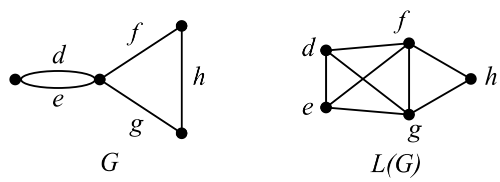
الفصل السابع

الأضلاع والحلقات (Edges and Cycle)

1.7. البيانات الخطية (Line Graphs and Edge Coloring)

يوجد للكثير من المسائل المتعلقة بالرؤوس مشابه طبيعي متعلق بالأضلاع. فمثلاً، المجموعات المستقلة ليس لها رؤوس متجاورة؛ والمواءمات ليس لها أضلاع "متجاورة"، بالإضافة إلى أن تلوين الرأس يجزئ الرؤوس إلى مجموعات مستقلة. وبدلاً من ذلك، نستطيع تجزئة الأضلاع إلى مواءمات. إنَّ هذه الأزواج من المسائل مرتبطة من خلال البيانات الخطية (التعريف 18.2.4). وهنا نعيد التعريف، لنؤكد عودتنا إلى السياق بأن البيان ربما يملك أضلاعًا متكررة. نستعمل "بيانًا خطيًّا أو خطانيًّا" و $L(G)$ بدلاً من " بيان ضلعي"؛ لأن $E(G)$ ترمز أصلاً إلى مجموعة الأضلاع.

1.1.7. تعريف: البيان الخطاني (line graph) للبيان G، يكتب $L(G)$. هو البيان البسيط الذي تكون رؤوسه هي الأضلاع في G، حيث $ef \in E(LG)$ عندما يكون e و f لهما نهاية طرفية مشتركة في G.



لاحظ أن بعض المسائل حول الأضلاع في البيان G يمكن التعبير عنها بوصفها مسائل حول الرؤوس في $L(G)$. وعندما توسع إلى البيانات البسيطة جميعها، فربما تكون مسألة الرأس أكثر صعوبة. أما إذا استطعنا حلها، فنكون قد أجبنا عن السؤال الأصلي حول الأضلاع في G بتطبيق نتيجة الرأس على $L(G)$.

درسنا في الفصل الأول الدارات الأويلرية. إنَّ دارة أويلرية في G تعطي حلقة مولدة في البيان الخطي $L(G)$. (يبين التمرين 10.2.7. أن العكس ربما لا يتحقق!) في الجزء 2.7، سوف ندرس الحلقات المولدة للبيانات عمومًا. وكما نوقش في الملحق B، فإن هذه المسألة صعبة حسابيًّا.

أما في الفصل الثالث، فقد درسنا المواءمات. إن مواءمة في G تصبح مجموعة مستقلة في $L(G)$. لذلك، فإن $\alpha'(G) = \alpha(L(G))$، وأن دراسة α' للبيانات هي نفسها دراسة α للبيانات الخطية. وأن حساب α للبيانات العامة هو أكثر صعوبة من حسابها للبيانات الخطية. يأخذ الجزء 1.3 هذا في الحسبان للبيانات الثنائية الفرع، ونصف الحالة العامة باختصار في الملحق B.

وفي الفصل الرابع درسنا الترابط. لقد أعطت نظرية منجر علاقة أصغر أعظم للترابط وللمسارات المنفصلة داخليًّا في البيانات جميعها. وبتطبيق هذه النظرية على بيان خطي مناسب، نكون قد أثبتنا علاقة أصغر أعظم مشابهة للترابط الضلعي وللمسارات المنفصلة ضلعيًّا في البيانات جميعها.

و درسنا في الفصل الخامس تلوين الرأس. أما تلوين الأضلاع، فإنه يجعل كل صف لوني مواءمةً تصل فعليًّا إلى تلوين رأسي للبيان الخطي. لذلك، فإن التلوين الضلعي هو حالة خاصة من التلوين الرأسي؛ وعليه فهو أسهل. سوف نناقش التلوين الضلعي في هذا الجزء. عندما تُصاغ نتيجتنا الرئيسة بلغة التلوين الرأسي للبيانات الخطية، فإنها خوارزمية لحساب $\chi(H)$ ضمن مدى لا يتعدى 1 عندما يكون H هو البيان الخطي لبيان بسيط. لذلك، تقترح البيانات الخطية المسائل للتلوين الضلعي والحلقات المولدة التي سوف تناقش في هذا الفصل. أولاً، سوف ندرس هذه البنود بصورة منفصلة. وأما في الجزء 3.7، فسوف ندرس صلات بعضها ببعض، وصلاتها بالبيانات المستوية أيضًا.

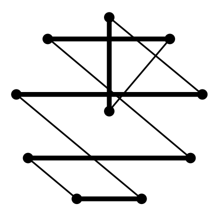
عند تطبيق الخوارزميات للبيانات الخطية، قد نحتاج إلى معرفة ما إذا كان G بيانًا خطيًّا. هناك خوارزميات جيدة تستخدم تمييزات البيانات الخطية لفحص ذلك.ولكن سوف نناقشها في نهاية هذا الجزء.

التلوينات الضلعية (Edge-Colorings)

احتجنا في المثال 11.1.1 الذي قدم التلوين الرأسي إلى جدولة لجان مجلس الشيوخ. أما مسائل التلوين الضلعي فتظهر عندما تكون الأشياء التي تُجدول أزواجًا من العناصر الموجودة فعليًّا.

2.1.7. مثال: التلوين الضلعي لـ K_{2n}. نريد جدولة مباريات في بطولة تتكون من $2n$ فريقًا، بحيث يلعب كل زوج من الفرق لعبة واحدة، على أن يلعب كل فريق مرة واحدة في الأسبوع على الأكثر. بما أن كل فريق يجب أنْ يلعب $(2n -1)$ مباراة مع الفرق الأخرى، فإن الموسم يستمر $(2n -1)$ أسبوعًا على الأقل. ويجب أن تشكل مباريات كل أسبوع مواءمة. لاحظ أننا نستطيع جدولة الموسم في $(2n -1)$ أسبوعًا إذا وفقط إذا استطعنا تجزئة $E(K_{2n})$ إلى $(2n -1)$ مواءمة. وبما أن K_{2n} بيان منتظم من الدرجة $(2n - 1)$، فإن هذه المواءمات يجب أن تكون مواءمات تامة.

والشكل أدناه يصف الحل. ضع رأسًا واحدًا في المركز. رتب الـ $(2n - 1)$ رأسًا المتبقية حلقيًّا، بحيث تُعرض كصفوف متطابقة للأساس $(2n - 1)$. كما في النظرية 16.2.2، فإن الفرق بين صفين متطابقين هو 1 إذا كانا متتاليين، و 2 إذا وُجد صفٌّ بينهما، وهكذا حتى تصل إلى الفرق $n - 1$. لاحظ أنه يوجد $(2n - 1)$ ضلعًا مع كل فرق i لكل $1 \le i \le n -1$.



تتكون كل مواءمة من ضلع واحد من كل صفٍّ مختلف، بالإضافة إلى ضلع واحد يصل إلى الرأس المركزي. ونعرض واحدة من المواءمات بالخط السميك. إنَّ تدوير الصورة (لنحصل على مواءمة رفيعة) يعطي n ضلعًا

جديدًا. مرة أخرى، هؤلاء هم واحد لكل طول زائد واحد للمركز. إن الـ $(2n - 1)$ دورانًا للشكل يعطي المواءمات المطلوبة؛ لأن هذه المواءمات تأخذ أضلاعًا منفصلة من كل صف اختلاف، وأضلاعًا منفصلة أخرى تتضمن الرأس المركزي. ■

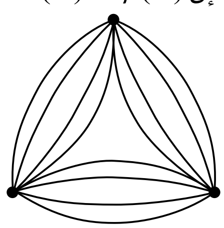
3.1.7. تعريف: التلوين الضلعي من الدرجة k (k- edge - coloring) للبيان G هو دالة أوسمة $f: E(G)\to S$، حيث $|S| = k$ (نستخدم عادة $S = [k]$). الأوسمة هي الألوان (colors)؛ والأضلاع التي من لون واحد وتشكل **صفًا لونيًا** (color class). يسمى التلوين الضلعي من الدرجة k **تلوينًا فعليًا** (proper) إذا كان للأضلاع الواقعة على الرأس نفسه أوسمة مختلفة؛ أي أن كل صفّ لوني هو مواءمة. **ويكون البيان قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة k** (k- edge colorable) إذا كان يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة k. **والعدد اللوني الضلعي** $\chi'(G)$ (edge - chromatic number) للبيان العديم العرى G هو أصغر k بحيث يكون G قابلًا للتلوين الضلعي من الدرجة k.

الدليل اللوني (Chromatic index) هو اسم آخر لـ $\chi'(G)$. بما أن الأضلاع التي تتشارك برأس تحتاج إلى ألوان مختلفة، لذلك $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. لقد أثبت كل من Vizing [1964] و Gupta [1966] على حدى أن $\Delta(G) + 1$ من الألوان تكون كافية عندما يكون البيان G بسيطًا؛ وهذا هو هدفنا الرئيس. لاحظ أن العصبة في $L(G)$ هي مجموعة أضلاع لـ G متقاطعة زوجًا زوجًا. وعندما يكون G بسيطًا، فإن مثل هذه الأضلاع تشكل نجمة أو مثلثًا في G (التمرين 9). لاحظ أن نظرية فايزنج للصفّ الوراثي في البيانات الخطية للبيانات البسيطة تنص على أن $\chi(H) \leq \omega(H) + 1$؛ وعليه، فإن البيانات الخطية بياناتٌ تامةٌ تقريبًا.

وعلى النقيض لـ $\chi(G)$ في الفصل الخامس، فإن تأثير الأضلاع المتكررة يكون كبيرًا على $\chi'(G)$. لاحظ أن البيان الذي يحتوي على عروة لا يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا. والصفة "عديم العرى" تستثني العرى، ولكنها تسمح بالأضلاع المتكررة.

4.1.7. تعريف: في بيان G مع أضلاع متكررة، نقول إن زوج الرؤوس x,y هو ضلع مضاعفته m (multiplicity) إذا وجد m من الأضلاع التي نقاطها الطرفية y,x. ونكتب $\mu\,(xy)$ للتعبير عن تضاعف الزوج، في حين نكتب $\mu(G)$ للتعبير عن المضاعفة الكبرى للأضلاع في G.

5.1.7. مثال: "المثلث السمين" (Fat Triangle). في البيانات العديمة العرى التي تحوي أضلاعًا متكررة، نجد أن $\chi'(G)$ ربما تتعدى $\Delta(G) + 1$. لقد أثبت شانون [1949] أن الحد الأعلى لـ $\chi'(G)$ بدلالة $\Delta(G)$ وحدها هو $3\,\Delta\,(G)/2$ (انظر النظرية 13.1.7). ثم أثبت فايزنج وجيتا أن $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$، حيث إن $\mu(G)$ هي مضاعفة الضلع الكبرى. إن البيان أدناه يحقق كلا الحدين. حيث تتقاطع الأضلاع زوجًا زوجًا، وعليه فإنها تحتاج إلى ألوان مختلفة. لذلك فإن $\chi'(G)=3\,\Delta(G)/2 = \Delta(G) + \mu(G)$. ■



6.1.7. ملاحظة: لاحظنا دائمًا أن $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. إضافة إلى أن الحد العلوي $\chi'(G) \leq 2\,\Delta(G) - 1$ يتبع أيضًا بسهولة. إن تلوين الأضلاع بترتيب ما، يعطي الدليل اللوني الأقل للضلع الحالي دائمًا، وهو يختلف عن

الألوان التي ظهرت سابقًا على الأضلاع التي تشترك بالرأس نفسه مع الضلع الحالي. وبما أنه لا يوجد ضلع يقع على أكثر من $2(\Delta(G) - 1)$ ضلعًا أخرى، فإنه لا يستعمل أكثر من $2(\Delta(G) - 1)$ لونًا. لذلك، فإن الإجراء هو التلوين الشره لرؤوس $L(G)$ تمامًا.

$$\chi'(G) = \chi(L(G)) \leq \Delta\ (L(G)) + 1 \leq 2\Delta(G) - 1. \qquad ■$$

لاحظ أنه إذا اشترك ضلعان بالرأس نفسه، فإننا نقول إنهما واقعان على بعض الرأس أو على الرأس نفسه.

للبيانات الثنائية الفرع في الفصل الثالث، نجد أنَّ النتائج تحسن الحد العلوي للملاحظة 6.1.7، وتحقق الحد الأدنى الواضح حتى عند السماح بوجود الأضلاع المتكررة. فضلًا عن ذلك، توجد خوارزمية مناسبة لإعطاء تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $\Delta(G)$ في البيان الثنائي الفرع G.

7.1.7. نظرية: (Konig [1916]). إذا كان G بيانًا ثنائي الفرع، فإن $\chi'(G) = \Delta(G)$.

الإثبات. تنص النتيجة 13.1.3 على أن كل بيان ثنائي الفرع منتظم H له معامل من الدرجة 1. وبالاستقراء على $\Delta(H)$، فإن هذا يؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $\Delta(H)$. لذا، يكفي إثبات أنه لكل بيان ثنائي الفرع G مع درجة كبرى k، يوجد بيان ثنائي الفرع H منتظم من الدرجة k يحتوي على G.

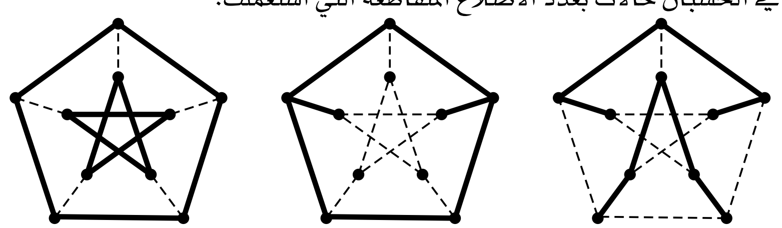
ولإنشاء مثل هذا البيان، نضيف أولاً رؤوسًا إلى المجموعة المجزأة الأصغر لـ G إذا كان ضروريًّا؛ حتى نعادل الحجمين. إذا كان الناتج G' ليس منتظمًا، فإن كل مجموعة مجزأة تملك رأسًا درجته أقل من k. لذا، أضف ضلعًا مع هذين الرأسين بوصفه نقاطًا طرفية. استمر في إضافة مثل هذه الأضلاع حتى يصبح البيان منتظمًا من الدرجة k؛ إن البيان الناتج سوف يكون H. ■

للبيان المنتظم G، لاحظ أن التلوين الضلعي الفعلي بـ $\Delta(G)$ من الألوان يكافئ التفكيك إلى معاملات من الدرجة 1.

8.1.7. تعريف: إن التفكيك للبيان المنتظم G إلى معاملات من الدرجة 1 هو تحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (1-factorization) لـ G. يسمى البيان الذي له تحليل من الدرجة 1 بيانًا **قابلًا للتحليل إلى عوامل من الدرجة 1** (1 - factorable).

لاحظ أن الحلقة الفردية غير قابلة للتحليل إلى العوامل من الدرجة 1، وأن $\chi'(C_{2m} + 1) = 3 > \Delta(C_{2m} + 1)$. كما أن بيان بيترسون يتطلب لونًا إضافيًّا واحدًا فقط.

9.1.7. مثال: إن العدد اللوني الضلعي لبيان بيترسون يساوي 4 (Peterson [1898]). نعلم أن بيان بيترسون منتظم من الدرجة 3. وقابلية التلوين الضلعي من الدرجة 3 تتطلب تحليلاً من الدرجة 1. إن حذف مواءمة تامة يخلِّف معاملاً من الدرجة 2. و المركبات جميعها حلقات. وأن التحليل من الدرجة 1 يمكن أن يتم فقط إذا كانت هذه الحلقات جميعها زوجية. لذلك، فإنه يكفي تبيان أن كل معامل من الدرجة 2 يشاكل $2C_5$. الآن، خذ في الحسبان الرسم الذي يحتوي على حلقتين من الدرجة 5 ومواءمة (**الأضلاع المتقاطعة** cross edges) بينهما. ونأخذ في الحسبان حالات بعدد الأضلاع المتقاطعة التي استعملت.



تستخدم كل حلقة عددًا زوجيًّا من الأضلاع المتقاطعة؛ لهذا فإن معاملاً H من الدرجة 2 يمتلك عددًا زوجيًا m من الأضلاع المتقاطعة. إذا كان $m = 0$ (الشكل عن اليسار)، فإن $H = 2C_5$.

إذا كان $m = 2$ (الشكل بالوسط)، فإن للضلعين المتقاطعين نقاطًا طرفية غير متجاورة على الحلقة الداخلية أو على الحلقة الخارجية. فعلى الحلقة التي عليها أضلاع متقاطعة والتي نقاطها الطرفية غير متجاورة، فإن الرؤوس الثلاثة المتبقية تجبر الأضلاع الخمسة جميعها لهذه الحلقة لتكون في H، وهذا يخالف متطلب المعامل من الدرجة 2.

إذا كان $m = 4$ (الشكل عن اليمين)، فإن أضلاع الحلقة تجبر على الدخول إلى H من خلال الأضلاع المتقاطعة غير المستخدمة لتشكل $2P_5$ والتي تكملتها الوحيدة هي لمعامل من الدرجة 2 في H هو $2C_5$. لاحظ أنه بما أن C_5 قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3، فإن البيان قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 4. الآن، سوف نأخذ البيانات البسيطة جميعها في الحسبان. نجعل $\Delta(G) + 1$ لونًا في المتناول، ونبني تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من خلال دمج الأضلاع واحدًا بعد الآخر حتى يصبح لدينا تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $(\Delta(G) + 1)$ للبيان G. وتسير هذه الخوارزمية بسرعة مذهلة.

10.1.7. نظرية: ([Gupta [1966], Vizing [1964, 1965]) إذا كان G بيانًا بسيطًا، فإن $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

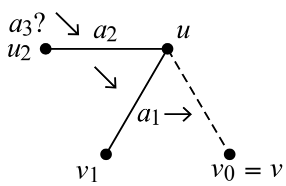
الإثبات: ليكن f تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة $(\Delta(G) + 1)$ للبيان الجزئي G' من البيان G. إذا كان $G' \neq G$، فإنه يوجد ضلع uv لم يلون من قبل f. ومن الممكن بعد إعادة تلوين بعض الأضلاع توسيع التلوين ليشمل uv؛ أن ندعو هذه موسعة أو توسعة (augmentation). وبعد $e(G)$ من الموسعات، نحصل على تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $(\Delta(G) + 1)$ للبيان G.

بما أن عدد الألوان تجاوز $\Delta(G)$، فيوجد لكل رأس لون لم يظهر على الأضلاع الواقعة على مثل هذا الرأس. ليكن a_0 لونًا لم يظهر عند u. نولد قائمة من الجيران لـ u وقائمة متشابهة من الألوان. ابدأ مع $v_0 = v$.

ليكن a_1 لونًا مفقودًا عند v_0. نستطيع افتراض أن a_1 يظهر عند u على ضلع ما مثل uv_1. وبخلاف ذلك، نستطيع استعمال a_1 على uv_0.

ليكن a_2 لونًا مفقودًا عند v_1. نستطيع افتراض أنَّ a_2 يظهر عند u على ضلع ما مثل uv_2. وبخلاف ذلك، نستطيع استبدال اللون a_1 مع a_2 على uv_1، ثمّ نستعمل a_1 على uv_0 لنوسع التلوين.

افترض أنه تم اختيار الضلع uv_{i-1} مع اللون a_{i-1}، وليكن a_i لونًا مفقودًا عند v_{i-1}. إذا كان a_i مفقودًا عند u، فإننا نستعمل a_i على uv_{i-1}، وننقل اللون a_j من uv_j إلى uv_{j-1} لكل $1 \leq j \leq i - 1$ لنكمل الموسعة. وهذا ما يدعى الإزاحة السفلية من (i)downshifting from i. إذا ظهر a_i عند u (على ضلع ما مثل uv_i)، فإن العملية تستمر.



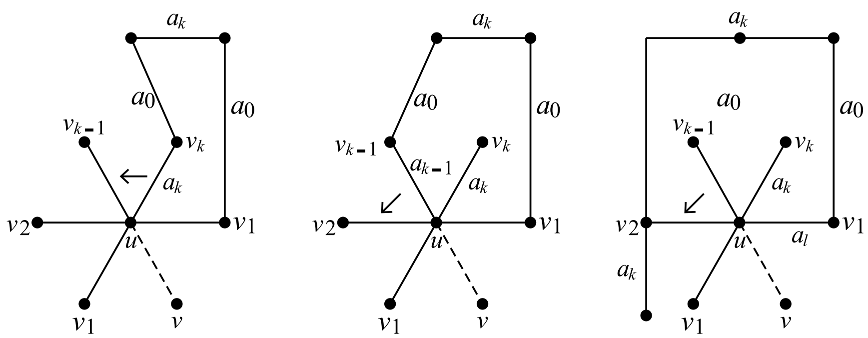
بما أنه يوجد فقط $(\Delta(G) + 1)$ لونًا لنختار منها، فإن قائمة الألوان المختارة سوف تتكرر أخيرًا (أو نكمل الموسعة بالإزاحة السفلية). ليكن l هو الدليل الأصغر بحيث يكون اللون المفقود عند v_l هو في القائمة $a_1, \ldots, a_l$، وليكن هذا اللون هو a_k. بدلاً من توسيع القائمة، نستخدم هذا التكرار لعمل الموسعة بإحدى الطرائق المتعددة.

اللون المفقود a_k عند v_l يكون مفقودًا أيضًا عند v_{k-1}، ويظهر على uv_k. إذا لم يظهر a_0 عند v_l ، فإننا نقوم بالإزاحة السفلية من v_l، ونستعمل اللون a_0 على uv_l لإكمال الموسعة. لذلك نستطيع افتراض أن a_0 يظهر عند v_l.

ليكن P هو المسار المتناوب الأعظم بأضلاع ألوانها a_0 و a_k تبدأ عند v_l على طول اللون a_0. يوجد فقط مسار واحد مثل هذا؛ لأن كل رأس يقع على الأكثر على ضلع واحد في كل لون (نهمل الأضلاع التي لم تلوَّن بعد). لإكمال الموسعة، سوف نبدل اللونين a_0 و a_k على P، ونقوم بالإزاحة السفلية من الجار المناسب لـ u، بالاعتماد على مكان ذهاب P. إذا امتد P إلى v_k، فإنه يصل إلى v_k على طول ضلع ما مع لون a_0، ويتبع v_ku في لون a_k، ويتوقف عند u الذي ينقصه اللون a_0. في هذه الحالة، نقوم بالإزاحة السفلية من v_k ونحوِّل الألوان على P (الصورة أسفل اليسار). ولكن، إذا امتد P إلى v_{k-1}، فإنه يصل إلى v_{k-1} على اللون a_0 ويتوقف هناك؛ لأن a_k لا يظهر عند v_{k-1}. في هذه الحالة، نقوم بالإزاحة السفلية من v_{k-1}، ونعطي اللون a_0 إلى uv_{k-1}، ونبدِّل الألوان على P (الصورة الوسطى).

أما إذا لم يمتد P إلى v_k أو v_{k-1}، فسوف ينتهي عند رأس خارج المجموعة $\{u, v_l, v_k, v_{k-1}\}$ في هذه الحالة، نقوم بالإزاحة السفلية من v_l، ثم نعطي اللون a_0 إلى uv_l، ونبدّل الألوان على P (الصورة أقصى اليمين)

وفي كل حالة، فإنّ التغيرات الموصوفة تؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $\Delta(G) + 1$ لـ $G' + uv$، وهكذا نكون قد أكملنا الموسعة المطلوبة. ■



غير ذلك — P تصل v_{k-1} — P تصل v_k

وأما فيما يتعلق بالبيانات البسيطة، فإنه يوجد لدينا الآن احتمالان فقط لـ χ'.

11.1.7. تعريف: البيان البسيط G هو صنف من النوع 1 (أو صنف 1 Class 1) (1) إذا كان $\chi'(G) = \Delta(G)$. وهو صنف من النوع 2 أو صنف 2 (Class 2) إذا كان $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

يعدُّ تحديد ما إذا كان البيان هو صنف 1 أو صنف 2 عمومًا صعبًا (Holyer [1981] انظر الملحق B)؛ لذلك نبحث عن شروط تمنع أو تضمن التلوين الضلعي من الدرجة $\Delta(G)$. وهناك أمثلة على مثل هذه الشروط متضمنة في التمارين 24 - 27.

