوين فعلي [192]: للرؤوس، تلوين، كل ضلع فيه ليس أحادي اللون، (2) للأضلاع، تلوين، فيه كل ضلعين متجاورين مختلفان في اللون.
بيان جزئي فعلي من G [192]: بيان جزئي لا يساوي G.
مجموعة جزئية فعلية من S [472]: مجموعة جزئية لا تساوي S.
خوارزمية مشاريع الزواج [131]: خطوات عمل لإيجاد مواءمة مستقرة.
شفرة برفر [81]: لشجرة موسومة (عليها علامات دالة)، وهي متتالية طولها $n-2$ يتم الحصول عليها من خلال تتابع حذف الورقة التي علامتها الدالة أقل ما يمكن، وتسجيل العلامة الدالة لجارها.
شبه البيان: نموذج لبيان يسمح فيه بوجود العرى والأضلاع المكررة. يُستخدم من قبل بعض المؤلفين الذين يعرفون البيانات المكررة على أنها لا تحوي عرى.
نصف القطر [70]: أصغر قيمة اختلاف مركزي للرؤوس.
عدد رامزي [380]: أقل عدد من الرؤوس بحيث إن تعيين ألوان لأزواج الرؤوس جميعها ينتج عصبة أحادية اللون من حجم محدد (أو بيان محدد) في أحد اللونين.
بيان عشوائي [430]: بيان من فضاء احتمالي، في أغلب الأحيان هو الفضاء الذي فيه لكل زوج موسوم (عليه وسم) من الروس احتمالية تجاور تساوي p دون الاعتماد على أي شيء آخر، نموذجيًا $p = 1/2$، أو p دالة لـ n.
متغير عشوائي [427]: المتغير الذي يأخذ قيمه عند كل نقطة في فضاء احتمالي.
الرتبة (ماترويدات) [349]: لمجموعة من العناصر، أكبر حجم لمجموعة مستقلة محتواة في هذه المجموعة.
يمكن إعادة بنائه [38]: بيان محدد (بإهمال التشاكل) بقائمة البيانات الجزئية التي نحصل عليها بحذف رأس منفرد.
مخمنة إعادة البناء [38]: الادعاء بأن البيانات التي لها ثلاثة رؤوس على الأقل جميعها قابلة لإعادة البناء.
عدد التقاطع المستقيمي: أصغر عدد للتقاطعات في رسم للبيان في المستوى، حيث تظهر الأضلاع بوصفها قطعًا مستقيمة في هذا الرسم.
التشكل المصغر (المختزل) [258]: ممنوع من وجود بيان سوي خماسي اللون أصغري.
منعكس (قابل للانعكاس) [490]: (1) بيان موجه له عروة عند كل رأس (2) علاقة ثنائية R تحقق xRx لكل x.
منطقة [235]: لطمر بيان على سطح، هي مجموعة جزئية مترابطة أعظمية من السطح بحيث لا تحوي أي جزء من البيان.
منتظم [34]: درجات رؤوسه جميعها متساوية.
ماترويد منتظم [351]: قابل للتمثيل على كل حقل.
منتظم من الدرجة k [34]: درجة كل رأس من رؤوسه تساوي k.
ماترويد قابل للتمثيل [351]: ماترويد خطي.
توقع شرطي مُقيَّد [445]: توقع شرطي، تكون فيه قيمة المتغيرات المتتابعة توقعًا على مجموعة جزئية منكمشة من الفضاء الاحتمالي.
بيان حلقي صلب (قاسٍ): بيان وتري.

نظرية روبنز [166]: يوجد توجيه قوي لكل بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2.
الجذر [100]: (1) رأس مميز (2) في التغصين (التفريع)، هو الرأس الذي درجة دخوله تساوي 0.
شجرة مستوى مجذرة [100]: شجرة لها رأس جذر مُميَّز بحيث يوجد لأولاد كل رأس (غير ورقة) ترتيب محدد من اليسار إلى اليمين في المستوى.
دوران (تدوير) مخطط: وصف لطمر خلية ثنائية، تبديل دائري للأضلاع التي تظهر عند كل رأس، يعطي ترتيب هذه الأضلاع حول كل رأس باتجاه معاكس لاتجاه عقارب الساعة.
التحققية [499]: مسألة إيجاد قيم الصواب للمتغيرات من أجل جعل صيغة مدخل منطقي صحيحة.
متحققة [499]: صيغة جوابها «نعم» في مسألة التحققية.
رأس مشبع [107]: لمواءمة، رأس تمت مواءمته.
متتالية العلامات (الدرجات) [62]: متتاليات درجات الخروج في دوري.
طريقة العزم الثاني [433]: طريقة للحصول على دوال البداية أو الاستهلال (العتبة).
ذاتي التتام [11]: يشاكل متممته.
عكس نفسه: يشاكل عكسه.
ثنوي نفسه: يشاكل ثنويه.
نظرية البيان الكامل شبه القوي [344]: إذا كان $V(G) = V(H)$ وأن مجموعة من الرؤوس تُحدث P_4 في G إذا وفقط إذا أحدثت P_4 في H، فإن G يكون كاملاً إذا وفقط إذا كان H كاملاً.
شبه مسار: شبه ممر، بحيث يظهر كل رأس فيه مرة واحدة على الأكثر.
شبه ممر: متتالية أضلاع (أو رؤوس متجاورة) في بيان موجه، كل ضلعين متتابعين متجاوران دون الاهتمام بتوجيه الأضلاع.
قابل للفصل: له رأس قطع.
مجموعة فصل (أو فاصلة): مجموعة رؤوس، إذا حُذِفَتْ يزداد عدد المركبات.
مجموعة – k [380]: مجموعة حجمها k.
لعبة انتقال (تحويل) شانون [365]: لعبة تُلعب على ماترويد من قبل المولد والقاطع، حيث يحاول الاستيلاء على مجموعة من العناصر، وتولد عنصرًا محددًا في حين يحاول الآخر منع ذلك.
بيان الإزاحة [202]: بيان، رؤوسه هي المجموعات الجزئية ذات العنصرين من $[n]$ بحيث $\{i, j\}$ يجاور $\{j, k\}$ عندما $i < j < k$.
البيان (الموجه) المعين: حالة خاصة من بيان (موجه) موزون، يتم تعيين + أو – لكل ضلع من أضلاعه.
البسيط [2]: (1) البيان الذي يخلو من العرى والأضلاع المكررة (2) بيان موجه يمتلك ضلعًا واحدًا على الأكثر لكل زوج مرتب من رؤوسه (3) الماترويد الذي يخلو من العرى العناصر المتوازية.
رأس مبسطي [224]: رأس يولّد جيرانه عصبة.
مصب [176]: رأس نهاية مُميز، أو أي رأس درجته الخارجة تساوي صفرًا.
الحجم [35،473]: (1) عدد الأضلاع (2) عدد العناصر.
تجزئة متخالفة [347]: تجزئة X و Y لـ $V(G)$ بحيث تكون $G[X]$ و $\overline{G}(Y)$ غير مترابطة.
قابل للذوبان في f [148]: له وزن أضلاع، بحيث إن مجموع أوزان الأضلاع الواقعة على v يساوي $f(v)$.
المنبع (المصدر) [176]: رأس بداية مُميز، أو أي رأس درجته الداخلة تساوي صفرًا.
قطع منبع/ مصب [178]: تجزئة لرؤوس شبكة إلى مجموعتين هما: S و T، بحيث تحوي S المنبع، و T تحوي المصب.
دالة مولدة (دالة التوليد) [358]: مُولِّد مجموعة X في نظام وراثي تتألف من X والعناصر غير الموجودة في X التي تتم حلقات مع المجموعات الجزئية لـ X.
بيان جزئي مُولد: بيان جزئي يحتوي على كل رأس.
مجموعة مُولِّدة [67]: مجموعة مولدة (في نظام وراثي E) لـ E.
شجرة مُولِّدة [67]: بيان جزئي لا حلقي مولد ومترابط.
الطيف [453]: قائمة من القيم الذاتية المكررة.
بيان انشقاق [345]: بيان يمكن تغطية رؤوسه بعصبة ومجموعة مستقلة.
الانشقاقية: أصغر عدد من الأضلاع يضاف أو يحذف للحصول على بيان انشقاق.
مربع البيان: الأس الثاني.
بعد المكعب – المسحوق (المهروس) [401]: أصغر طول للمتجهات في طمر للمكعب المسحوق (المهروس).
طمر المكعب المسحوق [401]: تشفير الرؤوس بـ 0، 1، متجهات * - بحيث تساوي المسافة بين رأسين عددَ الإحداثيات حيث يكون لأحدهما الإحداثي 0، وللآخر الإحداثي 1.
عدد الاستقرار [319]: عدد الاستقلال.
مواءمة مستقرة [130]: مواءمة لا يوجد فيها شواهد أو أمثلة من x و y، بحيث يفضل كلّ منهما شخصًا (أو شيئًا) آخر مختلفًا عن شريكه الحالي في المواءمة.
مجموعة مستقرة r [447] -: مجموعة مستقرة حجمها يساوي r.

مجموعة مستقرة [3,319]: مجموعة من الرؤوس غير متجاورة زوجًا زوجًا. (مجموعة مستقلة).

النجم (النجمة) [67]: الشجرة $K_{1,\,n\text{-}1}$ التي لها على الأكثر رأس واحد غير ورقة.

مجموعة قطع – نجمة [333]: مجموعة فاصلة تستحدث بيانًا جزئيًّا له رأس يجاور بقية الرؤوس.

تمهيدية مجموعة قطع – النجمة [334]: لا يوجد بيان حرج p – يحوي مجموعة قطع – نجمة.

خاصية تبادل ستاينتز [358]: خاصية للدوال المولدة، وهي أنه إذا كان e موجودًا فيما يولده $x \cup f$ وغير موجود فيما تولده x فإن f ينتمي إلى ما يولده $x \cup e$.

نظرية ستاينتز: يوجد طمر واحد فقط في المستوى للبيانات السوية المترابطة من الدرجة 3 (أكثر دقةً، بيان ثنوي واحد فقط).

القوة [440]: لمبرهنة، الجزء من الوقت الذي تتحقق فيه الفرضيات إذا تحقق فيه الاستنتاج.

بيان موجه صارم [294]: بيان موجه خال من العرى، ويوجد له على الأكثر ضلع واحد مع كل زوج مرتب من نقاطه الطرفية.

متوازن بصرامة: يتم تعظيم (تكبير) درجة الرؤوس في البيانات الجزئية فقط من قبل كل البيان.

خاصية الامتصاص القوية (ماترويدات) [355]: إذا كان $r(X \cup e) = r(x)$ لكل $e \in Y$ فإن $r(x \cup y) = r(X)$.

مركبة قوية [56]: بيان جزئي موجه مترابط بقوة أعظمي.

توجيه قوي [165]: توجيه لـ G بحيث يمكن الوصول إلى أي رأس من أي رأس آخر.

مخمنة البيان الكامل القوي [320] (SPGC): المخمنة التي تنص على أن البيان يكون كاملاً إذا وفقط إذا كان يمتلك فجوة فردية أو مضاد فجوة فردية.

الضرب القوي $G_1 \cdot G_2$: ضرب البيانات الذي مجموعة رؤوسه $V(G_1) \times V(G_2)$، ومجموعة أضلاعه $(u_2, v_2) \leftrightarrow (u_1, v_1)$ إذا وفقط إذا كان $u_1 = u_2$ و $v_1 \leftrightarrow v_2$ أو $u_1 \leftrightarrow u_2$ و $v_1 = v_2$.

بيان موجه مترابط بقوة (أو قوي) [56]: بيان موجه، فيه كل رأس قابل للوصول من الرؤوس الأخرى جميعها.

كامل بقوة [330]: بيان، تتقاطع فيه مجموعة مستقرة مع كل عصبة أعظمية.

منتظم بقوة [464]: بيان منتظم من الدرجة k، بحيث يوجد جار مشترك لأزواج رؤوسه المتجاورة λ، وجار مشترك لأزواج رؤوسه غير المتجاورة μ.

مكون أساسي جزئي [470]: البيان الجزئي المولد من جوار لرأس أو من اللاجوار لرأس.

بيان موجه جزئي [56]: بيان جزئي من بيان موجه.

التقسيم [212]: (1) عملية يحل فيها مسار مؤلف من ضلعين محل ضلع من خلال رأس جديد، (2) بيان نحصل عليه من خلال متتالية من عمليات التقسيم.

تقسيم H- [212]: بيان، نحصل عليه من H بواسطة التقسيم.

بيان جزئي [5]: بيان، تنتمي رؤوسه وأضلاعه جميعها إلى G.

دالة المقياس الجزئي [354]: دالة، بحيث إن $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) \leq r(x) + r(y)$ للمجموعات جميعها المجموعات X و Y.

خاصية المقياسية الجزئية (ماترويدات) [354]: له دالة رتبة مقياسية جزئية.

مجموعة جزئية k- [471]: مجموعة جزئية فيها k من العناصر.

تمثيل بأشجار جزئية [324]: تعيين شجرة جزئية من شجرة مضيفة لكل رأس من رؤوس بيان وتري بحيث تكون الرؤوس متجاورة إذا وفقط إذا كانت الأشجار التي تمثلها متقاطعة.

تابع (خلف) [54]: لـ u في بيان موجه، رأس v، بحيث إن $u \to v$.

مجموعة تابعة [58]: لـ u في بيان موجه، مجموعة توابع u.

حاصل جمع (مجموع) [39]: (1) للحلقات ولمرافقات الحلقات، تمامًا مثل الفرق التماثلي، (2) لبيان، هو اتحاد هذه المجموعات (3)، بحيث إن مجموعاته المستقلة هي اتحادات المجموعات المستقلة جميعها من كل مجموعة.

بيان حاو لـ G: بيان يحوي G.

فائق الانتظام [470]: بيان منتظم لا يحوي أي رؤوس، أو أنه بيان يكوّن كل مكون أساسي جزئي من مكوّناته منتظمًا أعظم.

العرض [184]: قيد على المصدر (المنبع) في شبكة نقل.

تبديل ثنائي [46]: تبديل يحافظ على الدرجات لضلعين منفصلين بضلعين آخرين غير موجودين.

متماثل (تماثل) [490]: (1) لبيان، له تشاكل ذاتي غير تافه (غير بديهي)، (2) لبيان موجه بسيط $u \to v \Leftrightarrow v \to u$ لعلاقة ثنائية R، يعني $xRy \Leftrightarrow yRx$

الفرق التماثلي [109,473] $A \,\Delta\, B$: مجموعة العناصر الموجودة فقط في إحدى المجموعتين A و B.

نظام التمثيل المختلف [119] (SDR): لحشد من المجموعات، هو اختيار عنصر واحد من كل مجموعة بحيث يكون الممثلون جميعهم مختلفين.

نظرية سزكرز وولف [231]: $\chi(G) \leq 1 + max_{h \subseteq G}\,\delta(H)$.

ذيل [53]: الرأس الأول للضلع، أو الضلع الموجه.

تلوين الذيل [301]: لبيان ثلاثي سوي، هو تلوين ضلعي ثلاثي فعلي.

خوارزمية تاري: [95]: طريقة لاستكشاف متاهة (شبكة طرق معقدة).

مسألة التلغراف [423]: نسخة موجهة من مسألة (مشكلة) نقل الكلام، إلا أن النقل يتم في اتجاه واحد.

مسألة الهاتف [422]: مسألة نقل الكلام (أو الإشاعة)
الضرب المؤثر: الضرب الضعيف أو الضرب التنسوري.
ماترويد ثلاثي [357]: قابل للتمثيل على حقل مؤلف من ثلاثة عناصر.
السمك [261]: أقل عدد من البيانات السوية التي يساوي اتحادها G.
البعد الاستهلالي (بعد البداية أو العتبة): أصغر عدد من البيانات الاستهلالية التي يساوي اتحادها G.
دالة بيانية (عتبة أو استهلالية) لـ Q [433]: دالة t بحيث إن Q غالبًا ما أو غالبًا لا تحدث بالاعتماد على أن الوسيط ينتمي إلى $O(t)$ أو إلى $w(t)$.
بيان استهلالي (بداية): له بداية t ورأس وزنه w، بحيث إن $u \nleftrightarrow v$ إذا وفقط إذا كان $w(u)+w(v) \leq t$؛ هناك توصيفات أخرى تشتمل على غياب تبديل (استبدال) ثنائي ووجود ترتيب بنائي ناتج عن إضافة رؤوس معزولة، أو رؤوس مسيطرة.
نظرية البيانات التوبولوجية: دراسة رسم البيانات على السطوح.
طاري [266]: بيان لطمر خلية ثنائية على الطارة.
الطارة [266]: السطح (قابل للتوجيه) الذي له مقبض واحد.
التلوين الكلي [411]: وسم للرؤوس والأضلاع بحيث تأخذ العناصر المتجاورة أو الواقعة على بعضها ألوانًا مختلفة.
مخمنة التلوين الكلي [411]: يوجد لون لكل بيان تلوين كلي باستخدام $\Delta(G)+2$ على الأكثر.
عدد السيطرة الكلي [117]: أصغر عدد من الرؤوس في مجموعة S بحيث يوجد جار لكل رأس في S.
عدد الفترات الكلي: أصغر عدد كلي من الفترات المستخدمة لتمثيل G كبيان تقاطع لاتحادات الفترات على خط الأعداد.
أحادي المقياس بشكل كلي [469]: مصفوفة بحيث تساوي كل محددة لكل مصفوفة جزئية مربعة منها 0 أو ± 1.
الخشونة (القساوة أو الصلابة) [288]: أصغر t بحيث إن $|S| \geq t\, c(G-S)$ لكل مجموعة فاصلة S، حيث تساوي $c(G - S)$ عدد مركبات البيان الجزئي الذي نحصل عليه بحذف S.
الدوري [61]: توجيه لبيان تام.
أثر المصفوفة [453]: حاصل جمع العناصر الموجودة على القطر.
قابل لتتبع الأثر: يوجد فيه مسار هاملتوني.
المسرب [20,59]: ممر لا يظهر فيه أي ضلع أكثر من مرة واحدة.
بيان موجه متعدٍ [228]: إذا تحقق أن $u \to v$ و $v \to w$ فإن $u \to w$.
الإغلاق المتعدي: (1) في بيان موجه D. هو البيان الموجه الذي فيه $u \to w$ عندما يوجد مسار من u إلى w في D (2) لعلاقة R، العلاقة S التي فيها XSY عندما توجد متتالية $X_0, \ldots, X_k$ بحيث إن $X = X_0 R_{X1} R \ldots R_{Xk} = y$.
تعدي الاعتماد (عدم الاستقلال) (ما ترويدات) [359]: إذا كان $e \in \sigma(X)$ وكانت $X \subset \sigma(Y)$ فإن $e \in \sigma(y)$.
قيود النقل (التنقل والانتقال) [184]: العرض والطلب.
مسألة النقل [185]: تعميم لمسألة التعيين (التحديد) حيث العرض عند كل مصدر، والطلب عند كل مكان نصل إليه.
المستعرض [125]: نظام تمثيلات مختلفة (هذه الكلمة المستخدمة عند تعميم المفهوم)، وتستخدم كذلك لأنظمة التمثيلات غير المختلفة.
الماترويد المستعرض [352]: ماترويد، عناصره عبارة عن مجموعة واحدة من مجموعتي التجزئة لبيان ثنائي الفرع، ومجموعاته المستقلة هي المجموعات الجزئية المشبعة بالمواءمات.
مسألة البائع المتجول (المتنقل) [493] (TSP): مسألة إيجاد حلقة مولدة ذات وزن أصغر.
الشجرة [67]: بيان مترابط لا حلقي (لا يحوي أي حلقة).
الشجرة ذات المتعدد k– [101]: شجرة مجذرة (لها جذر) بحيث يكون لها k ولدًا على الأكثر عند كل رأس ليس بورقة.
الشجرة k– [345]: بيان وتري نحصل عليه من عصبة k– عن طريق تكرار (معاودة) إضافة رأس جواره عند إضافته عبارة عن عصبة k–.
المثلث [12]: حلقة طولها 3.
خال من المثلثات [41]: لا يحوي K_3 كبيان جزئي.
المتباينة المثلثية: $d(x,y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.
وتر مثلثي: وتر طوله 2 موجود في مسار أو حلقة.
بيان تم تثليثه [225]: بيان لا يحوي حلقات لا وترية.
التثليث [242]: طمر لبيان على سطح، كل منطقة فيه مضلع ثلاثي.
ثلاثي الدرجة: درجته تساوي 3.
بيان تافه [22]: بيان ليس له أضلاع (يحصر بعض المؤلفين ذلك برأس واحد).
عديد k–[474]: بيان متعدد الفرع تام، مجموعاته (رؤوسه) الجزئية متساوية.
نظرية توران [208]: توصيف لبيانات تامة متساوية الفرع من البيانات متعددة الفرع من الدرجة r على أنها أكبر بيان من رتبة معطاة لا تحوي عصبة من الدرجة $r + 1$.
كثيرة حدود توت: تعميم لكثيرة الحدود اللونية، ولكثيرات حدود أخرى.