12.1.7. ملاحظة: يوجد شرط ضروري واضح لبيانٍ ما ليكون صنف 1، والذي خُمِّن ليكون شرطًا كافيًا عندما $\Delta(G) > \frac{3}{10}n(G)$. يلاحظ من التمرين 27 فرع (a) أن بيانًا جزئيًّا من G مع درجة فردية هو عائق لقابلية التلوين الضلعي من الدرجة $\Delta(G)$ إذا كان يحوي أضلاعًا كثيرة جدًّا. وأنَّ بيانًا جزئيًّا H من بيان بسيط G هو **بيان جزئي فوق الممتلئ** (overfull subgraph) إذا كان $n(H)$ فرديًّا وكان $2e(H) / (n(H) - 1) > \Delta(G)$.

تنص **مخمنة فوق الممتلئ** (Overfull Conjecture) – Chetwynd- Hilton [1986] انظر أيضًا Hilton [1989]) على أنه إذا كان $\Delta(G) > n(G)/3$، فإن البيان البسيط G هو صنف 1 إذا وفقط إذا كان G

لا يملك بيانًا جزئيًّا فوق الممتلئ. لاحظ أن بيان بيترسون مع رأس محذوف يبين أن الشرط غير كافٍ عندما يكون $\Delta(G) = n(G)/3$ (تمرين 28).

لاحظ أن مخمنة فوق الممتلئ تؤدي إلى مخمنة التحليل إلى عوامل من الدرجة 1 (1- factorization Conjecture): إذا كان $r \geq m$ (أو $r \geq m - 1$ إذا كان m زوجيًّا)، فإن كل بيان بسيط منتظم من الدرجة r ورتبته $2m$ هو صنف 1. وهذا أيضًا حاد (التمرين 29).

تتحقق الاستنتاجات لهاتين المخمنتين عندما يكون $\Delta(G)$ كبيرًا بما فيه الكفاية.

Chetwynd- Hilton [1989], Niessen- Volkmann [1990], Perkovic – Reed [1997], Plantholt [2001].

عندما يملك G أضلاعًا متكررة، فإن لـ $\chi'(G) \leq \lfloor 3\Delta(G)/2 \rfloor$ (Shannon [1949])

و $\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$ (Gupta [1966], Vizing [1964, 1965]). تتبع هذه الحدود (التمرين 35) حدود أندرسين (Andersen) [1977] وجولدبيرج (Goldberg) [1977, 1984].

$$\chi'(G) \leq \max\{\Delta(G), \max_P \lfloor 1/2(d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z)) \rfloor\}$$

حيث $\mathbf{P} = \{x,y,z \in V(G): y \in N(x)) \cap N(z)\}$. إن إثبات هذا الحد يستخدم الطرق في النظرية 10.1.7. إضافة إلى حجج العد. لتوضيح استخدام حجج العد؛ نثبت نظرية شانون من تلك التي في Vizing و Gupata.

13.1.7.* نظرية: (Shannon [1949]) إذا كان G بيانًا، فإن $\chi'(G) \leq \frac{3}{2}\Delta(G)$.

الإثبات: ليكن $k = \chi'(G)$، وافترض أن $k \geq (3/2)\Delta(G)$. وليكن G' بيانًا جزئيًّا أصغريًّا لـ G مع $\chi'(G') = k$. بما أن $k \leq \Delta(G') + \mu(G')$ (Vizing–Gupta)، فسنحصل على أن $\mu(G') \geq \Delta(G)/2$.

ليكن e ضلعًا نقاطه الطرفية x, y مع مضاعفة (عدة مرات تكرار) $\mu(G')$.

ليكن f هو تلوين ضلعي فعلي من الدرجة $(k - 1)$ لـ $G' - e$. في $G' - e$ كل من x و y له درجة على الأكثر $\Delta(G) - 1$؛ لذلك تحت f يكون على الأقل $(k\text{-}1) - (\Delta(G) - 1)$ لونًا مفقودًا عند x، و الشيء نفسه عند y. ولا يوجد أي لون مفقود عند كليهما؛ لأن G' غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة $k - 1$. وبحساب الـ $\mu(G') - 1$ لونًا المستخدمة على أضلاع نقاطها الطرفية x,y نجد أن:

$$2(k - \Delta(G) + (\Delta(G)/2) - 1 \leq 2(k - \Delta(G)) + \mu(G) - 1 \leq - 1)$$

وعليه فإن $k \leq (3/2)\Delta(G)$. ■

أخيرًا، توجد مخمنة عامة تماثل مخمنة فوق الممتلئ.

14.1.7.* مخمنة: (Seymour [1979a], Goldberg [1973, 1984]) إذا كان $\chi'(G) \geq \Delta(G) + 2$، فإن $\chi(G) = \max_{H \subseteq G} \left\lceil \frac{e(H)}{n(H)/2} \right\rceil$. ■

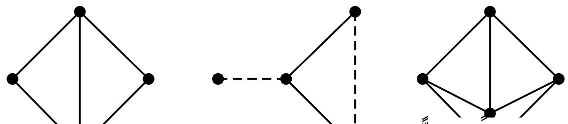
تمييز البيانات الخطية (الخطانية) (اختياري)
(Characterization of Line Graphs (Optional))

إن تمييزات البيانات الخطية يمكن أن تقود إلى خوارزميات ملائمة لفحص فيما إذا كان بيان ما مثل G بيانًا خطيًّا، وإذا كان كذلك، فللحصول على H بحيث يكون $L(H) = G$.

15.1.7. مثال: لتوضيح هذه الأفكار، نثبت أن البيان الموجود على أقصى اليمين أدناه ليس بيانًا خطيًّا لبيان بسيط. إن بيان الطائرة الورقية G (مثلثان مع ضلع مشترك) هو البيان الخطي للكف H (مخلب زائد ضلع).

وبتحليل الوضع، نجد أن H هو البيان البسيط الوحيد الذي بيانه الخطي هو G، والأضلاع التي أصبحت رؤوسًا في G درجتها 2 ، يجب أن تكون الأضلاع المنقطة.

إن البيان الموجود أقصى اليمين يضيف رأسًا إلى G جيرانه فقط الرؤوس التي درجتها 2. والنتيجة أن هذا ليس بيانًا خطيًّا للبيان G؛ بسبب عدم وجود طريقة لإضافة ضلع إلى H بحيث يتشارك بنقطة طرفية مع كل ضلع متقطع دون أن يتشارك بنقطة طرفية مع ضلع متصل. ■



ليس بيانًا خطيًّا

$G = L(H)$ H not a line graph

يوضح تمييزنا الأول عملية أخذ البيان الخطي من بيان ما. إذا كان $G = L(H)$ و H بيانًا بسيطًا، فإن كل $v \in V(H)$ بحيث $d(v) \geq 2$، يولد عصبة $Q(v)$ في G تقابل أضلاعًا واقعة على v. إن هذه العصب تجزئ $E(G)$. وفضلًا عن ذلك، فإن كل رأس $e \in V(G)$ ينتمي فقط إلى العصب المولدة من خلال النقاط الطرفية لـ $e \in V(H)$.

على سبيل المثال، عندما يكون G طائرة ورقية، فإننا نستطيع تجزئة $E(G)$ إلى ثلاث عصب (مثلث زائد ضلعين)، ويكون كل رأس مغطى على الأكثر مرتين. وهذه العصب الثلاث تقابل الرؤوس التي درجتها 2 على الأقل في الكف.لاحظ أن البيان الموجود أقصى اليمين في الأعلى ليس له مثل هذه التجزئة.

16.1.7. نظرية: ([1943] Krausz) للبيان البسيط G، يوجد حل للمعادلة $L(H) = G$ إذا وفقط إذا كان G يتفكك إلى بيانات جزئية تامة، بحيث يظهر كل رأس في G على الأكثر في اثنين من هذه البيانات الجزئية التامة.

الإثبات: أثبتنا أعلاه أن الشرط ضروري. لاحظ أنه عندما $G = L(H)$، فإن الرؤوس في G التي تنتمي فقط إلى واحدة من هذه العصب التي عرفناها سابقًا هي تلك التي تقابل أضلاعًا في H والتي تقع على الأوراق.

للكفاية، لتكن $S_1, \ldots, S_k$ هي مجموعات الرؤوس للبيانات الجزئية التامة المعينة. نكون H بحيث يكون $G = L(H)$. إن الرؤوس المعزولة في G تصبح أضلاعًا معزولة في H؛ لذلك يمكن أن نفترض أن $\delta\ (G) \geq 1$. لتكن $v_1, \ldots, v_l$ هي الرؤوس في G (إذا وجدت) التي تظهر بالضبط في واحدة من المجموعات $S_1, \ldots, S_k$. أعطِ H رأسًا واحدًا لكل مجموعة في القائمة $\mathbf{A} = S_1, \ldots, S_k, \{v_1\}, \ldots, \{v_l\}$، ولتكن الرؤوس في H متجاورة فقط إذا كانت المجموعات المقابلة تتقاطع.

يظهر كل رأس في G في مجموعتين تمامًا في A، فضلًا عن أنه لا يوجد رأسان يظهران في هاتين المجموعتين نفسيهما. لذا، فإن H بيان بسيط مع ضلع واحد لكل رأس في G. إذا كانت الرؤوس متجاورة في G، فإنها تظهر معًا في واحدة من المجموعات S_i، والأضلاع التي تقابلها في H تتشارك الرأس لـ S_i. لذا، فإن $G = L(H)$. ■

إن تمييز كروسز (Krausz) لا يعطي مباشرة اختبارًا فاعلًا للبيانات الخطية؛ لأنه يوجد الكثير من التفككات المحتملة للاختبار. والتمييز الآتي يختبر التراكيب الجزئية ذوات الحجم الثابت، وعليه، فإنه يعطي خوارزمية حسنة. ونقول إن كل مثلث T في G يكون فرديًّا أو زوجيًّا كما هو معرَّف أدناه.

a) يكون T **فرديًّا** (odd) إذا كان $|N(v) \cap V(T)|$ فرديًّا لبعض $v \in V(G)$.

(b في حين يكون T **زوجيًا** (even) إذا كان $|N(v) \cap V(T)|$ زوجيًا لكل $v \in V(G)$.

لاحظ أن الطائرة الورقية المُحدثة هي **مثلث ثنائي** (**مزدوج**) (double triangle)، حيث تتكون من مثلثين يشتركان بضلع، والرأسان اللذان ليسا على الضلع المشترك غير متجاورين.

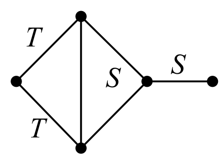
17.1.7. نظرية : (van Rooij and Wilf [1965]) للبيان البسيط G، يوجد حل لـ $L(H) = G$ إذا وفقط إذا كان G يخلو من المخالب، ولا يوجد فيه مثلث ثنائي له مثلثان فرديان.

الإثبات: الضرورة. افترض أن $G = L(H)$. إنَّ الرأس e في G الذي جيرانه x,y,z يقابل ضلع e في H يقع على الأضلاع x,y,z. بما أنه توجد لـ e نقطتان طرفيتان فقط في H، فإن اثنتين من x,y,z تقعان على إحدى هذه النقاط الطرفية؛ لذا تكون هذه الأضلاع متجاورة في G. وهذا يمنع أن يكون المخلب بيانًا جزئيًا محدثًا لـ G.

الشرط الآخر، شاهدنا في المثال 15.1.7 أن رؤوس المثلث الثنائي في G يجب أن تقابل الأضلاع لكف في H. وخصوصًا أن رؤوس أحد هذه المثلثات في G تقابل أضلاع مثلث في H. وهذا المثلث يجب أن يكون زوجيًا؛ لأن كل ضلع في H يقع بالضبط على أحد رؤوس مثلث يتشارك بنقطة طرفية واحدة بالضبط مع ضلعين من أضلاع المثلث. لذا، فإنه لكل مثلث ثنائي في G، يجب أن يكون أحد مثلثاته على الأقل زوجيًا.

الكفاية: افترض أن G يحقق الشروط المعينة. نستطيع افتراض أن G مترابط؛ وبخلاف ذلك، نطبق البناء لكل مركبة. لاحظ أن الحالة التي يخلو فيها G من المخالب، ويمتلك مثلثًا ثنائيًا حيث كل من المثلثين زوجي هو حالة خاصة جدًّا؛ وهناك ثلاثة فقط من مثل هذه البيانات (التمرين 38). وهنا سنأخذ في الحسبان الحالة العامة فقط، والتي يكون فيها لكل مثلث ثنائي في G مثلث فردي واحد بالضبط.

من النظرية 16.1.7، يكفي أن نفكك G إلى بيانات جزئية تامة باستخدام كل رأس في اثنين منهما على الأكثر. لتكن $S_1,\dots,S_k$ بيانات جزئية تامة عظمى في G والتي لا تكون مثلثات زوجية، ولتكن $T_1,\dots,T_l$ هي الأضلاع التي تنتمي إلى مثلث زوجي واحد ولا تنتمي إلى مثلث فردي؛ حيث تشكل معًا التفكيك المطلوب $\mathbf{B}$.



يظهر كل ضلع في بيان جزئي تام أعظم، ولكن كل مثلث في بيان جزئي تام على أكثر من ثلاثة رؤوس يكون فرديًا. لذا، فإن كل ضلع T_j في القائمة غير موجود في أي S_i. وأيضًا لا يتشارك كل من S_i و S_i' بأي ضلع؛ لأن G لا يملك مثلثات ثنائية بحيث يكون المثلثان فيها فرديين. لذلك، فإن البيانات الجزئية في $\mathbf{B}$ منفصلة ضلعيًا زوجًا زوجًا.

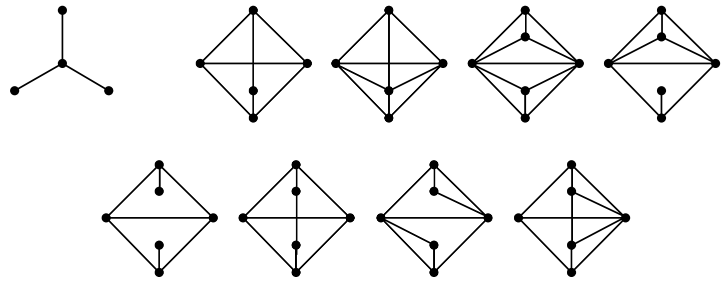
إذا كان $e \in E(G)$، فإن e ينتمي إلى بعض S_i ما لم تكن العصبة العظمى الوحيدة التي تحتوي e مثلثًا زوجيًا. ويكون e في هذه الحالة T_j؛ لأننا منعنا وجود المثلثات الثنائية التي يكون مثلثًا كل منها زوجيين. لذلك يكون B تفكيكًا.

بقي إثبات أن $v \in G$ كله يظهر في بيانين من هذه البيانات الجزئية على الأكثر. افترض أن v تنتمي إلى $A,B,C \in \mathbf{B}$. إن خاصية الانفصال الضلعي تعطي أن لـ v جيرانًا x,y,z حيث ينتمي كل منهم إلى واحد فقط من $\{A,B,C\}$. وبما أن G لا يملك مخلبًا محدثًا، فيمكن افتراض أن $x \leftrightarrow y$. وباستخدام خاصية الانفصال الضلعي، فإن المثلث vxy لا يمكن أن ينتمي إلى عضو في $\mathbf{B}$. لذلك، يجب أن يكون مثلثًا زوجيًا. وعليه، فإن z يجب أن يمتلك بالضبط ضلعًا آخر للمثلث vxy، فلنقل $x \leftrightarrow z$ و $y \not\leftrightarrow z$. ولكن الحجة نفسها تبين أن zvx هو مثلث

زوجي، وعليه أصبح لدينا مثلث ثنائي بحيث يكون مثلثاه زوجيين. ■

إن النظرية 17.1.7 قريبة من خاصية تمييز البيانات الجزئية المحظورة.

18.1.7. نظرية: ([Beineke [1968) يكون البيان البسيط G بيانًا خطانيًّا لبيان بسيط ما إذا وفقط إذا كان G لا يملك أيًّا من البيانات التسعة المبينة في الأسفل بوصفها بيانًا جزئيًّا محدثًا.

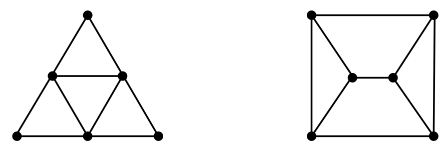


الإثبات: باستخدام النظرية 17.1.7، يكفي أن نبين أن قائمة البيانات الثمانية التي تختلف عن $K_{1,3}$ هي البيانات التي تخلو من المخالب الأصغرية الرأس، وتحتوي على مثلث ثنائي يكون مثلثاه فرديين. يملك كل بيان مثل هذا مثلثًا ثنائيًّا ورأسًا أو رأسين إضافيين بحيث تجعل هذه الرؤوس المثلثات فرديةً بسبب امتلاك جار أو ثلاثة جيران في المثلثات. التفاصيل التي تبين أن هذه هي القائمة التامة مطلوبة موجودة في التمرين40. ■

إن التمييزات في المثبتات 17.1.7 − 18.1.7 تعطي خوارزميات لفحص ما إذا كان G بيانًا خطيًّا، والتي تنفذ في زمن في صورة كثير حدود في $n(G)$. في الحقيقة، يوجد مثل هذه الخوارزمية التي تنفذ في زمن خطي ([Lehot [1974) وتنتج بيان H حيث $G = L(H)$ عندما يكون G بيانًا خطيًّا. ويكون هذا البيان H وحيدًا إذا كان G لا يملك مركبة في صورة مثلث (التمرين 39).

تمارين (Exercises)

.1.1.7 (−) لكل بيان G من البيانات أدناه، احسب $\chi'(G)$ وارسم $L(G)$.



.2.1.7 (−) أعطِ تلوينًا ضلعيًّا صريحًا لإثبات أن $\chi'(Q_k) = \Delta(Q_k)$.

.3.1.7 (−) حدد العدد اللوني الضلعي للبيان $C_n \square K_2$.

.4.1.7 (−) احصل على متباينة لـ $\chi'(G)$ بدلالة $e(G)$ و $\alpha'(G)$.

.5.1.7 (−) أثبت أن بيان بيترسون هو المتممة لـ $L(K_5)$.

.6.1.7 (−) حدد عدد المثلثات في البيان الخطي لبيان بيترسون.

.7.1.7 (−) حدد ما إذا كان $\overline{P_5}$ بيانًا خطيًّا. وإذا كان كذلك، فجد H بحيث $L(H) = \overline{P_5}$.

.8.1.7 (−) أثبت أن $L(K_{m,n}) \cong K_m \square K_n$.

• • • • •

9.1.7. ليكن G بيانًا بسيطًا. أثبت أن رؤوسًا تشكل عصبة في $L(G)$ إذا وفقط إذا كانت الأضلاع المقابلة لها في G تملك نقطة طرفية واحدة مشتركة، أو أنها تشكل مثلثًا. (تعليق: وعليه $\omega(L(G)) = \Delta(G)$ إلا إذا كان $\Delta(G) = 2$ وبعض المركبات لـ G هي مثلث).

10.1.7. ليكن G بيانًا بسيطًا يخلو من الرؤوس المعزولة. أثبت أنه إذا كان $L(G)$ مترابطًا ومنتظمًا، فإما أن يكون G منتظمًا، أو أن يكون بيانًا ثنائي الفرع بحيث تكون درجات الرؤوس في كل مجموعة مجزأة متساوية. (Ray – Chaudhuri [1967])

11.1.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا:

a) أثبت أن عدد الأضلاع في $L(G)$ هو $\sum_{v\in V(G)} \binom{d(v)}{2}$.

b) أثبت أن G يتشاكل مع $L(G)$ إذا وفقط إذا كان G منتظم من الدرجة 2.

12.1.7. ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا. استخدم فرع (a) في التمرين 11.1.7 لتحدد متى يكون $e(L(G)) < e(G)$.

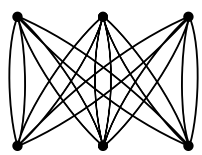
13.1.7. (+) أثبت أن المتممة للبيان عن اليسار في التمرين 1.1.7 هو البيان البسيط الوحيد G بحيث $L(G) \cong \overline{G}$.(Albertson)

14.1.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة k. أثبت أن $L(G)$ مترابط من الدرجة k، ومترابط ضلعيًّا من الدرجة $2k - 2$. (مساعدة: للقطع الضلعي الأصغر $[S,\overline{S}]$ في $L(G)$، صِفْ ماذا يقابل القطع في G، واحسب عدد أضلاعه بدلالة الرؤوس في G).

15.1.7. (!) استخدم نظرية توت للمعاملات من الدرجة 1؛ لتثبت أن لكل بيان خطي مترابط زوجي الدرجة مواءمةً تامةً. استنتج من هذا أن الأضلاع للبيان البسيط المترابط التي حجمها زوجي يمكن تجزئتها إلى مسارات طولها 2. (تعليق: يبين التمرين 22.3.3 أن كل بيان مترابط يخلو من المخالب يملك مواءمة تامة، إلا أن النتيجة الأقوى أكثر صعوبة من هذه) (Chartrand – Polimei – Stewart [1973]) .

16.1.7. (*) ليكن G بيانًا بسيطًا. أثبت أن $\gamma(L(G)) \ge \gamma(G)$، حيث $\gamma(G)$ يرمز إلى جنس G (تعريف 20.3.6). (D. Greenwell)

17.1.7. احسب عدد التلوينات الضلعية الفعلية التي درجتها 6 للبيان أدناه.



18.1.7. (!) أعطِ تلوينًا ضلعيًّا صريحًا لتثبت أن $\chi'(K_{r,s}) = \Delta(K_{r,s})$.

19.1.7. (!) أثبِت أنه يوجد لكل بيان ثنائي الفرع بسيط G بيان H ثنائي الفرع بسيط منتظم من الدرجة $\Delta(G)$ يحوي G.

20.1.7. (!) ليكن D بيانًا موجهًا (العرى مسموح بها) بحيث $d^+(v) \le d$ و $d^-(v) \le d$ لكل $v \in V(D)$. أثبت أنه يمكن تلوين $E(D)$ باستخدام d لونًا على الأكثر، بحيث يكون للأضلاع الداخلة على كل رأس ألوان

مختلفة، وكذلك تكون ألوان الأضلاع الخارجة من كل رأس مختلفة. (مساعدة: حول البيان الموجه إلى شيء آخر مدرك بالحواس حيث يمكن تطبيق نتيجة معروفة).

7.1.21. إثبات خوارزمي للنظرية 7.1.7. ليكن G بيانًا ثنائي الفرع مع درجة كبرى تساوي k. وليكن f تلوينًا ضلعيًا فعليًّا من الدرجة k لبيان جزئي H من G. وليكن uv ضلعًا ليس في H. باستخدام مسار يتناوب في لونين، أثبت أن f يمكن أنْ يبدَّل، ثمَّ يوسَّع إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة k لـ $H + uv$. استنتج أن $\chi'(G) = \Delta(G)$.

7.1.22. استخدم نظرية بروكس في بيان ملائم لتثبت أنهَ إذا كان G بيانًا بسيطًا له $\Delta(G) = 3$، فإنه قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 4. (تعليق: النتيجة هي حالة خاصة من نظرية فايزنج؛ لا تستخدم نظرية فايزنج لإثبات هذا).

7.1.23. (+) ليكن $K(p,q)$ بيانًا ثنائي الفرع تامًّا من الدرجة p، له q رأسًا في كل مجموعة مجزأة. ولترمز $G[H]$ إلى عملية التركيب، بحيث يوسع كل رأس في G إلى نسخة من H. لاحظ أن $K(p,q) = K(p,d)[\overline{K}_{q/d}]$ عندما d يقسم q:

a) أثبت أنه إذا كان لـ G تفكيك إلى نسخ من F، فإن لـ $G[\overline{K}_m]$ تفكيكًا إلى نسخ من $F[\overline{K}_m]$. أثبت أيضًا أن العلاقة "G يتفكك إلى نسخ مولدة من F" هي متعدية.

b) تتفكك العصب التي درجتها زوجية إلى معاملات من الدرجة 1. أما العصب التي درجتها فردية فتتفكك إلى حلقات مولدة. استخدم هاتين العبارتين وفرع (a) لتثبت أن $K(p,q)$ يتفكك إلى معاملات من الدرجة 1 عندما يكون pq زوجيًّا. (Hartman [1997])

7.1.24. (!) ليكن G و H بيانين بسيطين غير تافهين. استخدم نظرية فايزنج لتثبت أن $\chi'(H) = \Delta(H)$ يؤدي إلى أن $\chi'(G \square H) = \Delta(G \square H)$.

7.1.25. نظرية كوتزج للضرب الديكارتي للبيانات البسيطة:

a) استخدم نظرية فايزنج لتثبت أن $\chi'(G \square K_2) = \Delta(G \square K_2)$.

b) ليكن G_1، G_2 بيانين منفصلين ضلعيًّا مع مجموعة رؤوس V، وليكن H_1، H_2 بيانين منفصلين ضلعيًّا مع مجموعة رؤوس W. أثبت أن $(G_1 \cup G_2) \square (H_1 \cup H_2) = (G_1 \square H_2) \cup (G_2 \square H_1)$.

c) استخدم كلًّا من فرع (a) و (b) لتثبت أن $\chi'(G \square H)=\Delta(G \square H)$ إذا كان كل من G و H يملك معاملات من الدرجة 1. (تعليق: بوصفها نتيجة، ضرب بيان بيترسون في نفسه هو من الصنف الأول الذي لا يتبع من التمرين 7.1.24. وهنا، ليس بالضرورة أن يكون أي معامل من الصنف الأول يوجد بيان G لا يملك معاملاً من الدرجة 1). (Kotzig [1979]، J. George [1991])

7.1.26. (!) ليكن G بيانًا منتظمًا له رأس قطع. أثبت أن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

7.1.27. شروط الكثافة لـ $\chi'(G) > \Delta(G)$:

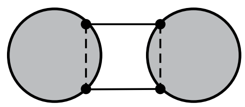
a) أثبت أنه إذا كانَ $n(G) = 2m + 1$ و $\Delta(G)$.$e(G) > m$، فإن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

b) أثبت أنه إذا حصلنا على G من بيان منتظم من الدرجة k على $2m + 1$ من الرؤوس بحذف أقل من $k/2$ من الأضلاع، فإن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

c) أثبت أنه إذا حصلنا على G بتقسيم جزئي لضلع بيان منتظم على $2m$ من الرؤوس درجة كل رأس منها على الأقل 2، فإن $\chi'(G) > \Delta(G)$.

7.1.28. (-*) أثبت أن بيان بيترسون لا يملك بيانًا جزئيًّا فوق الممتلئ.

7.1.29. ليكن G البيان المترابط المنتظم من الدرجة $m - 1$ المتشكل من $2K_m$ بحذف ضلع من كل مركبة، وإضافة ضلعين بين المركبات ليعيد الانتظام. أثبت أن G غير قابل للتحليل إلى العوامل من الدرجة 1 إذا كان m فرديًّا وأكبر من 3. (تعليق: يبين هذا أن مخمنة التحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (الملاحظة 7.1.12) هي مخمنة حادة.



$K_m - e$ $K_m - e$

30.1.7. (*!) مخمنة فوق الممتلئ ⇐ مخمنة التحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (الملاحظة 12.1.7):
a) أثبت أنه في البيان المنتظم الذي درجته زوجية، يكون البيان الجزئي المُحدث فوق ممتلئ إذا وفقط إذا كان البيان الجزئي المُحدث من بقية الرؤوس فوق ممتلئ.
b) ليكن G بيانًا بسيطًا منتظمًا من الدرجة k درجته $2m$، ويملك بيانًا جزئيًّا فوق ممتلئ. أثبت أن $k < m$ إذا كان m فرديًّا، و $k < m - 1$ إذا كان m زوجيًّا.

31.1.7. إذا أعطيت تلوينًا ضلعيًّا للبيان G، إجعل $c(v)$ يرمز إلى عدد الألوان المختلفة التي تظهر على الأضلاع الواقعة على v. من بين التلوينات الضلعية جميعها التي درجتها k للبيان G، يكون تلوينٌ ما هو **الأمثل** (optimal) إذا كان يعظّم $\sum_{v\in V(G)} c(v)$:
a) أثبت أنه إذا لم تكن أي مركبة لـ G حلقة فردية، فإن G يملك تلوينًا ضلعيًّا من الدرجة 2 حيث يظهر كلا اللونين عند كل رأس درجته 2على الأقل. (مساعدة: استخدم الحلقات الأويلرية).
b) ليكن f تلوينًا ضلعيًّا أمثل من الدرجة k، بحيث يظهر اللون a على الأقل مرتين عند الرأس $u \in V(G)$، أما اللون b فلا يظهر عند u. وليكن H هو البيان الجزئي من G الذي يتكون من الأضلاع الملونة باللون a أو اللون b. أثبت أن المركبة لـ H التي تحوي u هي حلقة فردية.
c) ليكن G بيانًا ثنائي الفرع. استنتج من فرع (b) أن G قابل للتلوين الضلعي من الدرجة $\Delta(G)$. (تعليق: تقود هذه الأفكار لإثبات نظرية فايزنج.) (Fournier [1973])

32.1.7. ليكن G بيانًا ثنائي الفرع له درجة صغرى k. أثبت أن G يملك تلوينًا ضلعيًّا من الدرجة k بحيث يتحقق عند كل رأس أن كل لون يظهر $\lceil d(v)/k \rceil$ أو $\lfloor d(v)/k \rfloor$ مرة. (مساعدة: استخدم تحويلًا للبيان) (Gupta [1966]).

33.1.7. استخدم نظرية فايزنج لتثبت أن كل بيان بسيط ذي درجة كبرى Δ يملك تلوينًا ضلعيًّا "عادلًا" (equitable) من الدرجة $\Delta + 1$: أي أنه يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا بحيث يكون كل لون مستخدمًا $\lceil e(G) / (\Delta + 1) \rceil$ أو $\lfloor e(G) / (\Delta + 1) \rfloor$ مرة De Werra [1971]، McDiarmid [1972].

34.1.7. استخدم نظرية بيترسون (كل بيان منتظم من الدرجة $2k$ يملك معامل من الدرجة 2- النظرية 9.3.3) لتثبت أن $\chi'(G) \leq 3 \lceil \Delta(G) / 2 \rceil$ عندما يكون G بيانًا خاليًا من العرى.

35.1.7. (-) الحدود على $\chi'(G)$. ضع $\mathbf{P} = \{x,y,z \in V(G): y \in N(x) \cap N(z)\}$. أثبت أن الحد الأخير أدناه (Andersen [1977]، Goldberg [1977, 1984]) يعطي الحدود السابقة.

$\chi'(G) \leq \lfloor 3\,\Delta(G)/2 \rfloor$. (Shannon [1949])

$\chi'(G) \leq \Delta(G) + \mu(G)$. (Vizing [1964, 1965], Gupta [1966])

$\chi'(G) \leq \max\,\{\Delta(G), \max_{\mathbf{P}} \lfloor \frac{1}{2}(d(x) + d(y) + d(z)) \rfloor\}$. (Ore [1967a])

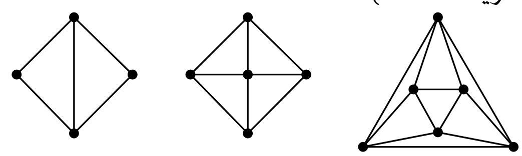
$\chi'(G) \leq \max\,\{\Delta(G), \max_{\mathbf{P}} \lfloor \frac{1}{2}(d(x) + \mu(xy) + \mu(yz) + d(z))\}$.

36.1.7. (+) لـ $n \neq 8$، أثبت أن $L(K_n)$ هو البيان البسيط المنتظم من الدرجة $(2n - 4)$ الوحيد الذي رتبته $\binom{n}{2}$ بحيث تملك الرؤوس غير المتجاورة أربعة جيران مشتركة، في حين تمتلك الرؤوس المتجاورة $n - 2$ جارًا مشتركًا. (تعليق: عندما $n = 8$، فإن ثلاثة بيانات استثنائية تحقق الشروط).
(Chang [1959]، Hoffman [1960]).

37.1.7. (+) لـ n,m بحيث لا يكون كلاهما يساوي 4، أثبت أن $L(K_{m,n})$ هو البيان البسيط المنتظم من الدرجة $(n + m - 2)$ الوحيد الذي رتبته mn بحيث تملك الرؤوس غير المتجاورة فيه جارين مشتركين، و $n\binom{m}{2}$ زوجًا من الرؤوس المتجاورة تملك $(m - 2)$ جارًا مشتركًا، و $m\binom{n}{2}$ زوجًا من الرؤوس المتجاورة تملك $(n - 2)$ جارًا مشتركًا.

(تعليق: عندما $n = m = 4$، يوجد بيان استثنائي واحد.
(Shrikande [1959]، Moon [1963]، Hoffman [1964])

38.1.7. (*) ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا خاليًا من المخالب، ويملك مثلثًا ثنائيًّا H بحيث يكون كل مثلث من مثلثيه زوجيًّا. أثبت أن G هو أحد البيانات الثلاثة المرسومة أدناه، واستنتج أن G بيان خطي.
(تعليق: يكمل هذا الإثبات لنظرية 17.1.7)



39.1.7. (*) **تفكيك كروسز** (Krausz decomposition) للبيان البسيط H هو تجزئة $E(H)$ إلى عصب ، بحيث يظهر كل رأس لـ H على الأكثر في عصبتين من هذه العصب:

(a) أثبت أن للبيان البسيط المترابط H تفكيكين من تفكيك كراسوز لـ H بحيث تكون بينهما عصبة مشتركة يكونان متطابقين:

(b) جد تفكيكات كروسز مختلفة للبيانات الموجودة في التمرين 38.1.7.

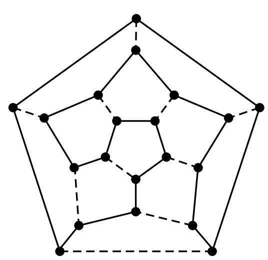
(c) أثبت أنه لا يوجد بيان بسيط مترابط غير K_3 بحيث يملك تفكيكين مختلفين من تفكيكات كروسز (استخدم التمرين 38.1.7 والإثبات في النظرية 17.1.7).

(d) استنتج أن $K_{1,3}$ و K_3 هو الزوج الوحيد من البيانات البسيطة المترابطة غير المتشاكلة التي تكون بياناتهما الخطية متشاكلة. (Whitney [1932a])

40.1.7. (*) أكمل الإثبات للنظرية 18.1.7 بإثبات أن البيان البسيط الذي ليس فيه مخالب يملك مثلثًا ثنائيًّا، بحيث يكون كل من مثلثيه فرديًّا إذا وفقط إذا كان يحوي بيانًا جزئيًّا مُحدثًا من بين البيانات الثمانية الأخرى التي تضمنها نصُّ النظرية.

2.7. الحلقات الهاملتونية (Hamitonian Cycles)

دُرِسَت الحلقات الهاملتونية أولاً من قبَل كيركمان [1856] (Kirkman) والتي سمّيت باسم السيد وليام هاملتونَ (Sir William Hamilton) الذي وصف لعبة على البيان ذي الاثني عشر وجهًا، حيث يعين فيها أحد اللاعبين مسارًا على 5 رؤوس، أما اللاعب الآخر، فيجب أن يوسعه إلى حلقة مولدة. سُوِّقَت اللعبة باسم "المسافر ذي الاثني عشر وجهًا" (Traveller's Dodecahedron)، حيث وُضعت نسخة خشبية، وسمّيت فيها الرؤوس بأسماء 20 مدينة مهمة.



1.2.7. تعريف: البيان الهاملتوني (Hamilton graph) بيان له حلقة مولدة تسمّى حلقة هاملتونية (Hamiltonian Cycles).

حتى سبعينيات القرن العشرين، كان الاهتمام بالحلقات الهاملتونية مركزًا حول علاقتها بمسألة الألوان الأربعة (الجزء 3.7). أما الدراسة اللاحقة، فقد حُفِّزت بالتطبيقات العملية ومسألة التعقيد (الملحق B).

لا يُعرف تمييز سهل قابل للاختبار للبيانات الهاملتونية، وسوف ندرس الشروط الضرورية والشروط الكافية، لاحظ أنّ العرى والأضلاع المتكررة لا علاقة لها بالموضوع. إذ إنَّ البيان يكون هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان البيان البسيط الذي نحصل عليه بالاحتفاظ بنسخة واحدة لكل ضلع ليس عروة يكون هاملتونيًّا. وعليه، **ففي هذا الجزء، حصرنا اهتمامنا بالبيانات البسيطة**؛ وهذا مناسب عند مناقشة شروط تتضمن درجات الرؤوس.

لمزيد من المعلومات حول الحلقات الهاملتونية؛ انظر [1985a] (Chv'atal).

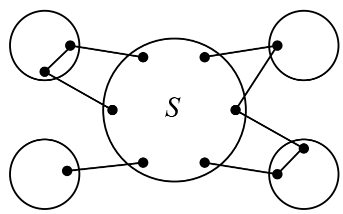
الشروط الضرورية (Necessary Conditions)

كل بيان هاملتوني يكون مترابطًا من الدرجة 2؛ لأن حذف رأس يخلف بيانًا جزئيًّا يمتلك مسارًا مولدًا. والبيانات الثنائية الفرع تقترح طريقة لتقوية هذا الشرط الضروري.

2.2.7. مثال: البيانات الثنائية الفرع. تمرُّ الحلقة المولدة في بيان ثنائي الفرع على المجموعتين المجزأتين تبادليًّا، لذا، لا توجد مثل هذه الحلقة إلا إذا كانت المجموعات المجزأة لها الحجم نفسه. ولهذا السبب؛ فإن $K_{m,n}$ يكون هاملتونيًّا فقط إذا كان $m = n$. تبادليًّا، نستطيع مناقشة أن الحلقة ترجع إلى رؤوس مختلفة في مجموعة مجزأة ما بعد كل مرور بالمجموعة المجزأة الأخرى. ■

3.2.7. قضية: إذا امتلك G حلقة هاملتونية، فإن لكل مجموعة غير خالية $S \subseteq V$، فإن البيان $G - S$ يملك $|S|$ مركبة على الأكثر.

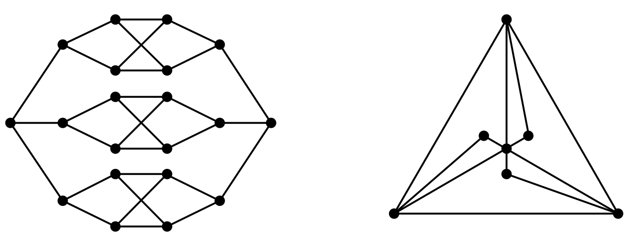
الإثبات: عندما نترك مركبة لـ $G - S$، فإن الحلقة الهاملتونية يجب أن تذهب إلى S، والحلقات التي تصل إلى S يجب أن تستخدم رؤوسًا مختلفة في S. لذا، يجب أن تملك S من الرؤوس مثلما تملك $G - S$ من المركبات على الأقل. ■



4.2.7. تعريف: ليكن $c(H)$ يرمز إلى عدد المركبات في البيان H.

وهكذا، فإن الشرط الضروري هو $c(G-S) \leq |S|$ لكل $\emptyset \neq S \subseteq V$. هذا الشرط يضمن أن G مترابط من الدرجة 2 (إنَّ حذف رأس واحد يترك مركبة واحدة على الأكثر)، ولكنه لا يضمن حلقة هاملتونية.

5.2.7. مثال: البيان عن اليسار أدناه هو ثنائي الفرع مع مجموعات مجزأة لها أحجام متساوية. على أي حال، هذا لا يحقق الشرط الضروري في القضية 3.2.7. لذلك، فهو ليس بيانًا هاملتونيًّا.



إن البيان الموجود عن اليمين يبين أن الشرط الضروري غير كاف، حيث إن هذا البيان يحقق الشرط ولكنه لا يملك حلقة مولدة. الأضلاع التي تقع على رؤوس درجتها 2 جميعها يجب أن تستخدم. ولكن يتطلب هذا البيان ثلاثة أضلاع تقع على الرأس المركزي.

بيان بيترسون هو بيان غير هاملتوني آخر يحقق الشرط. وقد أثبتنا في المثال 9.1.7 أن $2C_5$ هو المعامل الوحيد من الدرجة 2 لبيان بيترسون. لذا، فإنه لا يملك حلقة مولدة.

6.2.7.* ملاحظة: إن تقوية شرط ضروري يمكن أن يعطي شرطًا كافيًا. وربما إذا اشترطنا أن $|S| \geq 2c(G\text{-}S)$ لكل مجموعة قطع S، فإننا نضمن وجود حلقة مولدة. يعدُّ البيان G بيانا **متينًا** من الدرجة t (t-Tough) إذا كان $|S| \geq tc(G - S)$ لكل مجموعة قطع $S \subset V$. و**المتانة** (toughness) لـ G هي t الكبرى بحيث يكون G متينًا من الدرجة t. فعلى سبيل المثال، تساوي المتانة في بيان بيترسون $4/3$ (التمرين 23).

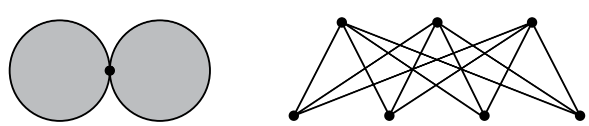
من القضية 3.2.7، نجد أن الحلقات المولدة تتطلب متانة مقدارها 1 على الأقل. لقد ضمن كفتال (Chvátal) في العام [1973م] أنّ المتانة التي تكون كبيرة بما فيه الكفاية تكون شرطًا كافيًا. لا توجد قيمة للمتانة أكبر من 1 ضرورية؛ بسبب أن C_n نفسها فقط متينة من الدرجة 1. ولبضع سنوات، كان يعتقد أن المتانة من الدرجة 2 يمكن أن تكون كافية. لاحظ أن إنوموتو – جاكسون – كاترينز – سايتو [1985] (Enomoto – Jachson – Katerinis – Saito) ركبوا بيانات غير هاملتونية متانتها من الدرجة $2 - \epsilon$ لكل $\epsilon > 0$. وأخيرًا، لاحظ أن باور وبرورسما وفيلدمان [2000] (Bauer –Broersma – Veldman) ركبوا بيانات غير هاملتونية درجة متانتها تقترب من $9/4$. و تنصُّ مخمنة كفتال التي لا تزال غير مثبتة على أن بعض قيم المتانة تكفي كشرط كِفاي. ■

شروط الكفاية (Sufficient Conditions)

إن عددَ الأضلاع التي نحتاج إليها لنجبر بيانًا على n رأسًا ليكون هاملتونيًا كبيرٌ جدًّا. (التمارين 26 - 27).
وتحت الشروط التي تنثر الأضلاع بعيدًا، نستطيع تقليص عدد الأضلاع في حين أن الحلقات الهاملتونية ما تزال مضمونة وأبسط هذه الشروط هو حد أدنى على الدرجات الصغرى؛ لاحظ أن الشرط $\delta(G) \geq n(G)/2$ يكفي. نلاحظ أولاً أنه لا توجد أصغر من الدرجة الصغرى تكون كافية.

7.2.7. مثال: للبيان الذي يتكوّن من العصب التي رتبتها $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ و $\lceil (n+1)/2 \rceil$ وتتشارك برأس ذي درجة صغرى تساوي $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ولكنه ليس هاملتونيًا (حتى أنه ليس مترابطًا من الدرجة 2). وللرتبة الفردية، هناك بيان آخر غير هاملتوني له هذه الدرجة الصغرى وهو العصبة الثنائية مع المجموعات المجزئة التي أحجامها $(n-1)/2$ و $(n+1)/2$.

يجبر إثبات أن $\delta(G) \geq n(G)/2$ وجود حلقة مولدة، وهذا يبيّن أنّ $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ هي القيمة الأكبر للدرجة الصغرى من بين البيانات غير الهاملتونية على n من الرؤوس. ■



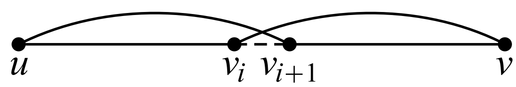
8.2.7. نظرية: (Dirac [1952b]) إذا كان G بيانًا بسيطًا على ثلاثة رؤوس على الأقل وكانت $\delta(G) \geq n(G)/2$، فإن G بيان هاملتوني.

الإثبات: على الرغم من أن الشرط $n(G) \geq 3$ مزعج، إلا أنه يجب أن يكون موجودًا؛ لأن K_2 غير هاملتوني، ولكنه يحقق أن $\delta(K_2) = n(K_2)/2$.

يستخدم إثبات التناقض ومبدأ القيم القصوى. إذا وُجدَ بيان غير هاملتوني يحقق الفرضيات، فإن إضافة الأضلاع لا يمكن أن تقلل الدرجة الصغرى. وهكذا يمكن أن نحصر اهتمامنا على البيانات غير الهاملتونية العظمى التي درجتها الصغرى تساوي على الأقل $n / 2$، حيث يعني وصف "عظمى" إن إضافة أي ضلع يربط رؤوسًا غير متجاورة ينشئ حلقة مولدة.

عندما يكون $u \nleftrightarrow v$ في G، فإن شرط العظمى لـ G يؤدي إلى أن G يملك مسارًا مولدًا $v_1,...,v_n$ من $u = v_1$ إلى $v = v_n$؛ لأن كل حلقة مولدة في $G + uv$ تحوي الضلع الجديد uv. لإثبات النظرية؛ يكفي إجراء تغيير بسيط في هذه الحلقة لتجنب استخدام الضلع uv؛ وهذا سوف يبني حلقة مولدة في G.

إذا وُجد جار لـ u يتبع مباشرة جارًا لـ v على المسار، مثل $u \leftrightarrow v_{i+1}$ و $v \leftrightarrow v_i$، فإن $(u, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v, v_i, v_{i-1}, \ldots, v_2)$ حلقة مولدة.



ولبرهنة أن مثل هذه الحلقة موجودة، سوف نبيّن أن هناك دليلًا مشتركًا في المجموعتين S و T المعرفتين بـ $S=\{i:u \leftrightarrow v_{i+1}\}$ و $T = \{i:v \leftrightarrow v_i\}$. وجمع الأحجام لهذه المجموعات يعطي

$$|S \cup T| + |S \cap T| = |S| + |T| = d(u) + d(v) \geq n.$$

لاحظ أن كلًّا من المجموعتين S و T لا يحتويان على الدليل n. لذا، فإن $|S \cup T| < n$، ولهذا السبب، فإن $|S \cap T| \geq 1$. وعليه نكون قد بنينا تناقضًا بإيجاد حلقة مولدة في G. لذا، فإنه لا يوجد بيان غير هاملتوني (أعظم) يحقق الفرضيات. ■

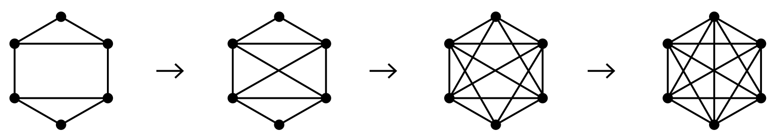
لقد لاحظ أور (Ore) أن هذه الحجة تستخدم $\delta (G) \geq n(G)/2$ فقط لإثبات أن $d(u) + d(v) \geq n$. لذلك، نستطيع أن نُضعِّف المطلوب للدرجة الصغرى $n/2$ ليصبح المطلوب هو $d(u) + d(v) \geq n$ فقط عندما يكون $u \nleftrightarrow v$. وأيضًا فإننا لسنا بحاجة إلى أن يكون G بيانًا غير هاملتوني أعظم، وقد احتجنا إلى أن يكون $G + uv$ هاملتونيًّا . وبذلك زودتنا بمسار مولد من u إلى v.

9.2.7. تمهيدية: (Ore [1960]) ليكن G بيانًا بسيطًا. إذا كان u و v رأسين غير متجاورين في G بحيث إن $d(u) + d(v) \geq n(G)$، فإن G يكون هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان $G + uv$ هاملتونيًّا.

الإثبات: أحد الاتجاهين واضح، وإثبات الاتجاه الآخر مشابه لإثبات النظرية 8.2.7. ■

لاحظ أن بوندي وكفتال (Bondy – Chva'tal) [1976] قد عبرا عن جوهر حجة (أور) بصورة أكثر عمومية بحيث يعطي شروطًا كافية للحلقات التي طولها l ولبيانات جزئية أخرى. وهنا سوف نناقش التطبيق للحلقات المولدة فقط. باستخدام التمهيدية 9.2.7 لإضافة أضلاع، نستطيع فحص ما إذا كان G هاملتونيًّا من خلال اختبار ما إذا كان البيان الأكبر هاملتونيًّا.

10.2.7. تعريف: الإغلاق (الهاملتوني) (Closure) للبيان G، ويرمز إليه بالرمز $C(G)$، ويعرف على أنه البيان الذي مجموعة رؤوسه هي $V(G)$ والذي نحصل عليه من G بإضافة الأضلاع التي تربط أزواج الرؤوس غير المتجاورة التي يكون مجموع درجاتها على الأقل n واحدًا تلو الآخر، حتى لا يبقى مثل هذه الأزواج.



إن البيان الموجود في الأعلى يبدأ برؤوس درجتها 2، لكن إغلاقه هو K_6. وتمهيدية (أور) تعطي النظرية الآتية:

11.2.7. نظرية : (Bondy – Chvátal [1976]) يكون البيان البسيط على n من الرؤوس هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان إغلاقه هاملتونيًّا. ■

لحسن الحظ أن الإغلاق لا يعتمد على الترتيب في إضافة الأضلاع المتوافرة.

12.2.7. تمهيدية : الإغلاق لـ G حسن التعريف.