نظرية توت [146،174،250]: (1) للمواءمات، هي توصيف لبيانات لها عامل واحد. (2) للترابط، توصيف للبيانات المترابطة من الدرجة الثلاثية من خلال تقليصها لعجلات. (3) للبيانات السوية، هي أن للبيانات السوية المترابطة من الدرجة 3 طمرًا بحيث تكون الأوجه المحدودة جميعها محدبة.

التوائم [208]: الرؤوس التي لها الجوار نفسه (التوائم الكاذبة هي رؤوس متجاورة لهاالجوارات المغلقة نفسها).

مجموعة لا يمكن تفاديها [348]: جمع من التشاكلات، يحوي كل بيان في صف محدد (معين) تشكلاً في هذا الجمع.

البيان التحتي (الضمني أو الأساسي) [258]: البيان الذي نحصل عليه من بيان موجه من خلال التعامل مع الأضلاع على أنها أزواج غير مرتبة.

أحادي الحلقة: له حلقة واحدة فقط.

بيان زائدي منتظم (متسق) من الدرجة [449] k: له أضلاع من الحجم k فقط.

ماترويد منتظم (متسق أو موحد) [357] $U_{k,n}$: ماترويد على $[n]$ بحيث إن مجوعاته المستقلة هي المجموعات التي حجمها يساوي k على الأكثر.

خاصية الاتساق (الانتظام) (ماترويد) [354]: لكل $X \subseteq E$، يتحقق أن للمجموعات الجزئية المستقلة الكبرى من X الحجم نفسه.

الاتحاد ($G_1 \cup G_2$) ومجموعة أضلاعه هي الاتحاد لأضلاع G_1 و G_2 (تكتب $G_1 + G_2$ إذا كانت مجموعات الرؤوس منفصلة).

اتحاد الماترويدات [369]: اتحاد الماترويدات $M_1, \ldots, M_k$ هو النظام الوراثي الذي مجموعاته المستقلة هي: $\{I_1 \cup \ldots \cup I_k : I_i \in \mathbf{I}_i\}$.

بيان مسافة الوحدة [201]: البيان الذي رؤوسه $\mathbb{R}^2$، بحيث تتجاور نقاطه إذا كانت المسافة بينهما تساوي 1.

بيان غير موسوم (معلم) [9]: مصطلح غير رسمي لصف التشاكل.

غير مشبع بالنسبة إلى M [107]: رأس لا ينتمي إلى ضلع في M.

قابل لطمر أعلى [176]: له طمر خلية ثنائية على سطح، جنسه يساوي $\lfloor (e(G)-n(G)+1)/2 \rfloor$

التكافؤ (valence): درجة الرأس.

قيمة التدفق [433]: محصلة التدفق الخارج من المنبع أو الداخل إلى المصب.

التغير أو الاختلاف [351]: مربع الانحراف المتوقع عن الوسط.

رأس [2]: عنصر في $V(G)$ أو مجموعة الرؤوس.

العدد اللوني للرؤوس [191]: العدد اللوني.

ترابط الرؤوس [149]: درجة الترابط، أو مقدار الترابط، أو الترابطية.

غطاء الرؤوس [112]: مجموعة رؤوس تحوي نقطة طرفيه لكلّ ضلع على الأقل.

مربع بالنسبة إلى الرؤوس: حذف أي رأس يغير الوسيط أو الصفة.

قطع رؤوس (قاطع رؤوس): مجموعة رؤوس فاصلة.

بيان جزئي بحذف رأس [149,164]: بيان جزئي نحصل عليه بحذف رأس واحد.

مضاعفة الرؤوس من [320]: استبدال رؤوس G بمجموعات مستقلة، بحيث تكون النسخ من x و y متجاورة إذا وفقط إذا تحقق أن $XY \in E(G)$.

تجزئة الرؤوس: تجزئة لمجموعة الرؤوس.

مجموعة الرؤوس [2] $V(G)$: مجموعة العناصر المعرف عليها البيان.

متعدٍّ بالنسبة إلى الرؤوس [14]: لكل زوج X, Y في $V(G)$ يوجد تشاكل ذاتي ينقل (يرسل) x إلى y

نظرية فايزنج [275] تعطي حدًّا أعلى على العدد اللوني للأضلاع (الضلعي) بدلالة الدرجة الكبرى، وأكبر تكرار للأضلاع.

ممر [20,59]: قائمة متناوبة من الرؤوس والأضلاع في بيان بحيث ينتمي كل رأس إلى الضلع الذي يسبقه والضلع الذي يليه (يجب أن نتتبع الأسهم في البيان الموجه)

ممر u,v [20]: ممر من u إلى v.

خاصية الحذف الضعيف [352]: خاصية المصفوفات، وتعني أن الاتحاد لحلقات متقاطعة يحوي حلقة تتفادى نقطة معينة في التقاطع.

الضرب الضعيف $G_1 \otimes G_2$: ضرب البيانات بحيث رؤوسه هي: $V(G_1) \times V(G_2)$ وأضلاعه هي: $(u_1,v_1) \leftrightarrow (u_2,v_2)$ إذا وفقط إذا تحقق أن $u_1 \leftrightarrow u_2$ و $v_1 \leftrightarrow v_2$.

وترى ضعيف [330]: لا توجد له حلقات لاوترية طولها على الأقل 5 في G أو في $\overline{G}$.

مترابط بضعف [56]: بيان موجه بحيث يكون بيانه المتضمن (التحتي) مترابطًا.

الوزن: عددد حقيقي.

موزون: تم تعيين أوزان له (لأضلاعه و (أو) رؤوسه).

خاصية الترتيب الحسن [19]: كل مجموعة غير خالية (من الأعداد الطبيعية) تحوي عددًا أصغر.

العجلة [174]: بيان ناتج عن ربط حلقة مع رأس منفرد.

نظرية التشاكل الثنائي لويتني [376]: توصيف لأزواج من البيانات التي تتشاكل ماترويدات حلقاتها.

معامل واينر [72]: مجموع المسافات بين أزواج الرؤوس.

التدفق الصفري: تدفق في شبكة بحيث يساوي التدفق على كل ضلع صفرًا.

ملحق E

قراءات إضافية (Appendix E Supplemental Reading)

لقد نُشِر العديد من الكتب في موضوع نظرية البيان. وسنضع هنا قائمة تحتوي على بعض الكتب للقارئ المهتَم الذي يبحث عن عرض أو تقديم بديل، أو يرغب في المزيد من التفاصيل حول بعض المواضيع الخاصة، إضافة إلى أننا سنضع قائمة لكتب عامة في الموضوع نفسه مقسمة إلى ثلاثة مستويات تقريبًا. وسنورد بعد ذلك قائمة بالكتب المتخصصة والمقالات بحسب صلتها وارتباطها بوحدات هذا الكتاب. وأخيرًا سنضع قائمة من الكتب التي تشتمل على بعض المواضيع الإضافية في نظرية البيان.

General /elementary:

Chartrand, G. *Graphs as Mathematical Models.* Prindle-Weber-Schmidt, 1977. Reprinted as *Introductory Graph Theory,* Dover, 1985.

Clark J. and D.A. Holton, *A first look at graph theory.* World Scientific, 1991.

Trudeau R.J., *Introduction to graph theory* (originally *Dots and Lines,* 1976). Dover, 1993.

Wilson R.J. *Introduction to graph theory.* Academic Press, 1979, 1972; Longman, 1985.

Wilson R.J. and J.J. Watkins, *Graphs: An introductory approach.* John Wiley & Sons, 1990.

General / intermediate:

Bondy J.A. and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications.* Elsevier, 1976.

Chartrand G. and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs.* PWS Publishers, 1979; WadsworthBrooks/Cole, 1986; Chapman & Hall, 1996.

Gould R., *Graph Theory.* Benjamin / Cummings, 1988.

Gross J. and J. Yellen, *Graph Theory.* CRC Press, 1999.

Harary F., *Graph Theory.* Addison-Wesley, 1969.

Ore 0., *Theory of Graphs.* AMS Colloq. 38, Amer. Math. Soc., 1962.

General /advanced:

Berge, C. *Graphs.* North-Holland 1973, 1976, 1985. (1970, 1983 in French.)

Bollobas B., *Graph Theory: An Introductory Course.* Grad. Texts in Math. 63; SpringerVerlag, 1979.

Bollobas B., *Modern Graph Theory.* Grad. Texts Math. 184; Springer, 1998.

Diestel R., *Graph Theory* Grad. Texts Math. 173; Springer-Verlag, 1996, 2000.

Zykov A.A. *Fundamentals of graph theory* Nauka, 1987 (Russian). Trang. by L. Boron, C. Christenson, and B. Smith, BCS Associates, 1990.

Chapter 1:

Asratian A.S., T.M.J. Denley, and R. Häggkvist, *Bipartite graphs and their applications.* Cambridge Tracts in Math., 131; Cambridge Univ. Press, 1998.

Fleischner H., *Eulerian Graphs and Related Topics, Vols 1 &* 2. Ann. Discrete Math. 45 & 50, North-Holland, 1990 & 1991.

Harary F., R.Z. Norman, and D. Cartwright, *Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs.* John Wiley & Sons, 1965.

Chapter 2:

Buckley F. and F. Harary *Distance in Graphs.* Addison-Wesley, 1990 Moon J., *Counting Labelled Trees.* Canadian Math. Congress, 1970.

Chapter 3:

Gusfield D. and R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* MIT Press, 1989.

Haynes T.W., S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs.* Pure and Applied Math. 208; Marcel Dekker, 1998.

Lovász L. and M.D. Plummer, *Matching Theory.* North-Holland, 1986'.

Chapter 4*:*

Ahuja R.K., T.L. Magnanti, and J. Orlin, *Network Flows.* Prentice-Hall, 1993.

Ford L.R. and D.R. Fulkerson, *Flows in Networks.* Princeton Univ. Press, 1962.

Tutte W.T., Connectivity in Graphs. Univ. Toronto Press, 1966.

Chapter 5:

Jensen T.R. and B. Toft, *Graph coloring problems.* Wiley-Interscience, 1995.

Chapter 6:

Aigner M., *Graph Theory: A Development from the 4-Color Problem.* Teubner, 1984 (German). Transl. by BCS Associates, 1987.

Bonnington C.P. and C.H.C. Little, *The Foundations of Topological Graph Theory.* Springer-Verlag, 1995.

Fritsch R. and G. Fritsch, *The Four-Color Theorem.* Springer, 1994, 1998.

Gross, J.L. & T.W. Tucker, *Topological Graph Theory.* Wiley-Interscience, 1987.

Nishizeki T. and N. Chiba, *Planar Graphs: Theory and Algorithms.* North-Holland Math. Studies 140, Annals Disc. Math. 32; North-Holland 1988.

Saaty T.L. and P.C. Kainen, The Four-Color Problem: Assaults and Conquests. McGraw-Hill, 1977; reprinted Dover, 1986.

White A.T., *Graphs, Groups and Surfaces.* North-Holland Math. Studies 8; North-Holland 1973, 1984.

Chapter 7:

Fiorini S. and R.J. Wilson, *Edge-colourings of Graphs.* Res. Notes in Math. 16; Pitman, 1977.

Voss H.-J., *Cycles and Bridges in Graphs.* Kluwer Academic, 1991.

Zhang C.-Q., *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs.* Pure and Applied Math. 205; Marcel Dekker, 1997.

Section 8.1:

Golumbic M.C., *Algorithmic Graph Theory & Perfect Graphs.* Acad. Press, 1980.

Brandstädt A., V.B. Le, and J.P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey.* Soc. Ind. Appl. Math., 1999.

Section 8.2:

Oxley J., *Matroid Theory.* Clarendon Press, Oxford Univ. Press 1992. Welsh D.J., *Matroid Theory.* Academic Press, 1976.

Section 8.3:

Graham R.L., B.L. Rothschild, and J.H. Spencer, *Ramsey Theory.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 1980, 1990.

Section 8.4:

Bollobás B., *Extremal graph theory.* London Math. Soc. Monographs 11; Academic Press, 1978. (Also treats material of Chapter 5.)

Section 8.5:

Alon N. and J. Spencer, *The Probabilistic Method.*

Bollobas B., *Random graphs.* Academic Press, 1985.

Janson S., T. Luczak, and A. Ruciński, *Random Graphs.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2000.

Palmer E.M., *Graphical Evolution.* John Wiley & Sons, 1985.

Section 8.6:

Biggs N., *Algebraic graph theory.* Cambridge Tracts in Math. 67, Cambridge Univ. Press, 1974, 1993.

Chung F.R.K. *Spectral graph theory.* CBMS Reg. Conf. Series in Math. 92; Amer. Math. Soc. 1997.

Cvetković D.M., M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of graphs: Theory and Applications.* Pure and Appl. Math. 87, Academic Press, 1980; 1985; Johann Ambrosius Barth, 1995.

Algorithms and Applications:

Chartrand G. and O.R. Oellermann, *Applied and Algorithmic Graph Theory.* McGraw-Hill, 1993.

Chen W.K. *Applied Graph Theory: Graphs and Electrical Networks.* Series in Appl. Math. & Mechanics 13, North-Holland, 1976 (2nd ed.).

Christofides N., *Graph Theory: An Algorithmic Approach.* Acad. Press, 1975. Even S., *Graph algorithms.* Computer Science Press, 1979.

Foulds L.R., *Graph Theory Applications.* Universitext; Springer-Verlag, 1992. Gibbons A., *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge Univ. Press, 1985.

Gondran M. and M. Minoux, *Graphs and algorithms,* (translated by Steven Vajda). Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 1984.

Lawler E., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinooy-Kan, and D.B. Shmoys, *The Traveling Salesman Problem.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 1985, 1990.

McHugh J.A., *Algorithmic _Graph Theory.* Prentice-Hall, 1990.

Swamy M.N.S. and K. Thulasiraman, *Graphs, Networks, and Algorithms.* WileyInterscience, John Wiley & Sons, 1981.

Temperley H.N.V., *Graph Theory and Applications.* Halstead Press, 1981.

Wilson R.J. and L.W. Beineke (eds.), *Applications of Graph Theory.* Academic Press, 1979.

Additional Topics:

Beineke L.W. and R.J. Wilson (eds.), *Selected topics in graph theory,* Vols. 1 & 2 & 3. Academic Press, 1978 & 1983 & 1988.

Cameron P.J and J.H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes and Their Links.* Lond. Math. Soc. Student Texts 22, Cambridge Univ. Press, 1991.

Capobianco M. and J.C. Molluzzo, *Examples and counterexamples in graph theory.* North-Holland, 1978.

Berge C., *Hypergraphs.* N.-H. Math. Lib. 45, North-Holland, 1987, 1989.

Biggs, N.L., K.E. Lloyd, and R.J. Wilson, *Graph Theory: 1736-1936.* Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1976, 1986.

Bosák J., *Decompositions of graphs.* Math. & Its Appl. (East European Series) 47, Kluwer Academic Publishers, 1990.

Brouwer A.E., A.M. Cohen, and A. Neumaier, *Distance-regular graphs.* Springer-Verlag, York, 1989.

Chung F.R.K. and R.L. Graham, *Erdős on Graphs: His Legacy of Unsolved Problems.* A.K. Peters, 1998.

Fulkerson D.R. (ed.), *Studies in graph theory,* Parts I & II. Studies in Math. 11 & 12. Math. Assoc. Amer., 1975.

Harary F. and E.M. Palmer, *Graphical Enumeration.*

Hartsfield N. and G. Ringel, *Pearls in graph theory.* Academic Press, 1990, 1994. Holton D.A. and J. Sheehan, *The Petersen graph.* Australian Math. Soc. Lect. Series 7, Cambridge University Press, 1993.

Imrich W. and S. Klavžar, *Product Graphs: Structure and Recognition.* Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, 2000.

Lovász L., R.L. Graham, and M. Grötschel (eds.), *Handbook of Combinatorics,* Vol. I. Elsevier, 1995.

Mahadev N.V.R. and U.N. Peled, *Threshold Graphs and Related Topics.* Ann. Disc. Math. 56; North-Holland, 1995.

McKee T.A. and F.R. McMorris, *Topics in intersection graph theory.* Soc. Ind. Appl. Math., 1999.

Moon J.W., *Topics on Tournaments.* Holt, Rinehart, and Winston, 1968.

Prisner E., *Graph Dynamics.* Pitman, 1996.

Scheinerman E.R. and D.H. Ullman, *Fractional Graph Theory:* A *Rational Approach to the Theory of Graphs.* Wiley-Interscience, John Wiley, 1997.

Tutte W.T. *Graph theory.* Encyc Math. & Appl. 21, Addison-Wesley, 1984.

Yap H.P. *Some topics in graph theory.* London Math. Soc. Lect. Notes 108, Cambridge Univ. Press, 1986.

ملحق (Appendix F)

المراجع (References)

إن المواضيع التي لم تنشر (تظهر) عند وقت طباعة هذا الكتاب قد وُضعَ عليها علامات في الهامش بتاريخ 2001م؛ حيث كتبنا في قائمة المراجع "حتى تظهر". إن المفردة الأَخيرة في كل مرجع هي رقم الصفحة في هذا الكتاب التي ظهر بها المرجع.