الإثبات: لتكن $e_1, \ldots, e_r$ و $f_1, \ldots, f_s$ متتاليتين من الأضلاع المضافة في تشكيل $C(G)$، حيث تعطي الأولى G_1 في حين تعطي الثانية G_2. إذا وُجد في أي من المتتاليتين رأسان u و v غير متجاورين مجموع درجتيهما $n(G)$ على الأقل، فيجب إضافة الضلع uv قبل أن تنتهي المتتالية.

وهكذا، بما أنَّ f_1 قابل للإضافة مبدئيًّا لـ G، فإنه يجب أن ينتمي إلى G_1. وبالمثل، إذا كانت $f_1, \ldots, f_{i-1} \in E(G_1)$، فإن f_i تصبح قابلة للإضافة لـ G_1، وعليه فإنها تنتمي إلى G_1. لذا، فإن كلًّا من المتتاليتين لا تحتوي على الضلع الأول المحذوف من المتتالية الأخرى، لذا أصبح لدينا $G_1 \subseteq G_2$ و $G_2 \subseteq G_1$. ■

أصبح لدينا الآن شرط ضروري وكافٍ لاختبار الحلقات الهاملتونية في البيانات البسيطة. إلا أن ذلك لا يساعد كثيرًا؛ لأنه يطلب منا اختبار بيانٍ آخر فيما إذا كان هاملتونيًّا! ومع ذلك، فإنها تزودنا بطريقة لإثبات الشروط الكافية. لاحظ أن الشرط الذي يجبر $C(G)$ ليكون هاملتونيًّا فإنه أيضًا يجبر وجود حلقة هاملتونية في G.

وعلى سبيل المثال، فإن الشرط يمكن إعطاء أن $C(G) = K_n$. ولقد استخدم كفتال هذه الطريقة ليثبت أفضل شرط على متتالية الدرجات للحلقات الهاملتونية. حيث يمكن أن تكون بعض درجات الرؤوس صغيرة إذا كانت درجات رؤوس أخرى كبيرة بما فيه الكفاية.

13.2.7. نظرية : (Chvátal [1972]) ليكن G بيانًا بسيطًا مع درجات الرؤوس $d_1 \leq \ldots \leq d_n$، حيث $n \geq 3$. إذا كان $i < n/2$ يعطي أن $di > i$ أو $d_{n-i} \geq n - i$ **شرط كفتال** (Chvátal's condition)، فإن G يكون هاملتونيًّا.

الإثبات: إن إضافة أضلاع لتشكيل الإغلاق لا يقلل أي مدخلة من مدخلات متتالية الدرجات. وكذلك، يكون G هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان $C(G)$ هاملتونيًّا، لذلك يكفي الأخذ في الحسبان الحالة حيث $C(G) = G$، والذي نَصِفه بقولنا أن G مغلق. في هذه الحالة، نثبت أن شرط كفتال يؤدي إلى أن $G = K_n$.

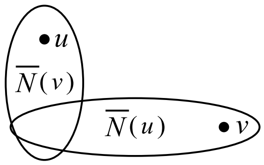
وسنثبت الآن المكافئ العكسي: إذا كان G بيانًا مغلقًا على n من الرؤوس وليس بيانًا تامًّا، فإننا سنجد قيمة لـ i أقل من $n/2$ لا تخالف شرط كفتال. إن المخالفة تعني أنه على الأقل i من الرؤوس درجتها على الأكثر i وعلى الأقل $n - i$ من الرؤوس درجتها أقل من $n - i$.

بافتراض أن $G \neq K_n$، فإننا نختار من بين أزواج الرؤوس غير المتجاورة زوجًا u، v بحيث يكون مجموع درجات هذا الزوج قيمة كبرى. ولأن G مغلق، فإن $u \nleftrightarrow v$ يعطي أن $d(u) + d(v) < n$. نختار الأوسمة على u،v بحيث إن $d(u) \leq d(v)$. بما أن $d(u) + d(v) < n$، لذلك نكون قد حصلنا على أن $d(u) < n/2$. ضع $i = d(u)$.

نحتاج إلى إيجاد i رأسًا درجاتها i على الأكثر. ولأننا اخترنا زوجًا غير متجاور له مجموع درجات كبرى، فإن درجة كل رأس في $V - \{v\}$ غير متجاور مع v تساوي $d(u)$ على الأكثر، وهذا يساوي i. ويوجد $n - 1 - d(v)$ رأسًا مماثلاً، و $d(u) + d(v) \leq n - 1$ تعطي أن $n - 1 - d(v) \geq i$.

وكذلك نحتاج إلى $n - i$ رأسًا درجاتها أقل من $n - i$. إن درجة كل رأس في $V - \{u\}$ لا يجاور u تساوي $d(v)$ على الأكثر، ويكون لدينا $d(v) < n - d(u) = n - i$. لاحظ أنه يوجد $n - 1 - d(u)$ رأسًا مماثلاً. وبما أن $d(u) \leq d(v)$، فإننا نستطيع أيضًا إضافة u نفسها إلى مجموعة الرؤوس التي درجتها $d(v)$ على الأكثر. وهكذا نحصل على $n - i$ رأسًا درجتها أقل من $n - i$.

لقد أثبتنا أن $d_i \leq i$ و $d_{n-i} < n - i$ لـ i المختارة بصورة خاصة، وهذا يناقض الفرق. ■



14.2.7. مثال: بيانات غير هاملتونية لها درجات رؤوس "كبيرة". إن النظرية 13.2.7 تميز متتاليات الدرجات للبيانات البسيطة التي تُجبر وجود الحلقات الهاملتونية. إذا فشلت متتالية الدرجة في تحقيق شرط كفتال عند i، فإن أكثر ما نستطيع فعله هو جعل الحدود في $d_1, \ldots, d_n$ على الشكل:

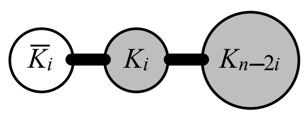
$d_j = i$ لـ $j \leq i$

$d_j = n - i - 1$ لـ $i + 1 \leq j \leq n - i$

$d_j = n - 1.$ لـ $j > n - i$

ليكن G بيانًا بسيطًا يحقق متتالية الدرجة هذه (إذا وُجِدَت). تكون الرؤوس التي عددها i ودرجتها $n - 1$ متجاورة مع الرؤوس الأخرى جميعها (العصبة المركزية في الشكل). إن هذا يعطي i جارًا إلى الـ i رأسًا التي درجة كل منها i، لذلك فهي تشكل مجموعة مستقلة وليس لها أي جار إضافي. مع درجة $n - i - 1$، فإن كلًّا من الـ $n - 2i$ رأسًا المتبقية يجب أن يكون مجاورًا للرؤوس جميعها ما عدا نفسه والمجموعة المستقلة. لذلك، فإنَّ هذه الرؤوس تشكل عصبة. والبيان الوحيد الذي يحقق هذا هو $(\overline{K}_i + K_{n-2i}) \vee K_i$، كما هو مبين أدناه.

إن هذا البيان ليس هاملتونيًّا؛ لأن حذف i من الرؤوس التي درجتها $n - 1$ يخلف بيانًا جزئيًّا له $i + 1$ مركبة. إذا كان البيان البسيط H ليس هاملتونيًا، ودرجات رؤوسه $d'_1 \leq \ldots \leq d'_n$، فإن نتيجة كفتال تؤدي إلى أنه يوجد i بحيث يحقق البيان $(\overline{K}_i + K_{n-2i}) \vee K_i$ الذي درجات رؤوسه $d_1 \leq \ldots \leq d_n$ أن $d_j \geq d'_j$ لكل i. ■



15.2.7. تعريف: يعرَّف المسار الهاملتوني (**Hamiltonian path**) على أنه مسار مولد.

كل بيان يملك حلقة مولدة يملك مسارًا مولدًا، ولكن P_n يبين أن العكس غير صحيح. نستطيع عمل تعليلات مشابهة للتعليلات في الأعلى لإثبات شروطٍ كافية للمسارات الهاملتونية، ولكن من الأسهل أن نستخدم عملنا السابق ونثبت النظرية الجديدة باستدعاء نظرية حول الحلقات. ولعمل ذلك، نستخدم تحويلاً قياسيًّا (معياريًّا).

16.2.7. ملاحظة: يملك البيان G مسارًا مولدًا إذا وفقط إذا كان البيان $G \vee K_1$ يملك حلقة مولدة.

تطبق الملاحظة 16.2.7 في العديد من التمارين. ونستخدمها هنا لاشتقاق شرط للمسارات المولدة يماثل شرط كفتال للحلقات المولدة.

17.2.7. نظرية: ليكن G بيانًا بسيطًا درجات رؤوسه $d_1 \leq ... \leq d_n$. إذا كان $i < (n+1)/2$ يعطي ($d_i \geq i$ أو $d_{n+1-i} \geq n-i$)، فإن G يملك مسارًا مولدًا.

الإثبات: ليكن $G' = G \vee K_1$، وليكن $n' = n+1$، ولتكن $d'_1, ..., d'_{n'}$ هي متتالية الدرجات لـ G'. بما أن أي حلقة مولدة في $G \vee K_1$ تصبح مسارًا مولدًا في G عندما يحذف الرأس الإضافي، لذا يكفي أن نثبت أن G' تحقق شرط كفتال الكافي للحلقات الهاملتونية.

بما أن الرأس الجديد يكون مجاورًا للرؤوس جميعها في $V(G)$، فإنه يصبح لدينا $d'_{n'} = n$ و $d'_j = d_j + 1$ لكل $j < n'$. لكل $i < n'/2 = (n+1)/2$، فإن الفرضية على G تعطى أن $d'_i = d_i + 1 \geq i+1 > i$ أو $d'_{n'-i} = d_{n+1-i} + 1 \geq n-i+1 = n'-i$. وهذا هو شرط كفتال الكافي تحديدًا. لذا، فإن G' يملك حلقة مولدة، وحذف الرأس الإضافي يخلف مسارًا مولدًا في G. ■

18.2.7.*ملاحظة: يمكن تخفيف متطلبات الدرجة تحت شروط مثل الانتظام أو المتانة القصوى. كل بيان بسيط منتظم G درجات رؤوسه على الأقل $n(G)/3$ هو هاملتوني (Jackson [1980]). لاحظ أن بيان بيترسون فقط يمنع تقليل الحد عن $(n(G)-1)/3$ (Zhu-Liu- Yu [1985] وهو مبسَّط بصورة جزئية في (Bondy – Kouider) [1988]؛ انظر التمرين 13أيضًا.

من الممكن تقليل شرط الدرجة أكثر عندما يكون الترابط عاليًا. فعلى سبيل المثال، لقد خمّن توت [1971] أن كل بيان ثنائي الفرع منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 يكون هاملتونيًّا. ووجد هورتون [1982] مثالا مناقضًا له 96 رأسًا، في حين أن أصغر مثال مناقض معروف يملك 50 رأسًا (Georges [1989])، ولكن شروطًا أقوى لهذا النوع ربما تكون كافية. ■

يستخدم شرطُنا الكافي الأخير للحلقات الهاملتونية الترابطَ والاستقلال وليس الدرجات. والإثبات يعطي خوارزمية حسنة تبني حلقة هاملتونية، أو تبين عدم صحة الفرضية.

19.2.7. نظرية: (Chvátal – Erdös [1972]) إذا كان $\kappa(G) \geq \alpha(G)$، فإن G يملك حلقة هاملتونية (إلا إذا كان $G = K_2$).

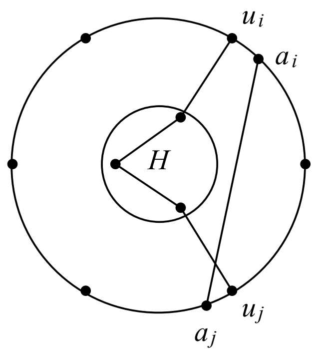
الإثبات: مع $G \neq K_2$، فإن الشروط تتطلب أن يكون $\kappa(G) > 1$. افترض أن $\kappa(G) \geq \alpha(G)$. ليكن $k = \kappa(G)$، ولتكن C أطول حلقة في G. بما أن $\delta(G) \geq \kappa(G)$، وكل بيان G بحيث يملك $\delta(G) \geq 2$ حلقة طولها على الأقل $\delta(G)+1$ (القضية 28.2.1)، فإن C تملك $k+1$ رأسًا على الأقل.

لتكن H مركبة لـ $G - V(C)$. إن الحلقة C تملك k رأسًا على الأقل مع أضلاع تصلها بـ H، وبخلاف ذلك، فإن حذف رؤوس C مع الأضلاع التي تصلها بـ H يناقض أن $\kappa(G) = k$. لتكن $u_1, ..., u_k$ هي الـ k رأسًا في C التي تتصل بأضلاع مع أضلاع في H بترتيب مع اتجاه عقارب الساعة.

لكل $i = 1, ..., k$، ليكن a_i هو الرأس الذي يتبع u_i مباشرة على C. إذا كان أيّ رأسين من هذه الرؤوس متجاورين، لنقل $a_i \leftrightarrow a_j$، فإننا ننشئ حلقة أطول باستخدام $a_i a_j$، والأجزاء في C من a_i إلى u_j، ومن a_j إلى u_i، والمسار من u_i إلى u_j من خلال H (انظر التوضيح).

إذا كان a_i يملك جارًا في H، فإننا نستطيع أن نتحول إلى H بين u_i و a_i على C. لذلك، نستنتج أيضًا أنه

لا يوجد جار لـ a_i في H. لذا، فإن $\{a_1,\dots,a_k\}$ بالإضافة إلى رأسٍ في H تشكل مجموعة مستقلة حجمها $k+1$.
وهذا التناقض يؤدي إلى أن C حلقةٌ هاملتونيةٌ. ■



20.2.7.*ملاحظة: معظم شروط الكفاية للحلقات الهاملتونية تعمم لشروط الحلقات الطويلة. المحيط (circumference) لبيان هو طول أطول حلقة فيه. إن شكلاً أضعف لشرط كاف للحلقات المولدة ربما يجبر وجود حلقة طويلة. لقد أثبت ديراك [1952b] أول نتيجة مشابهة: يملك البيانُ المترابط من الدرجة 2 وله درجة صغرى k محيطًا يساوي $\min\{n,2k\}$ على الأقل. إن القضية 28.2.1 تضمن فقط حلقة طولها $k+1$ على الأقل. فضلًا عن أنّ معظم نتائج الحلقات الطويلة هي أكثر صعوبة من الشروط الكافية المقابلة للحلقات الهاملتونية (انظر التمهيدية 36.4.8، والنظرية 37.4.8). ■

الحلقات في البيانات الموجهة (اختياري) (Cycles in Directed Graphs(Optional))

تشبه نظريةُ الحلقات في البيانات الموجهة نظريةَ الحلقات في البيانات. للبيان الموجه G، ليكن $\delta^-(G)=\min d^-(v)$ و $\delta^+(G)=\min d^+(v)$. إن البراهين في الفصل الأولى التي تستخدم المسارات العظمى تضمن مسارات طولها k، وحلقات طولها $k+1$، حيث $k=\max\{\delta^-(G),\delta^+(G)\}$.

إن كل بيان تام هو هاملتوني، إلا أن توجيهات البيانات التامة هي أكثر تعقيدًا. والشرط الضروري لخاصية الترابط من الدرجة 2 يصبح ضروريًّا لخاصية الترابط القوية للحلقات المولدة في البيانات الموجهة. أما للدوري (دوري الألعاب)، فإن هذا الشرط الضروري هو أيضًا شرطٌ كافٍ (التمرين 45).

أما للبيانات الموجهة الاختيارية، فسنثبت نظرية مشابهة لنظرية ديراك (النظرية 8.2.7). في الحقيقة، هذه النظرية سوف تعطي نظرية ديراك بوصفها حالة خاصة (التمرين 49). وقد قام مينيل (Meyniel) [1973] بتقوية النظرية بصورة جوهرية بتخفيف الفرضيات (النظرية 42.4.8).

21.2.7. تعريف: يكون البيان الموجَّه صارمًا (Strict) إذا كان لا يملك عرى، وله نسخة واحدة على الأكثر من كل زوج مرتب بوصفها ضلعًا.

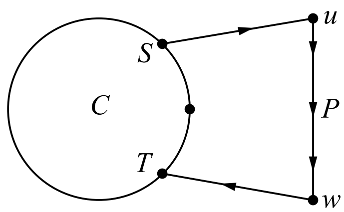
22.2.7. نظرية: (Ghouila – Houri [1960]) إذا كان D بيانًا موجّهًا صارمًا وكان:
$\min\{\delta^+(D),\delta^-(D)\}\ge n(D)/2$، فإن D يكون هاملتونيًّا.

الإثبات: سنستخدم التناقض ومبدأ التطرفية مرة أخرى. في المثال المناقض D على n من الرؤوس، لتكن C أطول حلقة وطولها l. كما لاحظنا فإن $l>\max\{\delta^+,\delta^-\}\ge n/2$. ليكن P أطول مسار في $D-V(C)$، يبدأ

عند u، وينتهي عند w، وطوله $m \geq 0$. الآن، $l > n/2$ و $n \geq l + m + 1$ يؤديان إلى أن $m < \dfrac{n}{2}$.

لتكن S هي مجموعة الرؤوس في C التي تسبق الرأس u، ولتكن T هي مجموعة الرؤوس في C التي تلي w. باستخدام الأعظمية للمسار P، فإنَّ كلَّ سابق لـ u وكلَّ تالٍ لـ w يقع في $V(C) \cup V(P)$. لذلك، فإن كلًّا من حجم S و T يساوي على الأقل $\min\{\delta^+, \delta^-\} - m$، وهذا على الأقل $(n/2 - m) \leq$؛ ولهذا فهو موجب. وعليه، فإن S و T غير خاليتين.

تضمن الأعظمية لـ C أن المسافة على طول C من الرأس $u' \in S$ إلى الرأس $w' \in T$ يجب أن تزيد على $m + 1$. وبخلاف ذلك، فإن التحرك على طول P بدلاً من C من u' إلى w' يعطي حلقة أطول. لذا، من الممكن افتراض أنَّ كل رأس في S متبع على C بأكثر من m رأسًا ليس في T.



إذا كانت المسافة بين رأسين متتاليين في S على طول C هي دائمًا $m + 1$ على الأكثر، فلا يوجد مكان مسموح لنضع فيه رأسًا من T. وبما أن S و T غير خاليتين، لذا يمكننا افتراض وجود رأس في S متبع على C برؤوس ليست في S وعددها $m + 1$ على الأقل. وهذه ممنوعة من T، وكما هي الحال مع الرأس التالي مباشرة على C للرؤوس الأخرى جميعها في S. لذلك، يوجد $|S| - 1 + m + 1 \geq n/2$ رأسًا على الأقل في C ليست في T. ومع الرؤوس التي في T، فإن هذا يؤدي إلى $|V(C)| \geq n - m$، وهذا يناقض أن $l \leq n - m - 1$. ويؤدي هذا التناقض إلى أن C يجب أن تكون حلقة مولدة. ■

تمــارين (Exercises)

1.2.7. (-) لأيِّ القيم r يكون $K_{r,r}$ هاملتونيًّا؟

2.2.7. (-) هل بيان جروتزتش (Grötzsch) (المثال 2.2.5) هاملتونيًّا؟

3.2.7. (-) لـ $n > 1$، أثبت أن $K_{n,n}$ يملك $(n-1)!n!/2$ حلقة هاملتونية.

4.2.7. (-) أثبت أن G يملك مسارًا هاملتونيًّا فقط إذا كان لكل $S \subseteq V(G)$، فإن عدد المركبات لـ $G - S$ هو $|S| + 1$ على الأكثر.

• • • • •

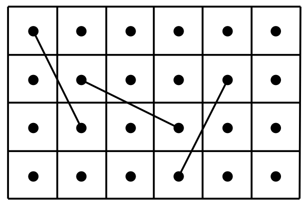
5.2.7. أثبت أن كل مسار في ذي الاثني عشر وجهًا يقع في حلقة هاملتونية.

6.2.7. (!) ليكن G بيانًا ثنائي الفرع هاملتونيًّا، واختر $x,y \in V(G)$. أثبت أن $G - x - y$ يملك مواءمة تامة إذا وفقط إذا كان كل من x و y على جهتين مختلفتين من التجزئة الثنائية لـ G. طبق هذا لتثبت أن حذف مربعي وحدة من لوحة الشطرنج (8×8) يبقي على لوحة يمكن أن تجزأ إلى مستطيلات 1 في 2 إذا وفقط إذا تحقق أن المربعين المحذوفين يملكان لونين مختلفين.

7.2.7. يأكل فأر مكعب $3 \times 3 \times 3$ من الجبن بأكل المكعبات الجزئية $1 \times 1 \times 1$ جميعها. إذا بدأ عند زاوية

مكعب جزئي، وفي كل مرة يتحرك إلى مكعب جزئي مجاور (تتشارك بوجه مساحته 1)، هل يستطيع الفأر عمل هذا والانتهاء بأكل المكعب الجزئي الذي في المركز؟ هاتِ طريقة لعمل ذلك، أو أثبت استحالة ذلك (تجاهل الجاذبية).

8.2.7. (!) على لوحة الشطرنج، **يستطيع الحصان** (knight) أن يتحرك من مربع إلى آخر بحيث يختلف بمربع واحد في أحد الإحداثيين، وبمربعين في الإحداثي الآخر كما هو مبين أدناه. أثبت أنه لا توجد لوحة شطرنج $4 \times n$ تملك **جولة حصان**: وهي استعراض لحركات الحصان بحيث ينتقل على كل مربع مرة واحدة ويعود إلى البداية. (مساعدة: جد مجموعة مناسبة من الرؤوس في البيان المقابل من أجل مخالفة الشرط الضروري).



9.2.7. أنشئ عائلة مكونة من عدد لا نهائي من البيانات غير الهاملتونية التي تحقق الشرط الضروري لقضية 3.2.7.

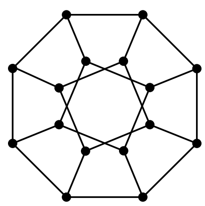
10.2.7. (!) هاملتوني مقابل أويلري:

a) جد بيانًا غير أويلري مترابطًا من الدرجة 2 بحيث يكون بيانه الخطي هاملتونيًا.

b) أثبت أن $L(G)$ يكون هاملتونيًا. إذا وفقط إذا كان G يملك مسربًا مغلقًا يحتوي على نقطة طرفية واحدة على الأقل من كل ضلع. (Harary, Nash – Williams [1965])

11.2.7. أنشئ بيانًا مترابطًا من الدرجة 3 ومنتظمًا من الدرجة 3 بحيث لايكون بيانه الخطي هاملتونيًا. (مساعدة: استبدل كل رأس في بيان بيترسون ببيان مناسب، وطبق التمرين 10.2.7).

12.2.7. حدّد ما إذا كان البيان أدناه هاملتونيًا.

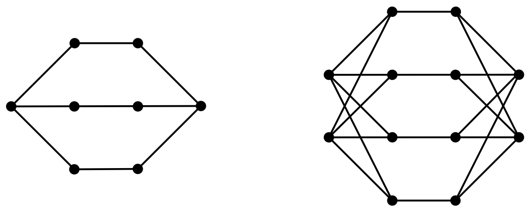


13.2.7. ليكن G البيانَ المنتظمَ من الدرجة 3 الذي نحصل عليه من بيان بيترسون باستبدال مثلث بأحد الرؤوس، ومن ثَمَّ مواءمة رؤوس المثلث مع جيران الرأس المحذوف. أثبت أن G ليس هاملتونيًا. (تعليق: ما عدا هذا البيان وبيان بيترسون، فإن كل بيان منتظم من الدرجة k، ومترابط من الدرجة 2 وله $3k + 3$ رأسًا على الأكثر يكون هاملتونيًا). (Hilbig [1986])

14.2.7. يكون البيان G قابلًا للتلوين الضلعي من الدرجة k **بصورة فريدة** (uniquely) إذا كانت التلوينات الضلعية الفعلية من الدرجة k للبيان G جميعها تُحدث التجزئة للأضلاع نفسها. أثبت أن كلَّ بيان منتظم من الدرجة 3 قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 **بصورة فريدة** يكون هاملتونيًا. (Greenwell – Kronk [1973])

15.2.7. ضع n نقطة حول دائرة. ليكن G_n هو البيان المنتظم من الدرجة 4 الذي نحصل عليه بضمِّ كل نقطة إلى أقرب نقطتين إليها في كل اتجاه. إذا كان $n \geq 5$، فأثبت أن G_n هو اتحاد لحلقتين هاملتونيتين.

16.2.7. لـ $k \geq 3$، ليكن G_k البيانَ الذي نحصل عليه من نسختين منفصلتين من $K_{k,k-2}$ بإضافة مواءمة بين "المجموعتينَ المجزأتين" بحجم k. حدد قيم k جميعها بحيث يكون G_k هاملتونيًّا.



17.2.7. (!) أثبت أن الجداء الديكارتي لبيانين هاملتونيين يكون بيانًا هاملتونيًّا. استنتج أن المكعبَ Q_k ذا البعد k هامتلونيٌّ لكل $k \geq 2$.

18.2.7. أثبت أن الجداء الديكارتي لبيانين غير تافهين لهما مسارات هاملتونية يفشل في امتلاك حلقة هاملتونية إذا وفقط إذا كان كلٌّ من البيانين ثنائيَّ الفرع ورتبته فردية. وعلى أي حال، فإن الجداء يملك مسارًا هاملتونيًّا.

19.2.7. (+) لكل عدد طبيعي فردي k، أنشئ بيانًا ثنائي الفرع بسيطًا منتظمًا من الدرجة k ومترابطًا من الدرجة k -1 ولا يكون هاملتونيًّا.

20.2.7. (!) **القوة** k (Power) لبيان بسيط G هو البيان البسيط G^k مع مجموعة الرؤوس $V(G)$ ومجموعة الأضلاع $\{uv : d_G(u,v) \leq k\}$:

a) افترض أن $G - x$ يملك ثلاث مركبات غير تافهة على الأقل، وحيث يملك x جارًا واحدًا فقط في كل منها. أثبت أن G^2 ليس هاملتونيًّا. (مساعدة: خذ في الحسبان البيان الثاني في المثال 5.2.7).

b) أثبت أن المكعب لكل بيان مترابط (له على الأقل ثلاثة رؤوس) يكون هاملتونيًّا. (مساعدة: اختزل هذه الحالة إلى حالة الأشجار، وأثبتها للأشجار بإثبات النتيجة الأقوى وهي أنه إذا كان xy ضلعًا في الشجرة T، فإن T^3 تملك حلقة هاملتونية تستخدم الضلع xy. تعليق: لقد أثبت فليشنر (Flechner) [1974] أن المربع لكل بيان مترابط من الدرجة 2 يكون هاملتونيًّا).

21.2.7. لتكن $n = k(2l + 1)$. أنشئ بيانًا تامًّا له k فرعًا تامًّا غير هاملتوني على n من الرؤوس، ودرجته الصغرى تساوي $\frac{n}{2}\frac{k-1}{k}\frac{2l}{2l+1}$ (Snevily).

22.2.7. ليكن $\mathbf{G}(k,t)$ صفَّ البيانات التي لها k فرعًا والمترابطة بحيث تكون كل مجموعة مجزأة حجمها t، وكلُّ بيان جزئي محدث من مجموعتين مجزأتين هو مواءمة حجمها t. لـ $k \geq 4$ و $t \geq 4$، أنشئ بيانًا في $\mathbf{G}(k,t)$ بحيث يكون غير هاملتوني. (مساعدة: يوجد بيان في $\mathbf{G}(4,4)$ مع مجموعةٍ فيها 3 عناصر، وحذفها يخلف أربع مركبات؛ عَمِّمْ هذا المثال. تعليق: $\mathbf{G}(3,t) = \{C_{3t}\}$، وأيضًا كل بيان في $\mathbf{G}(k,3)$ يكون هاملتونيًّا) (Ayel [1982]).

23.2.7. (*) أثبت أن المتانة لبيان بيترسون هي $4/3$.

24.2.7. (*) ليكن $t(G)$ يرمز إلى المتانة لـ G:

a) أثبت أن $t(G) \leq k(G)/2$. (Chvátal [1973]).

b) أثبت أن المساواة تتحقق في فرع (a) للبيانات التي تخلو من المخالب. (مساعدة: خذ في الحسبان $c(G-S)$ حيث S مجموعة $|S| = t(G)$. (Mattews – Sumner [1984]).

25.2.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا وليس غابة، ويملك خصرًا يساوي 5على الأقل. أثبت أن $\overline{G}$ يكون هاملتونيًّا. (مساعدة: إستخدم شرط أور (Ore's Condition) (N. Graham)

26.2.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا على n من الرؤوس، حيث $n \geq 2$. أثبت أنه إذا كان G لا يحقق شرط كفتال، فإن $e(\overline{G}) \geq n - 2$. استنتج أن العدد الأكبر للأضلاع في بيان بسيط غير هاملتوني على n من الرؤوس هو $\binom{n-1}{2}+1$ (Bondy [1972b], Ore [1961]).

27.2.7. لـ $n \geq 2$، أثبت بصورة مباشرة بالاستقراء على n أن العدد الأكبر للأضلاع في بيان بسيط غير هاملتوني على n من الرؤوس هو $\binom{n-1}{2}+1$.

28.2.7. تعميم لحد الأضلاع:

a) ليكن $f(i) = 2i^2 - i + (n - i)(n - i - 1)$، وافترض أن $n \geq 6k$. أثبت أن القيمة العظمى لـ $f(i)$ على الفترة $k \leq i \leq n/2$، هي $f(k)$.

b) ليكن G بيانًا بسيطًا مع درجة صغرى k. استخدم فرع (a) وشرط كفتال لتثبت أنه إذا كان G يملك $6k$ رأسًا على الأقل، ويملك أكثر من $\binom{n(G)-k}{2}+k^2$ ضلعًا، فإنه يكون هاملتونيًّا (Erdös [1962]).

29.2.7. (!) ليكن G بيانًا بسيطًا مع درجات رؤوس $d_1,\dots,d_n$، دُلَّ عليها بحيث $d_1 \leq \dots \leq d_n$. ولتكن $d'_1,\dots,d'_n$ هي درجات الرؤوس في $\overline{G}$ مع $d'_1 \leq \dots \leq d'_n$. أثبت أنه إذا كان $d_i \geq d'_i$ لكل $i \leq n/2$، فإن G يملك مسارًا هاملتونيًّا. استنتج أن كل بيان بسيط متشاكل مع متممته يملك مسارًا هاملتونيًّا. (Clap*h*am [1974])

30.2.7. احصل على تمهيدية 9.2.7 (الكفاية لشرط أور) من النظرية 13.2.7 (الكفاية لشرط كفتال). (Bondy [1978])

31.2.7. (!) أثبت أو انقض: إذا كان G بيانًا بسيطًا له ثلاثة رؤوس على الأقل، وكان يملك $\alpha(G)$ رأسًا على الأقل درجاتها $n(G) - 1$، فإنه يكون هاملتونيًّا.

32.2.7. (+) ليكن G بيانًا بسيطًا ثنائيًّا بالتجزئة الثنائية $X، Y$ حيث $|X| = |Y| = n/2 > 1$. ولتكن $d_1,\dots,d_n$ هي درجات الرؤوس فيه ، حيث $d_1 \leq \dots \leq d_n$. ليكن G' هو أصغر بيان حاوٍ للبيان (supergraph) G بحيث $G'[Y] = K_{n/2}$:

a) أثبت أن G يكون هاملتونيًّا إذا وفقط إذا كان G' هاملتونيًّا. وصفِ العلاقة بين متتاليتي الدرجات لكلٍّ من G و G'.

b) افترض أن $d_k > k$ أو $d_{n/2} > n/2 - k$ عندما $k \leq n/4$. أثبت أن G يكون هاملتونيًّا. (مساعدة: افترض أن متتالية الدرجة لـ G' لا تحقق شرط كفتال لبعض قيم $i < n/2$، واحصل على تناقض) . (Chva'tal [1972]).

33.2.7. (!) يكون البيان **مترابطا هاملتونيًا** (Hamiltonian – connected) إذا وُجد لكل زوج من الرأسين $u، v$ مسار هاملتوني من u إلى v. أثبت أن البيان البسيط G يكون هاملتونيًّا إذا كان $e(G) \geq \binom{n(G)-1}{2}+2$ ومترابطا هاملتونيًّا إذا كان $e(G) \geq \binom{n(G)-1}{2}+3$.
(يسمح إثبات الاثنين معًا بإثبات أبسط.) (Ore [1963]).

34.2.7. شرط ضروري لمترابط هاملتوني: (Moon [1965a]).

a) أثبت أن كل بيان مترابط هاملتوني على أربعة رؤوس على الأقل يملك $\lceil 3n(G)/2 \rceil$ ضلعًا على الأقل.

b) أثبت أن الحد في فرع (a) هو أفضل ما يمكن بإثبات أن $C_m \,\square\, K_2$ يكون مترابطا هاملتونيًّا إذا كان m فرديًّا.

35.2.7. (!) شرط الكفاية لمترابط هاملتوني: (Ore [1963])

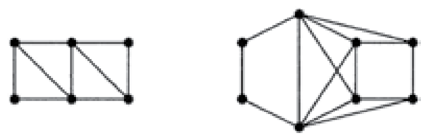
a) أثبت أن بيانًا بسيطًا G يكون مترابطًا هاملتونيًّا إذا كان $x \nleftrightarrow y$ يؤدي إلى أن $d(x) + d(y) > n(G)$.
(مساعدة: أثبت أن بيانات مناسبة ترتبط مع G هي هاملتونية بأخذ إغلاقها في الحسبان).

b) أثبت أن النتيجةَ في فرع (a) دقيقةٌ وحادةٌ ببناء بيان بسيط على n من الرؤوس مع درجة صغرى $n/2$ بحيث يكون غير مترابط وغير هاملتوني لكل عدد زوجي n أكبر من 2.

36.2.7. **شرط لاس فيرجناس** (Las Vergnas condition) لبيان بسيط على n من الرؤوس هو وجود ترتيب $v_1, \ldots, v_n$ للرؤوس بحيث لا يوجد زوج v_i, v_j غير متجاور ويحقق أن $i < j$، و $d(v_i) \le i$، و $d(v_j) < j$، و $d(v_i) + d(v_j) < n$، و $i + j \ge n$. لقد أثبت لاس فيرجناس [1971] أن هذا الشرط كافٍ لوجود حلقة مولدة:

a) أثبت أن شرط كفتال (النظرية 13.2.7) يعطي شرط لاس فيرجناس، وهذا يعني أن نظرية لاس فيرجناس تقوي نظرية كفتال.

b) أثبت أن كل بيان من البيانين أدناه لا يحقق شرط كفتال، ولكنه يملك بيانًا تامًّا كإغلاقه الهاملتوني. أثبت أن البيان الأصغر أدناه يحقق شرط لاس فيرجناس، ولكن البيان الأكبر لا يحقق ذلك.



37.2.7. لـ $\emptyset \ne S \subset V(G)$، ضع $t(S) = |\overline{S} \cap N(S)|/|\overline{S}|$. وليكن $\theta(G) = \min t(S)$. لقد أثبت لو (Lu [1994]) أنه إذا تحقق أن $\theta(G)n(G) \ge \alpha(G)$، فإن G يكون هاملتونيًّا. أثبت أن $\kappa(G) \ge \alpha(G)$ تعطي أن $\theta(G)n(G) \ge \alpha(G)$. (تعليق: هذا يثبت أن نظرية (لو) تعطي نظرية كفتال وإيردوز، وهي نتيجة أقوى).

38.2.7. (!) مسارات وحلقات طويلة. ليكن G بيانًا بسيطًا مترابطًا حيث $\delta(G) = k \ge 2$ و $n(G) > 2k$:

a) ليكن P مسارًا أعظميًّا في G (ليس بيانًا جزئيًّا من أي مسار أطول). إذا كان $n(P) \le 2k$، فأثبت أن البيان الجزئي المحدث $G[V(P)]$ يملك حلقة مولدة (ليس شرطًا أن يكون ترتيب رؤوس هذه الحلقة كالترتيب في P نفسه).

b) استخدم فرع (a) لتثبت أن G يملك مسارًا له $2k + 1$ رأسًا على الأقل. وأعطِ مثالاً لكل قيمة فردية n لتبين أنه ليس من الضروري أن يملك G حلقة لها أكثر من $k + 1$ رأسًا.

39.2.7. أثبت أنه إذا كان G بيانًا بسيطًا بحيث متتالية درجاته هي $d_1 \le \ldots \le d_n$ وكان $d_1 + d_2 < n$، فإن G يملك مسارًا طوله على الأقل $d_1 + d_2 + 1$، إلا إذا كان G هو الرابط لـ $n - (d_1 + 1)$ رأسًا معزولاً مع بيانٍ على $d_1 + 1$ من الرؤوس، أو كان $G = pK_{d_1} \vee K_1$ لبعض قيم $p \ge 3$ (Ore [1967b]).

40.2.7. (!) لقد أثبت ديراك [1952b] أن كل بيان بسيط G مترابط من الدرجة 2 يملك حلقة طولها على الأقل $\min\{n(G), 2\delta(G)\}$. استخدم هذه في إثبات أن كل بيان منتظم من الدرجة $2k$ على $4k+1$ رأسًا يكون هاملتونيًّا. (Nash – Williams)

41.2.7. لقد خمَّن سكوت سميت أنه إذا أخذنا أي أطول حلقتين في بيان مترابط من الدرجة k دائمًا فإنهما تملكان k رأسًا مشتركًا على الأقل. إن طريق الحل أدناه يصلح لقيم k الصغيرة:

a) افترض أن G بيان منتظم من الدرجة 4 على n من الرؤوس بحيث إن G هي اتحاد لحلقتين (قد تظهر أضلاع متكررة). ليكن G' بيانًا منتظمًا من الدرجة 4 على $n + 2$ من الرؤوس، وبحيث نحصل عليه

من G بتقسيم جزئي لضلعين، وإضافة ضلع مزدوج بين الرأسين الجديدين. بين أن G' هو أيضًا اتحاد لحلقتين مولدتين إذا كان $n \le 5$.

b) استخدم فرع (a) لتستنتج أن أي زوج من الحلقات الأطول في بيان مترابط من الدرجة k يتقاطع في k نقطة على الأقل إذا كان $k \le 6$ (Burr, Smith).

42.2.7. (+) ليكن G بيانًا أويلريًا. ولتكن V' هي مجموعة الحلقات الأويلرية في G، مع الأخذ في الحسبان أن حلقة ومعكوسها هما الشيء نفسه. افترض أن G' هو البيان على مجموعة الرؤوس V' بحيث تكون حلقتان متجاورتين إذا وفقط إذا كانت إحداهما تظهر من الأخرى بعكس الترتيب الضلعي على حلقة جزئية مغلقة فعلية. أثبت أن G' يكون هاملتونيًا إذا كان $\Delta(G) \le 4$. (مساعدة: استخدم الاستقراء على الرؤوس التي درجتها 4، وهذا يثبت وجود حلقة هاملتونية لكل ضلع في G'. (تعليق: يتحقق الاستنتاج أيضًا دون تقييد على $\Delta(G)$ (Zhang – Guo [1986] Xia [1982])

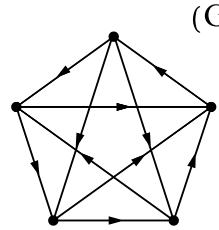
43.2.7. أثبت أن البيان الحلقي الأويلري G' في التمرين 42.2.7 يكون منتظمًا، واشتقّ صيغة لدرجة رؤوسه. قارن $\delta(G')$ و $n(G')$ عندما تكون $n(G) = 2$ ؛ لتبين أن المسألة السابقة لا يمكن حلها بتطبيق نتائج عامة على الخاصية الهاملتونية لبيانات منتظمة بدرجات معينة.

44.2.7. أثبت أن كل دوري يملك مسارًا هاملتونيًا (مسار موجه مولد). (مساعدة: استخدم التطرفية). (Re'dei [1934])

45.2.7. ليكن T دوريًا قويًا. لكل $u \in V(T)$ ولكل k بحيث $3 \le k \le n$، أثبت أن u ينتمي إلى حلقة طولها k في T. (مساعدة: استخدم الاستقراء على (k) (Moon [1966]).

46.2.7. ليكن G دوريًا على 7 رؤوس بحيث يملك كل رأس فيه درجة خروج 3. استخدم التمرين 45.2.7 لتثبت أن G يملك حلقتين منفصلتين رأسيًا.

47.2.7. (+) أثبت أن كل دوري يملك مسارًا هاملتونيًا غير محتوى في حلقة هاملتونية، ما عدا الدوري الحلقي على ثلاثة رؤوس، والدوري T_5 على خمسة رؤوس المرسوم أدناه كذلك. (مساعدة: الاستقراء عامل، لكن إثبات الادعاء لستة رؤوس يحتاج إلى بعض العناية. في الحالات جميعها، جد الشكل المطلوب أو $G = T_5$). (Grunbaum, in Harary [1969, p211])



48.2.7. (*) أثبت أن النظرية 22.2.7 هي أفضل ما يمكن من خلال إثبات أن شرط الصرامة على البيان الموجّه لا يمكن إضعافه للسماح بالعرى. أنشئ لكل عدد زوجي h بيانًا موجهًا D على n من الرؤوس، بحيث لا يكون هذا البيان هاملتونيًا، وعلى الرغم من أن نسخة واحدة من كل زوج مرتب هي ضلع، وأن $\min\{\delta^-(D), \delta^+(D)\} \ge n/2$.

49.2.7. (*) احصل على النظرية 8.2.7 (الكفاية لشرط ديراك في البيانات) من النظرية 22.2.7 (الكفاية لشرط غويلا وهوري على البيانات الموجهة). (مساعدة: حول بيانا بسيطا G إلى بيان موجه صارم باستبدال كل ضلع بزوج من الأضلاع الموجهة في اتجاهين متعاكسين).

3.7. المستويات والتلوينات والحلقات (Planarity,Coloring, and Cycles)

نعود إلى مسألة الألوان الأربعة لاستكشاف علاقتها القديمة مع المسائل المتعلقة بالتلوين الضلعي والحلقات الهاملتونية. ثَمَّ سنأخذ في الحسبان الطرق التي ستعمِّم المسألة.

نظرية تايت (Tait's Theorem)

في العام 1878م، أثبت تايت نظرية تربط بين التلوين الوجهي من جهة والتلوين الضلعي للبيانات المستوية من جهة أخرى، واستخدم هذا في الاقتراب لنظرية الألوان الأربعة. وقد نبه هذا إلى الاهتمام في التلوين الضلعي. سوف نعرف أولاً التلوين الوجهي بصورة دقيقة.

1.3.7. تعريف: نعرِّف التلوين الوجهي الفعلي (proper face – coloring) لبيان سوي مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 على أنه تخصيص ألوان لوجوهه بحيث تكون ألوانُ وجوهه التي تملك ضلعًا مشتركًا على حدودها مختلفةً.

نفكر أحيانًا في التلوين الوجهي بوصفه تلوينًا للبيان الثنوي. لذا، سنحصر اهتمامنا في التلوينات الوجهية للبيانات المترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2. عندما يملك البيان السوي ضلع قطع، فإن ثنوية يملك عروة. ونقول إن البيانات التي تملك عرى لا تملك تلوينات فعلية. ونلاحظ في البيان السوي الذي له ضلع قاطع أن الوجه يشارك ضلعًا مع نفسه، لذا يكون غير قابل للتلوين.

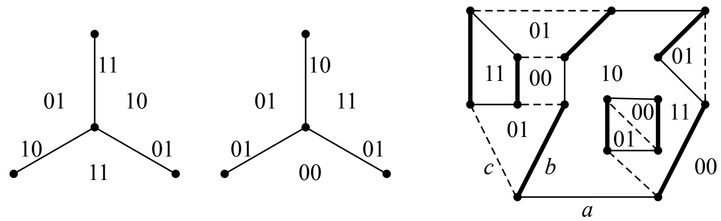
بما أن إضافة أضلاع لا تجعل التلوين العادي أسهل، فإنه لبرهنة نظرية الألوان الأربعة يكفي إثبات أن التثليثات جميعها قابلة للتلوين من الدرجة 4. وبصورة مكافئة، نستطيع تبيان أن ثنويات التثليثات جميعها قابلة للتلوين الوجهي من الدرجة 4. والثنوي G^* للتثليث السوي للبيان G هو بيان سوي مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 ومنتظم من الدرجة 3 (التمرين 11.1.6). لقد بين تايت أنه لمثل هذه البيانات، فإن التلوينات الوجهية من الدرجة 4 الفعلية مكافئة للتلوينات الضلعية من الدرجة 3 الفعلية.

2.3.7. نظرية: (Tait [1878]) إن البيان السوي المنتظم من الدرجة 3 المترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كان قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 4.

الإثبات: ليكن G مثل هذا البيان. افترض أولاً أن G قابلٌ للتلوين الوجهي من الدرجة 4؛ سوف نحصل على تلوين ضلعي من الدرجة 3. ارمز إلى الألوان الأربعة بأزواج ثنائية مرتبة: $c_0 = 00, c_1 = 01,\ c_2 = 10,\ c_3 = 11$. لوِّن $E(G)$ بتعيين اللون الناتج عن جمع اللونين c_i و c_j جمعًا إحداثيًّا بمقياس 2 للضلع الذي بين الوجهين اللذين لوناهما c_i و c_j. (لذلك $c_2 + c_3 = c_1$، على سبيل المثال). سوف نبين أن هذا هو تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3.

ولأن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، فإن كل ضلع يحد بوجهين مختلفين. لذا، فإن اللون 00 لن يكون حاصل جمع لونين. سوف نفحص أن الأضلاع تأخذ ألوانًا مختلفة عند كل رأس. فعند الرأس v، لاحظ أن ألوان الوجوه التي تحدها الأضلاع الثلاثة الواقعة على هذا الرأس تكون مختلفة. ولنقل إنها $\{c_i, c_j, c_k\}$، كما هو مبين أدناه. إذا كان اللون 00 لا ينتمي إلى هذه المجموعة، فإن مجموع أي لونين من هذه المجموعة يكون هو اللون الثالث، ولذلك تكون $\{c_i, c_j, c_k\}$ هي أيضًا مجموعة الألوان على الأضلاع. إذا كان $c_k = 00$، فإن c_i و c_j يظهران على ضلعين من هذه الأضلاع الثلاثة، ويكون لون الضلع الثالث $c_i + c_j$، وهذا اللون لا ينتمي إلى المجموعة

.$\{c_i, c_j, c_k\}$

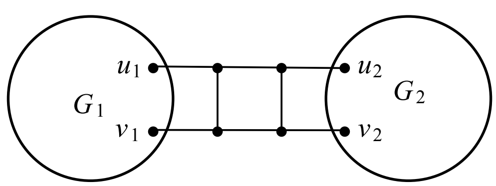


للاتجاه المعاكس، افترض أن G يملك تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 باستخدام الألوان a,b,c (مبينة بخط غامق، ومتصل، ومتقطع). لتكن E_a، E_b، E_c مجموعات الأضلاع التي تملك الألوان الثلاثة على الترتيب. سوف ننشئ تلوينًا وجهيًّا من الدرجة 4 باستخدام الألوان الأربعة التي عُرفت سابقًا. بما أن G منتظم من الدرجة 3، فإن كل لون يظهر على كل رأس، والاتحاد لأي مجموعتين من E_a، E_b، E_c منتظم من الدرجة 2 والذي يجعلها كاتحاد من حلقات منفصلة. وكل وجه من هذا البيان الجزئي هو اتحاد لوجوه من البيان الأصلي. ضع $H_1 = E_a \cup E_b$ و $H_2 = E_b \cup E_c$. لكل وجه في G، افترض اللون الذي إحداثيه i ($i \in \{1,2\}$) هو النوعية لعدد الحلقات التي تحتويه في H_i (0 للزوجي، 1 للفردي).

ندعي أن هذا هو تلوين وجهي فعلي من الدرجة 4، كما هو موضح أعلاه. لاحظ أن الوجهين F, F' اللذين يشتركان في الضلع e مختلفان؛ لأن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2. ينتمي الضلع e إلى حلقة C موجودة في واحدة من المجموعتين H_1، H_2 على الأقل (وفي المجموعتين إذا كان لـ e اللون b). ومن نظرية جوردان للمنحنيات، فإن أحد الوجهين F، F' يكون داخل C والآخر خارجها. إضافة إلى أن الحلقات الأخرى في H_1 و H_2 جميعها تفشل في فصل F و F'، وتتركهما على الجانب نفسه. لذلك، إذا كان e يملك أحد اللونين a،c أو b، فإن النوعية لعدد الحلقات التي تحتوي على F و F' تكون مختلفة في كلٍّ من H_1 و H_2، أو في كليهما، على الترتيب. لذا، فإن F و F' يستقبلان ألوانًا مختلفة في التلوين الوجهي الذي أنشأناه. ■

واستنادًا إلى هذه النظرية، فإن تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 لبيان منتظم من الدرجة 3 يُسَمَّى **تلوينَ تايت** (Tait coloring). لاحظ أن المسألة لإثبات أنَّ كلَّ بيان سوي منتظم من الدرجة 3 ومرتبط ضلعيًّا من الدرجة 2 قابلٌ للتلوين الضلعي من الدرجة 3 - تُخَفَّف لإثبات أنَّ كلَّ بيان سوي منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 قابلٌ للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

3.3.7.* تمهيدية: إذا كان G بيانًا منتظمًا من الدرجة 3، وترابطه الضلعي يساوي 2، فإنه يملك بيانين جزئيين G_1، G_2، والرؤوس $u_1, v_1 \in V(G_1)$ ، و $u_2, v_2 \in V(G_2)$ بحيث $u_1 \nleftrightarrow v_1$، وكذلك $u_2 \nleftrightarrow v_2$، و G يتلون من G_1، G_2، وسلم بطول ما يربط G_1 بـ G_2 عند الرؤوس u_1, v_1, u_2, v_2 كما هو مبين أدناه.