[1972] Abbott H.L., Lower bounds for some Ramsey numbers. *Discr. Math.* **2** (1972), 289-293. [393]

[1991] Abeledo H. and G. Isaak, A characterization of graphs that ensure the existence of a stable matching. *Math. Soc. Sci.* **22** (1991), 93-96. [136]

[1964] Aberth 0., On the sum of graphs. *Rev. Fr. Rech. Open* **33** (1964), 353-358. [194]

[1982] Acharya B.D. and M. Las Vergnas, Hypergraphs with cyclomatic number zero, triangulated graphs, and an inequality. *J. Comb. Th. B* **33** (1982), 52-56. [327]

[1993] Ahuja R.K., T.L. Magnanti, and J.B. Orlin, *Network Flows.* Prentice Hall (1993). [97, 145, 176, 180, 185, 190]

[1979] Aigner M., *Combinatorial Theory.* Springer-Verlag (1979). [355,360,373]

[1984] Aigner M., *Graphentheorie. Eine Entwicklung aus dem 4-Farben Problem.* B.G. Teubner Verlagsgesellschaft (1984) (English transl. BCS Assoc., 1987). [258]

[1982] Ajtai M., V. Chvátal, M.M. Newborn and E. Szemerédi, Crossing-free subgraphs. *Theory and practice of combinatorics, Ann. Discr. Math.* **12** (1982), 9-12. [264]

[1980] Ajtai M., J. Komlós, and E. Szemerédi, A note on Ramsey numbers. *J. Comb. Th. (A)* **29** (1980), 354-360. [51,385]

[1983] Ajtai M., J. Komlós, and E. Szemerédi, Sorting in *c log n* parallel steps. *Combinatorica* **3** (1983), 1-19. [463]

[1989] Akiyama J., H. Era, S.V. Gervacio and M. Watanabe, Path chromatic numbers of graphs. *J. Graph Th.* **13** (1989), 569-575. [271]

[1981] Akiyama J, and F. Harary, A graph and its complement with specified properties, IV: Counting self-complementary blocks. *J. Graph Th.* **5** (1981), 103-107. [32]

[1999] Albertson M.O. and E.H. Moore, Extending graph colorings. *J. Comb. Th. (B) 77* (1998), 83-95. [204]

[1976] Alekseev V.B. and V.S. Gončakov, The thickness of an arbitrary complete graph (Russian). *Mat. Sb. (N.S.)* **101(143)** (1976), 212-230. [271]

[1977] Alexanderson G.L.and J.E. Wetzel, Dissections of a plane oval. *Amer. Math. Monthly* **84** (1977), 442-449. [245]

[1986a] Alon N., Eigenvalues, geometric expanders, sorting in rounds and Ramsey Theory. *Combinatorica* **6** (1986), 207-219. [463]

[1986b] Alon N., Eigenvalues and expanders. *Combinatorica* **6** (1986), 83-96. [464]

[1990] Alon N., The maximum number of Hamiltonian paths in tournaments. *Combinatorica* **10** (1990), 319-324. [117,428,429]

[1993] Alon N., Restricted colorings of graphs. In *Surveys in Combinatorics, 1993.* London Math. Soc. Lect. Notes **187** Cambridge Univ. Press (1993), 1-33. [409]

[1985] Alon N. and Y. Egawa, Even edge colorings of a graph. *J. Comb. Th. (B)* **38** (1985), 93-94. [422]

[1984] Alon N. and V.D. Milman, Eigenvalues, expanders and superconcentrators. In *Proc. 25th. IEEE Symp. Found. Comp. Sci..* IEEE (1984), 320-322. [463, 464]

[1985] Alon N. and V.D. Milman, Ai, isoperimetric inequalities for graphs and super-concentrators. *J. Comb. Th. (B)* **38** (1985), 73-88. [463]

[1992] Alon N., J.H. Spencer, *The Probabilistic Method.* Wiley (1992). [426-9, 463]

[1992] Alon N. and M. Tarsi, Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica* **12** (1992), 125-134. [409]

[1994] Alspach B., L. Goddyn and C.Q. Zhang, Graphs with the circuit cover property. *Trans. Amer. Math. Soc.* **344** (1994), 131-154. [314]

[1977] Andersen L.D., On edge-colourings of graphs. *Math. Scand.* **40** (1977), 161-175. [279, 285]

[1996] Ando K., A. Kaneko, and S. Gervacio, The bandwidth of a tree with *k* leaves is at most 11/21. *Discr. Math.* **150** (1996), 403-406. [77, 396]

[1976] Appel K. and W. Haken, Every planar map is four-colorable. *Bull. Amer. Math.Soc.* **82** (1976), 711-712. [258, 260]

[1977] Appel K. and W. Haken, Every planar map is four colorable. Part I: Discharging. *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429-490. [258]

[1986] Appel K. and W. Haken, The four color proof suffices. *Math. Intelligences* **8** (1986), 10-20. [258,261]

[1989] Appel K. and W. Haken, *Every Planar Map Is Four Colorable, Contemporary Mathematics* 98. Amer. Mathematical Society (1989). [258]

[1977] Appel K., W. Haken, and J. Koch, Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility. *Illinois J. Math.* **21** (1977), 491-567. [258, 260]

[1974] Arnautov V.I., Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices (Russian). *Prikl. Mat. i Programmirovanie* **11** (1974), 3-8,126. [117]

[1982] Ayel J., Hamiltonian cycles in particular k-partite graphs. *J. Comb. Th. (B)* **32** (1982), 223-228. [296]

[1980] Babai L., P. Erd6s, and S.M. Selkow, Random graph isomorphisms. *SIAM J. Computing* **9** (1980), 628-635. [438]

[1979] Babai L. and L. Kučera, Canonical labelling of graphs in linear average time. In *Proc. 20th IEEE Symp. Found. Comp. Sci..* IEEE (1979), 39-46. [439]

[1953] Bäbler F., Über eine spezielle Klasse Euler'scher Graphen. *Comment. Math. Helv.* **27** (1953), 81-100. [77]

[1966] Bacharach M., Matrix rounding problems. *Manag.Sci.* **9** (1966), 732-742. [186]

[1972] Baker B. and R. Shostak, Gossips and telephones. *Discr. Math.* **2** (1972), 191-193. [407]

[1969] Barnette D., Conjecture 5. In *Recent Progress in Combinatorics.* (ed. W.T. Tutte) Academic Press (1969), 343. [304]

[1984] Batagelj V., Inductive classes of cubic graphs. In *Finite and Infinite Sets.* (ed. A. Hajnal,,L. Lovász, V.T. Sós), Proc. 6th Hung. Comb. Colloq. (Eger 1981) *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **37**, Elsevier (1984), 89-101. [53]

[2000] Bauer D., H.J. Broersma and H.J. Veldman, Not every 2-tough graph is Hamiltonian. *5th Twente Workshop on Graphs & Comb. Opt., Enschede, 1997, Discr. Appl. Math.* **99** (2000), 317-321. [288]

[1976] Bean D.R., Effective coloration. *J. Symbolic Logic* **41** (1976), 469-480. [202]

[1965] Behzad M., *Graphs and their chromatic numbers.* Ph.D. Thesis, Michigan State University (1965). [411]

[1971] Behzad M., The total chromatic number of a graph: A survey. In *Combin. Math. and its Applics..* (Proc. Oxford 1969) Academic Press (1971), 1-8. [411]

[1968] Beineke L.W., Derived graphs and digraphs. In *Beitrage zur Graphentheorie.* Teubner (1968), 17-33. [282]

[1965] Beineke L.W. and F. Harary, The thickness of the complete graph. *Canad. J. Math.* **17** (1965), 850-859. [271]

[1964] Beineke L.W.,F. Harary, J.W. Moon, On the thickness of the complete bipartite graph. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **60** (1964), 1-5. [271]

[1969] Beineke L.W. and R.E. Pippert, The number of labeled k-dimensional trees. *J. Comb. Th.* **6** (1969), 200-205. [346]

[1959] Benzer S., On the topology of the genetic fine structure. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **45** (1959), 1607-1620. [328]

[1957] Berge C., Two theorems in graph theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43** (1957), 842-844. [109]

[1958] Berge C., Sur le couplage maximum d'un graphe. *C.R. Acad. Sci. Paris* **247** (1958), 258-259. [138]

[1960] Berge C., Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **9** (1960), 123-160. [227, 228, 320]

[1961] Berge C., Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe* **10** (1961), 114. [320]

[1962] Berge C., *The theory of graphs and its applications* (Translated by Alison Doig). Methuen & Co., John Wiley & Sons (1962). [116]

[1970] Berge C., Une propriété des graphes k-stables-critiques. In *Combinatorial Structures and Their Applications.* (ed. R. Guy, H. Hanani, N.W. Sauer, J. Schönheim) Gordon and Breach (1970), 7-11. [122]

[1973] Berge C., *Graphs and Hypergraphs.* North-Holland (1973) (translation and revision of *Graphes et Hypergraphes* (Dunod, 1970). [47, 147, 202]

[1984] Berge C. and V. Chvátal, *Topics on Perfect Graphs, Ann. Discr. Math.***21**. North-Holland (1984). [320]

[1984] Berge C. and P. Duchet, Strongly perfect graphs. In *Topics on Perfect Graphs.* (ed. C. Berge, V. Chvátal), Ann. *Discr. Math.***21** North-Holland (1984), 57-61. [331]

[1976] Bermond J.C., On Hamiltonian walks. In *Proc. Fifth Brit. Comb. Conf.* (ed. C.St.J.A. Nash-Williams, J. Sheehan) Utilitas Math. (1976), 41-51. [417,418]

[1981] Bernstein P.A. and N. Goodman, Power of natural semijoins. *SIAM J. Computing* **10** (1981), 751-771. [328]

[1981] Bertossi A.A., The edge Hamiltonian path problem is NP-complete. *Info. Proc. Letters* **13** (1981), 157-159. [505]

[1988] Bertschi M. and B.A. Reed, Erratum: A note on even pairs. *Disc. Math.* 71 (1988), 187 (re. B.A. Reed, A note on even pairs, *Disc. Math.* 65(1987), 317-318. [348]

[1994] Bhasker J., T. Samad, and D.B. West, Size, chromatic number, and connectivity. *Graphs and Combin.* **10** (1994), 209-213. [215]

[1993] Biggs N., *Algebraic Graph Theory (2nd ed.).* Cambridge University press (1993) (1st ed. 1974). [453, 465]

[1912] Birkhoff G.D., A determinant formula for the number of ways of coloring a map. Ann. *of Math.* **14** (1912), 42-46. [219]

[1913] Birkhoff G.D., The reducibility of maps. *Amer. J. Math.* **35** (1913), 114-128. [259, 270, 272]

[1946] Birkhoff G., Tres observaciones sobre el algebra lineal. *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Series A* **5** (1946), 147-151. [120]

[1981] Bixby R.E., Matroids and operations research. In *Advanced techniques in practice of operations research.* (ed. H.J. Greenberg, F.H. Murphy, and S.H. Shaw) North-Holland (1981), 333-458. [355]

[1979] Bland R.G., H.-C. Huang and L.E. Trotter Jr., Graphical properties related to minimal imperfection. *Discr. Math.* **27** (1979), 11-22. [335, 337, 348]

[1946] Blanuša D., Le problème des quatre couleurs (Croatian). *Hrvatsko Prirodoslovno Društvo. Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II.* **1** (1946), 31-42. [305]

[1979] Blass A. and F. Harary, Properties of almost all graphs and complexes. *J. Graph Th.* **3** (1979), 225-240. [450]

[1981a] Bollobás B., Threshold functions for small subgraphs. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc* **90** (1981), 197-206. [450]

[1981b] Bollobás B., Degree sequences of random graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981), 41-52. [438, 440]

[1982] Bollobás B., Vertices of given degree in a random graph. *J. Graph Th.* **6** (1982), 147-155. [438]

[1985] Bollobás B. *Random Graphs.* Academic Press (1985). [426, 431]

[1986] Bollobás B. *Extremal Graph Theory with Emphasis on Probabilistic Methods.* (CBMS #62, American Math Society (1986) Chapter 9 - List Colorings). [409]

[1988] Bollobás B., The chromatic number of random graphs. *Combinatorica* **8** (1988), 49-55. [441, 447, 448]

[1979] Bollobás B. and E.J. Cockayne, Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. *J. Graph Th.* **3** (1979), 241-9. [118, 123]

[1976] Bollobás B. and P. Eras, Cliques in random graphs. *Math. Proc. Camb. Phil: Soc.* **80** (1976), 419-427. [442]

[1985] Bollobás B. and A.J. Harris, List colorings of graphs. *Graphs and Combin.* **1** (1985), 115-127. [409]

[1998] Bollobás B. and A. Thomason, Proof of a conjecture of Mader, Erdös and Hajnal on topological complete subgraphs. *Europ. J. Comb.* **19** (1998), 883-887. [214]

[1990] Bona M., Problem E3378. *Amer. Math. Monthly* **97** (1990), 240. [393]

[1969] Bondy J.A., Properties of graphs with constraints on degrees. *Stud. Sci. Math. Hung.* **4** (1969), 473-475. [159]

[1971a] Bondy J.A., Pancyclic graphs I. *J. Comb. Th. (B)* **11** (1971), 80-84. [395]

[1971b] Bondy J.A., Large cycles in graphs. *Discr. Math.* **1** (1971), 121-132. [417, 418]

[1972a] Bondy J.A., Induced subsets. *J. Comb. Th. (B)* **12** (1972), 201-202. [80]

[1972b] Bondy J.A., Variation on the Hamiltonian theme. *Canad. Math. Bull.* **15** (1972), 57-62. [297]

[1978] Bondy J.A., A remark on two sufficient conditions for Hamilton cycles. *Discr. Math.* **22** (1978), 191-194. [297]

[1976] Bondy J.A. and V. Chvátal, A method in graph theory. *Discr. Math.* **15** (1976), 111-136. [289]

[1988] Bondy J.A. and M. Kouider, Hamiltonian cycles in regular 2-connected graphs. *J. Comb. Th. (B)* **44** (1988), 177-186. [292]

[1976] Bondy J.A. and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications.* North Holland, New York (1976). [51, 76, 190, 209, 217, 252, 253]

[1977] Bondy J.A. and C. Thomassen, A short proof of Meyniel's Theorem. *Discr. Math.* **19** (1977), 195-197. [420]

[1976] Booth K.S. and G.S. Lueker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using *P* Q-tree algorithms. *J. Comp. Syst. Sci.* **13** (1976), 335-379. [252]

[1926] Borüvka 0., Přispevěk k řešeniotázky otázky ekonomické stavby elektrovodnich siti. *Elektrotechnicky Obzor* **15** (1926), 153-154. [97]

[1977] Borodin O.V. and A.V. Kostochka, On an upper bound of the graph's chromatic number depending on the graph's degree and density. *J. Comb. Th. (B)* **23** (1977), 247-250. [199,204]

[1966] Bosák J., Hamiltonian lines in cubic graphs. presented at the International Seminar on Graph Theory and its Applications, Rome 5-9) (1966). [316]

[1994] Brandt S., Subtrees and subforests of graphs. *J. Comb. Th. (B)* **61** (1994), 63-70. [147,219]

[2001] Brandt S., Expanding graphs and Ramsey numbers. (to appear). [387]

[1941] Brooks R.L., On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **37** (1941), 194-197. [197]

[1980] Buckingham M.A., Circle Graphs (also Ph.D. Thesis, Courant 1981). Courant Computer Science Report 21 (1980). [337]

[1983] Buckingham M.A. and M.C. Golumbic, Partitionable graphs, circle graphs, and the Berge strong perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **44** (1983), 45-54. [336, 339, 348]

[1981] Bumby R.T., A problem with telephones. *SIAM J Alg. Disc. Meth.* **2** (1981), 13-19. [408]

[1974] Buneman P., A characterization of rigid circuit graphs. *Discr. Math.* **9** (1974), 205-212. [324]

[1982] Burlet M. and J.P. Uhry, Parity graphs. In *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization.* (ed. A. Bachem, M. Grötschel, and B. Korte), Ann. *Discr. Math.* **16** North-Holland (1982), 1-26. [330, 347]

[1977] Burns D. and S. Schuster, Every *(p, p* - 2) graph is contained in its complement. *J. Graph Th.* **1** (1977), 277-279. [80]

[1978] Burns D. and S. Schuster, Embedding *(p, p* - 1) graphs in their complements. *Israel J. Math.* **30** (1978), 313-320. [80]

[1974] Burr S.A., Generalized Ramsey theory for graphs-a survey. In *Graphs and Combinatorics.* Springer (1974), 52-75. [394]

[1981] Burr S.A., Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths. *J. Lond. Math. Soc. (2)* **24** (1981), 405-413. [387]

[1983] Burr S.A., Diagonal Ramsey numbers for small graphs. *J. Graph Th.* **7** (1983), 57-69. [386]

[1983] Burr S.A. and P. Erdös, Generalizations of a Ramsey-theoretic result of Chvátal. *J. Graph Th.* **7** (1983), 39-51.. [387]

[1975] Burr S.A., P. Erdös, and J.H. Spencer, Ramsey theorems for multiple copies of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **209** (1975), 87-99. [387]

[1974] Buršteĭn M.I., An upper bound for the chromatic number of hypergraphs (Russian). *Sakharth. SSR Mecn. Akad. Moambe* **75** (1974), 37-40. [315]

[1991] Cameron P.J. and J.H. van Lint, *Designs, Graphs, Codes, and their Links, London Math. Soc. Student Texts 22.* Cambridge Univ. Press' (1991). [466]

[1991] Campbell C. and Staton W, On extremal regular graphs with given odd girth. *Proc. 22th S.E. Intl. Coq: Graph Th. Comb. Comp.* **81** (1991), 157-159. [49]

[1979] Caro Y., New results on the independence number. Tel-Aviv University 05-79 (1979). [122,428]

[2000] Caro Y., D.B. West and R. Yuster, Connected domination and spanning trees with many leaves. *SIAM J. Discr. Math.* **13** (2000), 202-211. [117]

[1978] Catlin P.A., A bound on the chromatic number of a graph. *Discr. Math.* **22** (1978), 81-83. [204]

[1979] Catlin P.A., Hajós' graph-coloring conjecture: variations and counterexamples. *J. Comb. Th. (B)* **26** (1979), 268-274. [213, 218, 442]

[1889] Cayley A., A theorem on trees. *Quart. J. Math.* **23** (1889), 376-378. [82]

[1984] Celmins U.A., *On cubic graphs that do not have an edge 3-coloring.* Ph.D.Thesis, University of Waterloo (1984). [312]

[1959] Chang S., The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association scheme. *Sci. Record* **3** (1959), 604-613. [285]

[1994a] Chappell G.G., A weaker augmentation axiom. unpublished (1994). [374]

[1994b] Chappell G.G., Matroid intersection and the Gallai-Milgram Theorem. unpublished (1994). [376]

[1968] Chartrand G. and F. Harary, Graphs with prescribed connectivities. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966, (ed. P. Erdös and G. Katona) Acad. Press (1968), 61-63. [158]

[1969] Chartrand G. and H.V. Kronk, The point-arboricity of planar graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **44** (1969), 750-752. [202]

[1986] Chartrand G. and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs* (2nd ed.). Wadsworth (1986). [77, 173, 252]

[1973] Chartrand G., A.D. Polimeni and M.J. Stewart, The existence of 1-factors in line graphs, squares, and total graphs. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **76**, *Indag. Math.* **35** (1973), 228-232. [283]

[1968] Chein M., Graphe régulièrement décomposable. *Rev. Francaise Info. Rech. Open* **2** (1968), 27-42. [173]

[1998] Chen G., J. Lehel, M.S. Jacobson and W.E. Shreve, Note on graphs without repeated cycle lengths. *J. Graph Th.* **29** (1998), 11-15. [77]

[1986] Chetwynd A.G. and A.J.W. Hilton, Star multigraphs with 3 vertices of maximum degree. *Math. Proc. Cambridge Math. Soc.* **100** (1986), 303-317. [278]

[1989] Chetwynd A.G. and A.J.W. Hilton, 1-factorizing regular graphs of high degree-an improved bound. *Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1988), Discr. Math.* **75** (1989), 103-112. [279]

[1975] Choudom S.A., K.R. Parthasarathy and G. Ravindra, Line-clique cover number of a graph. *Proc. Indian Nat. Sci. Acad.* **41** (1975), 289-293. [422]

Christofides N., Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling sales- man problem. Grad. Sch. Indust. Admin., Carnegie-Mellon Univ. (1976). [498]

[1978a] Chung F.R.K., On partitions of graphs into trees. *Discr. Math.* **23** (1978), 23–30. [34]

[1978b] Chung F.R.K., On concentrators, superconcentrators, generalizers and nonblocking networks. *Bell Syst. Tech. J.* (1978), 1765-1777. [463]

[1981] Chung F.R.K., On the decompositions of graphs. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **2** (1981), 1-12. [398]

[1988] Chung F.R.K., Labellings of graphs. In *Selected Topics in Graph Theory, Vol. 3.* (ed. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Acad. Press (1988), 151-168. [390]

[1997] Chung F.R.K., *Spectral graph theory. CBMS Conf. Series* **92** American Mathematical Society (1997). [453]

[1975] Chung F.R.K. and R.L. Graham, On multicolor Ramsey numbers for complete bipartite graphs. *J. Comb. Th. (B)* **18** (1975), 164-169. [395]

[1983] Chung F.R.K. and C.M. Grinstead, A survey of bounds for classical Ramsey numbers. *J. Graph Th.* **7** (1983), 25-37. [385]

[1993] Chung M.-S. and D.B. West, Large P_4-free graphs with bounded degree. *J. Graph Th.* **17** (1993), 109-116. [52]

[1970] Chvátal V., The smallest triangle-free 4-chromatic 4-regular graph. *J. Comb. Th.* **9** (1970), 93-94. [203]

[1972] Chvatal V., On Hamilton's ideals. *J. Comb. Th. B* **12** (1972), 163-168. [290, 297]

[1973] Chvátal V., Tough graphs and Hamiltonian circuits. *Discr. Math.* **2** (1973), 215-223. [297]

[1975] Chvatal V., A combinatorial theorem in plane geometry. *J. Comb. Th. (B)* **18** (1975), 39-41. [270]

[1976] Chvatal V., On the strong perfect graph conjecture. *J. Comb. Th.* **20** (1976), 139-141. [341, 343, 348]

[1977] Chvátal V., Tree-complete graph Ramsey numbers. *J. Graph Th.* **1**(1977), 93. [386]

[1984] Chvátal V., Perfectly ordered graphs. Ann. *Discrete Math.* **21** (1984), 63-65. [331, 332, 347]

[1985a] Chvátal V., Hamiltonian cycles. In *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization.* (ed. E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys) Wiley (1985), 403-429. [286]

[1985b] Chvatal V., Star-cutsets and perfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **39** (1985), 138-154. [333, 347]

[1972] Chvatal V. and P. Erdös, A note on hamiltonian circuits. *Discr. Math.* **2** (1972),111-113. [292, 297, 298, 441]

[1979] Chvátal V., R.L. Graham, A.F. Perold, and S.H. Whitesides, Combinatorial designs related to the strong perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **26** (1979), 83-92. [337, 347]

[1972] Chvátal V. and F. Harary, Generalized Ramsey theory for graphs, III. Small Off-Diagonal Numbers. *Pac. J. Math.* **41** (1972), 335-345. [387]