الإثبات: إذا كان G يملك مجموعة قطع ضلعية حجمها 2، والتي يقع الضلعان فيها أحدهما على الآخر، فإن الضلع الثالث الواقع على رأسهما المشترك هو ضلع قطع، وهذا يناقض أن $K' = 2$. لذلك، يمكن افتراض أن

النقاط الطرفية الأربعة في المجموعة القاطعة الصغرى xy, uv تكون مختلفة. إذا كان $x \nleftrightarrow y$ و $u \nleftrightarrow v$، فإن هذه الرؤوس الأربعة هي الرؤوس المطلوبة؛ والسلم يملك هذين الضلعين فقط.

عندما يكون $x \leftrightarrow y$، فإننا نوسع السلم (تعليل مشابه ينطبق عندما $u \leftrightarrow v$). ليكن w هو الجار الثالث لـ x و z هو الجار الثالث لـ y. إذا كان $w = z$، فإن الضلع الثالث الواقع على هذا الرأس يكون ضلع قطع. لذا، فإن $w \neq z$ والسلم يوسّع. إذاً كان $w \nleftrightarrow z$، فنكون قد أنهينا هذا الاتجاه. وبخلاف ذلك، نعيد التعليل حتى نحصل على زوج غير متجاور عند قاعدة السلم. ■

4.3.7.* نظرية: تكون البياناتُ المستوية المنتظمة من الدرجة 3 والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة 2 جميعُها قابلةً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كانت البياناتُ المستوية البسيطة المنتظمة من الدرجة 3 والمترابطة من الدرجة 3 جميعُها قابلةً للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

الإثبات: العائلة الثانية محتواة في الأولى. لذلك، فإنه يكفي لإثبات أن قابليةَ التلوين الضلعي من الدرجة 3 للبيانات جميعها في العائلة الأصغر تعطي النتيجةَ للعائلة الأكبر نفسَها أيضًا. وهنا نستخدم الاستقراء على $n(G)$.

خطوة الأساس ($n(G) = 4$): إن البيان السوي البسيط المنتظم من الدرجة 3 والمترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 والذي له 4 رؤوس على الأكثر هو K_4 فقط، وهو قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

خطوة الاستقراء ($n(G) > 4$): بما أن $K(G) = K'(G)$ عندما يكون G منتظمًا من الدرجة 3 (النظرية 11.1.4)، فنستطيع حصرَ اهتمامنا بالبيانات المنتظمة من الدرجة 3 التي ترابطها الضلعي 2. تعطينا تمهيدية 3.3.7 تفكيكًا لـ G إلى G_1، G_2، وسلمًا يربط بينهما. وطول السلم هو المسافة من G_1 إلى G_2.

لاحظ أن كلًّا من $G_1 + u_1v_1$ و $G_2 + u_2v_2$ منتظمٌ من الدرجة 3 ومترابطٌ ضلعيًّا من الدرجة 2. ومن فرضية الاستقراء، فإنهما قابلان للتلوين الضلعي من الدرجة 3؛ ليكن f_i تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 لـ $G_i + u_iv_i$. بدِّلْ أسماء الألوان بحيث يكون $f_1(u_1v_1) = 1$، وبحيث يكون $f_2(u_2v_2)$ مختارًا من $\{1,2\}$ ليكون لهمَا النوعية نفسها مثل طول السّلّم.

وبالرجوع إلى G، لون كل G_i كما في f_i. مبتدئًا من نهاية السلم عند G_1، لون درجات السلم باللون 3، ولون المسارات التي تشكل جوانب السلم تباديليًّا باللونين 1 و 2. الآن، لاحظ أن أضلاع السلم عند u_i و v_i تملك اللون $f_i(u_iv_i)$. وهكذا نكون قد ركبنا تلوينًا ضلعيًّا فعليًّا من الدرجة 3 لـ G. لذا، فإن نظرية الألوان الأربعة تختزل لإيجاد تلوينات (تايت) للبيانات المستوية المنتظمة من الدرجة 3 والمترابطة ضلعيًّا من الدرجة 3. العبارة التي تُعنى بوجود هذه التلوينات معروفة **بمخمّنة تايت** (Tait's conjecture) وهي مكافئة لنظرية الألوان الأربعة.■

نظرية جرينبرج (Grinberg's Theorem)

يوجد تلوين (تايت) لكل بيان هاملتوني منتظم من الدرجة 3 (التمرين 1). وقد اعتقد تايت أن هذا يكمل إثبات نظرية الألوان الأربعة؛ لأنه افترض أن كل بيان سوي منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 يكون هاملتونيًّا. وعلى الرغم من أن الفجوة في الإثبات لوحظت باكرًا، إلا أنه لم يُعطَ مثال مناقض بصورة صريحة إلا في العام 1946. فيما بعد، اكتشف جرينبرج [1968] شرطًا ضروريًّا بسيطًا أسهم في إيجاد الكثير من البيانات المستوية غير الهاملتونية المترابطة من الدرجة 3 والمنتظمة من الدرجة 3. إضافة إلى أن بيان جرينبرج متضمن في التمرين (16).

5.3.7. نظرية: (Grinberg [1968]) إذا كان G بيانًا سويًّا يخلو من العرى ويملك حلقة هاملتونية C، وله f_i' وجهًا بطول i داخل C، و f_i'' وجهًا بطول i خارج C، فإن $\sum_i (i-2)(f_i' - f_i'') = 0$.

الإثبات: آخذين في الحسبان الوجوه داخل C وخارجها بصورة منفصلة، فإننا نريد بيان أن $\sum_i (i-2)(f_i') = \sum_i (i-2) f_i''$.

fi لاحظ عدم وجود تغييرات على أحد جانبي المعادلة تؤثر في المجموع على الجانب الآخر. علاوة على ذلك، نستطيع أن نتحول من الداخل والخارج بإسقاط الغمس على كرة وثقب وجه د اخل C.

لذلك نحتاج – فقط– إلى إثبات أن $\sum_i(i - 2)f_i'$ ثابت. وفي حال عدم وجود أضلاع داخلية، فإن المجموع هو $n - 2$. ومع هذا بوصفها خطوة أساس، فإننا نثبت بالاستقراء على عدد الأضلاع الداخلية التي مجموعها $n - 2$ دائمًا.

افترض أن $\sum_i(i - 2)f_i' = n - 2$ عندما يوجد k ضلعًا داخل C. نستطيع الحصول على أي بيان له $k + 1$ ضلعًا داخل C بإضافة ضلع لمثل هذا البيان. والضلع المضاف يقطع وجهًا طوله r إلى وجهين طولهما s و t. لدينا $s + t = r + 2$؛ لأن الضلع الجديد يسهم في الوجهين الجديدين، في حين يسهم كل ضلع على الوجه القديم في أحد الوجوه الجديدة.

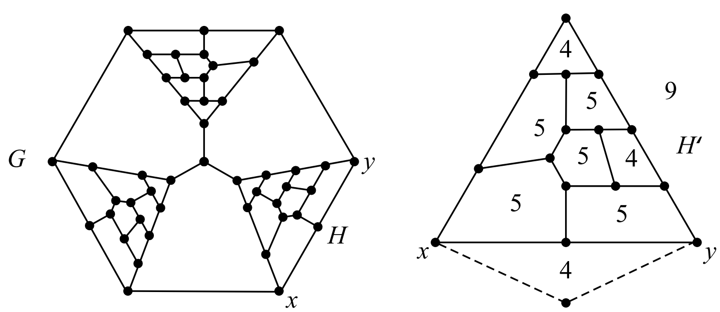
لا يوجد أي تغيير لأي مساهمات أخرى في المجموع. بما أن $(s - 2) + (t - 2) = (r - 2)$، فإن المساهمات من هذه الوجوه تبقى كما هي. ومن فرضية الاستقراء، فإن المجموع هو $n - 2$. ■

يعدُّ شرط جرينبرج ضروريًا؛ لذا يمكن استخدامه لإثبات أن البيانات غير هاملتونية. أحيانًا من الممكن أن تُبَسَّطَ التعليلات باستعمال الحساب المقياسي. إن أي عددين غير متطابقين بمقياس k يكونان غير متساويين.

نطبق هذا على أول بيان معروف بوصفه بيانًا سويًّا منتظمًا من الدرجة 3، ومترابطًا من الدرجة 3، وغير هاملتوني (Tutte [1946]). لقد استخدم توت تعليلاً لهذا الموضوع بالذات ليثبت أن هذا البيان غير هاملتوني. ولسنوات عديدة، كان هذا هو المثال الوحيد المعروف (انظر التمرين 17 لمعرفة المثال الأصغر المعروف الآن).

6.3.7. مثال: شرط جرينبرج وبيان توت. بيان توت G هو البيان الذي يظهر على اليسار أدناه. ليكن H رمزًا إلى كل مركبة نحصل عليها بحذف الرأس المركزي والأضلاع الثلاثة الطويلة. بما أنّ أيّ حلقة هاملتونية يجب أن تمر على الرأس المركزي في G، فعليها اجتياز نسخة واحدة من H على طول مسار هاملتوني يصل المدخلين الآخرين لـ H اللذين أسميناهما x و y.

وعليه، سوف ندرس أن بيانًا يملك حلقة هاملتونية إذا وفقط إذا كان H يملك مسارًا هاملتونيًّا من x إلى y. ويمكن الحصول على مثل هذا البيان H' (عن اليمين أدناه) بإضافة مسار من x إلى y طوله 2 من خلال رأس جديد.



يمتلك البيان السوي H' خمسة وجوه من الدرجة 5، وثلاثة وجوه من الدرجة 4، ووجهًا واحدًا من الدرجة 9. ولذلك يصبح شرط جرينبرج هو أن $2_{a4} + 3_{a5} + 7_{a9} = 0$ ، حيث $a_i = f_i' - f_i'' = 3$. بما أن الوجه غير المحدود يبقى دائمًا في الخارج، فإن المعادلة تختزل بمقياس 3 إلى $2_{a4} \equiv 7 \ mod \ 3$. وبما أن $f_4' + f_4'' = 3$، فإن الاحتمالات لـ a_4 هي 3 ،1+ ،1- ،3-. إن الاختيارَ الوحيدَ الذي يحقق $2_{a4} \equiv 7 mod 3$ هو $a_4 = -1$، والذي يتطلب أن يقع وجهان من الوجوه ذات الدرجة 4 خارج الحلقة الهاملتونية. على أي حال، تملك الوجوه من الدرجة

4 رأسًا درجته 2 لا يمكن أن يقع خارج الحلقة؛ بسبب أن الأضلاع الواقعة على الرأس الذي درجته 2 تفصل الوجه من الوجه الخارجي.

نستطيع أن نصل إلى تناقض أسرع بواسطة تقسيم جزئي لضلع ما لكل رأس درجته 2. وهذا لا يغير من وجود حلقة مولدة. إن البيان الناتج يملك سبعة وجوه من الدرجة 5، ووجهًا واحدًا من الدرجة 4، ووجهًا واحدًا من الدرجة 11. وتصبح المعادلة المطلوبة $3a_5 - 9 = (\pm 1).2$، والتي ليس لها حل؛ لأن الجانب الأيسر ليس من مضاعفات العدد 3. ■

لم نقدم خطوات منتظمة لنثبت عدم وجود حلول للمعادلات ذوات المتغيرات الصحيحة. إن تعليلاتنا التي تتضمن قابلية القسمة ما هي إلا خدع لتجنب سرد الحالات جميعها، على الرغم من أن مثل هذه الخدع تعطي النتيجة المرجوة غالبًا.

الترابط العالي يجعل تجنب الحلقات المولدة أمرًا صعبًا. لقد أثبت توت [1956] (وُسِّعَت بواسطة توماسن Thomassen [1983]) أن كل بيان سوي مترابط من الدرجة 4 هو هاملتوني. وكذلك خمَّن بارنت [1969] أن كل بيان سوي ثنائي الفرع منتظم من الدرجة 3 ومترابط من الدرجة 3 يكون هاملتونيًّا.

السناركات SNARKS (اختياري)

إن طريقًا آخر للاقتراب من فهم نظرية الألوان الأربعة هو دراسة أيّ البيانات المنتظمة من الدرجة 3 تكون قابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3. وفي المناقشة التي تسلِّط الضَّوء على البيانات المنتظمة من الدرجة 3 والبيانات التي ليس لها أضلاع قطع، فمن المناسب أن يكون لدينا صفات بسيطة لوصف هذه الخصائص.

7.3.7. تعريف: البيان الذي يخلو من الجسور (bridgeless graph) هو بيان ليس له أضلاع قطع. أما **البيان التكعيبي** (cubic graph) فهو بيان منتظم درجته 3.

8.3.7. مخمِّنة (مخمنة تلوين الأضلاع من الدرجة 3 – توت [1967]) يحتوي كلٌّ بيان تكعيبي خالٍ من الجسور وغير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 على تقسيم جزئي لبيان بيترسون.

لقد أثبتت المخمنة 8.3.7 ؛ ومثلها مثل نظرية الألوان الأربعة، حيث إن إثباتها الذي تمَّ بمساعدة الحاسوب يستخدم طرق التفريغ. وسوف يظهر الإثبات في سلسلة مكونة من خمسة بحوث لكل من روبرتسن، وساندرز، وسيمور، وثوماس [2001].

بما أن كل تقسيم جزئي لبيان بيترسون ليس سويًّا، فإن المخمنة 8.3.7 تعطي مخمنة تايت، لذا تعطي نظرية الألوان الأربعة. حيث إن إحدى الطرق الطبيعية للاقتراب من هذه المخمنة، والتي هي مثل فكرة الاختزال لنظرية الألوان الأربعة، هي اشتقاق الخصائص التي يجب أن يمتلكها أصغر مثال معاكس. وفي هذه اللغة، تنصُّ النظرية 4.3.7 أن المثال المعاكس الأصغر يجب أن يكون مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 3. وفي التمهيدية الآتية، سوف نجعل هذه العبارة دقيقة، ثَمَّ نحصل على خصائص عديدة أخرى.

9.3.7. تعريف: القطع الضلعي التافه (trivial edge cut): قطع ضلعي بحيث إن حذفه يعزل رأسًا مفردًا، أما القواطع الضلعية الأخرى **فليست تافهة** (nontrivial).

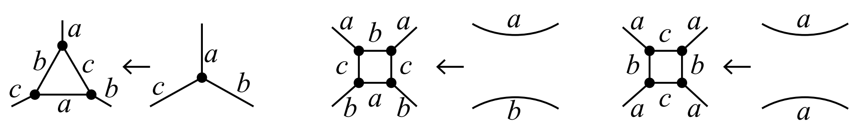
10.3.7. تمهيدية: إذا كان G بيانًا تكعيبيًّا غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 ، أو كان خصره أقل من 4 ، أو كان له قطع ضلعي غير تام من الدرجة 3، فإنه يحتوي على تقسيم جزئي لبيان تكعيبي أصغر غير قابل لتلوين ضلعي من الدرجة 3.

الإثبات: افترض أولاً أن G يملك قطعًا ضلعيًّا حجمه 2. كما نوقش في التمهيدية 3.3.7، فإن هذه الأضلاع لا تمتلك رؤوسًا مشتركة. إن حذف القطع الضلعي وإضافة ضلع لكل قطعة يعطي البيانات التكعيبية $G_1 + u_1v_1$

و $G_2 + u_2v_2$، وكما أسلفنا في تعليل النظرية 4.3.7، فإنه يوجد واحدٌ من هذه البيانات على الأقل يكون غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3. بما أنه يمكن تبديل الضلع المضاف بمسار من خلال القطعة الأخرى، فإن G يحتوي على تقسيم جزئي لهذا البيان الأصغر وغير القابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

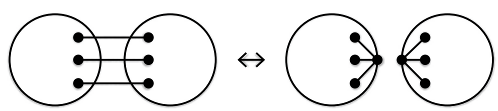
تاليًا، افترض أن G يحوي مثلثًا. ليكن G' هو البيان الذي نحصل عليه من G بتقليص المثلث إلى أحد الرؤوس. لاحظ أنّ أيّ تلوين ضلعي فعليٍّ من الدرجة 3 لـ G' يمكن أن يتوسع إلى تلوين ضلعي فعلي لـ G من الدرجة 3 كما هو مبين أدناه. فضلًا عن أنَّ G يحتوي على تقسيمٍ جزئي لـ G'، والذي حصل عليه بحذف ضلع من المثلث.

افترض أن G يحتوي على حلقة من الدرجة 4، ولكنه لا يحتوي على مثلث. ليكن G' البيانَ التكعيبيَّ الذي نحصل عليه من G بحذف ضلعين متعاكسين في الحلقة التي درجتها 4 وأن يستبدل بها المسارات الناتجة التي طولها 3 بأضلاع منفردة. بما أن G لا يملك مثلثًا، فإن الأضلاع الجديدة ليست عرى. إن أي تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3 لـ G' يؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3 لـ G من خلال الحالتين المبينتين أدناه. و يحتوي G أيضًا على تقسيم جزئي لـ G'. لذلك، فإن G' هو البيان الأصغر المنشود.



أخيرًا، افترض أن G يحتوي على قطع ضلعي من الدرجة 3 غير تافه $[S,\overline{S}]$. بما أننا نستطيع افتراض أنَّ G مترابط ضلعي من الدرجة 3، فإن الأضلاع الثلاثة للقطع تكون منفصلة زوجًا زوجًا. وكذلك البيانات H_1 و H_2 اللذان حصلنا عليهما بتقليص $G[S]$ أو $G[\overline{S}]$ إلى رأس مفرد منتظمان من الدرجة 3 أيضًا. إذا كان كلاهما قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3، فإنه يمكن إعادة تسمية الألوان لتتوافق على أضلاع القطع، وهذا يؤدي إلى تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3 لـ G. وهكذا، فإن أحد هذين البيانين على الأقل غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

بقي فقط أن نبين أن G يحتوي على تقسيم جزئي لـ H_1 و H_2. لتكن a,b,c هي النقاط الطرفية في $\overline{S}$ للأضلاع في القطع. بما أن G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3، فإن القطع هو رابطة، و $G[\overline{S}]$ مترابط (القضية 15.1.4). وهكذا فإن $G[\overline{S}]$ يحتوي على مسار P من a إلى b ومسار من c إلى P. إن إضافة هذه المسارات وأضلاع القطع إلى $G[S]$ يكمل تقسيم جزئي لـ H_1 (وتعامل H_2 بالطريقة نفسها). ■



11.3.7. تعريف: نعرِّف السنارك (Snark) على أنه بيان منتظم ثنائي الدرجة ، ومترابط من الدرجة 3، ويكون غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3، وخصره 5 على الأقل، ولا يملك قطعًا ضلعيًّا غير تافه من الدرجة 3. **والسنارك الأولي** (prime snark) هو سنارك لا يحتوي على تقسيم جزئي لسنارك أصغر.

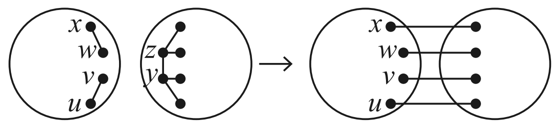
وبهذا نكون قد خففنا مخمنة التلوين الضلعي من الدرجة 3 لـ (توت) إلى العبارة التي تنصُّ على أن بيان بيترسون هو السنارك الأولي الوحيد. مرة أخرى، نلاحَظ أن المخمنة قد أُثْبِتَتْ. انظر (Robertson – Sanders – Seymour – Thomas [2001]).

بعد بيان بيترسون في عام 1898م، وُجِدَ 3 سناركات فقط حتى عام 1975م هي: سنارك بلانوسا (Blanuša) على 18 رأسًا [1946]، وسنارك ديسكارتس (Descartes) على 210 رؤوس [1948]، وسنارك

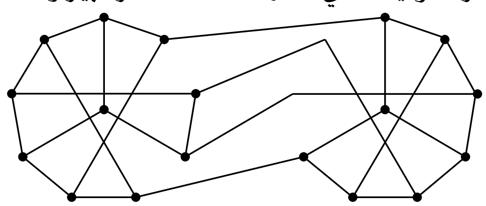
سزكرز (Szekeres) على 50 رأسًا [1973]؛ ممّا حثَّ مارتن جاردنر [1976] على اقتراح مصطلح "سنارك"، ليستحضر الندرة للكائن في لويس كارول "صيد السنارك".

وقد بين إسحق [1975] أن السناركات السابقة قد ظهرت من بيان بيترسون من خلال عملية تولد عدد لانهائي من عائلات السناركات.

12.3.7. تعريف: الضرب النقطي (dot product) للبيانين التكعيبيين G و H هو البيان التكعيبي المتشكل من $G+H$ بحذف الضلعين المنفصلين uv و wx من G، وحذف الرأسين المتجاورين y و z من H، وإضافة أضلاع من u و v إلى $N_H(y)-\{z\}$، ومن w و x إلى $N_H(z)-\{y\}$.

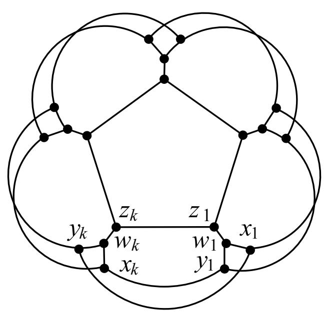


الضرب النقطي لسناركين هو سنارك (التمرين 23). إن تطبيق هذا على نسختين من بيان بيترسون يعطي سنارك بلانوسا المبين أدناه. وهذا البيان يملك قطعًا ضلعيًّا غير تافه من الدرجة 4. وقد قدم كوجول [1996] (Kochol) عملية أكثر عمومية تعطي سناركات ذات خصر كبير وخصائص ترابط عالية.



13.3.7. مثال: زهرة السناركات. لقد وجد إسحق أيضًا عائلة غير منتهية من السناركات لا تظهر من خلال الضرب النقطي (التمرين 21). وقد اكتشف جرينبرت بصورة مستقلة بأنها تملك $4k$ رأسًا، لـ k عدد فردي بحيث $k \geq 5$.

ابدأ مع ثلاث حلقات منفصلة من الدرجة k. ولتكن $\{x_i\}$، $\{y_i\}$، $\{z_i\}$ هي مجموعات الرؤوس الثلاثة، ضع لها دليلاً بصورة دائرية، ولكل i أضف رأسًا w_i مع $N(w_i)=\{x_i, y_i, z_i\}$. إن البيان الناتج G_k يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3. ليكن H_k هو البيان الذي نحصل عليه باستبدال الأضلاع x_kx_1، و y_ky_1 مع x_ky_1 و y_kx_1. إذا كان k فرديًّا و $k \geq 5$، فإن H_k هو سنارك. وإذا كان k زوجيًّا، فإن H_k قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3. لاحظ أن الرسم لـ H_k بحيث تكون $\{z_i\}$ هي حلقة مركزية تقترح اسم "زهرة سنارك". ■



التدفق وأغطية الحلقات (اختياري) (Flows and Cycle Covers (Optional))

تنص نظرية تايت (النظرية 2.3.7) على أن قابلية التلوين الضلعي من الدرجة 3 وقابلية التلوين الوجهي من الدرجة 4 هما متكافئان لثنويات التثليثات المستوية. وعندما نوسع هذا خارج إطار البيانات المستوية، فإننا نحتاج إلى مفهوم يصلح للبيانات جميعها، ويكون مكافئًا للتلوين الوجهي من الدرجة 4 على بيانات المستوى. وهناك معلومات إضافية حول هذا المفهوم، وكذلك حول السناركات تظهر في مقالة زانج [1997] (Zhang).

14.3.7. تعريف: نعرِّف التدفق (flow) على البيان G على أنه زوج (D, f) حيث:

a) D هي توجيه لـ G.
b) f هي دالة وزن على $E(G)$.
c) كل $v \in V(G)$ يحقق $\sum_{w\in N_D^+(v)} f(vw) = \sum_{u\in N_D^-(v)} f(uv)$

وتعرِّف التدفق من الدرجة k على أنه تدفق قيمته صحيحة بحيث $|f(e)| \le k - 1$ لكل $e \in E(G)$. يكون التدفق ليس صفرًا في أي مكان (nowhere – zero) أو **موجب** (positive) إذا كان $f(e)$ ليس صفرًا أو موجبًا على الترتيب، وذلك لكل $e \in E(G)$.