[1973] Chvatal V. and F. Harary, Generalized Ramsey theory for graphs, I. Diagonal numbers. *Period. Math. Hungar.* **3** (1973), 115-124. [449]

[1974] Chvátal V. and L. Lovász, Every directed graph has a semi-kernel. In *Hyper-graph Sem..* (Columbus, 1972) *Lect. Notes Math.* **411**, Springer (1974), 175. [66]

[1983] Chvátal V., V. Midi, E. Szemerédi, W.T. Trotter, The Ramsey numbers of a graph with bounded maximum degree. *J. Comb. Th. (B)* **34** (1983), 239-243. [388]

[1988] Chvátal V. and N. Sbihi, Recognizing claw-free perfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **44** (1988), 154-176. [341]

[1975] Chvátalová J., Optimal labelling of a product of two paths. *Discr. Math.* **11** (1975), 249-253. [396]

[1974] Clapham C.R.J., Hamiltonian arcs in self-complementary graphs. *Discr. Math.* **8** (1974), 251-255. [297]

[1977] Cockayne E.J. and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs. *Networks* **7** (1977), 247-261. [116]

[1971] Cook S.A., The complexity of theorem-proving procedures. In *Proc. 3th ACM Symp. Theory of Comp..* Assoc. Comput. Mach. (1971), 151-158. [499]

[2001] Corneil D.G, S. Ola•iu, and L. Stewart, The LBFS structure and recognition of interval graphs. (to appear). [326]

[1970] Crapo H.H. and G.C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries* preliminary edition. M.I.T. Press (1970). [355]

[1980] Cull P., Tours of graphs, digraphs, and sequential machines. *IEEE Trans. Comp.* **C29** (1980), 50-54. [65]

[1979] Cvetković D.M., M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of Graphs.* Academic Press (1979) 3rd ed., Johann Ambrosius Barth, 1995. [453, 468]

[1971] de Werra D., Balanced schedules. *Information J.* **9** (1971), 230-237. [285]

[1964] Demoucron G., Y. Malgrange and R. Pertuiset, Graphes planaires: reconnaissance et construction des représentations planaires topologiques. *Rev. Francaise Recherche Opérationnelle* **8** (1964), 33-47. [253-255]

[1947] Descartes B., A three colour problem. *Eureka* (1947), (soln. 1948). [206, 216]

[1948] Descartes B., Network-colourings. *Mat. Gaz.* **32** (1948), 67-69. [305]

[1954] Descartes B., Solution to advanced problem 4526 (Ungar). *Amer. Math. Monthly* **61** (1954), 352. [206, 216]

[1997] Diestel R., *Graph theory. Graduate Texts in Mathematics* **173** Springer-Verlag (Second edition, 2000) (1997). [269]

[1959] Dijkstra E.W., A note on two problems in connexion with graphs. *Numer Math.* **1** (1959), 269-271. [97, 104]

[1952a] Dirac G.A., A property of 4-chromatic graphs and some remarks on critical graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **27** (1952), 85-92. [212, 218]

[1952b] Dirac G.A., Some theorems on abstract graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.* **2** (1952), 69-81. [288, 293, 298, 417, 441]

[1953] Dirac G.A., The structure of k-chromatic graphs. *Fund. Math.* **40** (1953), 42-55. [211]

[1960] Dirac G.A., In abstrakten Graphen vorhandene vollständige 4-Graphen and ihre Unterteilungen. *Math. Nachr.* **22** (1960), 61-85. [170]

[1961] Dirac G.A., On rigid circuit graphs. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **25** (1961), 71-76. [226, 231]

[1964] Dirac G.A., Homomorphism theorems for graphs. *Math. Ann.* **153** (1964), 69-80. [214]

[1965] Dirac G.A., Chromatic number and topological complete subgraphs. *Can. Math. Bull.* **8** (1965), 711-715. [213]

[1967] Dirac G.A., Minimally 2-connected graphs. *J. Reine Angew. Math.* **228** (1967), 204-216. [175]

[1954] Dirac G.A. and S. Schuster, A theorem of Kuratowski. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc.* Ser. A **57** (1954), 343-348. [252]

[1980] Dmitriev I.G., Weakly cyclic graphs with integral chromatic spectra (Russian). *Metody Diskret. Analiz.* **34** (1980), 3-7,100. [230]

[1917] Dudeney H.E., *Amusements in Mathematics.* Nelson (1917). [233]

[1917] Dziobek O., Eine Formel der Substitutionstheorie. *Sitzungsber. Berl. Math. G.* **17** (1917), 64-67. [94]

[1965a] Edmonds J., Paths, trees, and flowers. *Can. J. Math.* 17 (1965), 449-467. [142-5]

[1965b] Edmonds J., Minimum partition of a matroid into independent sets. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **69B** (1965), 67-72. [79, 355, 372]

[1965c] Edmonds J., Lehman's switching game and a theorem of Tutte and Nash-Williams. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **69B** (1965), 73-77. [80, 355, 372]

[1965d] Edmonds J., Maximum matchings and a polyhedron with 0,1-vertices. *J. Res. Nat. Bur. Standards* **69B** (1965), 125-130. [145]

[1970] Edmonds J., Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In *Combinatorial Structures and Their Applications.* (Proc. Calgary 1969) Gordon and Breach (1970), 69-87. [367]

[1973] Edmonds J., Edge-disjoint branchings. In *Combinatorial Algorithms.* Courant Symp. Monterey 1972 - (ed. B. Rustin) Academic Press (1973), 91-96. [405-6]

[1979] Edmonds J., Matroid intersection. In *Discrete Optimization I.* (ed. P.L. Hammer, E.L. Johnson, and B.H. Korte) *Ann. Discr. Math.* **4** (1979), 39-49. [369]

[1965] Edmonds J. and D.R. Fulkerson, Transversals and matroid partition. *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **69B** (1965), 147-153. [353, 370]

[1973] Edmonds J. and E. Johnson, Matching, Euler tours, and the Chinese postman. *Math. Programming* **5** (1973), 88-124. [100]

[1972] Edmonds J. and R.M. Karp, Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *J. Assoc. Comp. Mach.* **19** (1972), 248-264. [180]

[1931] Egerváry E., On combinatorial properties of matrices (Hungarian with German summary). *Mat. Lapok* **38** (1931), 16-28. [112, 368]

[1979] Eitner P.G., The bandwidth of the complete multipartite graph. Presentation at Toledo Symposium on Applications of Graph Theory (1979). [396]

[1956] Elias P., A. Feinstein and C.E. Shannon, Note on maximum flow through a network. *IRE Trans. on Information Theory* **IT-2** (1956), 117-119. [168]

[1996] Ellingham M.N. and L. Goddyn, List edge colourings of some 1-factorable multigraphs. *Combinatorica* **16** (1996), 343-352. [411]

[1994] Enchev 0., Problem 10390. *Amer. Math. Monthly* **101** (1994), 574 (solution 104 (1997), 367-368). [120]

[1985] Enomoto B., B. Jackson, P. Katerinis, and A. Saito, Toughness and the existence of k-factors. *J. Graph Th.* **9** (1985), 87-95. [288]

[1946] Erdös P., On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly* **53** (1946), 248-250.[265]

[1947] Eras P., Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292-294. [385, 426]

[1959] Erdös P.,Graph theory and probability. *Can. J. Math.* 11(1959), 34-38. [206,429]

[1962] Erdös P., Remarks on a paper of Pósa. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962), 227-229. [297]

[1963] Eras P., On a combinatorial problem. *Nord. Mat. Tidskr.* **11** (1963), 5-10. [449]

[1964] Erdös P., Extremal problems in graph theory. In *Theory of Graphs and Its Applications.* Academic Press (1964), 29-36. [70, 217]

[1981] Erdös P., On the combinatorial problems I would most like to see solved. *Combinatorica* **1** (1981), 25-42. [202]

[1988] Erdös P., Problem E3255. *Amer. Math. Monthly* **95** (1988), 259. [51]

[1981] Erdös P. and S. Fajtlowicz, On the conjecture of Hajós. *Combinatorica* **1** (1981), 141-143. [442]

[1959] Erdös P. and T. Gallai, On maximal paths and circuits of graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **10** (1959), 337-356. [395, 416]

[1960] Erdös P. and T. Gallai, Graphs with prescribed degrees of vertices (Hungarian). *Mat. Lapok* **11** (1960), 264-274. [141,148]

[1961] Erdös P. and T. Gallai, On the minimal number of vertices representing the edges of a graph. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* **6** (1961), 181-203. [147,216]

[1966] Erdös P., A. Goodman, and L. Pósa, The representation of graphs by set intersections. *Canad. J. Math.* **18** (1966), 106-112. [397]

[1973] Erdös P. and R.K. Guy, Crossing number problems. *Amer. Math. Monthly* **80** (1973), 52-58. [264]

[1966] Erdös P. and A. Hajnal, On chromatic numbers of graphs and set systems. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 61-99. [204]

[1966] Erdös P. and A. Rényi, On the existence of a factor of degree one of a connected random graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **17** (1966), 359-368. [426, 438]

[1979] Erdös P., A. Rubin, and H. Taylor, Choosability in graphs. *Congr. Num.* **26** (1979), 125-157. [408, 409, 412, 423]

[1963] Erdös P. and Sachs H., Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math. -Natur. Reihe* **12** (1963), 251-257. [49, 79]

[1935] Erdös P. and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry. *Composito Math* **2** (1935), 464-470. [203, 379, 382, 383]

[1985] Erdös P. and D.B. West, A note on the interval number of a graph. *Discr. Math.* **55** (1985), 129-133. [451]

[1977] Erdös P. and R.J. Wilson, On the chromatic index of almost all graphs. *J. Comb. Th. (B)* **23** (1977), 255-257. [439]

[1962] Eršov A.P. and G.I. Kožuhin, Estimates of the chromatic number of connected graphs (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **142** (1962), 270-273. [215]

[1736] Euler L., Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae* **8** (1736), 128-140 (appeared 1741). [26]

[1758] Euler L., Demonstratio Nonnullarum Insignium Proprietatum Quibus Solida Hedris Planis Inclusa Sunt Praedita. *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol* **4** (1758), 140-160. [241]

, [1994] Evans A.B., G.H. Fricke, C.C. Maneri, T.A. McKee, and M. Perkel, Representations of graphs modulo *n. J. Graph Th.* **18** (1994), 801-815. [422]

[1975] Even S. and O. Kariv, An $0\ (n^{2}.^{5})$ algorithm for maximum matching in general graphs. In *Proc. 16th Symp. Found. Comp. Sci.* IEEE (1975), 100-112. [145]

[1975] Even S. and R.E. Tarjan, Network flow and testing graph connectivity. *SIAM J. Computing* **4** (1975), 507-518. [134]

[1987] Faigle U., Matroids in combinatorial optimization. In *Combinatorial Geometries.* (ed. N. White) Cambridge Univ. Press (1987), 161-210. [369]

[1984] Fan G.-H., New sufficient conditions for cycles in graphs. *J. Comb. Th. (B)* **37** (1984), 221-227. [419]

[1986] Farber M. and R.E. Jamison, Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **7** (1986), 433-444. [225]

[1948] Fáry I., On the straight line representations of planar graphs. *Acta Sci. Math.* **11** (1948), 229-233. [246]

[1988] Feng T., A short proof of a theorem about the circumference of a graph. *J. Comb. Th. (B)* **45** (1988), 373-375. [419]

[1968] Finck H.-J., On the chromatic numbers of a graph and its complement. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966 (ed. P. Erdős and G. Katona) Academic Press (1968), 99-113. [202]

[1969] Finck H.-J. and H. Sachs, Über eine von H.S. Wilf angegebene Schranke fiir die chromatische Zahl endlicher Graphen. *Math. Nachr.* **39** (1969), 373-386. [202]

[1985] Fishburn P.C., *Interval Orders and Interval Graphs.* Wiley (1985). [347]

[1994] Fisher D.C., K.L. Collins, and L.B. Krompart, Problem 10406. *Amer. Math. Monthly* **101** (1994), 793. [316]

[1978] Fisk S., A short proof of Chvátal's watchman theorem. *J. Comb. Th. (B)* **24** (1978), 374. [270]

[1974] Fleischner H., The square of every two-connected graph is hamiltonian. *J. Comb. Th. (B)* **16** (1974), 29-34. [296]

[1983] Fleischner H., Eulerian graphs. In *Selected Topics in Graph Theory Vol. 2.* (ed. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Academic Press (1983), 17-54. [95]

[1991] Fleischner H., A maze search algorithm which also produces Eulerian trails. In *Advances in Graph Th..* (ed. V.R. Kulli) Vishwa Intl. Publ. (1991), 195-201. [95]

[1992] Fleischner H. and M. Stiebitz, A solution to a coloring problem of P. Erdös. *Discr. Math.* **101** (1992), 39-48. [409]

[1990] Floyd R.W., Problem E3399. Am. *Math. Monthly* **97** (1990), 611-612. [121]

[1956] Ford L.R. Jr. and D.R. Fulkerson, Maximal flow through a network. *Canad. J. Math.* **8** (1956), 399-404. [168,169,180,185-9]

[1958] Ford L.R. Jr. and D.R. Fulkerson, Network flows and systems of representatives. *Canad. J. Math.* **10** (1958), 78-85. [171, 369]

[1962] Ford L.R. Jr. and D.R. Fulkerson, *Flows in Networks.* Princeton University Press, Princeton (1962). *[130, 176, 185]*

[1973] Fournier J.-C., Colorations des arêtes d'un graphe. In *Colloque Th. des Graphes.* (Bruxelles 1973) *Cahiers Ctr. Etud. Rech. Opér.* **15** (1973), 311-314. [285]

[1993] Frank A., Applications of submodular functions. In *Surveys in Combinatorics, 1993.* (ed. K. Walker) *Lond. Math. Soc. Lect. Notes* **187** Cambridge Univ. Press (1993), 85-136. [166]

[1981] Frankl P. and R.M. Wilson, Intersection theorems with geometric consequences. *Combinatorica* **1** (1981), 357-368. [385, 395]

[1985] Fraughnaugh (Jones) K., Minimum independence graphs with maximum degree four. In *Graphs and Applics.* (Proc. Boulder 1982) Wiley (1985), 221-230. [270]

[1998] Fritsch R. and G. Fritsch, *The Four-Color Theorem.* Springer (1998) (published in German by F.A. Brockhaus, 1994). *[258]*

[1917] Frobenius G., Über zerlegbare Determinanten. *Sitzungsber. König. Preuss. Adad. Wiss.* **XVIII** (1917), 274-277. [111]

[1971] Fulkerson D.R., Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra. *Math. Programming* **1** (1971), 168-194. [318, 320]

[1965] Fulkerson D.R. and O.A. Gross, Incidence matrices' and interval graphs. *Pac. J. Math.* **15** (1965), 835-855. [231, 328, 344]

[1981] Gabber 0. and Z. Galil, Explicit construction of linear-sized superconcentrators. *J. Comput. Systems Sci.* **22** (1981), 407-420. [463]

[1975] Gabow H.N., An efficient implementation of Edmonds' algorithm for maximum matchings on graphs. *J. Assoc. Comp. Mach.* **23** (1975), 221-234. [145]

[1990] Gabow H.N., Data structures for weighted matching and nearest common ancestors with linking. In *Proc 1st ACM-SIAM Symp. Disc. Algs.* (San Francisco 1990) SIAM (1990), 434-443. [145]

[1986] Gabow H.N., Z. Galil, T. Spencer, and R.E. Tarjan, Efficient algorithms for finding minimum spanning trees in undirected and directed graphs. *Combinatorica* **6** (1986), 109-122. [97]

[1989] Gabow H.N. and R.E. Tarjan, Faster scaling algorithms for general graph match- in problems. Tech. Re t. CU-CS-432-89 Dept. Comp. Sci., Univ. Colorado - Boul- der (1989). [145]

[1957] Gale D., A theorem on flows in networks. *Pac. J. Math.* 7 (1957), 1073-1082. *[184-5,190]*

[1962] Gale D. and L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 9-15. [131-2,135-6,411]

[1959] Gallai T., Über extreme Punkt- and Kantenmengen. Ann. *Univ. Sci. Budapest, Eötvös Sect. Math.* **2** (1959), 133-138. [115, 122, 376]

[1962] Gallai T., Graphen mit triangulierbaren ungeraden Vielecken. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **7** (1962), 3-36. [330]

[1963a] Gallai T., Neuer Beweis eines Tutte'schen Satzes. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963), 135-139. [147]

[1963b] Gallai T., Kritische Graphen I. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Keel.* **8** (1963), *165-192.* [198-9]

[1963c] Gallai T., Kritische Graphen II. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **8** (1963), 373-395. [217]

[1968] Gallai T., On directed paths and circuits. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966 (ed. P. Eras and G. Katona) Academic Press (1968), 115-118. [196]

[1960] Gallai T. and A.N. Milgram, Verallgemeinerung eines graphentheoretischen Satzes von Rédei. *Acta Sci. Math. Szeged* **21** (1960), 181-186. [413]

[1998] Gallian J.A., A dynamic survey of graph labeling. *Electron. J. Combin.* **5** (1998), (Dynamic Survey 6) 43 pp. [88]

[1995] Galvin F., The list chromatic index of a bipartite multigraph. *J Comb. Th. (B)* **63** (1995), 153-158. [410]

11976] Gardner M., Mathematical games. *Sci. Amer.* **234** (1976), 126-130 (also 235, 210-211. [305]

[1978] Garey M.R., R.L. Graham, D.S. Johnson, and D.E. Knuth, Complexity results for bandwidth minimization. *SIAM J. Appl. Math.* **34** (1978), 477-495. [390]

[1976] Garey M.R. and D.S. Johnson, The complexity of near-optimal graph colouring. *J. Assoc. Comp. Mach.* **23** (1976), 43-49. [441]

[1979] Garey M.R. and D.S. Johnson, *Computers and Intractability.* W.H. Freeman and Company, San Fransisco (1979). [495]

[1976] Garey M.R., D.S. Johnson, and L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems. *Theor. Comp. Sci.* **1** (1976), 237-267. [504]

[1976] Garey M.R., D.S. Johnson, and R.E. Tarjan, unpublished [505]

[1972] Gavril F., Algorithms for minimum coloring, maximum clique, minimum covering by cliques and maximum independent set of a chordal graph. *SIAM J. Computing* **1** (1972), 180-187. [344]

[1974] Gavril F., The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs. *J. Comb. Th. (B)* **16** (1974), 47-56. [324]

[1994] Gavril F. and J. Urrutia, Intersection graphs of concatenable subtrees of graphs. *Discr. Appl. Math.* **52** (1994), 195-209. [345]

[1991] George J., *1-Factorizations of tensor products of graphs.* Ph.D. Thesis, Univ. of Illinois (Urbana-Champaign) (1991). [284]

[1989] Georges J.P., Non-Hamiltonian bicubic graphs. *J. Comb. Th. (B)* 46 (1989), 121-124. [292]

[1960] Ghouilà-Houri A., Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien. *C. R. Adac. Sci. Paris* **156** (1960), 495-497. [294,299,420]

[1985] Gibbons A., *Algorithmic Graph Theory.* Cambr. Univ. Press. (1985). [100, 500]
[1959] Gilbert E.N., Random graphs. Ann. *Math. Stat.* **30** (1959), 1141-1144. [431]

[1984] Giles R., L.E. Trotter Jr., and A.C. Tucker, The strong perfect graph theorem for a class of partitionable graphs. In *Topics on Perfect Graphs.* (ed. C. Berge and V. Chvátal) North-Holland (1984), 161-167. [342, 343]

[1964] Gilmore P.C. and A.J. Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs. *Canad. J. Math.* **16** (1964), 539-548. [328]

[1963] Glicksman S., On the representation and enumeration of trees. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **59** (1963), 509-517. [93]

[1991] GoddardW., Acyclic colorings of planargraphs.Disc. *Math.* 91(1991), 91-94. [271]

[1985] Goddyn L., A girth requirement for the double cycle cover conjecture.,Cycks *in graphs (Burnaby, 1982), Math.Stud.* **115** North-Holland (1985), 13-26. [314]

[1973] Goldberg M.K., Multigraphs with a chromatic index that is nearly maximal (Russian). *Coll. in memory V. K. Korobkov, Diskret.Analiz* **23** (1973), 3-7. [279]

[1977] Goldberg M.K., Structure of multigraphs with restrictions on the chromatic class (Russian). *Metody Diskret. Analiz.* **30** (1977), 3-12. [279, 285]

[1984] Goldberg M.K., Edge-coloring of multigraphs: recoloring technique. *J. Graph Th.* **8** (1984), 123-137. [279, 285]

[1980] Golumbic M.C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.* Academic Press (1980). [320, 337, 346]

[1984] Golumbic M.C., Algorithmic aspects of perfect. graphs. In *Topics on perfect graphs.* (ed. C. Berge and V. Chvátal) North-Holland (1984), 301--323. [325]

[1946] Good I.J., Normal recurring decimals. *J. Lond. Math. Soc.* **21** (1946), 167-169. *[60, 64, 65]*

[1959] Goodman A. W., On sets of acquaintances and strangers at any party. *Amer. Math. Monthly* **66** (1959), 778-783. [52]

[1988] Gould R.J., *Graph Theory.* Benjamin/Cummings (1988). *[252]*

[1994] Graham N., R.C. Entringer and L.A. Székely, New tricks for old trees: maps and pigeonhole principle. *I* ***AMM*** **101** (1994), 664-667. [379, 393]

[1992] Graham N. and F. Harary, Changing and unchanging the diameter of a hyper-cube. *Discr. Appl. Math.* **37-38** (1992), 265-274. - [379]

[1973] Graham R.L. and D.J. Kleitman, Increasing paths in edge ordered graphs. *Pe- riod. Math. Hungar.* **3** (1973), 141-148. [380, 393]

[1971] Graham R.L. and H.O. Pollak, On the addressing problem for loop switching. *Bell Sys. Tech. J.* 50 (1971), 2495-2519. [401]

[1973] Graham R.L. and H.O. Pollak, On embedding graphs in squashed cubes. In *Graph Theory and Applications.* (Proc. Kalmazoo 1972), *Lect. Notes Math.* **303** Springer (1973), 99-110. [401]

[1980] Graham R.L., B.L. Rothschild, and J.H. Spencer, *Ramsey Theory.* Wiley (1980) 2nd ed. 1990. [381, 385]

[1968] Graver J.E. and J. Yackel, Some graph theoretic results associated with Ram-sey's Theorem. *J. Comb. Th.* **4** (1968), 125-175. [384, 385]

[1973] Greene C., A multiple exchange property for bases. *Proc. Amer. Math. Soc.* 39 (1973), 45-50. [374]

[1975] Greene C. and G. Iba, Cayley's formula for multidimensional trees. *Discr. Math.* 13 (1975), 1-11. [346]

[1978] Greenwell D.L., Odd cycles and perfect graphs. In *Theory and Applications of Graphs. Lect. Notes Math.* 642 Springer-Verlag (1978), 191-193. [344]

[1973] Greenwell D.L. and H.V. Kronk, Uniquely line colorable graphs. *Canad. Math. Bull.* 16 (1973), 525-529. [296]

[1974] Greenwell D.L. and L. Lovász, Applications of product colouring. *Aoki Math. Acad. Sci. Hung* **25** (1974), 335-340. [201]

[1955] Greenwood R.E. and A.M. Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canad. J Math.* **7** (1955), 1-7. [384]

[1992] Griggs J.R. and M. Wu, Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5. *Discr. Math.* **104** (1992), 167-183. [123]

[1991] Grigni M. and D. Peleg, Tight bounds on minimum broadcast networks. *SIAM J. Discr. Math.* **4** (1991), 207-222. [423]

[1975] Grimmett G.R. and C.J.H. McDiarmid, On colouring random graphs. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **77** (1975), 313-324. [441]

[1968] Grinberg E.J., Plane homogeneous graphs of degree three without hamiltonian circuits. *Latvian Math. Yearbook* **5** (1968), 51-58. [302-3, 315-6]

[1978] Grinstead C.M., *The strong perfect graph conjecture for a class of graphs.* Ph.D. Thesis, UCLA (1978). [341]

[1981] Grinstead C.M., The strong perfect graph conjecture for toroidal graphs. *J. Comb. Th. (B)* **30** (1981), 70-74. [341]

[1982] Grinstead C.M. and S.M. Roberts, On the Ramsey numbers R(3, 8) and R(3, 9). *J. Comb. Th. (B)* **33** (1982), 27-51. [384]

[1989] Gritzmann P., B. Mohar, J. Pach and R. Pollack, Problem E3341. *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 642 (solution **98**, 165-166). [256]

[1999] Gross J. and J. Yellen, *Graph Theory.* CRC Press (1999). [453]

[1959] Grötzsch H., Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel. *Wiss. Z. Martin-Luther-U, Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe* **8** (1959), 109-120. [270]

[1963] Grünbaum B. and T.S. Motzkin, The number of hexagons and the simplicity of geodesics on certain polyhedra. *Canad. J. Math.* **15** (1963), 744-751. [245]

[1962] Guan M., Graphic programming using odd and even points. *Chinese Math.* **1** (1962), 273-277. [99]

[1966] Gupta R.P., The chromatic index and the degree of a graph (Abstract 66T-429). *Not. Amer. Math. Soc.* **13** (1966), 719. [275, 277, 279, 285]

[1989] Gusfield D. and R.W. Irving, *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms.* MIT Press (1989). [132]

[1996] Gutner S., The complexity of planar graph choosability. *Discr. Math.* **159** (1996), 119-130. [412]

[1969] Guy R.K., The decline and fall of Zarankiewicz's theorem. In *Proof Techniques in Graph Theory.* (ed. F. Harary) Acad. Press (1969), 63-69. [264]

[1970] Guy R.K., Sequences associated with a problem of Turán and other problems. Proc. Combin. Conf. Balatonfüred 1969, Bolyai János Matematikai Tarsultat (1970), 553-569. [264, 272]

[1972] Guy R.K., Crossing numbers of graphs. In *Graph Theory &Appl.* Kalamazoo, 1972 (ed. Y. Alavi et al), *Lect. Notes Math.* **303** Springer (1972), 111-124. [263]

[1967] Guy R.K. and F. Harary, On the Möbius ladders. *Canad. Math. Bull.* **10** (1967), 493-496. [271]

[1975] Gyárfás A., On Ramsey covering-numbers. In *Finite and Infinite Sets.* (ed. A. Hajnal, R. Rado and V.T. Sós) Proc. Colloq. Keszthely, 1973 *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **10**, North-Holland (1975), 801-816. [206, 214-5]

[1980] Gyárfás A., E. Szemerédi, and Z. Tuza, Induced subtrees in graphs of large chromatic number. *Discr. Math.* **30** (1980), 235-244. [219]

[1979] Győri E. and A.V. Kostochka, On a problem of G.O.H. Katona and T. Tarján. *Acta Math. Acad. Sci. Hung* **34** (1979), 321-327. [398]

[1943] Hadwiger H., Über eine Klassifikation der Streckenkomplexe. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zurich* **88** (1943), 133-142. [213, 363]

[1945] Hadwiger H., Üeberdeckung des Euklidischen Raumes durch kongruente Mengen. *Portugaliae Math.* **4** (1945), 238-242. [201]

[1961] Hadwiger H., Ungelöste Probleme No. 40. *Elem. Math.* **16** (1961), 103-4. [201]

[1997] Häggkvist R. and J.C.M. Janssen, New bounds on the list-chromatic index of the complete graph and other simple graphs. *Combin. Probab. Comput.* **6** (1997), 295-313. [410]

[1961] Hajós G., Über eine Konstruktion nicht n-farbbarerGraphen. *Wiss. Z. MartinLuther-Univ. Halle-Wittenberg Math. -Nat. Reihe* **10** (1961), 116-117. [213, 217]

[1962] Hakimi S.L., On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. *SIAM J. Appl. Math.* **10** (1962), 496-506. [45, 52]

[1967] Halin R., Unterteilungen vollständiger Graphen in Graphen mit unendlicher chromatischer Zahl. *Abh. Math. Sem. Unv.Hamburg* **31** (1967), 156-165. [202]

[1969] Halin R., A theorem on n-connected graphs. *J. Comb. Th.* **7** (1969), 150-4. [175]

[1948] Hall M., Distinct representatives of subsets. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54** (1948), 922. [111, 120]

[1956] Hall M., An algorithm for distinct representatives. *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 716-717. [189]

[1935] Hall P., On representation of subsets. *J. Lond. Mat. Sc.* **10** (1935), 26-30. [110]

[1950] Halmos P.R. and H.E. Vaughan, The marriage problem. *Amer. J. Math* 72 (1950), 214-215. [120]

[1981] Hammer P.L. and B. Simeone, The splittance of a graph. *Combinatorica* **1**(1981), 275-284 (also Dept. Comb. Opt., Univ. Waterloo, CORR 77-39 (1977). [345]

[1983] Hammersley J., The friendship theorem and the love problem. In *Surveys in Combinatorics.* (ed. E.K. Lloyd), *Lond. Math. Soc. Lec. Notes* **82** Cambridge Univ. Press (1983), 31-54. [466]

[1962a] Harary F., The maximum connectivity of a graph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **48** (1962), 1142-1146. [151, 159]

[1962b] Harary F., The determinant of the adjacency matrix of a graph, *SIAM Review* **4** (1962), 202-210. [454]

[1969] Harary F., *Graph Theory.* Addison-Wesley, Reading MA (1969). [252, 299]

[1977] Harary F., D.F. Hsu, and Z. Miller, The biparticity of a graph. *J. Graph Th.* **1** (1977), 131-133. [422]

[1993] Harary F. and P.C. Kainen, The cube of a path is maximal planar. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **7** (1993), 55-56. [271]

[1964] Harary F. and Y. Kodama, On the genus of an n-connected graph. *Fund. Math.* **54** (1964), 7-13. [160]

[1965] Harary F. and C.St.J.A. Nash-Williams, On eulerian and hamiltonian graphs and line graphs. *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 701-710. [295]

[1966] Harary F. and G. Prins, The block-cutpoint-tree of a graph. *Publ. Math. Debrecen* **13** (1966), 103-107. [160]

[1973] Harary F. and A.J. Schwenk, The number of caterpillars. *Discr. Math.* **6** (1973), 359-365. [94]

[1974] Harary F. and A.J. Schwenk, The communication problem on graphs and digraphs. *J. Franklin Inst.* **297** (1974), 491-495. [422]

[1966] Harper L.J., Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. *J. Comb. Th.* **1** (1966), 385-393. [390]

[1995] Hartman C.M., A short proof of a theorem of Giles, Trotter, and Tucker. unpublished note (1995). [342]

[1997] Hartman C.M., *Extremal problems in graph theory.* Ph.D. Thesis, University of Illinois (1997). [284]

[1996] Hartsfield N., A,K. Kelmans and Y.Q. Shen, On the Laplacian polynomial of a K-cube extension. *Proc. 27th S.E. Intl. Conf. Graph Th. Comb. Comp. (Baton Rouge, 1996), Congr. Num.* **119** (1996), 73-77. [463]

[1955] Havel V., A remark on the existence of finite graphs (Czech.). *Časopis Pest. Mat* **80** (1955), 477-480. [45, 52]

[1998] Haynes T.W., S.T. Hedetniemi and P.J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs.* Marcel Dekker, Inc. (1998). [116]

[1985] Hayward R.B., Weakly triangulated graphs. *J. Comb. Th. (B)* **39** (1985), 200-208. [334]

[1890] Heawood P.J., Map-colour theorem. *Q. J. Math.* **24** (1890), 332-339. [257, 268]

[1898] Heawood P.J., On the four-colour map theorem. *Q. J. Math.* **29** (1898), 270-285. [271]

[1969] Hedetniemi S., On partitioning planar graphs. *Canad. Math. Bull.* **11** (1969), 203-210. [270]

[1969] Heesch H., Untersuchungen zum Vierfarbenproblem. Num. 810/810a/810b B.I. Hochschulscripten. Bibliographisches Institut (1969). [259]

[1990] Hendry G.R.T., Extending cycles in graphs. *Discr. Math.* **85** (1990), 59-72. [231]

[1873] Hierholzer C., fiber die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung and ohne Unterbrechnung zu umfahren. *Math.* Ann. **6** (1873), 30-32. [26, 30]

[1989] Hilton A.J.W., Two conjectures on edge colouring. *Discr. Math.* **74** (1989), 61-64.[278]

[1941] Hitchcock F.L., The distribution of a product from several sources to numerous facilities. *J. Math. Phys.* **20** (1941), 224-230. [130]

[1995] Hochberg R., C.J.H. McDiarmid, and M. Saks, On the bandwidth of triangulated triangles. *14th Brit. Comb. Conf. (Keele, 1993), Discr. Math.* **138** (1995), 261- 265. [391]

[1958] Hoffman A.J., *Théorie des Graph* (ed. by) C. Berge (1958), 80. [317]

[1960] Hoffman A.J., On the exceptional case in the characterization of the arcs of a complete graph. *IBM J. Res. Dev.* **4** (1960), 487-496. [285]

[1963] Hoffman A.J., On the polynomial of a graph. *Amer. Math. Monthly* 70 (1963), 30-36. [461]

[1964] Hoffman A.J., On the line-graph of the complete bipartite graph. Ann. *Math. Statist.* **35** (1964), 883-885. [285]

[1993] Holton D.A. and J. Sheehan, *The Petersen Graph.* Cambr. Univ. Pr. (1993). [13]

[1981] Holyer I., The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Computing* **10** (1981), 718-720. [278,439,505]

[1972] Holzmann C.A. and F. Harary, On the tree graph of a matroid. *SLAM J. Appl. Math.* **22** (1972), 187-193. [376]

[1973] Hoperoft J. and R.M. Karp, An $0\ (n^{2\cdot5})$ algorithm for maximum matching in bipartite graphs. *SIAM J. Computing* **2** (1973), 225-231. [132]

[1974] Hoperoft J. and R.E. Tarjan, Efficient Planarity Testing. *J. Assoc. Comp. Mach.* **21** (1974), 549-568. [252]

[1982] Horton J.D., On two-factors of bipartite regular graphs. *Discr. Math.* **41** (1982), 35-41. [292]

[1976] Huang H.-C., *Investigations on combinatorial optimization.* Ph.D. Thesis, School of Organization and Management, Yale University (1976). [337]

[1952] Huffman D.A., A method for the construction of minimum redundancy codes. *Proc. Inst. Rail. Engin.* **40** (1952), 1098-1011. [101-103,106]

[1995] Hutchinson J.P., Problem 10478. *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 746 (solution **105** (1998), 274-275). [271]

[1973] Ingleton A.W. and M.J. Puff, Gammoids and transversal matroids. *J. Comb. Th. (B)* **15** (1973), 51-68. [377]

[1975] Isaacs R., Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable. *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 221-239. [306, 317]

[1991] Isaak G. and B. Tesman, The weighted reversing number of a digraph. Proc. 22nd Southeastern Conf., *Congr. Num.* ***83*** (1991), 115-124. [66]

[1978] Itai A. and Rodeh M., Covering a graph by circuits. In *Automata, Languages and Programming, Lect. Notes in Comp. Sci* **62**. Springer-Verlag (1978), 289- 299. [317, 318]

[1980] Jackson B., Hamilton cycles in regular 2-connected graphs. *J. Comb. Th. (B)* **29** (1980), 27-46: [292]

[1991] Jacobson M.S., F.R. McMorris, H.M. Mulder, Tolerance Intersection Graphs. In *Proc. Kalamazoo 1988.* (ed. Y. Alavi, G. Chartrand, O.R. Oellerman and A.J. Schwenk) Wiley (1991), 705-724. [346]

[1978] Jaeger F., Sur certaines valuations des hypergraphes d'intervalles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sir. A-B* **287** (1978), A487-A489. [317]

[1979] Jaeger F., Flows and generalized coloring theorems in graphs. *J. Comb. Th. (B)* **26** (1979), 205-216. [312]

[1988] Jaeger F., Nowhere-zero flow problems. In *Selected Topics in Graph Theory 3.* (eds. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Academic Press (1988), 71-95. [312, 317]

[2000] Janson S., T. Luczak, and A. Ruciński, *Random Graphs.* Wiley-Interscience (2000). [426]

[1993] Janssen J.C.M., The Dinitz Problem is solved for rectangles. *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 243-249. [410]

[1930] Jarnik V., 0 jistérn problému minimálnim. *Acta Societatis Scientiarum Natur. Moravicae* 6 (1930), 57-63. [97, 104]

[1997] Jeurissen R., "Sinks in digraphs", posted on GRAPHNET, Oct 7,1997 (response to-question of A. Hobbs and L. Anderson) [449]

[1869] Jordan C., Sur les assemblages de lignes. *J. Reine Angew. Math.* **70** (1869), 185-190. [72, 78, 393]

[1965] Jung H.A., Anwendung einer Methode von K. Wagner bei Farbungsproblemen für Graphen. *Math. Ann.* **161** (1965), 325-326. [213]

[1985] Jünger M., G. Reinelt, and W.R. Pulleyblank, On partitioning the edges of graphs into connected subgraphs. *J. Graph Th.* **9** (1985), 539-549. [424]

[1996] Kahn J., Asymptotically good listcolorings. *J. Comb. Th.* (A) **73**(1996),1-59. [410]

[1967] Kalbfleisch J.G., Upper bounds for some Ramsey numbers. *J. Comb. Th.* **2** (1967), *35-42.* [384]

[2001] , Kaneko A., A. Kelmans and T. Nishimura, On packing 3-vertex paths in a graph. *J. Graph Th.* (to appear). [173]

[1983] Kano M. and A. Sakamoto, Ranking the vertices of a weighted digraph using the length of forward arcs. *Networks* **13** (1983), 143-151. [66]

[1960] Kantorovich L.V., Mathematical methods in the organization and planning of production (in Russian, 1939, Leningrad State Univ.). *Management Science* **6** (1960), 366-422. [130]

[1977] Kapoor S.F., A.D. Polimeni, and C.E. Wall, Degree sets for graphs. *Fund. Math.* **95** (1977), 189-194. [52]

[1995] Karger D.R., P.N. Klein, and R.E. Tarjan, A randomized linear-time algorithm to find minimum spanning trees. *J. Assoc. Comp. Mach.* **42** (1995), 321-328. [97]

[1972] Karp R.M., Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations.* (ed. R.E. Miller and J.W. Thatcher) Plenum Press (1972), 85-103. . [500,502,503,506]

[1965] Kelmans A.K., The number of trees in a graph, I. *Automat. Remote' Control* **26** (1965), 2118-2129. [94, 63]

[1966] Kelmans A.K., The number of trees in a graph, II. *Automat. Remote Control* **27** (1966), 233-241. [463]

[1967a] Kelmans A.K., Connectivity of probabilistic networks. *Automat. Remote Control* **28** (1967), 98-116. [93]

[1967b] Kelmans A.K., The properties of the characteristic polynomial of a graph (Russian). , *Cybernetics* **4** Izdat. "Energija" (1967), 27-41. [463]

[1980] Kelmans A.K., Concept of a vertex in a matroid and 3-connected graphs. *J. Graph Th.* **4** (1980), 13-19. [251, 365, 376]

[1981a] Kelmans A.K., The concept of a vertex in a matroid, the nonseparating cycles of a graph and a new criterion for graph planarity.. In *Algebraic methods in graph theory, Vol. I, II.* (ed. L. Lovász, V.T. Sós), Proc. Colloq. (Szeged, 1978) *Coll. Math. Soc: Janos Bolyai* **25**, North-Holland (1981), 345-388. [256]

[1981b] Kelmans A.K., A new planarity criterion for 3-connected graphs. *J. Graph Th.* **5** (1981), 259-267. [251]

[1983] Kelmans A.K, On existence of given subgraphs in a graph (Russian). In *Algoritmy Diskret. Optim. Primen. v Vychisl. Syst.*. Yaroslay. Gos. Univ. (1983), 3-20. [252]

[1984a] Kelmans A.K., Problem. In *Finite and Infinite Sets.* (ed. A. Hajnal, L. Lovász, V.T. &is), Proc. 6th Hung. Comb. Colloq. (Eger 1981) *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **37**, Elsevier (1984), 882. [252]

[1984b] Kelmans A.K., A strengthening of the Kuratowski planarity criterion for 3connected graphs. *Discr. Math.* **51** (1984), 215-220. [252]

[1987] Kelmans A.K., A short proof and a strengthening of the Whitney 2-isomorphism theorem on graphs. *Discr. Math.* **64** (1987), 13-25. [365]

[1988] Kelmans A.K., Matroids and the theorems of Whitney on 2-isomorphism and planarity of graphs (English transl.. *Uspekhi Mat. Nauk* 43 (1988), 199-200), *Russian Math. Surveys* **43** London Math. Soc (1988), 239-241. [365]

[1992] Kelmans A.K., Spanning trees of extended graphs. *Combinatorica* **12** (1992), 45-51. [93]