يختلف استعمال "تدفق" هنا بصورة ما عن استخدامه في الفصل 4. في كلا السياقين، تقترح الكلمة "تدفق" المحافظةَ على القيود المفروضة عند كل رأس، فضلًا عن أن الحد $k - 1$ على قيمة التدفق يستحضر مفهوم السِّعة.

تنويه: لاحظ أننا نستطيع تبديل التوجيه لجعل الأوزان جميعها موجبة.

15.3.7. قضية: تكون العبارات الآتية متكافئة لبيان G:

a) G يملك تدفقًا موجبًا من الدرجة k.
b) G يملك تدفقًا من الدرجة k ليس صفرًا في أي مكان.
c) G يملك تدفقًا ليس صفرًا في أي مكان من الدرجة k لكل توجيه لـ G.

الإثبات: إن تبديل التوجيه لضلع وتبديل إشارة وزنه في الوقت نفسه لا يؤثر في قيود المحافظة. ■

لاحظ أن وجود تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان لا يعتمد على اختيار التوجيه. ونستطيع أيضًا أن نأخذ التركيبات الخطية للتدفقات.

16.3.7. قضية: إذا كانت $(D, f_1), \ldots, (D, f_r)$ تدفقات على G و $g = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i$، فإنّ (D,g) تدفقٌ على G.

الإثبات: لكل $v \in V(G)$، لاحظ أنَّ محصلة التدفق الخارجة لـ v تحت تأثير f_i هي صفرٌ، لهذا فإنها صفرٌ تحت تأثير **g**.

17.3.7 قضية: لتدفق على G، تكون محصلة التدفق الخارجة لأي مجموعة $S \subseteq V(G)$ هي صفرًا. لذلك، فإن البيان الذي تدفقه لا يساوي صفرًا في أي مكان لا يملك ضلعَ قطعٍ.

الإثبات: نجمع محصلة التدفق الخارجة من الرؤوس الموجودة في S. إن الأضلاع التي تخرج من S تسهم بوزن موجب، أما الأضلاع التي تدخل إلى S فتسهم بوزن بسالب، في حين تسهم الأضلاع التي في داخل S بعدد موجب عند ذيولها وبعدد سالب عند مقدمتها. لذلك، فإن محصلة التدفق الخارجة لـ S هي مجموع محصلة التدفقات الخارجة للرؤوسً في S، والتي تساوي صفرًا. وهذا يؤدي إلى أن محصلة التدفقَ عبر أي قطع ضلعي تكون صفرًا. لذلك، لا يمكن أنْ تتكون من ضلع واحد له وزن غير صفري. لذا، سوف نحصر اهتمامنا بالبيانات التي ليس لها

أضلاع قطع (بيانات تخلو من الجسور). ما يميز التدفقات هنا عن الدورانات في الجزء 4.3 هو أننا منعنا أن يكون الصفرُ وزنًا. إن التدفقات التي ليست صفرًا في أي مكان تمكننا من توسيع نظرية تايت. وسنبدأ بتفسير البيانات الأويلرية في السياق للتدفقات التي ليست صفرًا في أي مكان. لذا، فإن خاصية الترابط لم تعدْ مهمة. ■

18.3.7. تعريف: يسمى البيان **بيانًا زوجيًا** (even graph) إذا كانت درجةُ كل رأس زوجيةً.

19.3.7. قضية: يكون للبيان تدفق من الدرجة 2 لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان البيانُ زوجيًّا.

الإثبات: إذا أعطينا تدفقًا من الدرجة 2 ولا يساوي صفرًا في أي مكان، فإننا سنحصل على تدفق موجب من الدرجة 2. وبما أنه تمَّ تحديد الوزن 1 لكل ضلع، فعلى التوجيه تحقيق أنْ يكون عدد الأضلاع الداخلة إلى كل رأس يساوي عدد الأضلاع الخارجة منه. وهكذا، فإن درجة كل رأس فيه تكون زوجية.

وبالعكس، عندما تكون درجة كل رأس زوجية، فإن كل مركبة تملك حلقة أويلرية. وتوجيه الأضلاع لتتبع مثل هذه الحلقة وتحديد الوزن 1 لكل ضلع يؤدي إلى تدفق موجب من الدرجة 2. ■

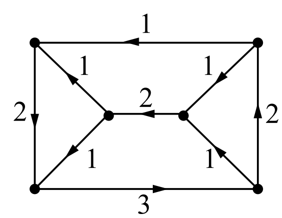
إن التدفقات من الدرجة 3 التي لا تساوي صفرًا في أي مكان هي أكثر دقة، حتى للبيانات المنتظمة من الدرجة 3.

20.3.7. قضية: (توت [1949] Tutte): يكون للبيان التكعيبي تدفق من الدرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان البيان ثنائي الفرع.

الإثبات: ليكن G بيانًا تكعيبيًا وثنائيًّا بالتجزئة الثنائية X, Y. إن كل بيان ثنائي الفرع منتظم يملك معاملاً من الدرجة 1. وَجِّه الأضلاع على المعامل من الدرجة 1 من X إلى Y، أعط كلًّا منها الوزن 2. ووجِّه الأضلاع المتبقية جميعها من Y إلى X، وأعط كلًّا منها الوزن 1. لاحظ أن التدفق في حَالتي الدخول والخروج عند كل رأس يساوي 2. لذلك، فهو تدفق من الدَرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان.

وبالعكس، ليكن G بيانًا تكعيبيًّا مع تدفق من الدرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان. بواسطة القضية 15.3.7، يمكن افتراض أن التدفق يكون 1 أو 2 على كل ضلع. وبما أن محصلة التدفق هي 0، فلا بدَّ أن يوجد ضلع تدفقه 2، وضلعان تدفقهما 1 على كل رأس. وهكذا فإن الأضلاع التي تدفقها 2 تشكل مواءمة. لتكن X مجموعةَ الذيول، و Y مجموعةَ المقدمات لهذه الأضلاع. بما أنَّ محصلةَ التدفق صفرٌ عند كل رأس، فإنَّ كلَّ ضلع تدفقه 2 يؤشِّر من X إلى Y، وكلّ ضلع تدفقه 1 يؤشِّر من Y إلى X. لذا، فإن X, Y تجزئتان ثنائيتان لـ G. ■

21.3.7. مثال: بما أنَّ بيان بيترسون تكعيبيٌّ وليس ثنائيَّ الفرع، فإنه لا يملك تدفقًا من الدرجة 3 لا يساوي صفرًا في أي مكان. وسوف نرى أنه لا يملك أيضًا تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان. سوف نعرض أدناه تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان، وذلك في البيان البسيط المنتظم من الدرجة 3 وهو $C_3 \square K_2$.

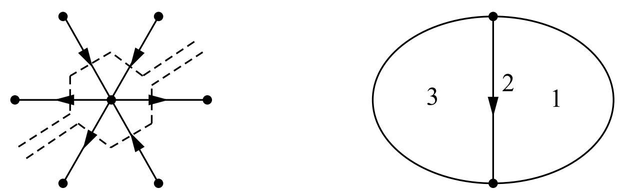


ولكي نفهم الثنوية بين التدفقات والتلوين؛ سوف نميز بيانات المستوى مع التدفقات من الدرجة k التي لا تساوي صفرًا في أي مكان.

22.3.7. نظرية : (توت ([Tutte [1954b]: يكون بيان المستوى الخالي من الجسور قابلاً للتلوين الوجهي من الدرجة k إذا وفقط إذا كان يملك تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان.

الإثبات: (ينجر [1983] Younger، حُسِّن من قبل سيمور (Seymour)) . ليكن f تدفقًا على بيان مستوى G. نعرف دالة g على مجموعة الوجوه بوضع $g(F)$ لتكون محصلة التدفق المجمعة بالتحرك من الوجه F خروجًا إلى الوجه غير المحدود. في كل مرة نقطع ضلع e سوف نعدّ $+f(e)$ إذا كان e موجهًا نحو اليمين،ونعدّ $-f(e)$ إذا كان e موجهًا نحو اليسار. والقيمة التي تُحدَّدُ للوجه الخارجي هي 0.

لاحظ أنَّ الدالةَ g حسنةُ التعريف؛ بمعنى أن $g(F)$ تكون مستقلة عن مسلكنا إلى الوجه الخارجي. حيث نستطيع تغيير مسلكنا إلى أي مسلك آخر بتغيير متتابع حيثما نذهب "بالطريق الآخر" حول رأس ما v (عن اليسار). إنَّ التغيير يزيد التراكم لهذا الجزء أو ينقصه بمقدار محصلة التدفق الخارجة لـ v التي تكون 0. ويكون الفرق بين القيم على الوجوه التي لها ضلع مشترك e هو $\pm f(e)$. لذلك، فإن الدالة g تكون مناسبة إذا وفقط إذا كان f لا يساوي صفرًا في أي مكان.



وبالعكس، سنحول العملية من تلوين وجهي g للحصول على تدفق (عن اليمين). بالنظر إلى وجه F' من وجه F عبر ضلع e، نضع $f(e) = g(F) - g(F')$ إذا كان e يشير إلى يميننا، أو نضع $f(e) = g(F') - g(F')$ إذا كان e يشير إلى يسارنا. إنَّ جمع هذه القيم على الأضلاع الواقعة على رأس v يبين أنَّ f تدفقٌ لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان g تلوينًا وجهيًّا فعليًّا.

لذلك، فإن التدفقات تقابل التلوينات الوجهية. والتلوين الوجهي يكون فعليًّا إذا وفقط إذا كان التدفق لا يساوي صفرًا في أي مكان. وإذا كان التدفُّقُ تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإن تخفيف الأوسمة في التلوين لصفوف تطابق في $\{0,1,...,k - 1\}$ يعطي تلوينًا فعليًّا من الدرجة k. وبالعكس، فإن تلوينًا وجهيًّا فعليًّا من الدرجة k يستخدم هذه الألوان لينتج تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان. ■

لاحظ أن الارتباط بين الوسم الوجهي والتدفقات في النظرية 22.3.7 يكون متحققًا عندما تأتي الأوسمة من أي زمرة أبيلية. مطبقًا باستخدام الزمرة للأزواج المرتبة الثنائية تحت عملية الجمع ((0,0) هو العنصر المحايد)، فإن العبارة المثبتة باستخدام هذه الحجة هي نظرية تايت نفسها.

بما أننا نستطيع دراسة التدفقات على البيانات جميعها، فإننا نستطيع افتراض أن مسألة التدفق مفهومًا ثنويًّا عامًّا للتلوين الرأسي. "لا يساوي صفرًا في أي مكان" مشابهة لـ "فعليّ". وبما أن كل تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرا في أي مكان هو تدفق من الدرجة $k + 1$ لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإن المسألة الطبيعية هي تصغير k بحيث يملك G تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان. ويُسمَّى هذا العدد الأصغر **عددَ التَّدفُق(flow number)** لـ G بالتشابه مع "العدد اللوني". وبما أننا نقول إن G "قابلٌ للتلوين من الدرجة k" عندما يملك تلوينًا فعليًّا من الدرجة k، فإن التشابه الطبيعي يكون بقول إن G "**قابلٌ للتدفق من الدرجة k**" بدلاً من قولنا أنَّ G "يملك تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان". وبما أنَّ هذه الصياغة ليست شائعة بعد؛ لذا سوف نستعملها بصورة ضئيلة.

باستخدام نظرية تايت، فإن النظرية 22.3.7 تنص على أن البيان التكعيبي السوي الخالي من الجسور يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كان يملك تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرا في أي مكان. ونريد أن نوسّع هذا الارتباط باسقاط الشرط على السَّويَّة. إنَّ ملاحظة بسيطة حول النوعية سوف تكون مفيدة.

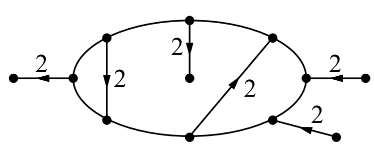
23.3.7. تمهيدية: في تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان، كلُّ رأس يقع على عدد زوجي من الأضلاع التي أوزانها فردية.

الإثبات: بما أنه عند كل رأس يكون المجموع الكلي للأوزان على الأضلاع الداخلة يساوي المجموع الكلي للأوزان على الأضلاع الخارجة، فإن مجموع الأوزان يكون زوجيًّا. ■

24.3.7. نظرية: ليكن G بيانًا تكعيبيًّا. إذا كان G يملك تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإنه يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

الإثبات: بواسطة القضية 15.3.7، نستطيع افتراض أن G يملك تدفقًا موجبًا من الدرجة 4 (D,f). وهكذا، فإن $f(e)\in\{1,2,3\}$ لكل ضلع e. ومن التمهيدية 23.3.7، فإن كل رأس يقع بالضبط على ضلع واحد فقط وزنه 2. لذلك، فإن الأضلاع التي وزنها 2 تشكل معاملاً من الدرجة 1 في G، و يخلف حذفها اتحادًا مكونًا من حلقات منفصلة. ولإكمال التحليل إلى العوامل من الدرجة 1 (ولذلك تلوين ضلعي فعلي من الدرجة 3)، فإنه يكفي أن نبين أنَّ طول كل حلقة من هذه الحلقات زوجيٌّ.

لتكن C حلقة من هذه الحلقات. إن الأضلاع التي أوزانها 2 و تقع على رؤوس لـ C تكون أوتارًا، أو تربط $V(C)$ مع $\overline{V(C)}$. وهذه الأوتار تشغل مجموعة جزئية من $V(C)$ حجمها زوجي. لذلك، يكفي أن نبين أنَّ عددَ الأضلاع بين $V(C)$ و $\overline{V(C)}$ زوجيٌّ. إن وزن هذه الأضلاع جميعها يساوي 2. بما أن محصلة التدفق الخارجة لـ $V(C)$ يجب أن تكون 0، والأضلاع جميعها بين $V(C)$ و $\overline{V(C)}$ تملك تدفقًا 2، فإن عدد الأضلاع الخارجة من $V(C)$ يجب أن يساوي عدد الأضلاع الداخلة إليها. ■



بما أن بيان بيترسون غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3، فإن النظرية 24.3.7 تعطي أنه غير قابل للتدفق من الدرجة 4. إن وجود تدفقات من الدرجة k لا تساوي صفرًا في أي مكان محافظ عليها في أي تقسيم جزئي؛ فعندما يقسم ضلع e وزنه j في تدفق من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان بأن يستبدل به مسار طوله 2 موجه نحو الاتجاه نفسه مع وزن j على كلا الضلعين يعطي تدفقًا من الدرجة k لا يساوي صفرًا في أي مكان في البيان الجديد. لذلك فإن التقسيمات الجزئية لبيان بيترسون أيضًا لا تملك تدفقات من الدرجة 4 لا تساوي صفرًا في أي مكان.

إن عكس النظرية 24.3.7 هو صحيح أيضًا ولكنه غير تافه؛ لأنه ليس بالإمكان معالجة صفوف الألوان بوصفها مجموعات أضلاع لوزن ثابت وتوجيه البيان لعمل هذا تدفقًا من الدرجة 4. مبدئيًّا، يوجدُ في البيان $C_3 \square K_2$ في المثال 21.3.7 تلوينٌ ضلعيٌّ فعليٌّ واحدٌ فقط من الدرجة 3. وعند وسم صفوف الألوان بـ 1، 2، 3 فإنه من غير الممكن الحصول على تدفق من الدرجة 4. في التدفق الموجب من الدرجة 4 في المثال 21.3.7، لاحظ أن الأضلاع ذات الأوزان 1 لا تشكل مواءمة.

وعلى الرّغم من ذلك، فإن النظرية الآتية تضمن تدفقات من الدرجة 4 لا تساوي صفرًا في أي مكان في

البيانات التكعيبية القابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3. وهذا التمييز أكثر عمومًا؛ لأنه لا يتطلب انتظامًا.

25.3.7 نظرية : يملك البيان تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان البيانُ اتحادَ بيانين زوجيين.

الإثبات: ليكن G_1، G_2 بيانين زوجيين مع $G = G_1 \cup G_2$. وليكن D توجيهًا لـ G محصورًا على D_i في G_i. ومن القضيتين؛ 19.3.7 و 15.3.7، نجد أن G_i يملك تدفقًا (D_i , f_i) من الدرَجة 2 لا يساوي صفرًا في أي مكان. وسِّع f_i إلى $E(G)$ بوضع $f_i(e) = 0$ لكل $e \in E(G) - E(G_i)$. واجعل $f = f_1 + 2f_2$. إنَّ دالةَ الوزن هذه فرديةٌ على $E(G_1)$، وتكون ± 2 على $E(G) - E(G_1)$، لذلك فهي لا تساوي صفرًا في أي مكان، ومقدارها يكون 3 على الأكثر دائمًا. وبواسطة القضية 16.3.7، فإن (D,f) يكون تدفقًا؛ وهكذا فإنه يكون تدفقًا من الدرجة 4 لا يساويًّا صفرًا في أي مكان.

وبالعكس، ليكن (D,f) تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان على G. وليكن $E_1 = \{e \in E(G) : f(e)$ فرديًّا$\}$. بواسطة التمهيدية 23.3.7، فإن E_1 تشكل بيانًا جزئيًّا زوجيًّا من G. لذا، يوجد تدفق (D_1, f_1) على E_1 من الدرجة 2 ليس صفرًا في أي مكان، حيث D_1 تتوافق مع D. وسِّع f_1 إلى $E(G)$ بوضع $f_1(e) = 0$ لكل $e \in E(G) - E_1$؛ الآن (D,f_1) هو تدفق من الدرجة 2 على G.

عرف f_2 على $E(G)$ بوضع $f_2 = (f - f_1)/2$. من قضية 16.3.7، فإن (D,f_2) يكون تدفقًا على G. بما أن $f(e) - f_1(e)$ يكون زوجيًّا دائمًا، فإنه يكون تدفقًا صحيحًا. وبواسطة التمهيدية 23.3.7، فإن المجموعة $E_2 = \{e \in E(G) : f_2(e)$ فردية$\}$ تشكل بيانًا جزئيًّا زوجيًّا من G. لكل $e \in E(G) - E_1$، فإن $f(e) = \pm 2$ و $f_1(e) = 0$، الذي يؤدي إلى أن $f_2(e) = \pm 1$، لذلك فإن $E(G) - E_1 \subseteq E_2$. الآن أصبح G اتحاد بيانين جزئيين زوجيين. ■

26.3.7. نتيجة. إذا كان G بيانًا تكعيبيًّا، فإنه يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3 إذا وفقط إذا كان يملك تدفقًا من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان.

الإثبات: كل بيان تكعيبي قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 هو اتحاد بيانين جزئيين زوجيين: الأضلاع باللونين 1 و 2، والأضلاع باللونين 1 و 3. ■

في ضوء النظرية 22.3.7، فإن النتيجة 26.3.7 تعمِّم نظرية تايت. ولقد رأينا أن التقسيمات الجزئية لبيان بيترسون غير قابلة للتدفق من الدرجة 4. من خلال البيانات التي تخلو من الجسور، فإن مخمنة توت التي تستثني مثل هذه البيانات الجزئية تعطي تدفقات من الدرجة 4 ليست صفرًا في أي مكان.

27.3.7. مخمنة : (مخمنة توت للتدفق من الدرجة 4 − توت [Tutte [1966b): كلُّ بيان يخلو من الجسور ولا يحتوي على تقسيم جزئي لبيان بيترسون يكون قابلًا للتدفق من الدرجة 4. ■

بما أن كل بيان يحتوي على تقسيم جزئي لبيان بيترسون يكون غير سوي، فإن مخمنة توت للتدفق من الدرجة 4 تعطي نظرية الألوان الأربعة. ولأنَّ التدفقات من الدرجة 4 التي ليست صفرًا في أي مكان مكافئة للتلوينات الضلعية من الدرجة 3 على البيانات التكعيبية، فإن مخمنة التدفقات من الدرجة 4 تعطي أيضًا مخمنة التلوين الضلعي من الدرجة 3 (بُرْهِنَتْ سابقًا). أمل الباحثون في إيجاد إثبات مناسب لمخمنة التدفق من الدرجة 4 لتوت بوصفها طريقة للحصول على إثبات أقصر لنظرية الألوان الرابعة.

سوف ننهي هذا الجزء بمناقشة العديد من المخمنات المشهورة الأخرى التي تتعلق بالمخمنات التي ذُكِرَتْ. كل تدفق من الدرجة k ليس صفرًا في أي مكان هو تدفق من الدرجة $k + 1$ ليس صفرًا في أي مكان. لذلك، يجب

أن تكون شروط التدفقات من الدرجتين 3 و 5 أكثر تقييدًا أو أقل على الترتيب من شروط التدفق من الدرجة 4 الذي لا يساوي صفرًا في أي مكان. هناك نصوص لمخمنة التدفق من الدرجة 3 لتوت في شتاينبرج [1976] (Steinberg) وفي بوندي – مورتي [1976، مسألة دون حلّ رقم 48] (Bondy – Murt).

28.3.7. مخمنة : (مخمنة تدفق من الدرجة 3 لتوت): يملك كلُّ بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 4 تدفقًا من الدرجة 3 ليس صفرًا في أي مكان. ■

29.3.7. مخمنة : (مخمنة تدفق من الدرجة 5 لتوت [1954b] Tutte) يملك كلُّ بيان يخلو من الجسور تدفقًا من الدرجة 5 ليس صفرًا في أي مكان. ■

أثبت كلٌّ من كلباترك ([1975] Kilpatrick وجايجر [1979] Jaeger) أن كل بيان يخلو من الجسور يكون قابلاً للتدفق من الدرجة 8. في حين أثبت سيمور [1981] (Seymour) أن هذه البيانات تكون قابلة للتدفق من الدرجة 6. وسنضع الأفكار لنظرية التدفق من الدرجة 8 باختصار ؛ لأنَّ التفاصيل مطلوبة في التمارين.

لاحظ أن كلاً من الإثباتين يُخَفَّفُ إلى حالة الترابط الضلعي من الدرجة 3، بإثبات أن أصغر بيان يخلو من الجسور ولا يحتوي على تدفق من الدرجة k ليس صفرًا في أي مكان يكون بسيطًا ومترابطًا من الدرجة 2، ومترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 3 (تمرين 26). إنَّ الخطوة الرئيسة بعد ذلك تكون بالتعبير عن بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3 بوصفه اتحادًا لبيانات جزئية مع تدفقات حسنة. ثمَّ نطبق التعميم الآتي لنظرية 25.3.7: إذا كان G_1 يملك تدفقًا من الدرجة k_1 ليس صفرًا في أي مكان، و G_2 يملك تدفقًا من الدرجة k_2 ليس صفرًا في أي مكان، فإن $G_1 \cup G_2$ يملك تدفقًا k_1k_2 ليس صفرًا في أي مكان (التمرين 24). (يتحقق العكس أيضًا، ولكننا لا نحتاج إليه).

لنظرية التدفق من الدرجة 8، يكفي إثبات أن كل بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3 يمكن كتابته في صورة اتحاد لثلاثة بيانات جزئية زوجية. أولاً، إضافة نسخة إضافية لكل ضلع في G يعطي بيانًا G' مترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 6. لذا، فإن نظرية الشجرة – والتعبئة (Tree – Packing Theorem) لـ ناش ووليامز (Nash – Williams) (النتيجة 59.2.8) تعطي ثلاث أشجار مولدة منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا في G'. وهذه الأشجار تقابل ثلاث أشجار مولدة في G. وبما أننا حصلنا عليها كأشجار منفصلة ضلعيًّا في G'، فإن كل ضلع في G يظهر على الأكثر في شجرتين.

في داخل أي شجرة مولدة لـ G، نستطيع إيجاد **بيان جزئي نوعي** (parity subgraph) لـ G، يعني بيانًا جزئيًّا مولدًا H بحيث $d_H(v) \equiv d_G(v) \bmod 2$ لكل $v \in V(G)$ (تمرين 25). إنَّ المتممةَ في داخل $E(G)$ لمجموعة الأضلاع لبيان جزئي نوعي هي بيانٌ جزئيٌّ زوجيٌّ في G. وبما أن الشجرات المولدة الثلاث خاصتنا لا تملك ضلعًا مشتركًا، فإن المتممات لبياناتها الجزئية النوعية تعبر عن G بوصفه اتحادًا لثلاثة بيانات جزئية زوجية. ومن القضية 19.3.7، فإن كل واحدة تملك تدفقًا من الدرجة 2 ليس صفرًا في أي مكان. لذا، فإن G يملك تدفقًا من الدرجة 8 ليس صفرًا في أي مكان.