[1993] Kelmans A.K., Graph planarity and related topics. In *Graph Structure Theory (Seattle, WA, 1991)*. (ed. N. Robertson and P. Seymour) *Contemp. Math.* 147, Amer. Math. Soc. (1993), 635-667. [251]

[1998] Kelmans A.K., On homotopy of connected graphs having the same degree function. RUTCOR Research Report, Rutgers University 39-98 (1998). [77]

[2000] Kelmans A.K., On convex embeddings of planar 3-connected graphs. *J. Graph Th.* **33** (2000), 120-124. [248]

[1974] Kelmans A.K. and V.M. Chelnokov, A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees. *J. Comb. Th. (B)* **16** (1974), 197-214. [463]

[1879] Kempe A.B., On the geographical problem of four colours. *Amer. J. Math.* **2** (1879), 193-200. [258]

[1992] Kierstead H.A., Long stars specify x -bounded classes. In *Sets, graphs and numbers.* (ed. G. Halász, L: LovPasz, D. Miklós and T. Szönyi), Proc. Colloq. (Budapest, 1991) *Coll. Math. Soc. Janos Bolyai* **60**, North-Holland (19P2), 421-428. [206]

[1997] Kierstead H.A., Classes of graphs that are not vertex Ramsey. *SIAM J. Discr. Math.* **10** (1997), 373-380. [206]

[1990] Kierstead H.A. and S.G. Penrice, Recent results on a conjecture of Gyárfás. *Proc. 21th S.E. Intl. Conf. Graph Th. Comb. Comp.* **79** (1990), 182-186. [206]

[1994] Kierstead H.A. and S.G. Penrice, Radius two trees specify x -bounded classes. *J. Graph Th.* **18** (1994), 119-129. [206]

[1996] Kierstead H.A. and V. Rödl Applications of hypergraph coloring to coloring graphs not inducing certain trees. *Discr. Math.* **150** (1996), 157-193. [206]

[1975] Kilpatrick P.A., *Tutte's first colour-cycle conjecture.* Ph.D. Thesis, Cape Town (1975). [312]

[1995] Kim J.H., The Ramsey number R(3, *t)* has order of magnitude $t^2/\log t$. *Random Structures Algorithms* **7** (1995), 173-207. [385]

[1981] Kimble R.J. Jr. and A.J. Schwenk, On universal caterpillars. In *The theory and applications of graphs.* Wiley (1981), 437-447. [94]

[1847] Kirchhoff G., Über die Auflösung der Gleichungen, aufwelche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. Ann. *Phys. Chem.* **72** (1847), 497-508. [85]

[1856] Kirkman T.P., On the representation of polyhedra. *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **146** (1856), 413-418. [286]

[1970] Kleitman D.J., The crossing number of K5, . *J. Comb. Th.* **9** (1970), 315-323. [264, 272]
[1980] Kleitman D.J. and J.B. Shearer, Further gossip problems. *Discr. Math.* **30** (1980), 151-156. [408]
[1991] Kleitman D.J. and D.B. West, Spanning trees with many leaves. *SIAM J. Discr. Math.* **4** (1991), 99-106. [123]
[1989] Klotz W., A constructive proof of Kuratowski's theorem. *Ars Combinatoria* **28** (1989), 51-54. [255]
[1976] Knuth D.E., *Mariages Stables.* Les Presses de l'Univ. de Montréal (1976). [132]
[1996] Kochol M., Snarks without small cycles. *J. Comb. Th. (B)* **67** (1996), 34-47. [306]
[1996] Komi& J. and E. Szemerédi, Topological cliques in graphs II. *Combin. Probab. Comput.* **5** (1996), 79-90. [214]
[1916] König D., *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und* Mengenlehre. *Math. Ann.* **77** (1916), 453-465. [115, 227, 276]
[1931] König D., Graphen und Matrizen. *Math. Lapok* **38** (1931), 116-119. [112,368]
[1936] König D., *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* Akademische Verlagsgesellschaft (1936) (reprinted Chelsea 1950). [25, 95]
[1947] Koopmans T.C., Optimum utilization of the transportation system. Proc. Intl. Stat. Conf. Washington, (1947), see also *Econometrica* **17** (1949). [130]
[1979] Kotzig A., 1-Factorizations of cartesian products of regular graphs. *J Graph Th.* **3** (1979), 23-34. [284]
[1943] Krausz J., Démonstration nouvelle d'une théorème de Whitney sur les réseaux (Hungarian). *Mat. Fi.Z. Lapok* **50** (1943), 75-89. [280]
[1975] Krishnamoorthy M.S., An NP-hard problem in bipartite graphs. *SIGACT News* **7** (1975), 26. [505]
[1989] Kriz I., A hypergraph-free construction of highly chromatic graphs without short cycles. *Combinatorica* **9** (1989), 22'7-229. [206, 429]
[1956] Kruskal J.B. Jr., On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proc. Am. Math. Soc.* **7** (1956), 48-50. [95-97,104,498]
[1989] Kubicka E. and A.J. Schwenk, An introduction to chromatic sums: Proc. Proc. ACM Computer Science Conference, Louisville, Kentucky, (1989), 39-45. [204]
[1955] Kuhn H.W., The Hungarian method for the assignment problem. *Naval Research Logistics Quarterly* **2** (1955), 83-97. [127]
[1999] Kündgen A., Art galleries with interior walls. *Discrete & Comp. Geom.* **22** (1999), 249-258. [271]
[1986] Kung J.P.S., Strong maps. In *Theory of Matroids.* (ed. N. White) Cambridge Univ. Press (1986), 224-252. [376]
[1930] Kuratowski K., Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.* **15** (1930), 271-283. [246-252, 256, 365]
[1953] Landau H.G., On dominance relations and the structure of animal societies, III: The condition for score structure. *Bull. Math.Biophys.* **15** (1953), 143-8. [62, 65]
[1980] Laskar R. and D. Shier, On chordal graphs. *Proc. 11th S.E. Intl. Conf. Graph Th. Comb. Comp., Congr. Num.* **29** (1980), 579-588. [225]
[1971] Las Vergnas M., Sur une propriété des arbres maximaux dans un graphe. *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B* **272** (1971), 1297-1300. [298]
[1975] Las Vergnas M., A note on matchings in graphs. *Cahiers Centre Etudes Recherche Opér.* **17** (1975), 257-260. [147]
[1976] Lawler E.L., *Combinatorial Optimization: Nkworks and Matroids.* Holt, Rinehart, and Winston (1976). [145, 369]

[1978] Lawrence J., Covering the vertex set of a graph with subgraphs of smaller degree. *Discr. Math.* **21** (1978), 61-68. [204]

[1973] Lawrence S.L., Cycle-star Ramsey numbers. *Notices Amer. Math. Soc.* **20** (1973), A-420 (Notice #73T-157). [395]

[1957] Lazarson T., *Independence functions in algebra.* Thesis, U. London (1957). [375]

[1966] Lederberg J., Systematics of organic molecules, graph topology and Hamiltonian circuits (Instrumentation Res. Lab. Rept.). Stanford Univ. 1040 (1966). [316]

[1964] Lehman A., A solution of the Shannon switching game. J. *Soc. Indust. Appl. Math.* **12** (1964), 687-725. [360, 366, 374]

[1974] Lehot P.G.H., An optimal algorithm to detect a line-graph and output its root graph. *J. Assoc. Comp. Mach.* **21** (1974), 569-575. [282]

[1983] Leighton F.T.., *Complexity Issues in VLSI: optimal layouts for the shuffle-exchange graph and other networks. Foundations of Computing* MIT Press (1983). [264]

[1962] Lekkerkerker C.G. and J.Ch. Boland, Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fund. Math.* **51** (1962), 45-64. [346]

[1973] Lick D.R., Characterizations of n-connected and n-line-connected graphs. *J. Comb. Th. (B)* **14** (1973), 122-124. [174]

[1970] Lick D.R. and A.T. White, k-degenerate graphs. *Canad. J. Math.* 22 (1970), 1082-1096. [202]

[1973] Lin S. and B.W. Kernighan, An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem. *Oper. Res.* **21** (1973), 498-516. [497]

[1976] Linial N., A lower bound for the circumference of a graph. *Discr. Math.* **15** (1976), 297-300. [417,418]

[1988] Little C.H.C., W.T. Tutte and D.H. Younger, A theorem on integer flows. *Second International Conference on Combinatorial Mathematics and Computing (Canberra, 1987), Ars Combinatoria* **26** (1988), 109-112. [318]

[1997] Liu J. and H. Zhou, Maximum induced matchings in graphs. *Discr. Math.* 170 (1997), 277-281. [121]

[1995] Locke S.C., Problem 10447. *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 360. [66]

[1966] Lovász L., On decomposition of graphs. *Stud. Sci. Math. Hung.* **1** (1966), 237-238. [203]

[1968a] Lovász L., On chromatic number of finite set-systems.. *Acta Math. Acad. Sci. Hung* **19** (1968), 59-67. [206,429]

[1968b] Lovász L., On covering of graphs. In *Theory of Graphs.* Proc. Tihany 1966 (ed. P. Erdös and G. Katona) Academic Press (1968), 231-236. [414]

[1972a] Lovász L., Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **2** (1972), 253-267. [226, 320, 322]

[1972b] Lovász L., A characterization of perfect graphs. J. *Comb. Th. (B)* **13** (1972), 95-98. [226, 322, 334, 335]

[1975] Lovász L., Three short proofs in graph theory. J. *Comb. Th. (B)* **19** (1975), 269-271. [137, 197]

[1976] Lovász L., On two minimax theorems in graph theory. J. *Comb. Th. (B)* **21** (1976), 96-103. [405]

[1979] Lovász L., *Combinatorial Problems and Exercises.* Akademiai Kiado and North-Holland (1979). [94, 173, 175, 395]

[1983] Lovász L., Perfect graphs. In *Selected Topics in Graph Theory, 2.* (ed. L.W. Beineke and R.J. Wilson) Academic Press (1983), 55-87. [330]

[1980] Lovász L., J. Nešetřil, and A. Pultr, On a product dimension of graphs. *J. Comb. Th. (B)* **28** (1980), 47-67. [399,400,422]

[1986] Lovász L. and M.D. Plummer, *Matching Theory (Ann. Discr. Math.***29***).* Akademiai Kiado and North Holland (1986). [120, 368]

[1994] Lu X., A Chvátal-Erdös type condition for Hamiltonian graphs. *J. Graph Th.* **18** (1994), 791-800. [298]

[1996] Lu X., On avoidable and unavoidable trees. *J. Graph T.* **22** (1996), 335-46. [190]

[1986] Lubotzky A., R. Phillips, and P. Sarnak, Explicit expanders and the Ramanujan conjectures. In *Proc. 18th ACM Symp. Theory of Comp..* ACM Press (1986), 240-246. [464]

[1988] Lubotzky A., R. Phillips, and P. Sarnak, Ramanujan graphs. *Combinatorica* **8** (1988), 261-277. [206]

[1995] Mabry R., Bipartite graphs and the Four-color Theorem. *Bull. ICA* **14** (1995), 119-112. [270]

[1936] MacLane S., Some interpretations of abstract linear dependence in terms of projective geometry. *Amer. J. Math.* **58** (1936), 236-240. [349, 360]

[2001] Maddox R.B., The superregular graphs (Solution to Problem 6617). *Amer. Math. Monthly* (1996). [470]

[1967] Mader W., Homomorphieeigenschaften and mittlere Kantendichte von Graph-en. *Math. Ann.* **174** (1967), 265-268. [213, 214]

[1971] Mader W., Minimale n-fach kantenzusammenhängende Graphen. *Math. Ann.* **191** (1971), 21-28. [175]

[1973] Mader W., 1-Faktoren von Graphen. *Math. Ann.* **201** (1973), 269-282. [146]

[1978] Mader W., A reduction method for edge-connectivity in graphs. Ann. *Discr. Math.* **3** (1978), 145-164. [175]

[1998] Mader W., 3n - 5 edges do force a subdivision of K5. *Combinatorica* **18** (1998), 569-595. [214, 256]

[1991] Mahadev N.V.R., F.S. Roberts, and P. Santhanakrishnan, 3-choosable complete bipartite graphs. DIMACS Tech. Report 91-62 (1991). [409]

[1907] Mantel W., Problem 28, soln. by H. Gouwentak, W. Mantel, J. Teixeira de Mattes, F. Schuh and W.A. Wythoff. *Wiskundige Opgaven* **10** (1907), 60-61. [41]

[1959] Marcus M. and R. Ree, Diagonals of doubly stochastic matrices. *Quart. J. Math.* **2** (1959), 295-302. [121]

[1973] Margulis G.A., Explicit constructions of concentrators. *Problems of Information Transmission* **9** (1973), 325-332. [463]

[1988] Margulis G.A., Explicit constructions of concentrators. *Problems of Information Transmission* **24** (1988), 39-46. [464]

[1984] Markossian S.E. and I.A. Karapetian, On critically imperfect graphs. In *Prikladnaia Matematika.* (ed. R.N. Tonoian) Erevan Univ. (1984), [122]

[1999] Markus L.R., Disjoint cycles in planar and triangle-free graphs. *J. Comb. Math. & Comb. Comput.* **31** (1999), 177-182. [256]

[1972] Mason J.H., On a class of matroids arising from paths in graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.(3)* **25** (1972), 55-74. [377]

[1978] Matthews K.R., On the Eulericity of a graph. *J. Graph Th.* **2** (1978),143-8. [317]

[1984] Matthews M.M. and D.P. Sumner, Hamiltonian results in K1,3-free graphs. *J. Graph Th.* **8** (1984), 139-146. [297]

[1968] Matula D.W., A min-max theorem for graphs with application to graph coloring. *SIAM Review* **10** (1968), 481-482. [202]

[1972] Matula D.W., The employee party problem. *Not. A.M.S.* **19** (1972), A-382. [440]

[1973] Matula D.W., An extension of Brooks' Theorem. Center for Numerical Analysis, University of Texas-Austin 69 (1973). [204]

[1980] Maurer S., The king chicken theorems. *Math. Mag.* **53** (1980), 67-80. [63, 65]

[1980] Maurer S., I. Rabinovitch, and W.T. Trotter Jr., Large minimal realizers of a partial order II. *Discr. Math.* **31** (1980), 297-314. [66]

[1989] McCuaig W. and B. Shepherd, Domination in graphs with minimum degree two. *J. Graph Th.* **13** (1989), 749-762. [117]

[1972] McDiarmid C.J.H., The solution of a timetabling problem. *J. Inst. Math. Applies.* **9** (1972), 23-34. [285]

[1994] McGuinness S., The greedy clique decomposition of a graph. *J. Graph Th.* **18** (1994), 427-430. [397]

[1991] McKay B.D. and S.P. Radziszowski, The first classical Ramsey number for hyper-graphsis computed. Proc. 2nd Symp. Disc. Alg. (San Francisco), ACM-SIAM (1991), 304-308. [384]

[1995] McKay B.D. and S.P. Radziszowski, R(4, 5) = 25. *J. Graph Th.* **19** (1995), 309-322. [384]

[1992] McKay B.D. and K.M. Zhang, The value of the Ramsey number *R(3,* 8). *J. Graph Th.* **16** (1992), 99-105. [384]

[1984] McKee T.A., Recharacterizing Eulerian: intimations of new duality. *Discr. Math.* **51** (1984), 327-242. [34]

[1993] McKee T.A., How chordal graphs work. *Bull. ICA* **9** (1993), 27-39. [327, 328]

[1971] Melnikov L.S. and V.G. Vizing, Solution to Toft's problem (Russian). *Diskret. Analiz.* **19** (1971), 11-14. [344]

[1927] Menger K., Zur allgemeinen Kurventheorie. *Fund. Math.* **10** (1927), 95-115. [167-175]

[1973] Meyniel H., Une condition suffisante d'existence d'un circuit Hamiltonien dans un graph oriente. *J. Comb. Th. (B)* **14** (1973), 137-147. [294, 420]

[1976] Meyniel H., On the perfect graph conjecture. *Discr. Math.* **16** (1976), 339-342. [330, 341, 348]

[1987] Meyniel H., A new property of critical imperfect graphs and some consequences. *Europ. J. Comb.* **8** (1987), 313-316. [348]

[1980] Micali S. and V.V. Vazirani, an OW1 V I • 1E1) algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *Proc. 21th IEEE Symp. Found. Comp. Sci..* ACM (1980), 17-27. [145]

[1981] Miller Z., The bandwidth of caterpillar graphs. Proc. 12th Southeastern Conf., *Congr. Num.33* (1981), 235-252. [396]

[1962] Minty G.J., A theorem on n-coloring the points of a linear graph. *Amer. Math. Monthly* **69** (1962), 623-624. [203]

[1966] Minty G.J., On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and network programming. *J. Math. Mech.* **15** (1966), 485-520. [375]

[1971] Mirsky L., *Transversal theory* (Mathematics in Science and Engineering, Vol. 75). Academic Press (1971). [111,368]

[1967] Mirsky L. and H. Perfect, Applications of the notion of independence to combinatorial analysis. *J. Comb. Th.* **2** (1967), 327-357. [353]

[1996] Mirzakhani M., A small non-4-choosable planar graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **17** (1996), 15-18. [412, 24]

[2001] Molloy M. and B. Reed, Near-optimal list colourings. *Random Structures & Algs.* (to appear). [410]

[1963] Moon J.W., On the line-graph of the complete bigraph. Ann. *Math. Statis.* **34** (1963), 664-667. [285]

[1965a] Moon J.W., On a problem of Ore. *Math. Gaz.* **49** (1965), 40-41. [297]

[1965b] MoonJ.W.,Onthe diameter of a *graph.Michigan Math.J.* **12**(1965), 349-351. [79]

[1965c] Moon J.W., On the number of complete subgraphs of a graph. *Canad. Math. Bull.* **8** (1965), 831-834. [217]

[1966] Moon J.W., On subtournaments of a tournament. *Canad. Math. Bull.* **9** (1966), 297-301. [299]

[1969] Moon J.W., The number of labeled k-trees. *J. Comb. Th.* **6** (1969), 196-199. [346]

[1970] Moon J.W., *Counting Labeled Trees.* Canad. Math. Congress (1970). [81]

[1961] Moser L. and W. Moser, Problem and solution P10. *Canad. Math. Bull.* **4** (1961), 187-189. [201]

[1969] Mowshowitz A., The group of a graph whose adjacency matrix has all distinct eigenvalues. In *Proof Techniques in Graph Theory.* (ed. F. Harary) Acad. Press (1969), 109-110. [470]

[1957] Munkres J., Algorithms for the assignment and transportation problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **5** (1957), 32-38. [127]

[1955] Mycielski J., Sur le coloriage des graphes. *Coll. Math.* **3** (1955), 161-162. [205]

[1972] Myers B.R. and R. Liu, A lower bound on the chromatic number of a graph. *Networks* **1** (1972), 273-277. [216]

[1960] Nash-Williams C.St.J.A., On orientations, connectivity and odd-vertex-pairings in finite graphs. *Canad. J. Math.* **12** (1960), 555-567. [166, 174-175]

[1961] Nash-Williams C.St.J.A., Edge-disjoint sp4nning trees in finite graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **36** (1961), 445-450. [73, 80, 166, 312, 372]

[1964] Nash-Williams C.St.J.A., Decomposition of finite graphs into forests. *J. Lond. Math. Soc.* **39** (1964), 12. [79, 372]

[1966] Nash-Williams C.St.J.A., An application of matroids to graph theory. In *Theory of Graphs.* (Intl. Sympos., Rome) Dunod (1966), 263-265. [370]

[1988] Nemhauser G.L. and L.A. Wolsey, *Integer and combinatorial optimization.* Wiley (1988). [355]

[1979] Nešetřil J. and V. Midi, A short proof of the existence of highly chromatic hyper-graphs without short cycles. *J. Comb. Th. (B)* **27** (1979), 225-227. [206, 429]

[1953] von Neumann J., A certain zero-sum two-person game equivalent to the optimal assignment problem. *Contributions to the Theory of Games II* (ed. H.W. Kuhn), Ann. *Math. Studies* **28** Princeton Univ. Press (1953), 5-12. [120]

[2000] Niessen T. and J. Kind, The Round-Up Property of the Fractional Chromatic Number for Proper Circular Arc Graphs. *J. Graph Th.* **33** (2000), 256-267. [217]

[1990] Niessen T. and L. Volkmann, Class 1 conditions depending on' the minimum degree and the number of vertices of maximum degree. *J. Graph Th.* **14** (1990), 225-246. [279]

[1991] Nilli A., On the second eigenvalue of a graph. *Discr. Math.* **91** (1991), 207-210. [464]

[1956] Nordhaus E.A. and J.W. Gaddum, On complementary graphs. *Amer. Math. Monthly* **63** (1956), 175-177. [202]

[1959] Norman R.Z. and M. Rabin, Algorithm for a minimal cover of a graph. *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), 315-319. [122]

[1995] O'Donnell P., The choice number of $K6._q$. (1995). [409]

[1988] Olariu S., No antitwins in minimal imperfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **45** (1988), 255-257. [348]

[1989] Olariu S., The strong perfect graph conjecture for pan-free graphs. *J. Comb. Th. (B)* **47** (1989), 187-191. [341]

[1969] Olaru E., Cher die Überdeckung von Graphen mit Cliquen. *Wiss. Z. Tech. Hochsch. Ilmenau* **15** (1969), 115-121. [330]

[1951] Ore O., A problem regarding the tracing of graphs. *Elemente der Math.* **6** (1951), 49-53. [77]

[1955] Ore O., Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.* **22** (1955), 625-639. [121,368]

[1960] Ore O., Note on Hamilton circuits. Am. *Mat. Monthly* **67** (1960), 55. [289, 417-8]

[1961] Ore O., Arc coverings of graphs. Ann. *Mat. Pura Appl.* **55** (1961), 315-321. [297]

[1962] Ore, O., *Theory of graphs* (American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXVIII). American Mathematical Society (1962). [116, 122]

[19631 Ore O., Hamiltonian connected graphs. *J. Math. Pures Appl.* **42** (1963), 21-27. [297]

[1967a] Ore O., *The four-colour problem.* Academic Press (1967). [258, 285]

[1967b] Ore O., On a graph theorem of Dirac. *J. Comb. Th.* **2** (1967), 35-42. [298]

[19971 Pach J. and G. Tóth, Graphs drawn with few crossings per edge. *Combinatorica* **17** (1997), 427-439. [264]

[1974] Padberg M.W., Perfect zero-one matrices. *Math. Prog.* **6** (1974), 180-196. [335-7]

[1985] Palmer E.M., *Graphical Evolution: An Introduction to the Theory of Random Graphs.* Wiley (1985). [426, 436, 440, 450]

[1973] Palumbiny D., On decompositions of complete graphs into factors with equal diameters. *Boll. Un. Mat. Ital.(4)* **7** (1973), 420-428. [424]

[1982] Papadimitriou C.H. and K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity.* Prentice Hall (1982) reprint Dover, 1998. [180, 355]

[1976] Parthasarathy K.R. and G. Ravindra, The strong perfect graph conjecture is true for K1,3-free graphs. *J. Comb. Th. (B)* **21** (1976), 212-223. [341-343]

[1979] Parthasarathy K.R. and G. Ravindra, The validity of the strong perfect graph conjecture for K4 - e-free graphs. *J. Comb. Th. (B)* **26** (1979), 98-100. [341]

[1975] Payan C., Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple. Proc. Colloque sur la Théorie des Graphes (Paris, 1974), Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. **17** (1975), 307-317. [117]

[1984] Peck G.W., A new proof of a theorem of Graham and Pollak. *Discr. Math.* **49** (1984), 327-328. [459]

[1992] Peled U., Problem 10197. *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 162. [1992]

[1975] Penaud J.G., Une propriété de bicoloration des hypergraphes planaires. Proc. Colloque sur la Théorie des Graphes (Paris, 1974), Cahiers Centre Etudes Recherche Opér. **17** (1975), 345-349. [315]

[1997] Perkovic L. and B. Reed, Edge coloring regular graphs of high degree. *Graphs & combinatorics (Marseille, 1995), Discr. Math.* **165/166** (1997), 567-578. [279]

[1969] Petersdorf M. and H. Sachs, Spektrum and Automorphismengruppe eines Graphen. In *Combinatorial Theory and its Applications, III.* North-Holland (1969), 891-907. [470]

[1891] Petersen J., Die Theorie der regulären Graphen. *Acta Math.* **15** (1891), 193-220. [139, 140, 147]

[1898] Petersen J., Sur le Théoréme de Tait. *L'Intermédiaire des Mathématiciens* **5** (1898), 225-227. [139, 276]

[1973] Pinsker M., On the complexity of a concentrator. *7th International Teletraffic Conference* Stockholm (1973), 318/1-318/4. [463]

[1977] Pippenger N., Superconcentrators. *SIAM J. Computing* **6** (1977), 298-304. [463]

[2001] Plantholt M., The overfull conjecture for graphs with high minimum degree. (to appear). [279]

[1975] Plesnik J., Critical graphs of given diameter. *Acta Fac. Rerum Natur. Univ. Comenian. Math.* **30** (1975), 71-93. [160]

[1968] Plummer M.D., On minimal blocks. *Trans. Amer. Math. Soc.* **134** (1968), 85-94. [175]

[1963] Pósa L., On circuits of finite graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Kozl.* **8** (1963), 355-361. [217]

[1957] Prim R.C., Shortest connection networks and some generalizations. *Bell Syst. Tech. J.* **36** (1957), 1389-1401. [97, 104]

[1995] Pritikin D., A Prüfer-style bijection proving that $r\,(K\,n,n) = n^{(2\,'')}$ Proc. 25th Southeastern Conf. (1994), *Congr.* Num.**104** (1995), 215-216. [93]

[1918] Prüfer H., Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. *Arch. Math. Phys.* **27** (1918), 742-744. [81-83, 92-93]

[1957] Rado R., Note on independence functions. *Proc. Lond. Math. Soc.* **7** (1957), 300-320. [354]

[1995] Radziszowski S.P., Small Ramsey numbers. *Electronic J. Comb.* Dynamic Survey 1 [384]

[1930] Ramsey F.P., On a Problem of Formal Logic. *Proc. Lond. Math. Soc.* **30** (1930), 264-286. [380,381]

[1982] Ravindra G., Meyniel graphs are strongly perfect. *J. Comb. Th. (B)* **33** (1982). 187-190. [330]

[1967] Ray-Chaudhuri D.K., Characterization of line graphs. *J. Comb. Th.* **3** (1967), 201-214. [283]

[1975] Read R.C., Review. *Math. Rev.* **50** (1975), review #6906. [230]

[1934] Rédei L., Einkombinatorischer Satz. *Acta Litt. Szeged* **7**(1934), 39-43. [200, 299]

[1987] Reed B., A semistrong perfect graph theorem. *J. Comb. Th. (B)* **43** (1987), 223- 240. [344]

[1996] Reed B., Paths, stars and the number three. *Combin. Probab. Comput.* **5** (1996), 277-295. [117]

[1998] Reed B., w, A, and *x.. J. Graph Th.* **27** (1998), 177-212. [199]

[1999] Reed B., A strengthening of Brooks' theorem. *J. Comb. Th. (B)* **76** (1999), 136-149. [199]

[1946] Rees D., Note on a paper by I.J. Good. *J. Lond. Mat. Sc.* **21** (1946), 169-172. [65]

[1959] Rényi A, Some remarks on the theory of trees. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kut. Int. Közl.* **4** (1959), 73-85. [92]

[1966] Rényi A., New methods and results in combinatorial analysis, I (Hungarian). *Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Kozl* **16** (1966), 77-105. [93]

[1985] Reznick B., P. Tiwari, and D.B. West, Decompostition of product graphs into complete bipartite subgraphs. *Discr. Math.* **57** (1985), 179-183. [459]

[1985] Richards D. and A.L. Liestman, Finding cycles of a given length. *Ann. Discr. Math.* **27** (1985), 249-256. [505]

[1993] Richter R.B., Problem 10330. *Amer. Math. Monthly* **100** (1993), 796 (solution **103** (1996)), 700-701. [216]

[1964] Ringel G., Problem 25. In *Theory of Graphs and Its Applications (Proc. Symp. Smolenice 1963).* Czech. Acad. Sci. (1964), 162. [87]

[1974] Ringel G., *Map color theorem. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band* **209** Springer-Verlag (1974). [269]

[1968] Ringel G. and J.W.T. Youngs, Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **60** (1968), 438-445. [269]

[2000] Rizzo R., A short proof of Konig's Theorem. *J. Graph Th.* **33** (2000), 138-9. [113]

[1939] Robbins H.E, A theorem on graphs, with an application to a problem in traffic control. *Amer. Math. Monthly* **46** (1939), 281-283. [165]

[1968] Roberts F.S., *Representations of Indifference relations.* Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, Stanford Univ. (1968). [346]

[1978] Roberts F.S., *Graph Theory and Its Applications to the Problems of Society (CBMS-NSF Monograph 29).* SIAM Publications (1978). [130, 328]

[1996] Robertson N., D.P. Sanders, P.D. Seymour and R. Thomas, Efficiently four-coloring planar graphs. In *Proc. 28th ACM Symp. Theory of Comp..* ACM Press (1996), 571-575. [260]

[2001] Robertson N., D.P. Sanders, P.D. Seymour and R. Thomas, Every 2-connected cubic graph with no Petersen minor is 3-edge-colorable. (to appear). [304, 305]

[1985] Robertson N. and P.D. Seymour, Graph minors-a survey. *Surveys in combina-torics 1985 (Glasgow, 1985), London Math. Soc. Lecture Note Ser.* **103** Cambridge Univ. Press (1985), 153-171. [269]

[1993] Robertson N., P.D. Seymour, and R. Thomas., Hadwiger's conjecture for K_6-free graphs. *Combinatorica* **13** (1993), 279-361. [213]

[1967] Rosa A., On certain valuations of the vertices of a graph. In *Theory of Graphs (Intl. Symp. Rome 1966).* Gordon and Breach, Dunod (1967), 349-355. [88]

[1976] Rose D., R.E. Tarjan, and G.S. Lueker, Algorithmic aspects of vertex elimination on directed graphs. *SIAM J. Computing* **5** (1976), 266-283. [325]

[1971] Rosenfeld M., On the total coloring of certain graphs. *Israel J. Math.* **9** (1971), 396-402. [411]

[1964] Rota G.C., On the foundations of combinatorial theory I. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **2** (1964), 340-368. [355, 360]

[1991] Rotman J.J., Problem E3462. *Amer. Math. Monthly* **98** (1991), 645. [64]

[1967] Roy B., Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe. *Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationelle sét: Rouge* **1** (1967), 127-132. [196]

[1985] Ruciński A. and A. Vince, Balanced graphs and the problem of subgraphs of random graphs. *Congr. Num.* **49** (1985), 181-190. [450]

[1957] Ryser H.J., Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. *Canad. J. Math.* **9** (1957), 371-377. [65, 185, 190]

[1964] Ryser H.J., Matrices of zeros and ones in .combinatorial mathematics. In *Recent Advances Matrix Theory.* (Madison, 1963) U. Wisc. Press (1964), 103-124. [65]

[1977] Saaty T.L. and P.C. Kainen, *The Four-Color Problem.* McGraw-Hill (1977) (reprinted by Dover, 1986). [258]

[1967] Sachs H., Ober Teiler, Faktoren and charakteristische Polynome von Graphen II. *Wiss. Z. Techn. Hochsch. Ilmenau* **13** (1967), 405-412. [445]

[1970] Sachs H., On the Berge conjecture concerning perfect graphs. In *Combinatorial Structures and Their Applications.* (ed. R. Guy, H. Hanani, N.W. Sauer, J. Schönheim) Gordon and Breach (1970), 377-384. [330]

[1997] Saclé J.-F. and Woźniak M., The Erdős-Sós conjecture for graphs without C4. *J. Comb. Th. (B)* **70** (1997), 367-372. [70]

[1976] Sahni S. and T. Gonzalez, P-complete approximation problems. *J. Assoc. Comp. Mach.* **23** (1976), 555-565. [497]

[1969] Schäuble M., Bemerkungen zur Kounstruktion dreikreisfreier *k*-chromatischer Graphen. *Wiss. Zeitschrift TH Ilmenau* **15** (1969), 59-63. [215]

[1990] Scheinerman E.R., On the interval number of random graphs. *Discr. Math.* **82** (1990), 105-109. [451]

[1990] Schnyder W., Embedding planar graphs on the grid. In *Proc. 1st ACM-SIAM Sympos. Discrete Algorithm.* (1990), 138-148. [251]

[1934] Schönberger T., Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes. *Acta Scientia Mathematica Szeged* **7** (1934), 51-57. [147]

[2001] Schrijver A., *Theory of Combinatorial Optimization.* (unpub.). [355, 370, 406]

[1916] Schur I., Über die Kongruenz .$x^m + y^m \equiv z^m$ (mod *p). Jber. Deutsch. Math.-Verein.* **25** (1916), 114-116. [393]

[1966] Schwartz B.L., Possible winners in partially completed tournaments. *SIAM Review* **8** (1966), 302-308. [183]

[1973] Schwenk A.J., Almost all trees are cospectral. In *New Directions in the Theory of Graphs.* Academic Press (1973), . [468]

[1983] Schwenk A.J., Problem 6434. *Amer. Math. Monthly* **6** (1983), . [470]

[1962] Scoins H.J., The number of trees with nodes of alternate parity. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **58** (1962), 12-16. [93]

[1997] Scott A.D., Induced trees in graphs of large chromatic number. *J. Graph Th.* **24** (1997), 297-311. [214]

[1974] Seinsche D., On a property of the class of n-colorable graphs. J. *Comb. Th. (B)* **16** (1974), 191-193. [52, 344]

[1986] Seress A., Quick gossiping without duplicate transmissions. *Graphs and Combin.* **2** (1986), 363-381 (also in *Combinatorial Mathematics,* Proc. 3rd Intl. Conf. Combin., New York 1985, New York Acad. Sci. 1989), 375-382). [423]

[1987] Seress A., Gossips by conference calls. *Stud. Sci. Math. Hungar.* **22** (1987), 229-238. [423]

[1976] Seymour P.D., A short proof of the matroid intersection theorem. unpubl. note (1976). [367]

[1979a] Seymour P.D., On multicolourings of cubic graphs, and conjectures of Fulkerson and Tutte. *Proc. Lond. Math. Soc.* **38** (1979), 423-460. [279]

[1979b] Seymour P.D., Sums of circuits. *In Graph theory and related topics (Proc. Waterloo, 1977).* Academic Press (1979), 341-355. [313, 318]

[1981] Seymour P.D., Nowhere-zero 6-flows. J. *Comb. Th. (B)* **30** (1981), 130-135. [312]

[1948] Shannon C.E, A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.* **27** (1948), 379-423,623-656. [103,106]

[1949] Shannon C.E., A theorem on coloring the lines of a network. J. *Math. Phys.* **28** (1949), 148-151. [275, 285]

[1994] Shende A.M. and B. Tesman, 3-Choosability of K5, . Computer Science Technical Report #94-9, Bucknell University (1994). [409]

[1988] Shibata T., On the tree representation of chordal graphs. J. *Graph Th.* **12** (1988), 421-428. [328]

[1981] Shmoys D.B., *Perfect graphs and the strong perfect graph conjecture.* B.S.E. Thesis, Princeton University (1981). [334]

[1959] Shrikhande S.S., The uniqueness of the L2 association scheme. *Ann. Math. Statist.* **30** (1959), 781-798. [285]

[1991] Sierksma G. and Hoogeveen H., Seven criteria for integer sequences being graphic. J. *Graph Th.* **15** (1991), 223-231. [44]

[1996] Slivnik T., A short proof of Galvin's theorem on the list-chromatic index of a bipartite mulitgraph. *Combin. Probab. Comput.* **5** (1996), 91-94. [410]

[1962] Smolenskii E.A., . *Zh. vychisl. mat. i matem fiziki* 3 (1962), 371-372. (also in A.A. Zykov, *Fundamentals of graph theory* (1987), 110 (Russian), (ed. and transl. L. Boron et al., BCS Associates (1990)). [79]

[2000] Soifer S.N., The Komlós-Sós conjecture for graphs of girth 7. *Discr. Math.* **214** (2000), 279-283. [70]

[1977] Spencer J.H., Asymptotic lower bounds for Ramsey functions. *Discr. Math.* **20** (1977), 69-76. [394, 450]

[1984] Spencer J.H, E. Szemerédi, and W.T. Trotter, Unit distances in the Euclidean plane. In *Graph theory and combinatorics (Cambridge, 1983).* (ed. B. Bollobás) Academic Press (1984), 293-303. [265]

[1928] Sperner E., Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl and des Gebietes. *Hamburger Abhand.* 6 (1928), 265-272. [388-391, 395]

[1973] Stanley R.P., Acyclic orientations of graphs. *Discr. Math.* 5 (1973), 171-178. [228, 232]

[1974] Stanley R.P., Combinatorial reciprocity theorems. *Advances in Math.* **14** (1974), 194-253. [229]

[1951] Stein S.K., Convex maps. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2 (1951), 464-466. [246]

[1976] Steinberg R., *Grötzsch's Theorem dualized.* Masters Thesis, Univ. Waterloo (1976). [311]

[1993] Steinberg R., The state of the three color problem. In *Quo Vadis, Graph Theory?* (ed. J. Gimbel, J.W. Kennedy, L.V. Quintas) *Ann. Discr. Math.* **55** (1993), 211248 [270]

[1989] Steinberg R. and D.H. Younger, Grötzsch's theorem for the projective plane. *Ars Combinatoria* **28** (1989), 15-31. [317]

[1985] Stiebitz M., *Beitrage zur Theorie der farbungskritischen Graphen.* Dissertation zu Erlangung des akademischen Grades Dr.sc.nat., Technische Hochschule Ilmenau (1985). [218]

[1973] Stockmeyer L., Planar 3-colorability is polynomial complete. *ACM SIGACT News* **5** (1973), 19-25. [500, 504]

[1994] Stoer M. and F. Wagner, A simple min cut algorithm. In *Algorithms, ESA '94.* (ed. J. van Leeuwen) Springer-Verlag, *Lect. Notes Comp. Sci.* (1994), 141-7. [182]

[1974a] Sumner D.P., Graphs with 1-factors. *Proc. Am. Mat. Sc.* 42 (1974), 8-12. [147]

[1974b] Sumner D.P., On Tutte's factorization theorem. In *Graphs and Combinatorics.* (ed. R. Bari and F. Harary), *Lecture Notes in Math.* 406 Springer-Verlag (1974), 350-355. [159]

[1981] Sumner D.P., Subtrees of a graph and the chromatic number. In *The Theory and Applic. of Graphs (Kalamazoo, 1980).* Wiley (1981), 557-576. [206,214,219]

[1991] Sun L., Two classes of perfect graphs. *J. Comb. Th. (B)* **53** (1991), 273-292 (also Tech. Report DCS-TR-228, Computer Science Dept., Rutgers Univ. 1988). [341]

[1982] Syslo M.M. and J. Zak, The bandwidth problem: critical subgraphs and the solution for caterpillars. In *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization.* (Bonn, 1980) North-Holland (1982), 281-286. [396]

[1997] Székely L.A., Crossing numbers and hard Erdös problems in discrete geometry. *Combin. Probab. Comput.* **6** (1997), 353-358. [265]

[1973] Szekeres G., Polyhedral decompositions of cubic graphs. *Bull. Austral. Math. Soc.* **8** (1973), 367-387. [305, 313]

[1968] Szekeres G. and H.S. Wilf, An inequality for the chromatic number of a graph. *J. Comb. Th.* **4** (1968), 1-3. [196, 201, 231]

[1943] Szele T., Combinatorial investigations concerning complete directed graphs (Hungarian). *Mat. es Fiz. Lapok* **50** (1943), 223-236. [428]

[1978] Szemerédi E., Regular partitions of graphs. In *Problémes combinatoires et théorie des graphes.* Orsay C.N.R.S. (1978), 399-401. [264]

[1878] Tait P.G., On the colouring of maps, *Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A* **10** (1878-1880), 501-503,729 [300-304]

[1984] Tanner R.M., Explicit construction of concentrators from generalized N-gons. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **5** (1984), 287-293. [463]

[1975] Tarjan R.E., A good algorithm for edge-disjoint branching. *Info. Proc. Letters* **3** (1974)1(1975), 51-53. [406]

[1976] Tarjan R.E., Maximum cardinality search and chordal graphs. Lecture Notes from CS 259 (1976). [325-326]

[1984] Tarjan R.E., A simple version of Karzanov's blocking flow algorithm. *Oper. Res. Letters* 2 (1984), 265-268. [97]

[1984] Tarjan R.E. and M. Yannakakis, Simple linear-time algorithms to test chordality of graphs, test acyclicity of hypergraphs, and selectively reduce acyclic hyper-graphs. *SIAM J Computing* **13** (1984), 566-579. [325, 344]