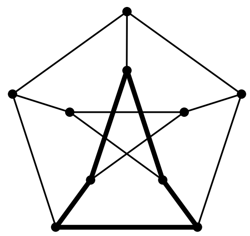
إن طريق الحل في سيمور [1981] (Seymour) مشابه؛ حيث يكون التعبير عن بيان مترابط ضلعيًّا من الدرجة 3 بوصفه اتحادًا لبيان زوجي، وبيان قابل للتدفق من الدرجة 3. وهذا يستخدم مفاهيم أكثر دقة، تتضمن مفهومًا "مقياسيًّا" (modular) للتدفقات التي قدمت أصلاً من قِبَل توت [1949]. إضافة إلى أن إثبات سيمور قد حُسِّنَ من قِبَل ينجر [1983] (Younger) وجايجر [1988] (Jaeger). لتفاصيل أكثر. انظر زانج [1997] (Zhang).

لقد أثبت كلمنز [1984] (Celmins) أنه إذا كانت مخمنة التدفق من الدرجة 5 غير صحيحة، فإن أصغر مثال مناقض هو سنارك الذي يملك خصرًا 7 على الأقل، ولا يملك قاطعًا ضلعيًّا غير تافه له أربعة أضلاع.

سنصف مخمنة إضافية أخرى ومدى علاقتها بالمواضيع السابقة. في البيان السوي المترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، فإنَّ الحدودَ الوجهيةَ جميعَها حلقاتٌ. وكل ضلع يقع في حد لوجهين. لذلك، فإن الحلقات الوجهية معًا تغطي كلَّ ضلع مرتين بالضبط. ومن المنطقي أن نسأل عما إذا كان يمكن الحصول على مثل هذا الغطاء لبيانات ليست سويَّة.

30.3.7. تعريف: **الغطاء** (cover) لبيان G هو قائمة من البيانات الجزئية التي يكون اتحادها G. أمّا **الغطاء المزدوج** (double cover) فهو غطاء يظهر كل ضلع في بيانين جزئيين بالضبط في القائمة. في حين يعرّف **الغطاء المزدوج الحلقي** (cycle double cover) (CDC) على أنه غطاء مزدوج يتكون من حلقات.

31.3.7. مثال: الحلقة الخارجية من الدرجة 5 مع الدورانات الخمسة للحلقة من الدرجة 5 كما هو مبين في الشكل أدناه يشكلان غطاءً مزدوجًا حلقيًّا لبيان بيترسون. وكذلك فإنَّ بيان بيترسون يملك غطاءات زوجية حلقية باستخدام حلقات بأطوال أخرى (التمرين 36). ■



بما أن أضلاع القطع لا تظهر في حلقات، فإن البيانات التي تخلو من الجسور هي وحدها التي تملك غطاءات مزدوجة حلقية.

32.3.7. مخمنة: مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي - سزكرز (Szekeres) [1973]، سيمور (Seymour) [1979b]: يملك كلّ بيان يخلو من الجسور غطاء مزدوجًا حلقيًّا.

قد يعتقد القارئ أن مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي تتبع مباشرة من استخدام الطمور على السطوح التي لها مقابض، ولكن مثل هذه الطمور يمكن أن تملك حدودًا وجهية تسير على الضلع نفسه مرتين. تشير **مخمنة الطمر القوي** (Strong Embedding Conjecture) إلى أن كل بيان مترابط من الدرجة 2 يملك طمرًا (على سطح ما) بحيث يكون حدُّ كل وجه حلقةً أحاديةً. وتطبيق هذا على كل قالب لبيان مترابط ضلعيًا من الدرجة 2 سيعطي مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي.

في مناقشة مخمنة الغطاء المزدوج الحلقي، يجب أن ننبه القارئ إلى أن المصطلحات قد تتعارض معًا لسوء الحظ. في هذا الكتاب، نستخدم التعريف للحلقة الذي يكون مشتركًا في مناقشة كل من: الترابط، والخصر، والمحيط، والسَّويَّة.. إلخ. في هذه اللغة، الدارةَ صفٌّ تكافؤ لمسرب مغلق (إهمال رأس البداية)، أما البيان الزوجي فهو بيان درجات رؤوسه جميعها زوجية. وتغير الدارة أو تجتاز بيانًا زوجيًّا مترابطًا.

الأدبيات حول الغطاءات الحلقية عمومًا تتناول هذه المصطلحات، فمثلاً، مصطلح "الدارة" يعني حلقة، ومصطلح "حلقة" يعني بيانًا زوجيًّا. بما أن مصطلح "بيان زوجي" يثير تعريفه بقوة، فإننا نأمل أن يكون استخدامنا واضحًا.

الاستخدام البديل يظهر في نصوص أخرى في الماترويد (الجزء 2.8)، حيث إنّ الدارات مجموعاتٌ مستقلة أصغرية، وفي الماترويد الحلقي لبيان ما، تكون هذه المجموعات هي المجموعات الضلعية لهذه الحلقات. والفضاء

الحلقي لبيان ما هو فضاء متجهي (باستخدام $\{1,0\}$) حيث تكون الإحداثيات مدلول عليها من خلال الأضلاع والمتجهات التي تقابل البيانات الجزئية الزوجية.

تنصُّ مخمنة غطاء مزدوج حلقيّ الأصلية على أن كل بيان يخلو من الجسور يملك غطاءً مزدوجًا من خلال بيانات جزئية زوجية. وهذا التعبير مكافئ لتعبيرنا: نظرًا إلى أن كل بيان زوجي هو اتحاد حلقات منفصلة ضلعيًّا.

وهكذا ربما نبحث عن غطاء مزدوج باستعمال عدد قليل من البيانات الجزئية الزوجية، إذ إن الحلقات في غطاء مزدوج حلقي هي بيانات جزئية زوجية. وعندما تكون الحلقات منفصلة ضلعيًّا زوجًا زوجًا، فمن الممكن ضمّها لتشكل بيانًا جزئيًّا زوجيًّا مفردًا. وهذا يقود إلى الترابط بين التدفقات الصحيحة والغطاءات المزدوجة الحلقية.

33.3.7. قضية: يملك البيان تدفقًا من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًّا مُشَكِّلاً ثلاثة بيانات جزئية زوجية.

الإثبات: تنصُّ النظرية 25.3.7 على أن بيانًا ما يملك تدفقًا من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان عبارة عن اتحاد بيانين جزئيين زوجيين E_1، E_2. ضع $E_3 = E_1 \Delta E_2$. تساوي الدرجة عند كل رأس v في E_3 مجموع الدرجات في E_1 و E_2 ناقص ضعفي عدد الأضلاع المشتركة الواقعة على هذا الرأس؛ لذلك فهذه الدرجة زوجية. وهكذا، فإن E_3 يكون بيانًا جزئيًّا زوجيًّا، ويحتوي بالضبط على الأضلاع التي تظهر في واحدة من $\{E_2,E_1\}$ فقط. وهكذا، فإن التفككات الحلقية لـ E_1، E_2، E_3 تُضَمُّ لتعطي غطاءً مزدوجًا حلقيًّا.

وبالعكس، إذا شَكَّلَ غطاءٌ مزدوج حلقيّ ثلاثة بيانات جزئية زوجية، فإن إهمال أحدها يخلف البيان الذي يمكن التعبير عنه بوصفه اتحادًا لبيانين جزئيين زوجيين. وهكذا، فإنه يوجد تدفق من الدرجة 4 ليس صفرًا في أي مكان ■

لتكن $\mathbf{P}$ تدل على عائلة البيانات التي لا تحتوي على تقسيم جزئي لبيان بيترسون. بواسطة القضية 33.3.7، فإن مخمنة التدفق من الدرجة 4 لتوت تؤدي إلى أن كل بيان في $\mathbf{P}$ يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًّا. لاحظ أن السباغ، وجودين، وزانج (Alspach – Goddyn – Źhang) [1994] قد أثبتوا نتيجة عميقة تعطي غطاءات مزدوجة حلقية لبيانات في P. (وقد أثبتوا أيضًا أن خاصية غطائية أقوى تتحقق لـ G إذا وفقط إذا كان $G \in \mathbf{P}$). وفي ضوء القضية 33.3.7، فإن هذه تعدُّ نتيجة جزئية في اتجاه مخمنة التدفق من الدرجة 4 لتوت. فضلًا عن أنَّ لمخمنة غطاء مزدوج حلقيّ أيضًا علاقة بالسناركات؛ حيث أثبت جودين [1985] (Goddyn) أنه إذا كانت مخمنة غطاء مزدوج حلقيّ غير صحيحة، فإن أصغر مثال مناقض هو سنارك ذو خصر يساوي 8 على الأقل.

تمــــارين (Exercises)

1.3.7. (–) أثبت أن كل بيان هاملتوني منتظم من الدرجة 3 يملك تلوينَ تايت.

2.3.7. (–) اعرض بيانات بسيطة منتظمة من الدرجة 3 تكون:

a) سوية، ولكنها غير قابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

b) مترابطة من الدرجة 2، ولكنها غير قابلة للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

c) سوية مع ترابط 2، ولكنها ليست هاملتونية.

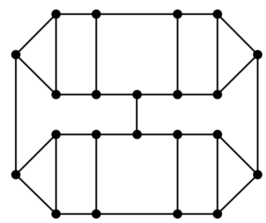
• • • • •

3.3.7. أثبت أن كل بيان مستوٍ أعظمي غير K_4 يكون قابلًا للتلوين الوجهي من الدرجة 3.

4.3.7. دون استخدام نظرية الألوان الأربعة، أثبت أن كل بيان مستوٍ هاملتوني يكون قابلاً للتلوين الوجهي من الدرجة 4 (دون أيّ افتراض حول درجات الرؤوس).

5.3.7. أثبت أنّ أي بيان مستوٍ مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2 يكون قابلاً للتلوين الوجهي من الدرجة 2 إذا وفقط إذا كان أويلريًّا.

6.3.7. استخدم نظرية تايت (النظرية 2.3.7) لتثبت أن $\chi'(G) = 3$ للبيان G المبيّن أدناه.

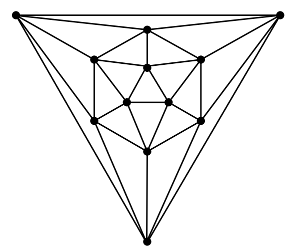


7.3.7. (!) ليكن G تثليثًا مستويًا:

a) أثبت أن الثنوي G^* يملك معاملاً من الدرجة 2.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أن الرؤوس في G من الممكن أن تُلَوَّنَ بلونين بحيث يملك كل وجه رؤوس كلا اللونين. (مساعدة: استخدم الفكرة في الإثبات لنظرية (2.3.7) [1974] Burstein، [1975] Penaud).

8.3.7. (+) لقد خُمِّنَ أن كل تثليث سوي يملك عددًا لونيًّا ضلعيًّا يساوي $\Delta(G)$، وقد أُثبت هذا عندما تكون $\Delta(G)$ كبيرة بما فيه الكفاية. أثبت أن $\chi'(G) = \Delta(G)$ للبيان ذي العشرين وجهًا، كما هو مبين أدناه.



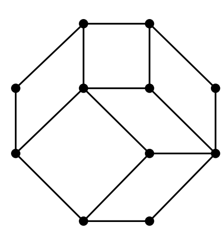
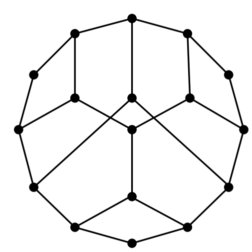
9.3.7. أثبت أن تلوينًا فعليًّا من الدرجة 4 للبيان ذي العشرين وجهًا يَستعمل كل لون 3 مرات بالضبط.

10.3.7. لقد أثبت ويتني [1931]أن كل تثليث سوي مترابط من الدرجة 4 يكون هاملتونيًّا. استخدم هذا لتُخَفِّفَ مسألة الألوان الأربعة إلى المسألة التي تثبت أنَّ كلَّ بيان سوي هاملتوني قابلٌ للتلوين من الدرجة 4.

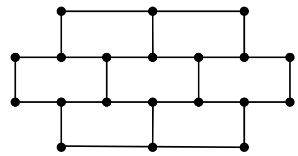
11.3.7. جد بيانًا سويًّا مترابطًا من الدرجة 5. هل يوجد بيان سوي مترابط من الدرجة 6؟

12.3.7. ليكن G تثليثًا مستويًا. أثبت أنه يملك تجزئة رأسية إلى مجموعتين محدثًا غابات إذا وفقط إذا كان G^* هاملتونيًّا. ([1970] Stein)

13.3.7. (!) لكل من البيانين السويين أدناه، جد حلقة هاملتونية أو استعمل المستوية (شرط جرينبرج) لتثبت أنه ليس هاملتونيًّا.

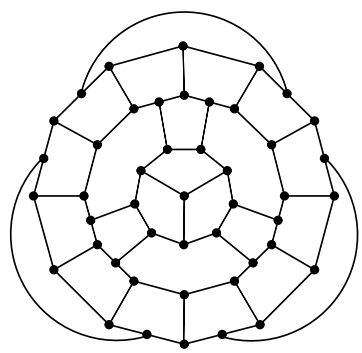
 

14.3.4. ليكن G البيانَ المرسوم أدناه. أثبت أنه لا يملك حلقة هاملتونية. فسّر لماذا لا نستطيع استخدام نظرية جرينبرج مباشرة لإثبات هذا.

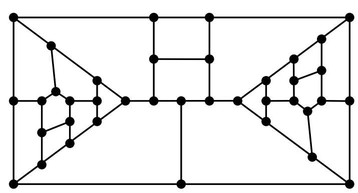


15.3.7. (!) أثبت نظرية جرينبرج باستخدام صيغة أويلر.

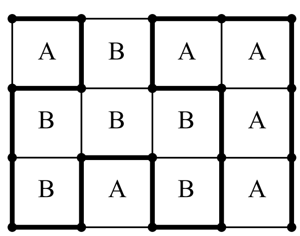
16.3.7. (!) استخدم شرط جرينبرج لتثبت أن بيان جرينبرج (أدناه) ليس هاملتونيًّا.



17.3.7. (!) أصغر بيان سوي مترابط من الدرجة 3 منتظم من الدرجة 3 معروف وليس هاملتونيًّا يملك 38 رأسًا ويظهر في الأسفل. أثبت أن هذا البيان ليس هاملتونيًّا. ([1966] ،Lederberg [1966] Barnette, Bosa'k).



18.3.7. ليكن G البيان الشبكي $P_m \square P_n$. وليكن Q مسارًا هاملتونيًّا من الرأس الموجود على الزاوية اليسرى العلوية إلى الرأس الموجود على الزاوية اليمنى السفلية، كما هو مبين بخط سميك في الشكل أدناه. لاحظ أن Q يجزىء الشبكة إلى مناطق، والتي يكون بعضها مفتوحًا إلى اليسار أو إلى الاتجاه السفلي، في حين تكون المناطق الأخرى مفتوحة إلى اليمين أو إلى الاتجاه العلوي. أثبت أن المساحة الكلية التي عن اليمين فوق (B) تساوي المساحة الكلية للمناطق عن اليسار تحت (A). (Fisher Collins – Krompart – [1994]).

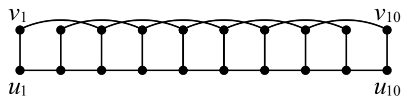


19.3.7. (!) **بيان بيترسون المعمم** (generalized Petersen Graph) $P(n,k)$ هو البيان الذي رؤوسه

$\{u_1, \dots, u_n\}$ و $\{v_1, \dots, v_n\}$، وأضلاعه $\{u_i\ u_{i+1}\}$، $\{u_i\ v_i\}$، و $\{v_i\ v_{i+k}\}$، حيث يكون الجمع بمقياس n. بيان بيترسون نفسه هو $P(5,2)$:

a) أثبت أن البيان الجزئي لـ $P(n,2)$ المحدث من خلال k زوجًا متتاليًا $\{u_i\ ,v_i\}$ يملك حلقة مولدة إذا كان $k \equiv 1 \bmod 3$ و $k \geq 4$.

b) استخدم فرع (a) لتثبت أن $\chi'(P(n,2)) = 3$ إذا كان $n \geq 6$.



20.3.7. (−) ليكن G بيانًا منتظمًا من الدرجة 3. أثبت أنه إذا كان G اتحادًا لحلقتين، فإنه يكون قابلاً للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

21.3.7. (+) " سناركات الزهرة" ليكن G_k و H_k، كما أنشئا في (المثال 13.3.7):

a) أثبت أن G_k قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3.

b) أثبت أن H_k غير قابل للتلوين الضلعي من الدرجة 3 عندما يكون k فرديًّا. (Isaacs [1975])

22.3.7. أثبت أن كل قطع ضلعي لـ $C_t \square K_k$ والذي لا يعزل رأسًا يملك 2_k ضلعًا على الأقل.

23.3.7. (*) أثبت أن تطبيق عمليَة الجداء النقطي (التعريف 12.3.7) على سناركين يعطي سناركًا ثالثًا. (Isaacs [1975]).

24.3.7. (*!) ليكن G_1 و G_2 بيانين. أثبت أنه إذا كان G_1 يملك تدفقًا من الدرجة k_1 لا يساوي صفرًا في أي مكان، و G_2 يملك تدفقًا من الدرجة k_2 لا يساوي صفرًا في أي مكان، فإن $G_1 \cup G_2$ يملك تدفقًا من الدرجة $k_1\ k_2$، وليس صفرًا في أي مكان.

25.3.7. (!) **بيان جزئي نوعي** (Parity subgraph) لـ G هو بيان جزئي H بحيث يكون $d_H(v) \equiv d_G(v) \bmod 2$ لكل $v \in V(G)$. أثبت أن كل شجرة مولدة لبيان مترابط G تحتوي على بيان جزئي نوعي لـ G. (Itai Rodeh -[1978]).

26.3.7. (*) لـ $k \geq 3$، أثبت أن أصغر بيان G مترابط ضلعيًّا من الدرجة 2، وغير تافه، ولا يملك تدفقًا من الدرجة k، وليس صفرًا في أي مكان، يجب أن يكون بسيطًا ومترابطًا من الدرجة 2، ومترابطًا ضلعيًّا من الدرجة 3. (مساعدة: أولاً، استثن العرى والرؤوس التي درجتها 2 واختزلها بافتراضها قوالب، ثُمَّ استثن الأضلاع المتكررة، وأخيرًا، استثن القواطع الضلعية التي حجمها 2. في كل حالة، قارن G ببيان محصول عليه من G من خلال حذف أضلاع أو تقليصها).

27.3.7. (*) أثبت أن كل بيان هاملتوني يملك تدفقًا من الدرجة 4 لا يساوي صفرًا في أي مكان.

28.3.7. (*) أثبت أن كل بيان يخلو من الجسور، ويملك مسارًا هاملتونيًّا، ويملك تدفقًا من الدرجة 5 ليس صفرًا في أي مكان (Jaeger [1978]).

29.3.7. (*) اغمس K_6 على الطارة، وليكن G هو البيان الثنوي. جد تدفقًا من الدرجة 5 على G بحيث لا يساوي هذا التدفق صفرًا في أي مكان.

30.3.7. (*) أثبت أن بيانًا G هو الاتحاد لـ r بيان جزئي زوجي إذا وفقط إذا كان G يملك تدفقًا من الدرجة 2^r ليس صفرًا في أي مكان (Matthews [1978]).

31.3.7. (*) ليكن G بيانًا يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًّا مشكلًا 2^r بيانًا جزئيًّا زوجيًّا. أثبت أن G يملك تدفقًا من الدرجة 2^r ليس صفرًا في أي مكان (Jaeger [1988]).

32.3.7. (*!) عندما نقول إن **توجيهًا من الدرجة 3 مقياسي** (modular 3- orientation) لبيان G فإننا نعني توجيهًا D بحيث $d_D^+(v) \equiv d_D^-(v) \bmod 3$ لكل $v \in v(G)$. أثبت أن كل بيان يخلو من الجسور يملك تدفقًا من الدرجة 3 وليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان يملك توجيهًا من الدرجة 3 مقياسيًّا (Steinberg-Younger [1989]).

33.3.7. (*) تمييز للتدفقات من الدرجة k والتي ليست صفرًا في أي مكان. ليكن G بيانًا يخلو من الجسور، وليكن D توجيهًا لـ G، وليكن a و b عددين صحيحين موجبين. أثبت أن العبارات الآتية متكافئة. (Hoffman [1958]):

a) $\frac{a}{b} \le \frac{|[S,\bar{S}]|}{|[\bar{S},S]|} \le \frac{b}{a}$ لكل مجموعة جزئية فعلية غير خالية من الرؤوس S.

b) يملك G تدفقًا صحيحًا باستخدام أوزان في الفترة $[a,b]$.

c) يملك G تدفقًا قيمته عدد حقيقي باستخدام أوزان في الفترة $[a,b]$.

34.3.7. (*) جد غطاءات مزدوجة حلقية للبيانات $C_m \vee K_1$ و $C_m \vee 2K_2$ و $C_m \vee K_2$.

35.3.7. جد الغطاءات المزدوجة الحلقية بأقل عدد من الحلقات لكل بيان بسيط منتظم من الدرجة 3 على 6 رؤوس.

36.3.7. (-*) ليكن G بيان بيترسون. جد غطاءً مزدوجًا حلقيًّا له والذي عناصره ليست جميعها حلقات خماسية. وجد غطاءً مزدوجًا له كذلك يتكون من عوامل ذات الدرجة 1. (مساعدة: خذ في الحسبان رسمًا لـ G يملك حلقة خارجية على 9 رؤوس). (تعليق: لقد خمن فلكرسون [1971] (Fulkerson) أن كل بيان مكعب يخلو من الجسور يملك غطاءً مزدوجًا يتكون من 6 مواءمات تامة).

37.3.7. (*) أثبت أن أي حلقتين على 6 رؤوس في بيان بيترسون يجب أن تشتركا في ضلعين على الأقل. واستنتج أن بيان بيترسون الذي لا يملك CDC يتكون من خمس حلقات على 6 رؤوس. استخدم هذا والتمرين 20.3.7 لتستنتج أن بيان بيترسون الذي لا يملك CDC يتكون من حلقات زوجية. (C.Q. Zhang)

38.3.7. (*!) يكون غطاءً مزدوجًا حلقيًّا **قابلاً للتوجيه** (orientable) إذا أمكن توجيه حلقاته كحلقات موجهة بحيث يكون كل ضلع محتوى في حلقتين، فإن الحلقتين اللتين تحويانه يجتازانه في اتجاهين متعاكسين. ويكون البيان الموجه زوجيًّا إذا كان $d^-(v) = d^+(v)$ لكل رأس v:

a) افترض أن G يملك تدفقًا من الدرجة k غير سالب (D, f). أثبت أنه يمكن التعبير عن f على الشكل $\sum_{i=1}^{k-1} f_i$، حيث إن كل (D, f_i) هو تدفق غير سالب الدرجة 2 على G. (مساعدة: استخدم الاستقراء على k) (Little – Tutte – Younger [1988]).

b) يملك بيان G تدفقًا (D,f) موجبًا من الدرجة k إذا وفقط إذا كان D هو الاتحاد لـ $k - 1$ بيانًا موجهًا زوجيًّا بحيث يظهر كل ضلع e في D بالضبط في $f(e)$ منها (Little – Tutte – Younger [1988]).

c) أثبت أن بيانًا G يملك تدفقًا من الدرجة 3 ليس صفرًا في أي مكان إذا وفقط إذا كان G يملك غطاءً مزدوجًا حلقيًّا قابلاً للتوجيه، ومُشَكِّلاً ثلاثة بيانات جزئية زوجية (Tutte [1949]).

39.3.7. (*) ليكن G بيانًا يملك CDC مُشَكَّلاً من أربعة بيانات جزئية زوجية. أثبت أن G أيضًا يملك CDC مُشَكَّلاً من ثلاثة بيانات جزئية زوجية. (مساعدة: استخدم الفروقات التماثلية).

40.3.7. (*) في بيان بيترسون، أثبت أن الحل لمسألة ساعي البريد الصيني يملك طولاً كليًّا 20، لكن الطول الكلي الأصغر للحلقات التي تغطي بيان بيترسون هو 21.

41.3.7. (*) لتكن M مواءمة تامة في بيان بيترسون. أثبت عدم وجود قائمة من الحلقات في بيان بيترسون حيث إنها معًا تغطي كل ضلع في M بالضبط مرتين في حين تغطي الأضلاع الأخرى جميعها مرة واحدة بالضبط. (Seymour [1979b], Itai- Rodeh [1978]).

42.3.7. (*) ليكن G بيانًا يحوي ممرًّا غطائيًّا (بمعنى، حلّ أمثل لمسألة ساعي البريد الصيني) يتفكك إلى حلقات. أثبت أن G يملك غطاءً حلقيًّا طوله الكلي $e(G) + n(G) - 1$ على الأكثر. وحدد الطول الأصغر لغطاء حلقي لـ $K_{3,t}$ بدلالة عدد كل من الأضلاع و الرؤوس.