[1895] Tarry G., Le problème des labyrinthes. *Nouv. Ann. Math.* **14**(1895),187-190. [95]

[1980] Thomassen C., Planarity and duality of finite and infinite graphs. *J. Comb. Th. (B)* **29** (1980), 244-271. [249,250]

[1981] Thomassen C., Kuratowski's Theorem. *J. Graph Th.* **5** (1981), 225-241. [250]

[1983] Thomassen C., A theorem on paths in planar graphs. *J. Graph Th.* **7** (1983), 169-176. [304]

[1984] Thomassen C., A refinement of Kuratowski's theorem. *J. Comb. Th. (B)* **37** (1984), 245-253. [252, 256]

[1988] Thomassen C., Paths, circuits and subdivisions. In *Selected Topics in Graph Theory, 3.* (ed. L.W. Beineke & R.J. Wilson) Academic Press (1988), 97-132. [213-4]

[1994a] Thomassen C., Grötzsch's 3-Color Theorem. *J. Comb. Th. (B)* **62** (1994), 268-279. [270]

[1994b] Thomassen C., Every planar graph is 5-choosable. *J. Comb. Th. (B)* **62** (1994), 180-181. [412]

[1995] Thomassen C., 3-List-coloring planar graphs of girth 5. J *Comb. Th. (B)* **64** (1995), 101-107. [412]

[1974] Toft B., On critical subgraphs of colour-critical graphs. *Discr. Math.* **7** (1974), 377-392. [218]

[1973] Toida S., Properties of an Euler graph. *J. Franklin Inst.* **295** (1973), 343-5. [34]

[1971] Tomescu I., Le nombre maximal de colorations d'un graphe. *C. R. Acad. Sci. Paris* **A272** (1971), 1301-1303. [230]

[1993] Tovey C.A. and R. Steinberg, Planar Ramsey numbers. *J. Comb. Th. (B)* **59** (1993), 288-296. [270]

[1973] Tucker A.C., The strong perfect graph conjecture for planar graphs. *Canad. J Math.* **25** (1973), 103-114. [341]

[1975] Tucker A.C., Coloring a family of circular arcs. *SIAM J. Appl. Math.* **3** (1975), 493-502. [341]

[1976] Tucker A.C., A new applicable proof of the Euler circuit theorem. *Amer. Math. Monthly* **83** (1976), 638-640. [34]

[1977] Tucker A.C., Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic graphs. *J Comb. Th. (B)* **23** (1977), 143-149. [337, 339, 341]

[1976] Tucker A.C. and L. Bodin, A model for municipal street-sweeping operations. In *Case Studies in Applied Mathematics.* (CUPM) Math. Assn. Amer. (1976), . [130]

[1941] Turán P., Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Mat. Fiz Lapook* **48** (1941), 436-452. [207-210,216-217]

[1946] Tutte WT., On Hamiltonian circuits. *J. Lond. Mat. Sc.* **21** (1946), 98-101. [303]

[1947] Tutte W.T., The factorization of linear graphs. *J. Lond. Math. Soc.* **22** (1947), 107-111. [137]

[1948] Tutte WT., The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **44** (1948), 463-482. [89]

[1949] Tutte W.T., On the imbedding of linear graphs in surfaces. *Proc. Lond. Math. Soc.(2)* **51** (1949), 474-483. [308, 312, 318]

[1952] Tutte W.T., The factors of graphs. *Canad. J. Math.* **4** (1952), 314-328. [140, 148]

[1954a] Tutte W.T., A short proof of the factor theorem for finite graphs. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 347-352. [141, 148]

[1954b] Tutte W.T., A contribution to the theory of chromatic polynomials. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 80-91. [309, 311]

[1956] Tutte W.T., A theorem on planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.* **82** (1956), 99-116.[304]

[1958] Tutte W.T., A homotopy theorem for matroids, I, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* **88** (1958), 144-174. [252, 256, 375]

[1960] Tutte W.T., Convex representations of graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.* **10** (1960), 304-320. [248, 250]

[1961a] Tutte W.T., On the problem of decomposing a graph into *n* connected factors. *J. Lond. Math. Soc.* **36** (1961), 221-230. [73, 80]

[1961b]Tutte W.T., A theory of 3-connected graphs. *Indag. Math.* **23** (1961), 441-55. [174]

[1963] Tutte W.T., How to draw a graph. *Proc. Lond. Math. Soc.* **13** (1963), 743-767. [248, 250, 256]

[1966a] Tutte W.T., *Connectivity in Graphs.* Toronto Univ. Press (1966). [175, 311]

[1966b] Tutte W.T., On the algebraic theory of graph colourings. *J. Comb. Th.* **1** (1966), 15-50. [311]

[1967] Tutte W.T., A geometrical version of the four color problem. In *Combinatorial Math. and its Applications.* (eds. R.C. Bose and T.A. Dowling) Univ. N. Carolina Press (1967),. [304]

[1970] Tutte W.T., *Introduction to the Theory of Matroids.* Amer. Elsevier (1970). [355]
[1971] Tutte W.T., On the 2-factors of bicubicgraphs. *Discr. Math.* **1***(1971),* 203-8. [292]

[1980] Tverberg H., A proof of the Jordan Curve Theorem. *Bull. Lond. Math. Soc.* **12** (1980), 34-38. [235]

[1982] Tverberg H., On the decomposition of K_n into complete bipartite subraphs. *J. Graph Th.* **6** (1982), 493-494. [457, 459]

[1951] van Aardenne-Ehrenfest T. and N.G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs. *Simon Stevin* **28** (1951), 203-217. [91]

[1937] van der Waerden B.L., *Moderne Algebra Vol. 1* (2nd ed.). Spinger-Verlag (1937). [349, 355]

[1965] van Rooij A. and H.S. Wilf, The interchange graphs of a finite graph. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **16** (1965), 263-269. [281]

[1994] Vazirani V.V., A theory of alternating paths and blossoms for proving correctness of the $0(|V^{1/2}|1E|)$ general graph matching algorithm. *Combinatorica* **14** (1994), 71-91. [145]

[1989] Vince A., Problem 6617. *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 942. [470]

[1962] 'Vitaver L.M., Determination of minimal coloring of vertices of a graph by means of Boolean powers of the incidence matrix (Russian). *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **147** (1962), 758-759. [196]

[1963] Vizing V.G., The Cartesian product of graphs. *Vyč. Sis.* **9** (1963), 30-43. [194]

[1964] Vizing V.G., On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz.* **3** (1964), 25-30. [275, 277, 279, 285, 439]

[1965] Vizing V.G., Critical graphs with a given chromatic class (Russian). *Metody Diskret. Analiz.* **5** (1965), 9-17. [277, 279, 285]

[1976] Vizing V.G., Coloring the vertices of a graph in prescribed colors (Russian). *Diskret. Analiz.* **29** (1976), 3-10. [408,411]

[1993] Voigt M., List colourings of planar graphs. *Discr. Math.* **120**(1993), 215-9. [412]

[1997] Voigt M. and B. Wirth, On 3-colorable non-4-choosable planar graphs. *J. Graph Th.* **24** (1997), 233-235. [412]

[1982] Voloshin V.I., Properties of triangulated graphs (Russian). In *Operations research and programming.* (ed. B. A. Shcherbakov) Shtiintsa (1982), 24-32. [225, 231, 345]

[1982] Voloshin V.I. and I.M. Gorgos, Some properties of 1-simply connected hyper-graphs and their applications (Russian), in Graphs, hypergraphs and discrete optimization problems. *Mat. Issled.* **66** (1982), 30-33. [231]

[1936] Wagner K., Bemerkungen zum Vierfarbenproblem. *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **46** (1936), 21-22. [246]

[1937] Wagner K., fiber eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. *Math. Ann.* **114** (1937), 570-590. [251, 256]

[1980] Wagon S., A bound on the chromatic number of graphs without certain induced sub-graphs. *J. Comb. Th. (B)* **29** (1980), 245-246. [215]

[1972] Walter J.R., *Representations of rigid cycle graphs.* Ph.D. Thesis, Wayne State Univ. (1972). [324]

[1978] Walter J.R., Representations of chordal graphs as subtrees of a tree. *J. Graph Th.* **2** (1978), 265-267. [324]

[1996] Walters I.C.Jr., The ever expanding expander coefficients. *Bull. Inst. Combin. Appl.* (1996), 97.. [463]

[1973] Wang, D.L. and D.J. Kleitman, On the existence of n-connected graphs with prescribed degrees *(n* ≥ 2). *Networks* 3 (1973), 225-239. [52]

[1995] Wang J., D.B. West, and B. Yao, Maximum bandwidth under edge addition. *J. Comb. Th.* **20** (1995), 87-90. [396]

[1994] Weaver M.L. and D.B. West, Relaxed chromatic numbers of graphs. *Graphs and Combin.* **10** (1994), 75-93. [204]

[1981] Wei V.K., A Lower Bound on the Stability Number of a Simple Graph. Bell Laboratories TM 81-11217-9 (1981). [122, 428]

[1963] Weinstein J.M., On the number of disjoint edges in a graph. *Canad. J. Math.* **15** (1963), 106-111. [146]

[1976] Welsh D.J.A., *Matroid Theory.* Academic Press (1976). [355, 369, 374, 376]

[1967] Welsh D.J.A. and M.B. Powell, An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems. *Computer J.* **10** (1967), 85- 87. [195]

[1982a] West D.B., A class of solutions to the gossip problem, I. *Discr. Math.* **39** (1982), 307-326. [423]

[1982b] West D.B., Gossiping without duplicate transmissions. *SIAM J. Algeb. Disc. Meth.* **3** (1982), 418-419 [423]

[1996] West D.B., The superregular graphs. *J. Graph Th.* **23** (1996), 289-295. [470]

[1973] White A.T., *Graphs, Groups and Surfaces.* North-Holland (1973). [453]

[1960] Whiting P.D. and J.A. Hillier, A method for finding the shortest route through a road network. *Operations Research Quart.* **11** (1960), 37-40. [97]

[1931] Whitney H., A theorem on graphs. Ann. *of Math.* **32** (1931), 378-390. [315]

[1932a] Whitney H., Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.* **54** (1932), 150-168. [152, 161, 163, 169, 286]

[1932b] Whitney H., A logical expansion in Mathematics. *Bull. Amer. Math. Soc.* **38** (1932), 572-579. [222]

[1932c] Whitney H., The coloring of graphs. Ann. *Math. (2)* **33** (1932), 688-718. [222]

[1933a] Whitney H., Planar graphs. *Fund. Math.* **21** (1933), 73-84. [364]

[1933b] Whitney H., 2-isomorphic graphs. *Amer. J. Math.* **55** (1933), 245-254. [256, 365, 376]

[1935] Whitney H., On the abstract properties of linear dependence. *Amer. J. Math.* **57** (1935), 509-533. [349, 355, 361, 374]

[1967] Wilf H.S., The eigenvalues of a graph and its chromatic number. *J. Lond. Math. Soc.* **42** (1967), 330-332. [459]

[1971] Wilf H.S, The friendship theorem. In *Combinatorial Mathematics and Its Applications.* Proc. Conf. Oxford 1969 Academic Press (1971), 307-309. [467]

[1986] Wilson R.J., An Eulerian trail through Königsberg. *J. Graph Th.* **10** (1986), 265-275. [26]

[1990] Wilson R.J. and J.J. Watkins, *Graphs, an Introductory Approach.* Wiley (1990). [16]

[1983] Winkler P.M., Proof of the squashed cube conjecture. *Combinatorica* 3 (1983), 135-139. [402, 403]

[1965] Wolk E. S., A note on "The comparability graph of a tree". *Proc. Amer. Math. Soc.* **16** (1965), 17-20. [34]

[1972] Woodall D.R., Sufficient conditions for circuits in graphs. *Proc. Lond. Math. Soc.* **24** (1972), 739-755. [416, 420, 424]

[1993] Woodall D.R., Cyclic-order graphs and Zarankiewicz's crossing-number conjecture. *J. Graph Th.* **17** (1993), 657-671. [264]

[1982] Xia X.-G., Hamilton cycle in two sorts of Euler tour graph. *Acta Xin Xiang Normal Inst.* **2** (1982), 8-10. [299]

[1981] Yao A.C.C., Should tables be sorted?. *J. Assoc. Comp. Mach.* **28** (1981), 615-628. [383]

[1954] Zarankiewicz K., On a problem of P. Turán concerning graphs. *Fund. Math.* **41** (1954), 137-145. [264]

[1997] Zhang C.Q., *Integer flows and cycle covers of graphs. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics* 205 Marcel Dekker, Inc. (1997). [307, 312]

[1986] Zhang F.-J. and X.-F. Guo, Hamilton cycles in Euler tour graph. *J. Comb. Th. (B)* **40** (1986), 1-8. [299]

[1985] Zhu Y.J., Z.H. Liu, and Z.G. Yu, An improvement of Jackson's result on Hamilton cycles in 2-connected regular graphs. In *Cycles in Graphs.* Proc. Burnaby 1982 (ed. B. Alspach & C. Godsil) North-Holland (1985), 237-247. [292]

[1949] Zykov A.A., On some properties of linear complexes (Russian). *Mat. Sbornik* **24** (1949), 163-188. [215]

Subject Index فهرس المواضيع

يشير رقم الصفحة المكتوب بالخط المائل إلى أن التعريف موجود في هذه الصفحة (العديد من أرقام الصفحات الخاصة بالتعريفات يظهر في ملحق D). والكتابة مرة واحدة بالخط المائل ربما تشير إلى تعريف أو مفهوم واضح جدًّا (مثل البيان). حيث لا يكون من المناسب إعداد قائمة في الصفحات جميعها التي يظهر فيها مثل هذا التعريف أو المفهوم. بالمقابل. فإن المفردة التي تظهر في عدد قليل من الصفحات قد لا تكتب الصفحات الدالة على تعريفها بالخط المائل. عندما تظهر قائمة كبيرة من الصفحات. فإن أرقام الصفحات المكتوبة بالخط المائل الغامق تشير إلى مادة مثل برهان نتيجة رئيسة. أو إلى معالجة رئيسة للمفهوم. وربما يشتمل ذلك على تعريف. وفي بعض الأحيان نكتب مدى للصفحات من كذا إلى كذا. وقد يشمل هذا المدى بعض الصفحات المعزولة التي لا يظهر فيها ذكر للتعريف أو المفهوم.

Author Index   فهرس المؤلفين

continued from inside front cover

$l(D)$	maximum length of path
$l(F)$	length of a face
$\lg x$	logarithm base 2
$\ln x$	natural logarithm
M	matching
$M(G)$	incidence matrix
$M(G)$	cycle matroid of G
M^*	dual hereditary system
$M.F$	contraction of M to F
$M\|F$	restriction of M to F
$\mathbb{N}$	set of natural numbers
N	network
$N(v)N_G(v)$	(open) neighborhood
$N[v]$	closed neighborhood
$N^+(v), N^-(v)$	out-, in-neighborhood
$n(G)$	order (number of vertices)
$O(f), o(f)$	growth rate
$o(H)$	number of odd components
$P(A)$	probability of an event
P_n	path with n vertices
pdim G	product dimension
qdim G	squashed-cube dimension
Q_k	k-dimensional hypercube
rad G	radius
$R(k, l)$	Ramsey number
$R(G, H)$	graph Ramsey number
$\mathbb{R}$	set of real numbers
$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
r_M	rank function of matroid
S_γ	surface with γ handles
Spec(G)	spectrum (eigenvalues)
A^T	transpose of matrix
T	tree, tournament
$T_{n,r}$	Turán graph
$t_r(n)$	size of Turán graph
$U_{k,n}$	uniform matroid
$u(e)$	upper bound on flow
val(f)	value of a flow f
$V(G)$	vertex set
W_n	wheel with n vertices
$w(e)$	weight of edge
$\mathbb{Z}$	set of integers
$\mathbb{Z}_p$	integers modulo p

Greek alphabet

$\alpha(G)$	independence number
$\alpha'(G)$	maximum size of matching
$\beta(G)$	vertex cover number
$\beta'(G)$	edge cover number
$\gamma(G)$	genus, domination number
$\Delta(G)$	maximum degree
$\Delta^+(G), \Delta^-(G)$	maximum out-, in-degree
$\delta(G)$	minimum degree
$\delta^+(G), \delta^-(G)$	minimum out-, in-degree
$\partial(v)$	demand at a vertex
$\epsilon_G(u)$	eccentricity of u in G
$\Theta(f)$	growth rate
$\theta(G)$	clique cover number
$\theta'(G)$	intersection number
$\kappa(G)$	(vertex) connectivity
$\kappa'(G)$	edge-connectivity
$\kappa(x, y)$	local connectivity
$\kappa'(x, y)$	local edge-connectivity
$\kappa(r; G)$	local-global connectivity
$\lambda(x, y)$	max # disjoint paths
$\lambda'(x, y)$	max # edge-disjoint paths
$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$	eigenvalues
$\mu_1, \ldots, \mu_n$	eigenvalues
$\mu(e), \mu(G)$	edge multiplicity
$\nu(G)$	crossing number
$\prod$	product
$\rho(G)$	maximum density
$\sum$	summation
σ, π, τ	permutation
$\sigma(v)$	supply at a vertex
σ_M	span function
$\tau(G)$	number of spanning trees
$\Upsilon(G)$	arboricity
$\phi(G; \lambda)$	characteristic polynomial
$\chi(G)$	chromatic number
$\chi'(G)$	edge-chromatic number
$\chi(G; k)$	chromatic polynomial
$\chi_l(G)$	list chromatic number
$\psi(G; \lambda)$	minimum polynomial
$\Omega(f), \omega(f)$	growth rate
$\omega(G)$	clique number

Glossary of Notation

Non-alphabetic notation

$\leftrightarrow$	adjacency relation
$\to$	successor relation (digraph)
$\cong$	isomorphism relation
$a \equiv b \bmod n$	congruence relation
$\Rightarrow$	implication
$\lfloor x \rfloor$	floor of number
$\lceil x \rceil$	ceiling of number
$[n]$	$\{1, \ldots, n\}$
$\lvert x \rvert$	absolute value of number
$\lvert S \rvert$	size of set
$\{x\colon P(x)\}$	set description
∞	infinity
$\varnothing$	empty set
$\cup$	union
$\cap$	intersection
$A \subseteq B$	subset
$G \subseteq H$	subgraph
$G[S]$	subgraph of G induced by S
$\overline{G}, \overline{X}$	complement of graph or set
G^*	(planar) dual
G^k	kth power of graph
S^k	set of k-tuples from S
$[S, \overline{S}]$	edge cut
$[S, T]$	source-sink cut
$G - v$	deletion of vertex
$G - e$	deletion of edge
$G \cdot e$	contraction of edge
$G + H$	disjoint union of graphs
$G \vee H$	join of graphs
$G \,\square\, H$	cartesian product of graphs
$G \triangle H, A \triangle B$	symmetric difference
$G \circ x$	vertex duplication
$G \circ h$	vertex multiplication
$A \times B$	cartesian product of sets
$A - B$	difference of sets
$\binom{n}{k}$	binomial coefficient
$\binom{n}{n_1 \cdots n_k}$	multinomial coefficient
$\mathbf{1}_n$	n-vector with all entries 1
$Y \mid X$	conditional variable or event

Roman alphabet

$A(G)$	adjacency matrix
$\mathrm{Adj}\, A$	adjugate matrix
$B(G)$	bandwidth
$\mathbf{B}_M$	bases of matroid
$\mathbf{C}_M$	circuits of matroid
C_n	cycle with n vertices
C_n^d	power of a cycle
$c(G)$	number of components
$c(G)$	circumference
$C(G)$	(Hamiltonian) closure
$c(e)$	cost or capacity
$\mathrm{cap}(S, T)$	capacity of a cut
$d_1, \ldots, d_n$	degree sequence
$d(v), d_G(v)$	degree of vertex
$d^+(v), d^-(v)$	out-degree, in-degree
D	digraph
$D(G)$	distance sum
$d(u, v)$	distance from u to v
$\mathrm{diam}\, G$	diameter
$\det A$	determinant
$E(G)$	edge set
$E(X)$	expected value
$e(G)$	size (number of edges)
$f^+(v), f^+(S)$	total exiting flow
$f^-(v), f^-(S)$	total entering flow
f	function, flow
f	number of faces
G	graph (or digraph)
G^p	random graph in Model A
$H_{k,n}$	Harary graph
$\mathbf{I}_M$	independent sets of matroid
I	identity matrix
J	matrix of all 1's
K_n	complete graph
$K_{r,s}$	complete bipartite graph
$L(G)$	line graph
$l(e)$	lower bound on flow

continued on inside back cover